『相転移と臨界現象の数理』補足資料
公開：2015 年 6 月 9 日
最終更新日：2015 年 6 月 9 日

チェスボード評価を使った (B.34) の導出の詳細

以下では格子，磁場 h_x, ξ_x などをすべて固定して話を進める．また，簡単のため，ξ 以外の引数はすべて省略する．

評価の概略は本文でも示したが，以下の通り．

(1) スピンの測度が有限区間に support をもつようなモデルによってまず，元のモデルを近似する

(2) この「有限区間 support model」に対して，非積分関数 $\tilde{F}(\varphi_x+\xi_x)/\tilde{F}(\varphi_x)$ を多項式近似する．

(3) この「有限区間 support model の非積分関数を多項式近似したもの」に対して，chessboard estimate を用いて，欲しい不等式の原型を得る．

(4) 得た不等式の右辺にて多項式近似を元に戻し，非積分関数を，元々欲しかった $\tilde{F}(\varphi_x+\xi_y)/\tilde{F}(\varphi_x)$ にする．

(5) さらにこの後，「有限区間 support」の近似を元に戻して，元々欲しかった不等式の右辺を得る

また，実際には (4), (5) をまとめて扱うので，(B.34) を得るというよりも，(B.34) をとばして (B.35) に跳ぶという仕組みになっている．

以下，それぞれのステップの詳細を述べる．

(1) 「有限区間 support model」による近似．

まず（後から決める）大きな数 $M>0$ を固定し，$Z_L^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\xi})$ を二つに分ける：

$$Z_L^{\mathrm{P}}(\boldsymbol{\xi}) = Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + Z^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \tag{1}$$

ここで（local に $\tilde{H}=\dfrac{\beta}{2}\displaystyle\sum_{\{x,y\}\in\overline{\mathcal{B}}_L}|\varphi_x-\varphi_y|^2$ を定義した）

$$Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) := \int \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi}\, e^{-\tilde{H}} \prod_{x\in\Lambda_L} \tilde{F}(\varphi_x+\xi_x)\, I[\forall x\in\Lambda_L,\, |\varphi_x|\le M] \tag{2}$$

$$Z^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) := \int \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi}\, e^{-\tilde{H}} \prod_{x\in\Lambda_L} \tilde{F}(\varphi_x+\xi_x)\, I[\exists x\in\Lambda_L,\, |\varphi_x|> M] \tag{3}$$

である．$Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi})$ が有限区間 support model，$Z^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ はこの近似の誤差．本文では $Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi})$ を $\bar{Z}_L^{\mathrm{P}}(\beta,h;\boldsymbol{\xi})$ と書いた．

以下，M を十分大きく取ることによって，$Z^{(2)}(\boldsymbol{\xi})$ をいくらでも小さくできることを示す．実際，（非常に大ざっぱな評価であるが $\tilde{H}\geq 0$ を用いて）

$$
\begin{aligned}
Z^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) &\leq \int \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi} \prod_{x\in\Lambda_L} \tilde{F}(\varphi_x+\xi_x)\, I[\exists x\in\Lambda_L\,|\varphi_x|>M] \\
&\leq \sum_{x\in\Lambda_L} \int \mathcal{D}\boldsymbol{\varphi}\, I[|\varphi_x|>M] \prod_{y\in\Lambda_L} \tilde{F}(\varphi_y+\xi_y) \\
&= \sum_{x\in\Lambda_L} \int d\varphi_x\, I[|\varphi_x|>M]\, \tilde{F}(\varphi_x+\xi_x) \prod_{y\neq x} \int d\varphi_y \tilde{F}(\varphi_y+\xi_y) \\
&= \sum_{x\in\Lambda_L} \int d\varphi_x\, I[|\varphi_x-\xi_x|>M]\, \tilde{F}(\varphi_x) \prod_{y\neq x} \int d\varphi_y \tilde{F}(\varphi_y)
\end{aligned} \tag{4}
$$

である（最後のところでは $\varphi'_y=\varphi_y+\xi_y$ で積分を書き直し，φ'_y を改めて φ_y と書いた）．

さて，各スピンについての積分測度は

$$
d\varphi_y \tilde{F}(\varphi_y) = d\mu_0(\varphi_y)\, \exp\bigl\{d\beta|\varphi_y|^2+\beta\, h_y\cdot\varphi_y\bigr\} \tag{5}
$$

である．この測度に関する積分をおさえるため，測度に関する仮定

$$
\text{すべての } a>0 \text{ に対して} \quad I_a := \int d\mu_0(\varphi_x)\, e^{a|\varphi_x|^2} < \infty \tag{6}
$$

を用いる．以下では $a>0$ を

$$
4(a-d\beta)\geq \beta^2 \tag{7}
$$

を満たすように取って，$d\varphi_y\tilde{F}(\varphi_y)$ を以下のように書き直す：

$$
\begin{aligned}
d\varphi_y \tilde{F}(\varphi_y) &= d\mu_0(\varphi_y)\, \exp\bigl\{a|\varphi_y|^2\bigr\} \\
&\quad \times \exp\bigl\{d\beta|\varphi_y|^2+\beta\, h_y\cdot\varphi_y - a|\varphi_y|^2\bigr\}
\end{aligned} \tag{8}
$$

(7) のように a が十分に大きいなら，最後の指数関数の肩は

$$
\begin{aligned}
&d\beta|\varphi_y|^2+\beta\, h_y\cdot\varphi_y - a|\varphi_y|^2 \leq (d\beta-a)|\varphi_y|^2+\beta\,|h_y|\,|\varphi_y| \\
&= -(a-d\beta)\Bigl\{|\varphi_y|-\frac{\beta|h_y|}{2(a-d\beta)}\Bigr\}^2+\frac{\beta^2|h_y|^2}{4(a-d\beta)} \\
&\leq \frac{\beta^2|h_y|^2}{4(a-d\beta)} = |h_y|^2
\end{aligned} \tag{9}
$$

と押さえられるので，$y \neq x$ に対しては

$$\int d\varphi_y \tilde{F}(\varphi_y) \le e^{|h_y|^2} \int d\mu_0(\varphi_y)\, \exp\bigl\{a|\varphi_y|^2\bigr\} = e^{|h_y|^2}\, I_a \tag{10}$$

が結論できる．

また，$y = x$ に対しても同様の議論により

$$\begin{aligned}
&\int d\varphi_x \tilde{F}(\varphi_x)\, I[|\varphi_x - \xi_x| > M] \\
&\le e^{|h_x|^2} \int d\mu_0(\varphi_x)\, e^{a|\varphi_x|^2}\, I[|\varphi_x - \xi_x| > M] \\
&= e^{|h_x|^2} \int d\mu_0(\varphi_x)\, e^{2a|\varphi_x|^2}\, I[|\varphi_x - \xi_x| > M]\, e^{-a|\varphi_x|^2}
\end{aligned} \tag{11}$$

とできるが，M が十分大きい（例：$M > 2|\xi_x|$）ならば

$$I[|\varphi_x - \xi_x| > M]\, e^{-a|\varphi_x|^2} \le e^{-a(M-|\xi_x|)^2} \le e^{-aM^2/4} \tag{12}$$

などとできる．従って，$y = x$ での積分も

$$\int d\varphi_x \tilde{F}(\varphi_x)\, I[|\varphi_x - \xi_x| > M] \le I_{2a}\, \exp\bigl\{|h_x|^2 - aM^2/4\bigr\} \tag{13}$$

と押さえられる．最終的に (4) より

$$Z^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \le \epsilon_1 := |\Lambda_L|\, (I_a)^{|\Lambda_L|-1}\, I_{2a}\, \exp\Bigl\{\sum_x |h_x|^2 - aM^2/4\Bigr\} \tag{14}$$

という評価が得られた．Λ_L や h_x などはすべて固定されているので，M を好きなように大きくとれば，ϵ_1 はいくらでも小さくできる．

(2) 「有限区間 support model」での多項式近似．

では $Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi})$ を考えよう．これはすべての φ_x の support が $[-M, M]^N$ に限定されているモデルの分配函数で，以下のように書き直せる：

$$\begin{aligned}
Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) &= \int \prod_x \Bigl\{d\varphi_x\, \tilde{F}(\varphi_x + \xi_x)\, I[|\varphi_x| \le M]\Bigr\}\, e^{-\tilde{H}} \\
&= \int \prod_x \Bigl\{d\varphi_x\, \tilde{F}(\varphi_x)\, I[|\varphi_x| \le M]\Bigr\}\, e^{-\tilde{H}} \times \prod_y \frac{\tilde{F}(\varphi_y + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_y)} \\
&= \Bigl\langle \prod_y \frac{\tilde{F}(\varphi_y + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_y)} \Bigr\rangle_M \times Z_M(\mathbf{0})
\end{aligned} \tag{15}$$

ここで

$$Z_M(\mathbf{0}) := \int \prod_x \Big\{ d\varphi_x \, \tilde{F}(\varphi_x) \, I[|\varphi_x| \le M] \Big\} \, e^{-\tilde{H}} \tag{16}$$

$$\langle \cdots \rangle_M := \frac{1}{Z_M(\mathbf{0})} \int \prod_x \Big\{ d\varphi_x \, \tilde{F}(\varphi_x) \, I[|\varphi_x| \le M] \Big\} \, e^{-\tilde{H}} (\cdots) \tag{17}$$

を定義した．$Z_M(\mathbf{0})$ は $Z_L^{\mathrm{P}}(\beta, h; \mathbf{0}) = Z(\mathbf{0})$ の cut-off version である．

さて，$\langle \cdots \rangle_M$ の期待値の中身は，$|\varphi_x| \le M$ という有界集合上でのみ積分されている．このような有界集合上では Weierstrass の多項式近似定理により，期待値の中身を多項式でいくらでも精度よく近似することができる．つまり任意の $\delta > 0$ に対して[*1]：

$$|\varphi_y| \le M \quad \text{ならば} \quad \left| \frac{\tilde{F}(\varphi_y + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_y)} - P_y(\varphi_y) \right| \le \delta \tag{18}$$

これを用いて期待値の中身を $\prod_y P_y(\varphi_y)$ で近似することを考える．任意の正の実数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ と $b_1, b_2, \ldots, b_n$ に対して不等式

$$\left| \prod_{j=1}^n a_j - \prod_{j=1}^n b_j \right| \le n \times \big(\max_j |a_j - b_j| \big) \times \big\{ \max_j (|a_j| \vee |b_j|) \big\}^{n-1} \tag{19}$$

が成り立つ[*2]．そこで

$$A := \max_{x \in \Lambda_L} \max_{|\varphi| \le M} \frac{\tilde{F}(\varphi + \xi_x)}{\tilde{F}(\varphi)} \tag{20}$$

を定義すると，($P_y(\varphi) \le A + \delta$ なので)

$$\left| \prod_y \frac{\tilde{F}(\varphi_y + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_y)} - \prod_y P_y(\varphi_y) \right| \le |\Lambda_L| \times \delta \times (A + \delta)^{|\Lambda_L| - 1} \tag{21}$$

が成り立つ．つまり (15) 右辺の期待値に対しては

$$\left\langle \prod_y \frac{\tilde{F}(\varphi_y + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_y)} \right\rangle_M = \left\langle \prod_y P_y(\varphi_y) \right\rangle_M + \mathcal{E}_2, \tag{22}$$

$$|\mathcal{E}_2| \le \epsilon_2 := |\Lambda_L| \times \delta \times (A + \delta)^{|\Lambda_L| - 1} \tag{23}$$

[*1] chessboard estimate を用いるために積の形は保ちたい．なので，積に対してではなく，個々の $\tilde{F}(\varphi + \xi_y)$ に対する多項式近似を行う

[*2] お馴染みの $a_1a_2a_3 - b_1b_2b_3 = a_1a_2a_3 - b_1a_2a_3 + b_1a_2a_3 - b_1b_2a_3 + b_1b_2a_3 - b_1b_2b_3$ という変形をすればいい．

が成立することがわかる．このように，問題の (15) 右辺の期待値は，期待値の中身を多項式にしてもいくらでも精度よく近似できることがわかった．

(3) 「有限区間 support model」の多項式近似における chessboard estimate.

ここまでくれば簡単だ．(17) の期待値 $\langle\cdots\rangle_M$ は各スピンの support を制限しているだけなので，やはり RP であり，chessboard estimate が成り立つ．従って，期待値の中身が多項式の積である (22) 右辺の期待値に対しては

$$\left\langle \prod_{y\in\Lambda_L} P_y(\varphi_y) \right\rangle_M \le \prod_{y\in\Lambda_L} \left\{ \left\langle \prod_{x\in\Lambda_L} P_y(\varphi_x) \right\rangle_M \right\}^{1/|\Lambda_L|}. \tag{24}$$

(4) この右辺をできるだけ狙っているものに戻して行く．まず，多項式近似に関しては (21) において全ての ξ_y が等しい場合を考えると

$$\left| \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x+\xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} - \prod_x P_y(\varphi_x) \right| \le \epsilon_2 \tag{25}$$

が成り立つ．従って，(22) と同様に

$$\left| \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x+\xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M - \left\langle \prod_x P_y(\varphi_x) \right\rangle_M \right| \le \epsilon_2, \tag{26}$$

を得る．これから直ちに (19) を用いて

$$\begin{aligned} &\left| \prod_y \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x+\xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M - \prod_y \left\langle \prod_x P_y(\varphi_x) \right\rangle_M \right| \\ &\le |\Lambda_L| \times \epsilon_2 \times (A+\delta)^{|\Lambda_L|-1} =: \epsilon_3 \end{aligned} \tag{27}$$

を得る．

$a > b > 0$ とする．N を正整数とし，関数 $x^{1/N}$ が上に凸であることから，

$$a^{1/N} - b^{1/N} \le \frac{1}{N}(a-b)\, b^{(1/N)-1} \tag{28}$$

が成り立つことに注意すると，(27) より

$$\prod_y \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x+\xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M^{1/|\Lambda_L|} = \prod_y \left\langle \prod_x P_y(\varphi_x) \right\rangle_M^{1/|\Lambda_L|} + \mathcal{E}_4, \tag{29}$$

$$|\mathcal{E}_4| \le \epsilon_4 := \frac{1}{|\Lambda_L|} \epsilon_3 \times \left\{ \prod_y \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x+\xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M - \epsilon_3 \right\}^{(1/|\Lambda_L|)-1} \tag{30}$$

がわかる．

(5) 以上の (1)，(14)，(15), (22), (29) を組み合わせると

$$
\begin{aligned}
Z(\boldsymbol{\xi}) &= Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + Z^{(2)}(\boldsymbol{\xi}) \le Z^{(1)}(\boldsymbol{\xi}) + \epsilon_1 \\
&= Z_M(\mathbf{0}) \left\langle \prod_y \frac{\tilde{F}(\varphi_y + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_y)} \right\rangle_M + \epsilon_1 \\
&= Z_M(\mathbf{0}) \left\langle \prod_y P_y(\varphi_y) \right\rangle_M + Z_M(\mathbf{0})\, \mathcal{E}_2 + \epsilon_1 \\
&\le Z_M(\mathbf{0}) \prod_{y\in\Lambda_L} \left\{ \left\langle \prod_{x\in\Lambda_L} P_y(\varphi_x) \right\rangle_M \right\}^{1/|\Lambda_L|} + Z_M(\mathbf{0})\, \mathcal{E}_2 + \epsilon_1 \\
&\le Z_M(\mathbf{0}) \prod_y \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M^{1/|\Lambda_L|} + Z_M(\mathbf{0})\, (-\mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_2) + \epsilon_1 \qquad (31)
\end{aligned}
$$

を得る．

さて，(31) 右辺第一項は

$$
Z_M(\mathbf{0}) \prod_y \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M^{1/|\Lambda_L|} = \prod_y \left\{ Z_M(\mathbf{0}) \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M \right\}^{1/|\Lambda_L|} \qquad (32)
$$

とかけるが，括弧の中身を定義に戻って書くと

$$
\begin{aligned}
&Z_M(\mathbf{0}) \left\langle \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \right\rangle_M \\
&= \int \prod_z \left\{ d\varphi_z \tilde{F}(\varphi_z)\, I[|\varphi_z| \le M] \right\} e^{-\tilde{H}} \prod_x \frac{\tilde{F}(\varphi_x + \xi_y)}{\tilde{F}(\varphi_x)} \\
&= \int \prod_x \left\{ d\varphi_x \tilde{F}(\varphi_x + \xi_y)\, I[|\varphi_x| \le M] \right\} e^{-\tilde{H}} \qquad (33)
\end{aligned}
$$

となっていて，これは $|\varphi_x| \le M$ の制限を取っ払うと大きくなる：

$$
\le \int \prod_x \left\{ d\varphi_x \tilde{F}(\varphi_x + \xi_y) \right\} e^{-\tilde{H}} = Z(\mathbf{0}) \qquad (34)
$$

(最後の等式は $\varphi'_x = \varphi + \xi_y$ と平行移動するとわかる．) 従って最終的に (31) から

$$
Z(\boldsymbol{\xi}) \le Z(\mathbf{0}) + Z_M(\mathbf{0})\, (-\mathcal{E}_4 + \mathcal{E}_2) + \epsilon_1 \qquad (35)
$$

が得られた．

さて，以上を振り返ってみると，まず $M > 0$ を大きく取ることによって ϵ_1 はいくらでも小さくできる．また，（この M を固定した上で）多項式近似の精度を上げることによって，多項式近似に出てきた δ と ϵ_2 をいくらでも小さくできる．さらにこれらを小さくすれば ϵ_3, ϵ_4 もいくらでも小さくすることが可能である．

つまり，$M > 0$ を大きく取り，多項式近似の精度をそれに合わせて（もちろん，格子の大きさや ξ_x の大きさなどにも負けないように）良くすることによって，(35) の誤差項をいくらでも小さくできる．つまり，$Z(\boldsymbol{\xi}) \le Z(\mathbf{0})$，すなわち我々の求める不等式 (B.30) が証明されたことになる． ▮