2次元以上の超立方格子上の $S=\frac{1}{2}$ XY 模型 および XYZ 模型は 非自明な局所保存量をもたない

田崎晴明

Naoto Shiraishi and Hal Tasaki,
“The S=1/2 XY and XYZ models on the two or higher dimensional hypercubic lattice do not possess nontrivial local conserved quantities” arXiv:2412.18504

背景　量子多体系の数理的な研究

厳密解　可積分系のみが対象

一般的な厳密な結果　可/非可積分系を区別しない

熱平衡化・量子カオスなど、非可積分系のみで期待される重要な現象・性質

$S = 1/2$ XYZ-h 量子スピン鎖は非自明な局所保存量を持たないことの厳密な証明 Shiraishi 2019

具体的で標準的な量子多体系のモデルが非可積分であること（既知の可積分系とは本質的に異なる性質を示すこと）が厳密に証明された初めての例

- ☑ 局所保存量の不在は重要で非自明な情報
- ☑ 可積分性と保存量との関係を解明する第一歩
- ☑ 非可積分系ならではの性質の解析のための第一歩

初歩的な例

$S=1/2$ **XX 鎖** $\hat{H}=-\sum_{u=1}^{L}(\hat{X}_u\hat{X}_{u+1}+\hat{Y}_u\hat{Y}_{u+1}+h\hat{X}_u)$

$h=0$ の場合 Lieb, Schultz, Mattis 1961

Joradan-Wigner 変換により自由フェルミオンと等価

多くの局所保存量が存在 $[\hat{H},\hat{Q}_k]=[\hat{H},\hat{Q}'_k]=0$

$$\hat{Q}_1=\sum_{u=1}^{L}\hat{Z}_u \qquad \hat{Q}_2=\hat{H}=-\sum_{u=1}^{L}(\hat{X}_u\hat{X}_{u+1}+\hat{Y}_u\hat{Y}_{u+1})$$

$$\hat{Q}_k=\sum_{u=1}^{L}(\hat{X}_u\hat{Z}_{u+1}\cdots\hat{Z}_{u+k-2}\hat{X}_{u+k-1}+\hat{Y}_u\hat{Z}_{u+1}\cdots\hat{Z}_{u+k-2}\hat{Y}_{u+k-1})$$

$$\hat{Q}'_k=\sum_{u=1}^{L}(\hat{X}_u\hat{Z}_{u+1}\cdots\hat{Z}_{u+k-2}\hat{Y}_{u+k-1}-\hat{Y}_u\hat{Z}_{u+1}\cdots\hat{Z}_{u+k-2}\hat{X}_{u+k-1})$$

$k=2,3,\ldots$

$h\neq 0$ の場合 Yamaguchi, Chiba, Shiraishi 2024

最大幅が $L/2$ 以下の局所保存量はハミルトニアンのみ

宣伝 このトピックについての大学院生向け講義動画

Hal Tasaki "Integrable and non-integrable quantum spin chains" (on YouTube)

Advanced Topics in Statistical Physics by Hal Tasaki

主要な定理 ($d \geq 2$)

定理 **最大幅が** $3 \leq k \leq \frac{L}{2}$ **の局所保存量は存在しない**

定理 **最大幅が** $k = 2$ **の局所保存量は** $\hat{Q} = \eta \hat{H} + \hat{Q}_1$ **に限られる（**$\hat{Q}_1$ **は各点のパウリ演算子の線形結合）**

斜め磁場イジング模型についても同様の定理

Y. Chiba, "Proof of absence of local conserved quantities in two- and higher-dimensional quantum Ising models" (2024)

d 次元（$d \geq 2$）超立方格子上の最近接で一様な相互作用の $S = 1/2$ 量子スピン系は、古典イジング模型以外は、非自明な局所保存量を持たない

これらのモデルは、ほぼ確実に「非可積分」（厳密には解けない）

証明のアイディア 2/3

第一段階 幅が $k+1$ の積についての基本方程式

$k=3$

$\hat{\mathsf{A}}$
X
YZY

$\hat{\mathsf{A}}'$
X
XZX

$\hat{\mathsf{B}}$
X
YZZX

$\hat{\mathsf{B}}'$
X
XZYZ

$[\hat{X}_u \hat{X}_{u'}, \hat{\mathsf{A}}] = 2\mathrm{i}\hat{\mathsf{B}}$ $[\hat{Y}_v \hat{Y}_{v'}, \hat{\mathsf{A}}'] = -2\mathrm{i}\hat{\mathsf{B}}$ $[\hat{Z}_{u'} \hat{Z}_{u''}, \hat{\mathsf{A}}'] = 2\mathrm{i}\hat{\mathsf{B}}'$

$\hat{\mathsf{B}}$ についての基本方程式

$$2\mathrm{i}J_{\mathrm{X}}\, q_{\mathsf{A}} - 2\mathrm{i}J_{\mathrm{Y}}\, q_{\mathsf{A}'} = 0$$

$\hat{\mathsf{B}}'$ についての基本方程式

$$2\mathrm{i}J_{\mathrm{Z}}\, q_{\mathsf{A}'} = 0$$

$$q_{\mathsf{A}} = \frac{J_{\mathrm{Y}}}{J_{\mathrm{X}}}\, q_{\mathsf{A}'}$$

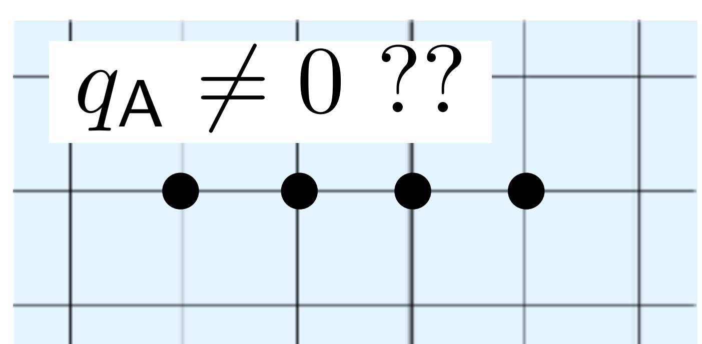
$q_{\mathsf{A}} = 0$

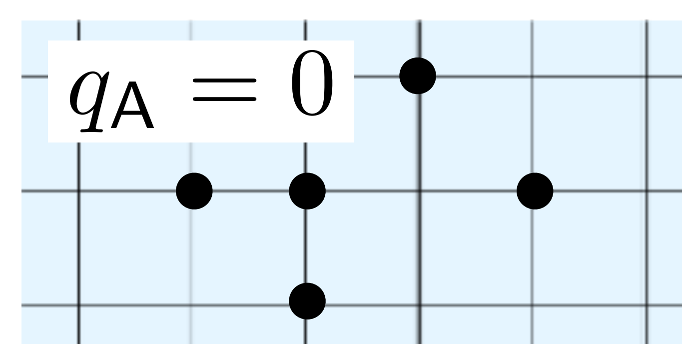
$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$

$\mathrm{Wid}_1 \hat{\mathsf{A}} = k$ **なら** $\mathrm{Supp}\hat{\mathsf{A}} = \{u, u+e_1, \ldots, u+(k-1)e_1\}$

でない限りは $q_{\mathsf{A}} = 0$

1次元の問題に還元





$\mathbb{Z}^d$上の系の演算子の成長と虚時間発展($d \geq 2$)

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{u,v\in\mathbb{Z}^d \\ (|u-v|=1)}} \{J_{\mathrm{X}}\,\hat{X}_u\hat{X}_v + J_{\mathrm{Y}}\,\hat{Y}_u\hat{Y}_v + J_{\mathrm{Z}}\,\hat{Z}_u\hat{Z}_v\} - \sum_{u\in\mathbb{Z}^d} \{h_{\mathrm{X}}\,\hat{X}_u + h_{\mathrm{Y}}\,\hat{Y}_u + h_{\mathrm{Z}}\,\hat{Z}_u\}$$

$$J_{\mathrm{X}} \neq 0,\ J_{\mathrm{Y}} \neq 0$$

演算子の時間発展

$$\hat{X}_o(t) = e^{\mathrm{i}\hat{H}t}\hat{X}_o e^{-\mathrm{i}\hat{H}t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\mathrm{i}t)^m}{m!}\mathcal{L}^m(\hat{X}_o) \qquad \mathcal{L}(\hat{A}) = [\hat{H}, \hat{A}]$$

モーメント μ_{2n} の成長

$\mathcal{L}^m(\hat{X}_o) = \mu_m\hat{X}_o +$ 他のパウリ演算子の積の線形結合

$\mu_m = 0$（ m が奇数のとき ）

予想 universal operator growth hypothesis

$$\mu_{2n} \sim \begin{cases} (n!)^2\,\alpha^n & \text{カオス系（非可積分系）} \\ n!\,\alpha & \text{相互作用する可積分系} \\ \alpha^n & \text{自由粒子系} \end{cases}$$

Parker, Cao, Avdoshkin, Scaffidi, Altman 2019

まとめと課題

- d 次元（$d \geq 2$）超立方格子上の $S = 1/2$ XY あるいは XYZ 量子スピン系は（ハミルトニアンと磁化以外の）局所保存量をもたない この系は「非可積分」
- 証明は1次元の場合の素直な拡張。技術的には1次元よりも簡単 擬1次元系でも同じ結果
- 同じモデルで、モーメント（およびランチョス係数）は量子カオス的とされる増大則を示し、虚時間発展は特異性を示す 最低でも無限の2次元格子が必須

残る課題（のごく一部）

結果の一般化（六角格子などの扱い）、より能率的な証明
準局所保存量が存在しないことの証明
長時間の時間発展と直接に関わる性質の証明