解析力学問題

6/30/2002

1.　[**角運動量の基礎**]　半径 R の円盤がある。円盤は、円盤の中心をとおり円盤面に垂直な固定軸のまわりを自由に回転することができる。この軸のまわりの円盤の慣性モーメントを I とする。

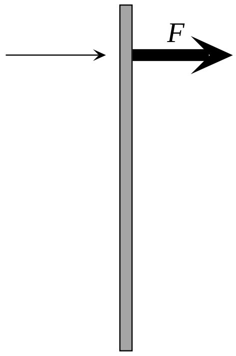
はじめ円盤は静止している。

質量 m の小さな虫が円盤の外周にとまっている。虫が、円盤の外周を、円盤に対する相対速度 v で一方向に歩きはじめた。そして、円盤を一周して（円盤上で）出発点に戻ったところで歩くのをやめた。

虫が歩いている間の、虫と円盤の運動を調べ、虫が歩き終わったあと、円盤はどの方向にどれだけ回転しているかを求めよ。

2.　[**角運動量の基礎**]　講義中に出題した問題「自由に回転できる椅子にすわって、足を床から浮かし、腕を中空で動かすだけで体の向きを変えられるか」についても角運動量や慣性モーメントの考えを使って考察せよ。

3.　[**スイートスポットの問題**]　質量 M が一様に分布した長さ L の剛体棒がある。（バットと思ってください。）剛体棒の一端から ℓ の位置（$\ell < L/2$ である）にボールがあたり、棒に垂直な力 F を及ぼした。

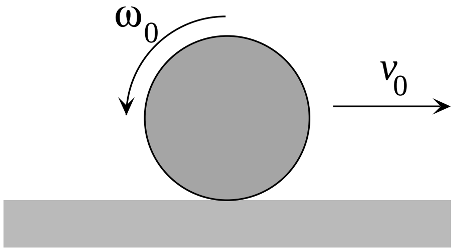


(a) ボールが当たった直後の重心の加速度を求めよ。
(b) ボールが当たった直後の棒の（重心のまわりの）角速度の変化率 $\dot{\omega}$（加角速度）を求めよ。
(c) 以上の結果から、ボールが当たったのとは反対側の棒の端の点のボールが当たった直後の加速度を求めよ。

(d) 前問で求めた加速度が 0 になるような ℓ を求めよ。これが、ボールをバットに当てた際に、手元が動かないような「スイートスポット」に相当する。

4. [**すべりながら転がる球**] 水平な床の上を転がる半径 R の一様な剛体球の問題を考える。剛体球の重心の速度を v、（中心のまわりの）角速度を ω とする。ただし、右向きを速度の正の向きとし、右回り（時計回り）を回転の正の向きとする。剛体球の質量を M、慣性モーメントを I とする。

初期状態では、$v = v_0 > 0,\ \omega = -\omega_0 < 0$ であった。



床に対する剛体球表面のすべり速度を

$$v_{\text{slip}} = v - R\omega \tag{1}$$

とする。すべり速度が有限である限り、剛体球にはすべり速度とは反対の方向に一定の摩擦力 F が働くとする。すべり速度がちょうど 0 になったとき以降、剛体球はすべらずに転がるようになる。

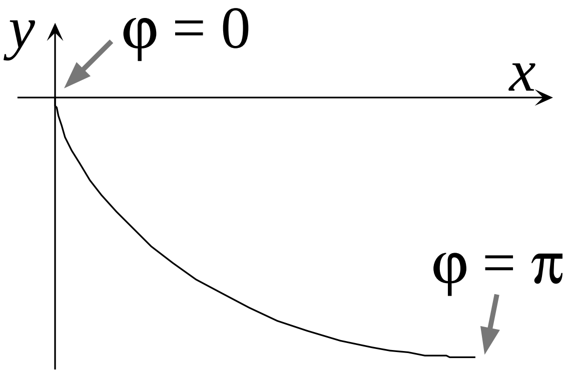
(a) すべり速度が 0 になるまでの間の、$v,\ \omega,\ v_{\text{slip}}$ を求めよ。
(b) すべり速度が 0 になったとき $v < 0$ となっている（つまり、球が戻ってくる）ために $v_0,\ \omega_0$ が満たすべき条件を求めよ。

5. [**サイクロイドに沿った落下運動**] 以前の講義で、ものが最も早く滑り落ちる曲線がサイクロイドであることを見た。せっかくなので、サイクロイドに沿った落下運動を Lagrange 形式の力学を利用して解析しよう。

x, y を直交座標とし、パラメター $0 \le \varphi \le \pi$ を使って

$$\begin{cases} x = a(\varphi - \sin\varphi) \\ y = a(\cos\varphi - 1) \end{cases} \tag{2}$$

と表される曲線（サイクロイド）をとる。これは、$(0,0)$ と $(a\pi, -2a)$ を結ぶ曲線であり、その概形は下図のとおり。



この曲線上に摩擦なく拘束され、また、y 軸負の方向に一様な重力（重力加速度を g とする）を受けて運動する質量 m の粒子がある。

(a) φ を一般化座標として、この粒子の Lagrangian $L(\varphi, \dot{\varphi})$ を書け。
(b) ここから、 φ についての運動方程式（Lagrange 方程式）を求めよ。
(c) 新しい変数 $s = 2a\sqrt{2(\cos\varphi + 1)}$ を導入する。（余裕があれば、これが、最下点 $(a\pi, -2a)$ から $(a(\varphi - \sin\varphi), a(\cos\varphi - 1))$ までの、サイクロイドに沿ってはかった距離になっていることを確認せよ。）s を一般化座標とすると、Lagrangian が

$$L(s, \dot{s}) = \frac{m}{2}(\dot{s})^2 - \frac{mg}{8a}s^2 + 2mga \tag{3}$$

となることを示せ。
(d) ここから、 s についての運動方程式（Lagrange 方程式）を求めよ。
(e) 粒子をサイクロイドの頂上 $(0, 0)$ から、初速 0 で、サイクロイドに沿って落下させるとき、最下点 $(a\pi, -2a)$ に達するのに要する時間を求めよ。
(f) サイクロイドのかわりに、 $(0, 0)$ と $(a\pi, -2a)$ を結ぶ線分を考え、同じように初速 0 での落下時間を求め、上の結果と比較せよ。

6. [**回転する放物線上の粒子**] 放物線 $y = ax^2$ （a は正の定数）の上になめらかに束縛された質量 m の粒子を考える。（たとえば、針金で放物線をつくり、ビーズの穴に通す。）粒子には y 軸負の方向に一様な重力（重力加速度を g とする）がはたらく。

この放物線を y 軸を中心にして一定の角速度 ω で回転させる。

(a) x を一般化座標として、この粒子の Lagrangian を書け。（x は空間に固定した座標ではなく、放物線とともに回転するものとする。）
(b) ここから、 x についての運動方程式（Lagrange 方程式）を求めよ。

(c) ω をうまく選べば、放物線上のどの場所においても、粒子を静止させておけることを示せ。

7. [**放物面上に束縛された粒子**] (x, y, z) を 3 次元の直交座標とする。$\alpha > 0$ を定数として、$z = \alpha(x^2 + y^2)$ で指定される放物面上に滑らかに拘束された質量 m の粒子の運動を考察しよう。粒子には z-軸負の方向に mg の重力が働く。

$r \geq 0$ と $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす r, θ を用いて、放物面上の位置を $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって指定する。(z-座標の値は自動的に決まることに注意。)

(a) 粒子の位置を $(x(t), y(t), z(t))$ と表すとき、時間微分 $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ を $r(t)$, $\dot{r}(t)$, $\theta(t)$, $\dot{\theta}(t)$ で表せ。(引数 t は省略してよい。) その結果を用いて、運動エネルギー $K = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ を r, $\dot{r}$, θ, $\dot{\theta}$ で表せ。

(b) r, θ を一般化座標としたときの Lagrangian を求めよ。

(c) r, θ に対応する一般化運動量 p_r, p_θ を求めよ。

(d) θ についての Lagrange の運動方程式を求め、初期条件から決まる定数 J によって

$$\dot{\theta}(t) = \frac{J}{m\{r(t)\}^2} \tag{4}$$

と書ける事を示せ。

(e) r についての Lagrange の運動方程式を書け。小問 d の結果を使って、これを r のみの方程式に直せ。

(f) 上の方程式には、r が一定値をとる（壁に沿ってくるくる回る）ような解がある。そのような解において一定値 r と J が満たす関係を求めよ。また、このとき（やはり一定の）角速度 $\dot{\theta}$ を求めよ。