自発的対称性の破れと
南部-Goldstone モード

最近の発展と話題

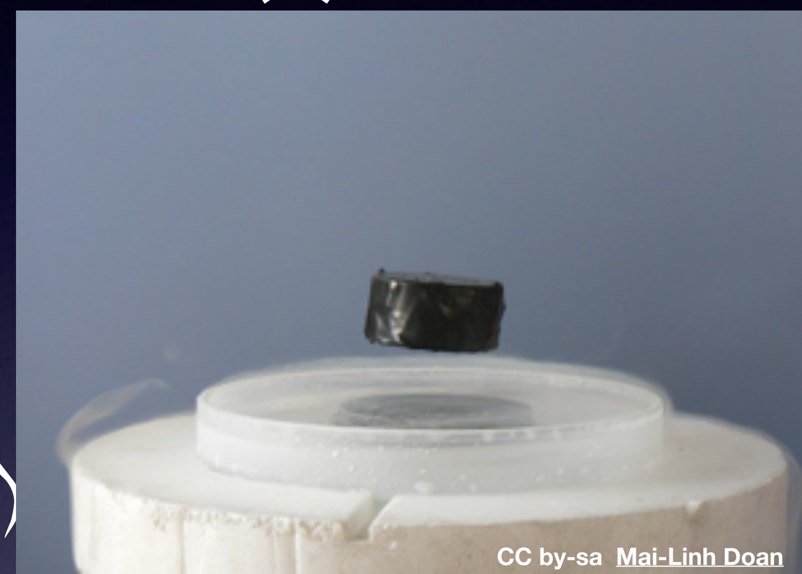
日高義将
(理研仁科センター)

様々な物理状態

自発的対称性の破れ

並進対称性

U(1)ゲージ対称性

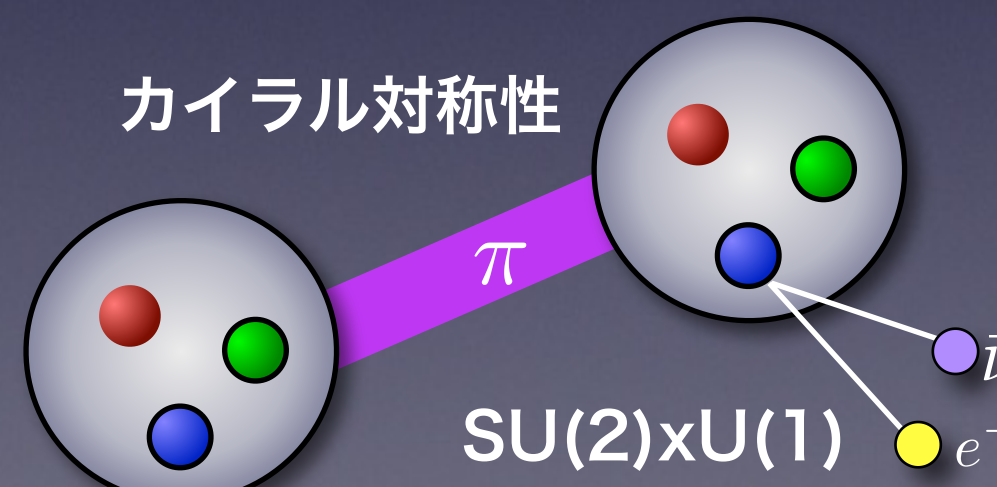


並進対称性

ガリレイ対称性

スピン対称性

カイラル対称性

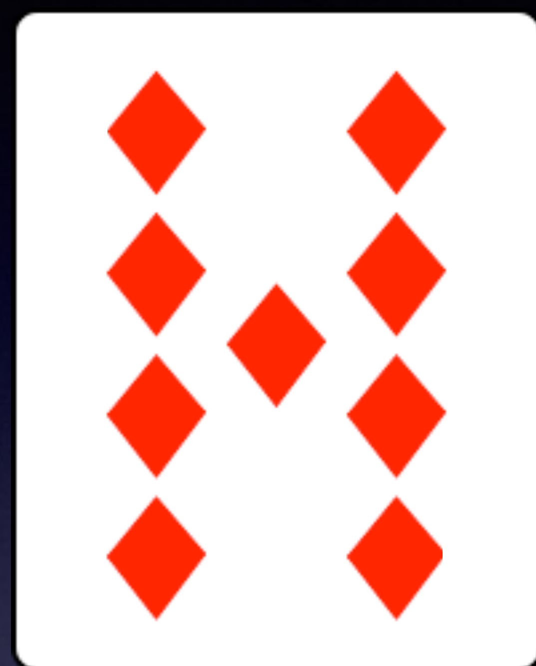


SU(2)xU(1)
ゲージ対称性

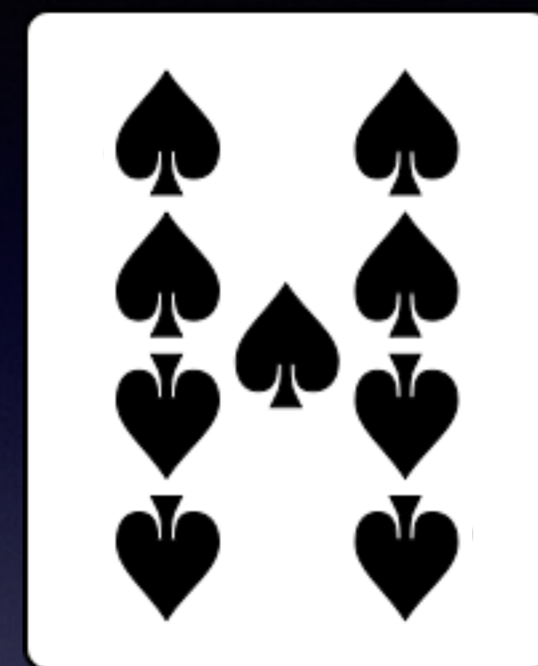
多くの場合波をともなう

対称性

操作に対して形を変えない



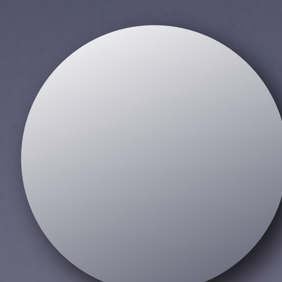
180度回転,x軸,y軸鏡影



y軸鏡影

対称性が高いほど物理の問題は解きやすい.

例えば,



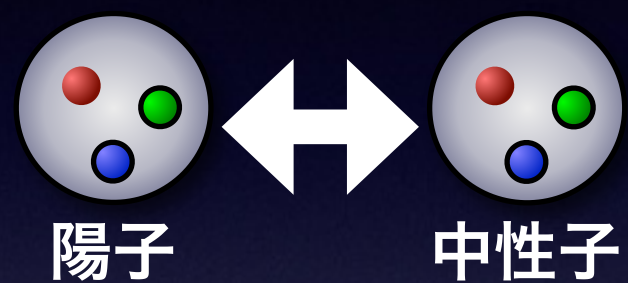
単純

複雑

対称性の種類

内部対称性

アイソスピン



原子のスピン

時空対称性

時間並進,　空間並進, 回転, ブースト

ゲージ対称性

電磁気, 弱い力, 強い力 U(1)xSU(2)xSU(3)

連続対称性と保存則

ネーターの定理　Noether 1915

対称性		保存則
時間並進		エネルギー
空間並進	⇔	運動量
回転		角運動量
U(1)位相変換		電荷

⇒ 保存則 $\partial_t n_a(t,\boldsymbol{x}) + \partial_i j_a^i(t,\boldsymbol{x}) = 0$

保存電荷 $Q_a = \int d^3x n_a(t,\boldsymbol{x})$　　$\frac{d}{dt}Q_a = 0$

対称性はしばしば破れる

宇宙

粒子反粒子

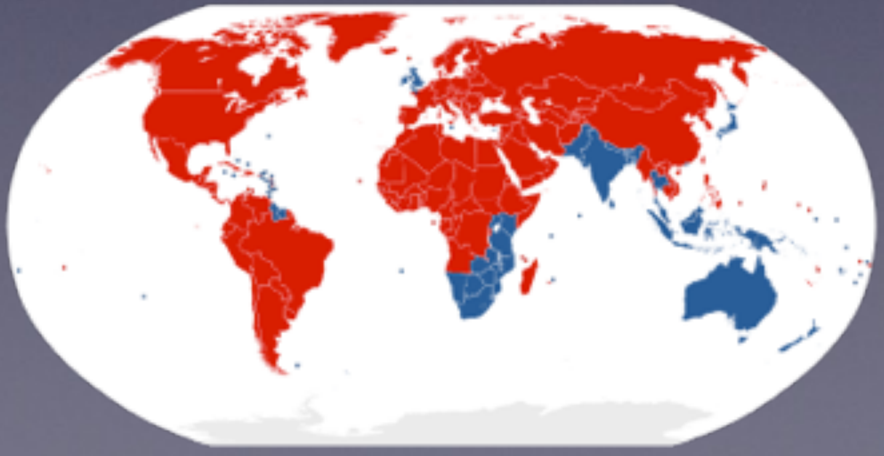
ゲージ対称性

カイラル対称性,...

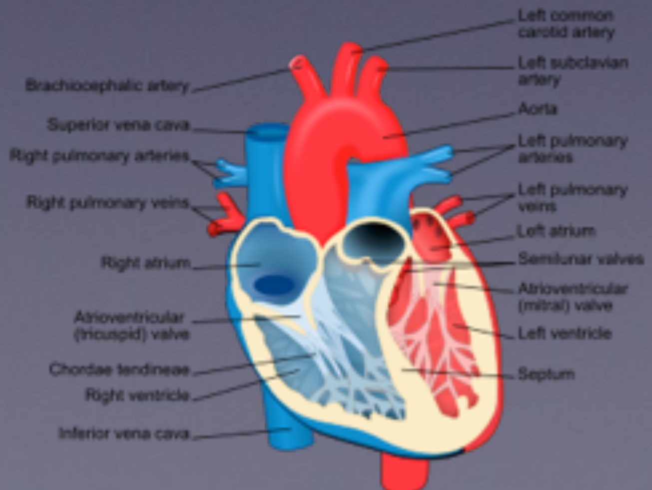
身近では,

利き手

交通 (左側通行 右側通行)



心臓



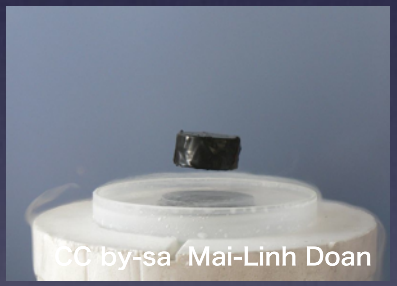
対称性の破れのパターン

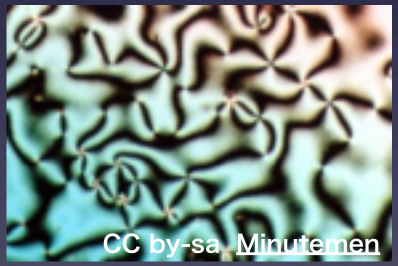
陽な破れ

パリティ対称性の破れ，　CP対称性の破れ, ...

自発的

磁性体　　超伝導　　結晶　　液晶，　....





量子異常

カイラルアノマリー，　ワイルアノマリー,

ゲージアノマリー，パリティアノマリー, ...

自発的対称性の破れ:簡単な歴史(1900~)

自発磁化

- Magnetic domain理論 — Weiss (1907)
- Ising模型 — Lenz (1920), Ising (1925)
- Heisenberg模型 — Heisenberg (1928)
- スピン波の導入 — Bloch (1930)
  - Bloch則 $M(T) = M(0)(1 - cT^{3/2})$

超伝導とNGモード

- 超伝導発見 — Onnes (1911)
- BCS理論 — Bardeen, Cooper, Schrieffer ('57)
- 南部, Goldstone理論 (自発的対称性の破れ) — Nambu('60), Goldstone (61), Nambu, Jona-Lasinio ('61), Goldstone, Salam, Weinberg ('62).
- Brout-Englert-Higgs 機構 — Anderson('62), Brout, Englert ('64), Higgs ('64), Guralnik, Hagen, Kibble ('64), Migdal, Polyakov ('65)

連続対称性の自発的破れの定義

自発的対称性のやぶれは，ある電荷Q_aについて

$$\langle [Q_a, \phi_i(\boldsymbol{x})] \rangle \equiv \mathrm{tr}\rho \, [Q_a, \phi_i(\boldsymbol{x})] \neq 0$$

となる局所場Φ_iが少なくとも一つは存在することで定義

真空: $\rho = |\Omega\rangle\langle\Omega|$

媒質中: $\rho = \dfrac{\exp(-\beta(H-\mu N))}{\mathrm{tr}\exp(-\beta(H-\mu N))}$

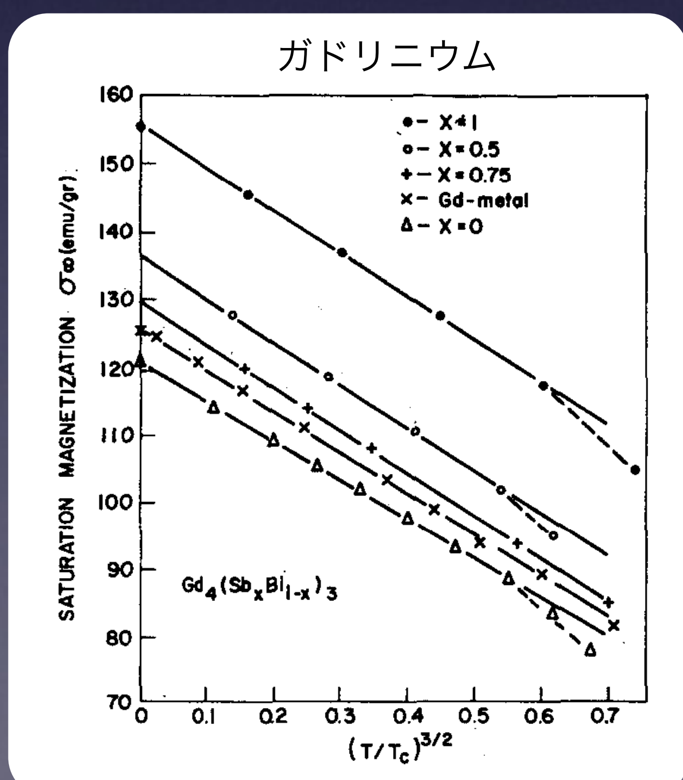
連続対称性の自発的破れ

何がうれしいか？

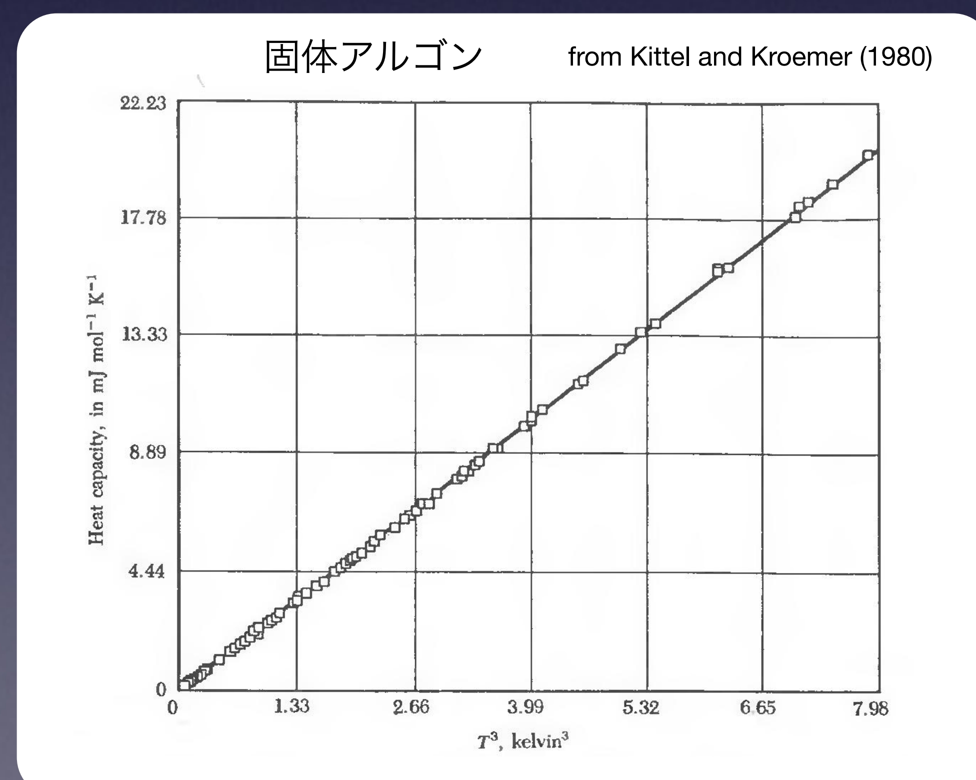
理論の詳細によらず様々な事が言える.

分散関係，低エネルギー定理, ...

Bloch $T^{3/2}$則, Debye T^3則, ...

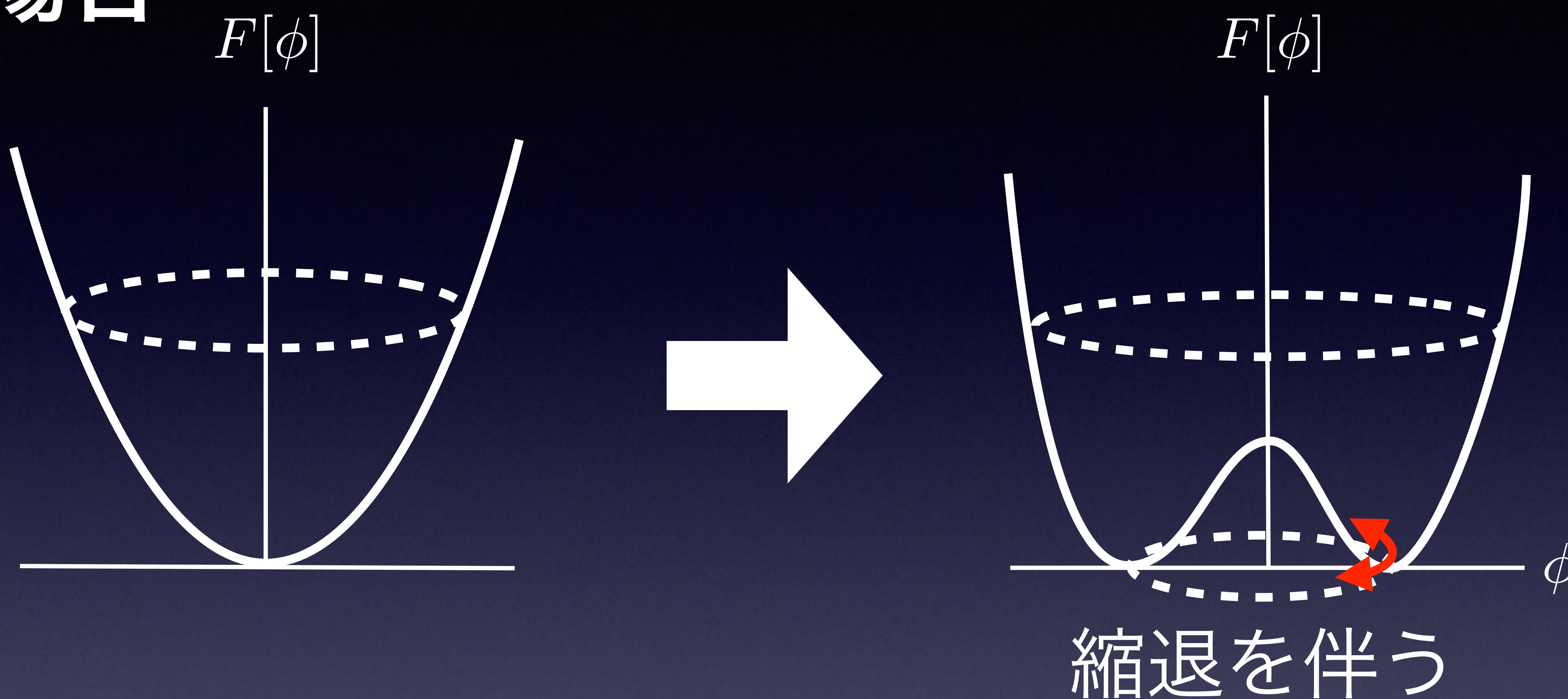


Holtzberg, McGuire, M'ethfessel, Suits, J. Appl. Phys. 35,1033 (1964)

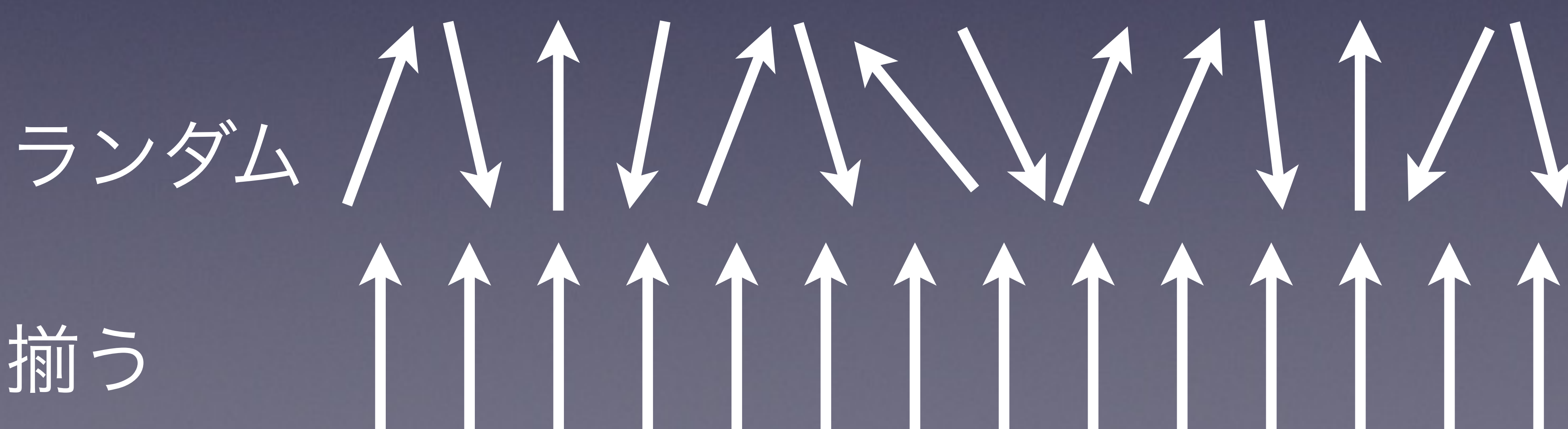


連続対称性の自発的破れ

場の場合

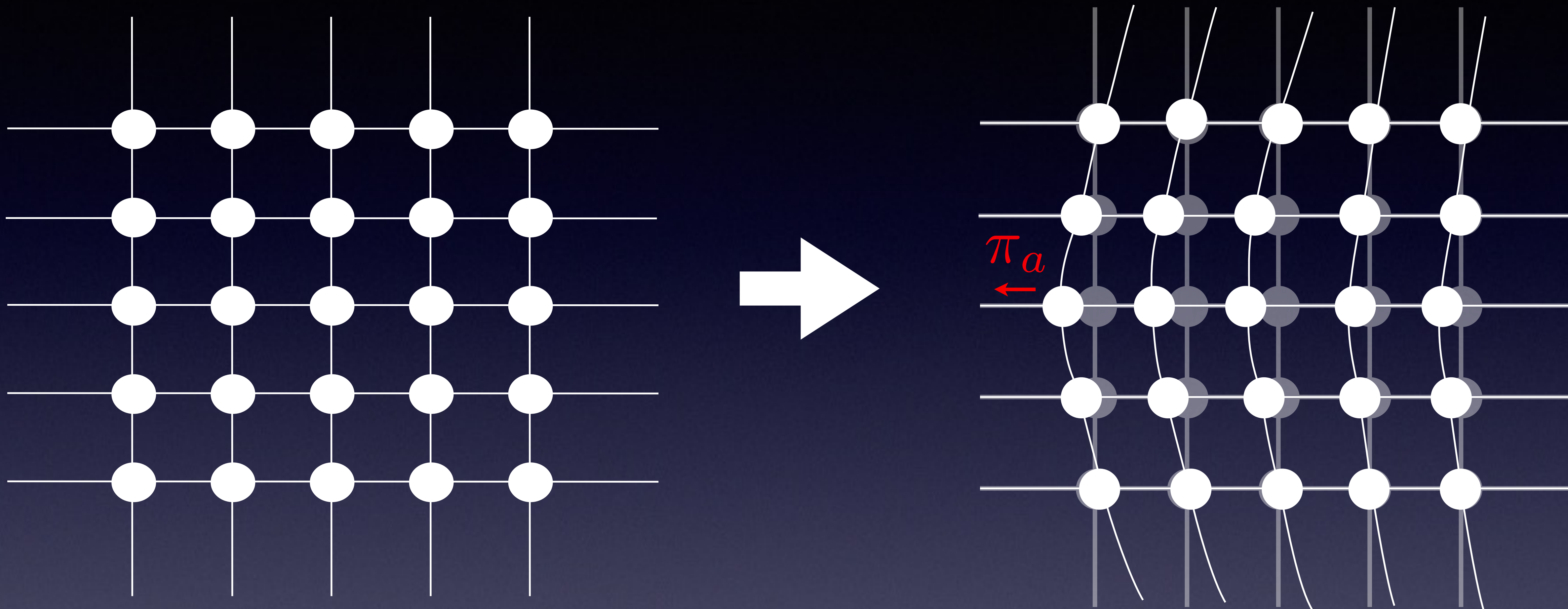


スピンの場合

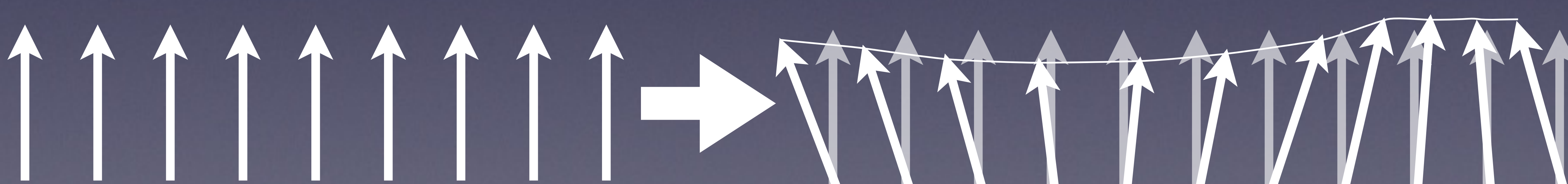


並進対称性が残っている場合弾性を伴う

格子の場合



スピンの場合

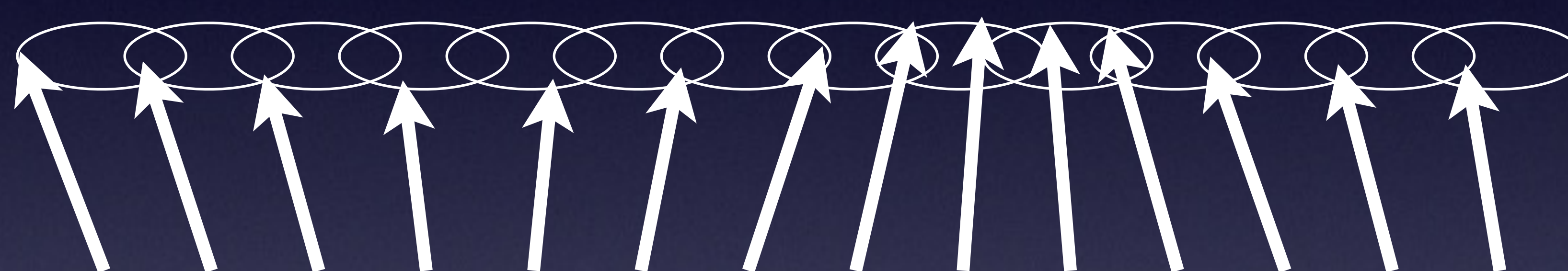


自由エネルギー $F = \frac{1}{2}(\partial_i \pi^a)^2 + \cdots$

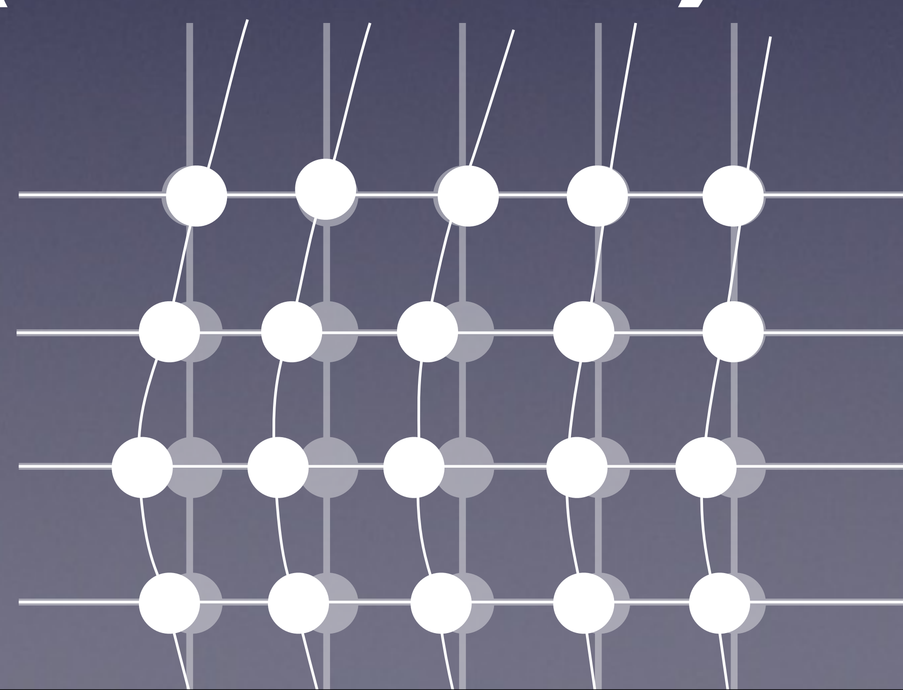
ギャップレスな励起が現れる
= 南部-Goldstone(NG)モード

Nambu('60), Goldstone(61), Nambu, Jona-Lasinio('61),

スピン波(マグノン)



格子振動(フォノン)



南部-Goldstoneの定理

Goldstone, Salam, Weinberg('62)

Lorentz対称性を持った真空

大域的対称性の自発的破れ

⬇

破れた対称性の数=NGモード

分散関係$\omega = c|\boldsymbol{k}|$

NG モードの例: 相対論

量子色力学の(近似的)対称性

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \to SU(2)_V$$

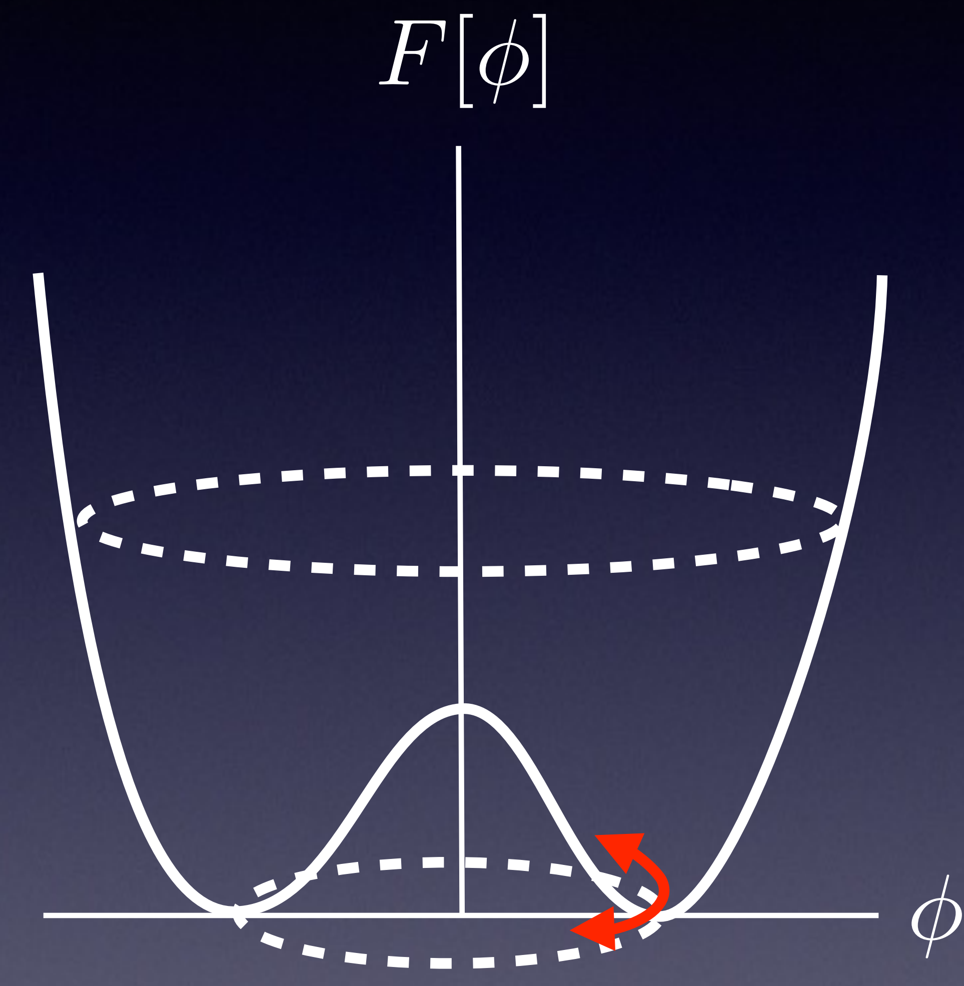
破れた対称性3つ:

３つのNGモード:パイ中間子

$$\pi^+, \pi^-, \pi^0$$

分散関係:

$$\omega = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + m_\pi^2}$$



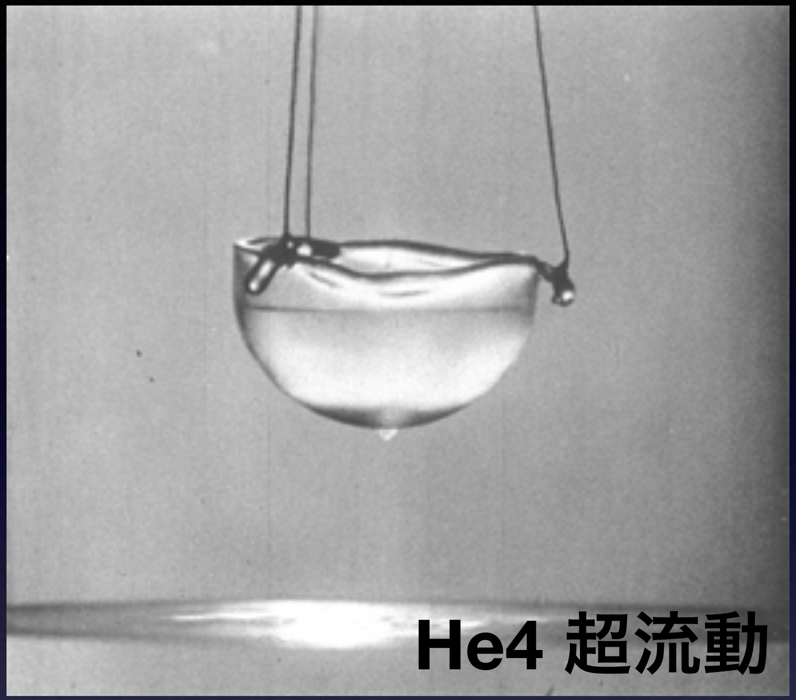
NG モードの例: 非相対論

超流動(フォノン)

粒子数保存則の破れ

破れた１つの生成子:Q

１つのフォノン $\omega \sim |\boldsymbol{k}|$

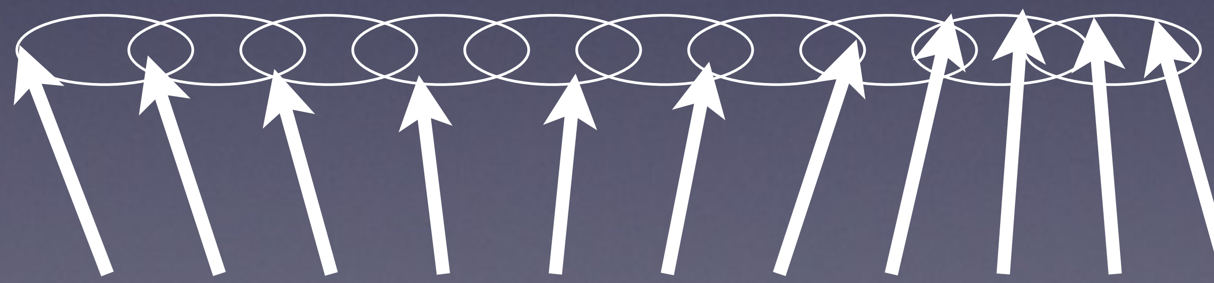


スピン波(マグノン)

回転対称性の破れ

破れた２つの生成子:S_x, S_y

一つのスピン波 $\omega \sim \boldsymbol{k}^2$



数も分散も相対論的な場合と異なる.

NG定理の一般化

Nielsen - Chadha ('76)

$$N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} \geq N_{\text{BS}}$$

Type-I: $\omega \propto k^{2n+1}$ **Type-II:** $\omega \propto k^{2n}$

Schafer, Son, Stephanov, Toublan, and Verbaarschot ('01)

$$\langle [Q_a, Q_b] \rangle = 0 \Rightarrow N_{\text{NG}} = N_{\text{BS}}$$

Watanabe - Brauner ('11)

$$N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} \leq \frac{1}{2}\text{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$$

最近の進展

有効ラグランジアンの方法 **Watanabe, Murayama ('12)**

森の射影演算子法 **YH ('12)**

- $N_{\mathrm{BS}} - N_{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$
- $N_{\text{type-I}} + 2N_{\text{type-II}} = N_{\mathrm{BS}}$
- $N_{\text{type-II}} = \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$

最近の進展

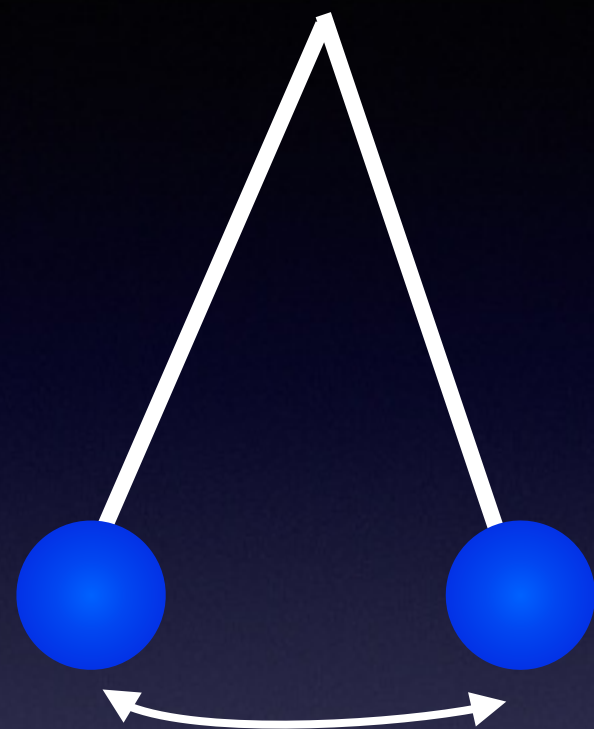
有効ラグランジアンの方法 **Watanabe, Murayama ('12)**

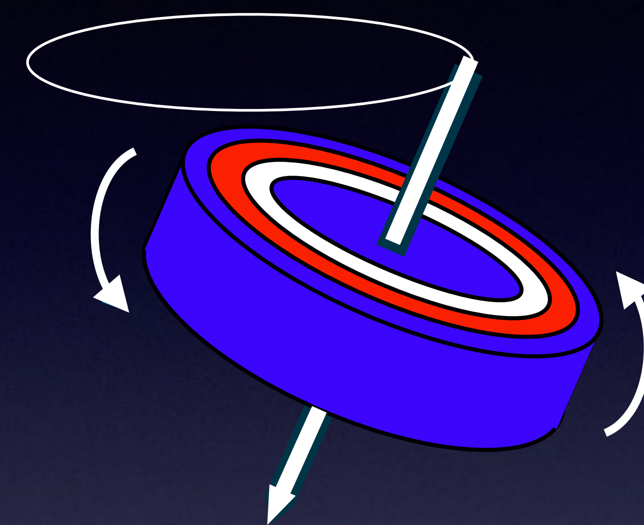
森の射影演算子法 **YH ('12)**

- $N_{\mathrm{BS}} - N_{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$
- $N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}} = N_{\mathrm{BS}}$
- $N_{\text{type-B}} = \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$

2種類の励起

重力 g





Type-A

単振動

$$\omega \sim \sqrt{g}$$

Type-B

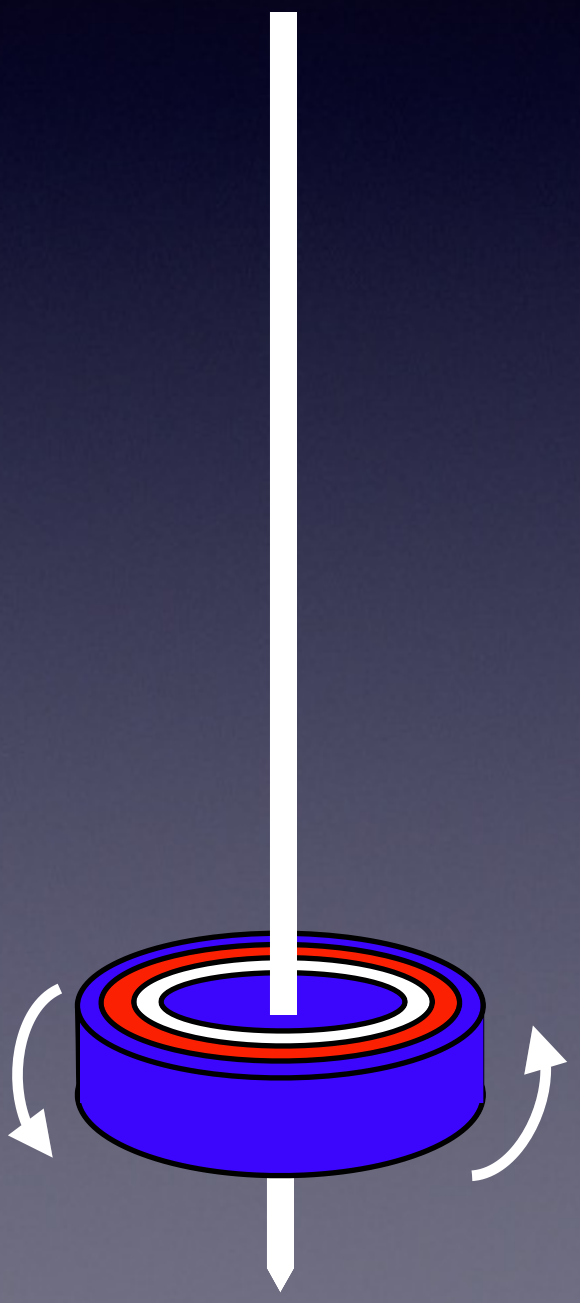
歳差運動

$$\omega \sim g$$

Type-A→Type-B転移の古典模型

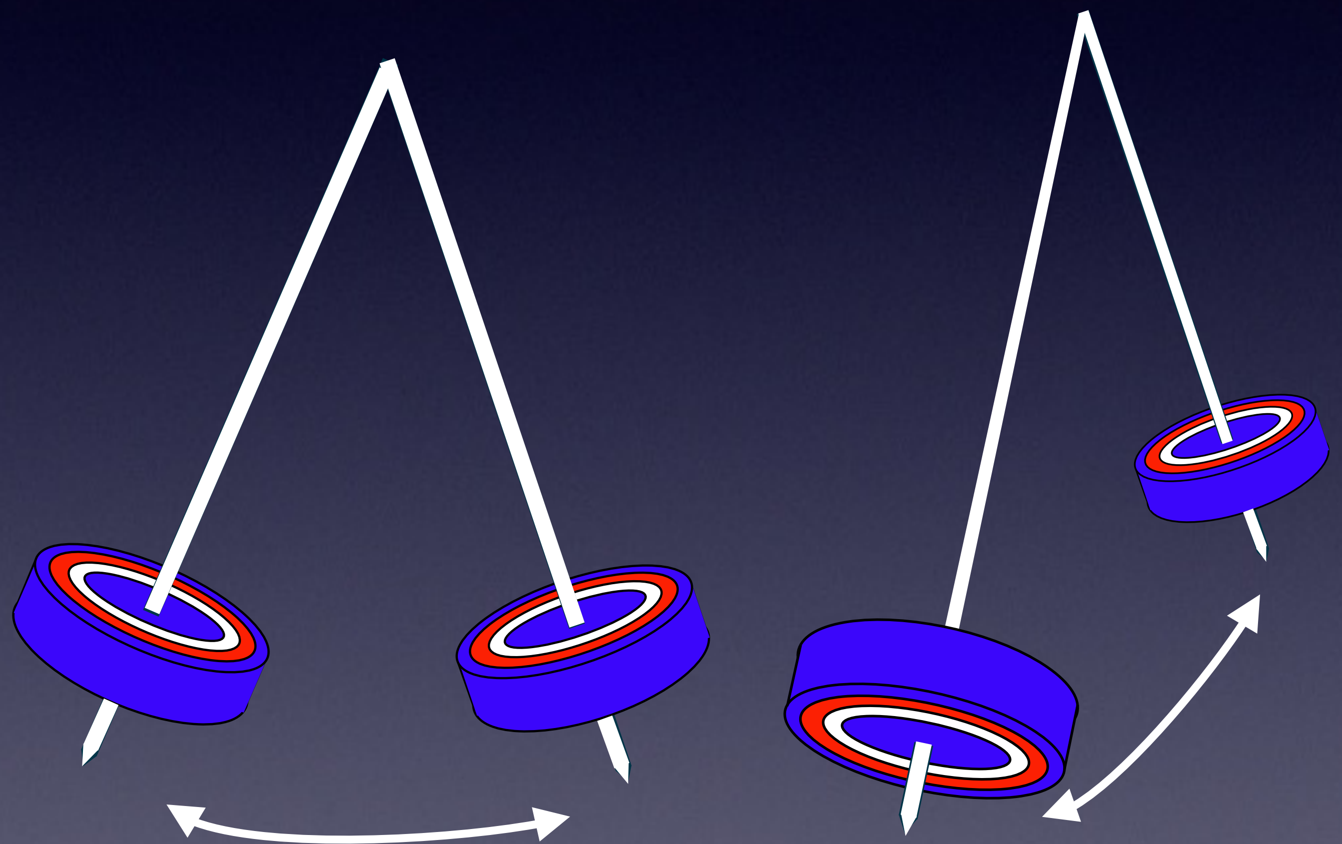
コマが付いた振り子

- 回転対称性は重力による陽な破れ
- z軸の周りの回転は対称性がある
- x, y軸に沿った対称性は破れている
- 破れた対称性の数は2つ



Type-A, Type-Bの古典模型

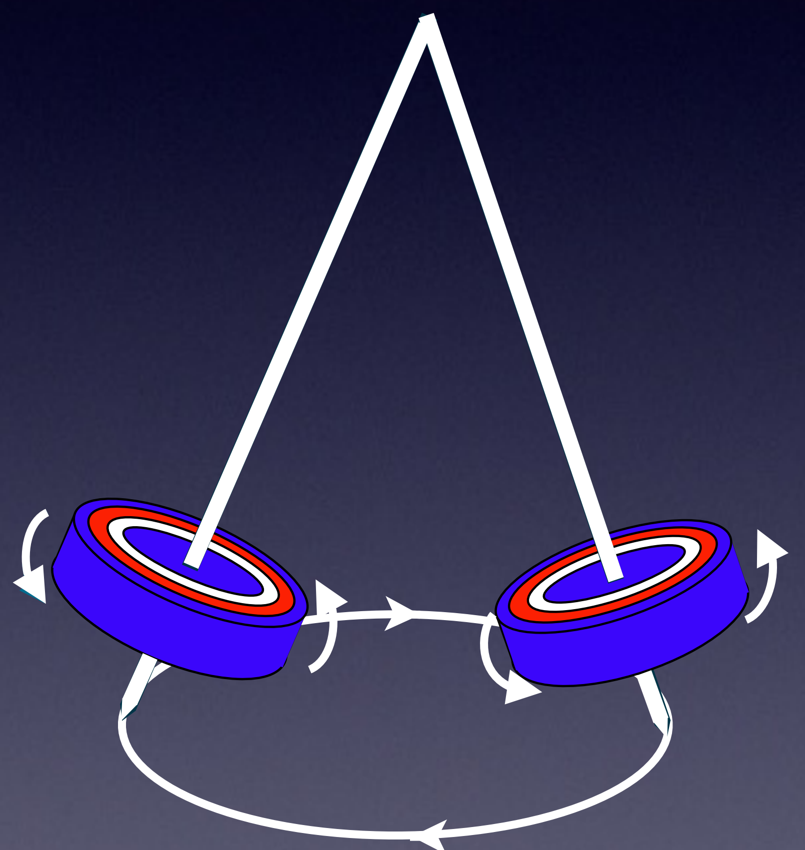
コマが回っていない時



独立な２つの振り子の運動

Type-A, Type-Bの古典模型

もしコマが回っていると



1方向の歳差運動

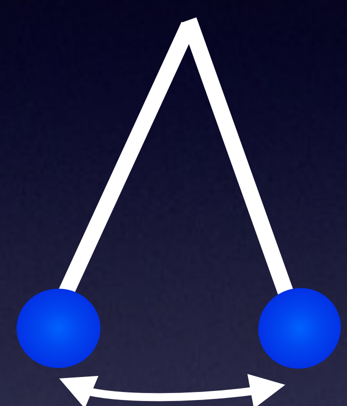
この時, $\{L_x, L_y\}_P = L_z \neq 0$

最近の発展

Watanabe, Murayama ('12), YH ('12)

内部対称性の自発的破れに伴うNGモードは

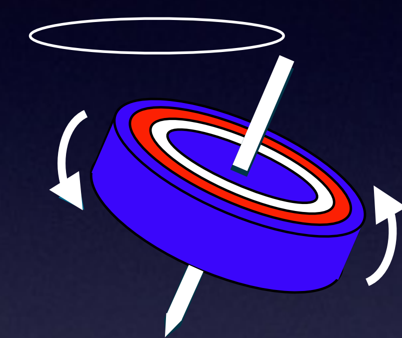
2つの振動のタイプに分類できる:



Type-A

単振動

$$N_{\text{type-A}} = N_{\text{BS}} - 2N_{\text{type-B}}$$



Type-B

歳差運動

$$N_{\text{type-B}} = \frac{1}{2}\text{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$$

- $N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2}\text{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$

NGモードとは？

電荷密度は保存則により必ず遅い

$$\partial_t n_a(t,\boldsymbol{x}) = -\partial_i j^i_a(t,\boldsymbol{x})$$

例) 媒質中 $j^i_a = \Gamma \partial_i n_a$

拡散方程式 $\partial_t n_a(t,\boldsymbol{x}) = -\Gamma \partial_i^2 n_a(t,\boldsymbol{x})$

対称性が自発的に破れると
電荷密度と弾性変数が正準共役

$$\langle [iQ_a, \pi_b(\boldsymbol{x})] \rangle \neq 0$$

cf. Nambu ('04)

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \partial_t \pi_a &= c n_a \\ \partial_t n_a &= b \partial_i^2 \pi_a \end{aligned}$$

Type-A (B)は Type-I (II) NG モードか？

Type-A NG モード

電荷密度と弾性変数が正準共役

$$\langle [iQ_a, \pi_b(\boldsymbol{x})] \rangle \neq 0$$

$$\partial_t \pi_a = c n_a \quad \partial_t n_a = d\partial_i^2 \pi_a$$

➡ $\omega = \sqrt{cd}|\boldsymbol{k}| + \Gamma \boldsymbol{k}^2$ **Type-A = Type-I**

Hayata, YH, Hirono (14)

Type-B NG モード

電荷密度と電荷密度が正準共役

(有効ラグランジアンでは１階微分の項に対応 Watanabe, Murayama ('12))**)**

$$\langle [iQ_a, n_b(\boldsymbol{x})] \rangle \neq 0$$

$$\partial_t n_a = c' \partial_i^2 n_b \quad \partial_t n_b = d' \partial_i^2 n_a$$

➡ $\omega = \sqrt{c'd'}\boldsymbol{k}^2 + \Gamma|\boldsymbol{k}|^4$ **Type-B = Type-II**

Hayata, YH, Hirono (14)

Type-B NGモードの例

	N_{BS}	$N_{\text{type-A}}$	$N_{\text{type-B}}$	$\frac{1}{2}\text{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$	$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}}$
Spin wave in ferromanget O(3)→O(2)	2	0	1	1	2
NG modes in Kaon condensed CFL SU(2)xSU(1)	3	1	1	1	3
Kelvin waves in vortex translation	2	0	1	1	2
nonrelativistic massive C U(1)x	2	0	1	1	2

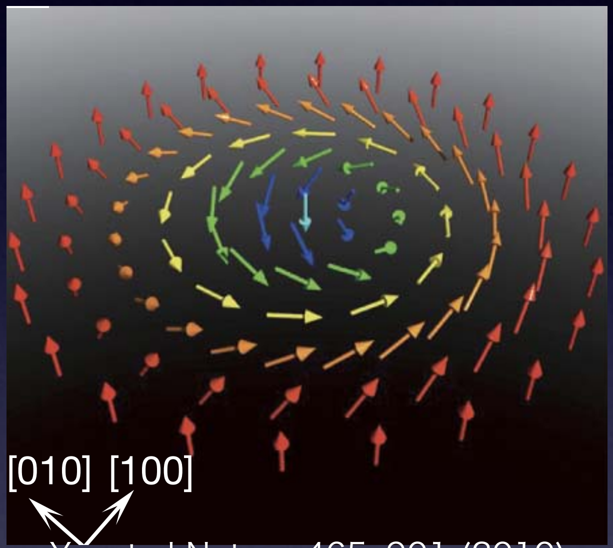
$$N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}} = N_{\text{BS}} \qquad N_{\text{BS}} - N_{\text{NG}} = \frac{1}{2}\text{rank}\langle[Q_a, Q_b]\rangle$$

トポロジカルソリトンと中心拡大

並進と並進

例) 2+1D skyrmion

Watanabe, Murayama 1401.8139



Yu, et al Nature 465, 901 (2010)

$$[P_x, P_y] \propto N$$

x並進　y並進　topological number

並進と内部対称性

例) domain wall in nonrelativistic massive CP^1 model

Kobayashi, Nitta 1402.6826

$$[P_z, Q] \propto N$$

z並進　U(1)電荷　topological number

自発的対称対称性の破れ
+小さな陽な破れ

$$H = H_0 + hV$$

対称性を持った項　　小さな破れの項

擬NGモード

Type-A: $\omega \sim \sqrt{h}$

例)パイ中間子

Type-B: $\omega \sim h$

例)外部磁場中のスピン波

保存量と結合した陽な破れの場合には，陽な破れの高次補正はない．

Nicolis, Piazza ('12), ('13)
Watanabe, Brauner, Murayama ('13)

時空対称性の自発的破れ

まだわからないことがたくさん

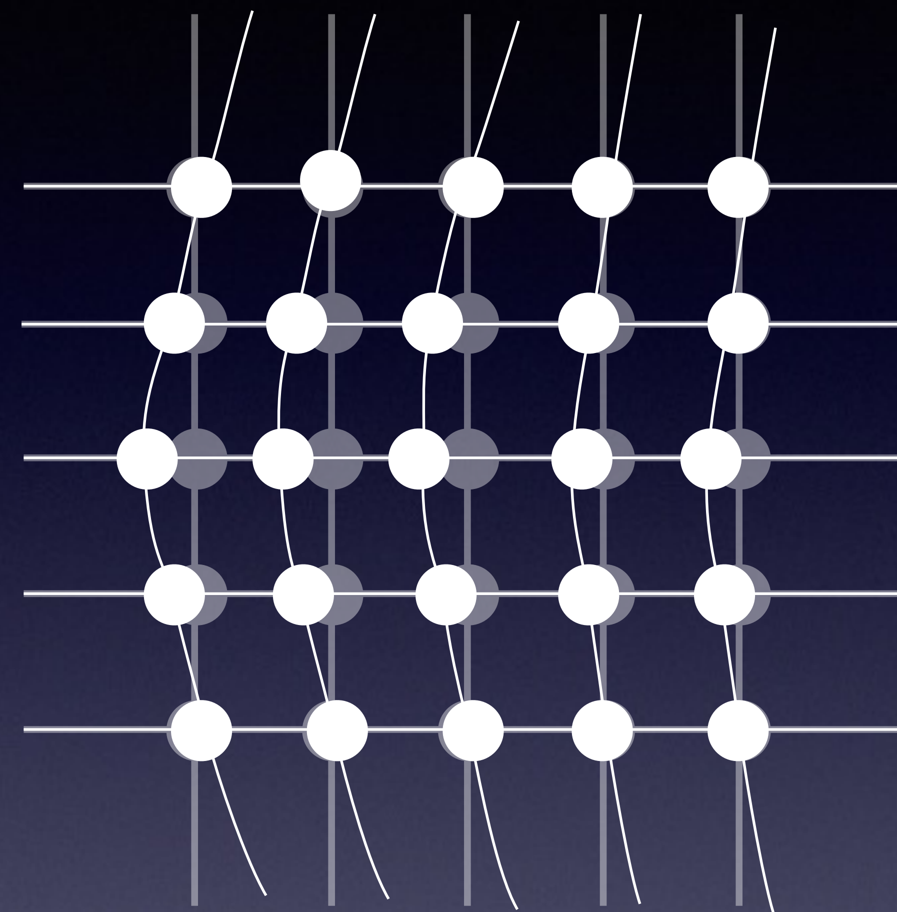
時空対称性の破れの例1

格子振動

並進(3つ)，回転(3つ)，ガリレイ(3つ)

９個破れている.

しかし, NGモードは並進の3つ.



回転とガリレイ変換に対応した

ギャップレスモードは？

ない

時空対称性の破れの例2

例: 弦

秩序変数$\langle\phi(x)\rangle$

並進: $\langle[P_x,\phi]\rangle = i\partial_x\langle\phi\rangle \neq 0$

回転: $\langle[L_z,\phi]\rangle = -iy\partial_x\langle\phi\rangle \neq 0$

2つの破れ

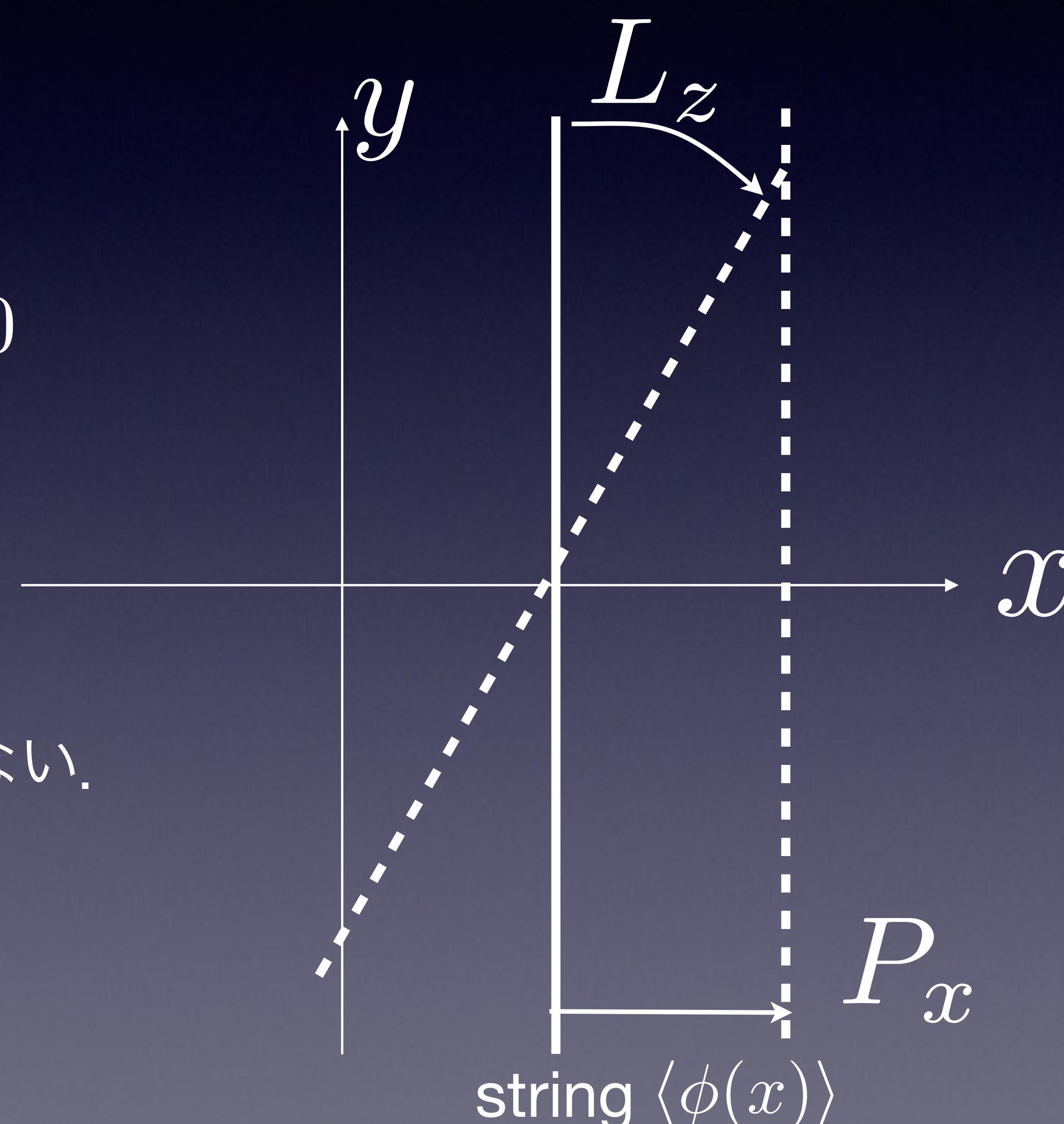
NGモードは一つ

回転は並進を使って書けるので独立でない.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{P}$$

Low - Manoharの議論

Low, and Manohar ('02)



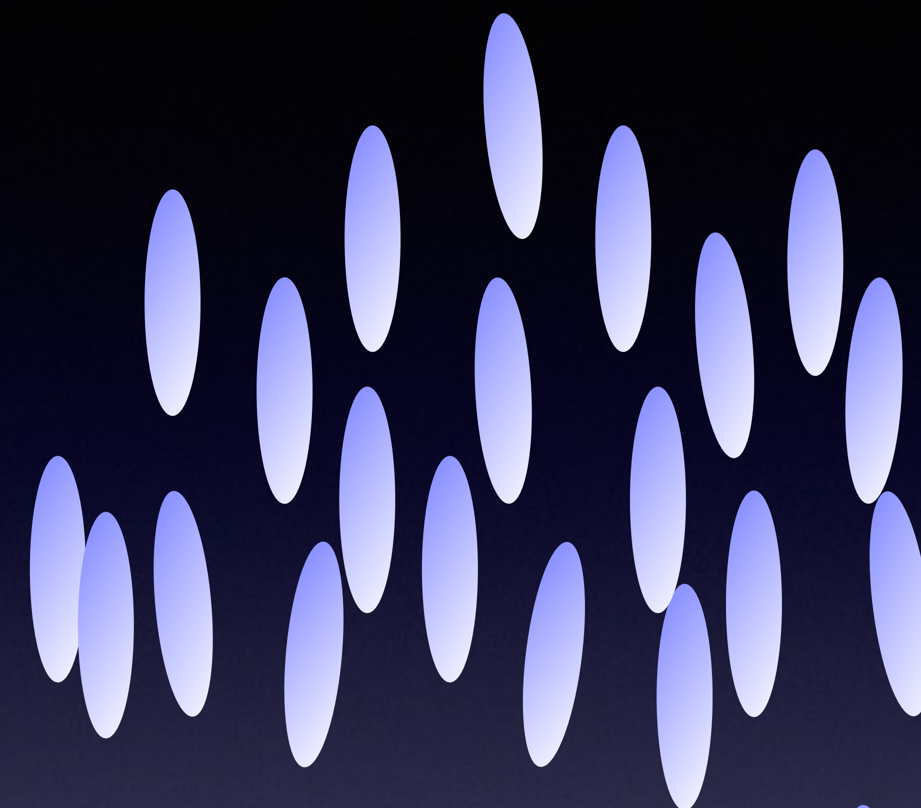
非自明な例: 液晶

ネマティック相

空間回転 $O(3) \to O(2)$

２つの破れた生成子

２つの弾性変数



スメクティック-A 相

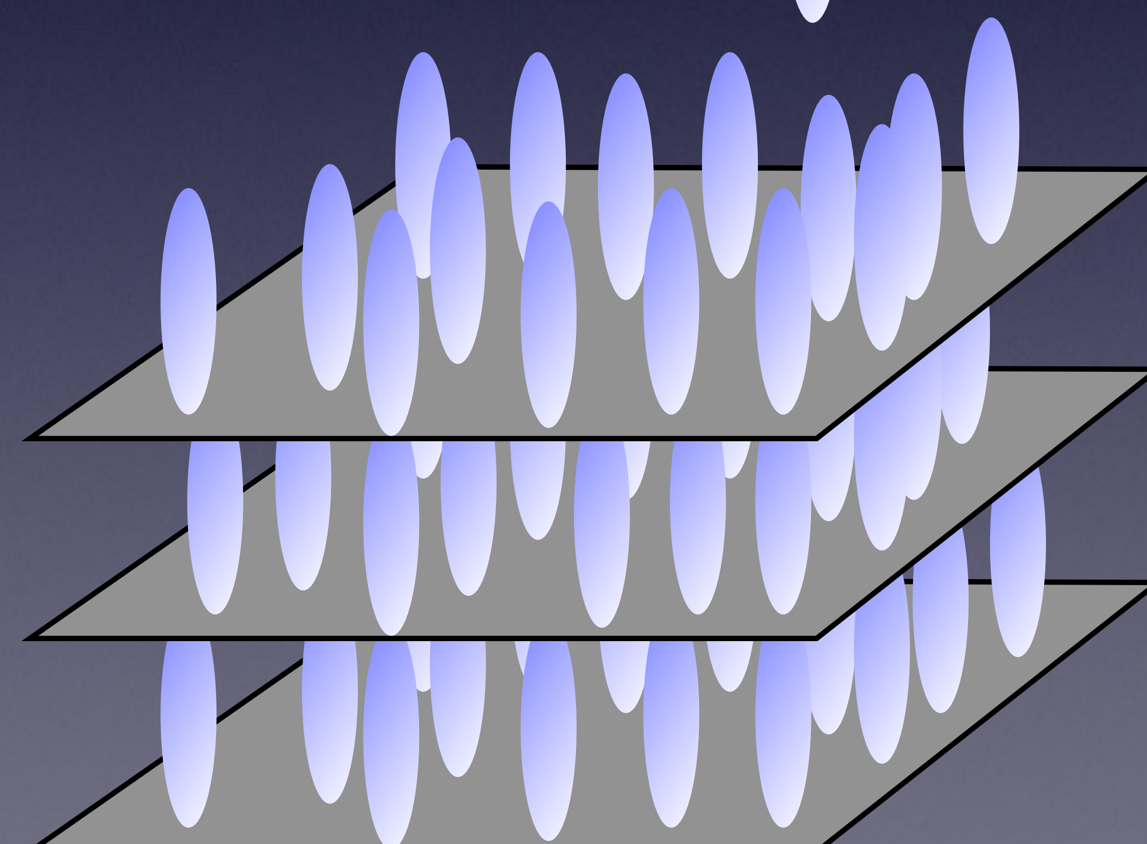
回転の破れ $O(3) \to O(2)$

並進の破れ

３つの破れた生成子

１つの弾性変数

残り回転は重たいモードに



Inverse Higgs mechanism

Ivanov, Ogievetsky ('75), Low, Manohar ('02) Nicolis et al ('13)
Endlich, Nicolis, Penco ('13) Watanabe, Brauner ('14)

$$\xi = e^{ix^\mu P_\mu} e^{iT^a \pi^a(x)}$$

Volkov ('73), Ogievetsky ('74)

Maurer-Cartan 1形式

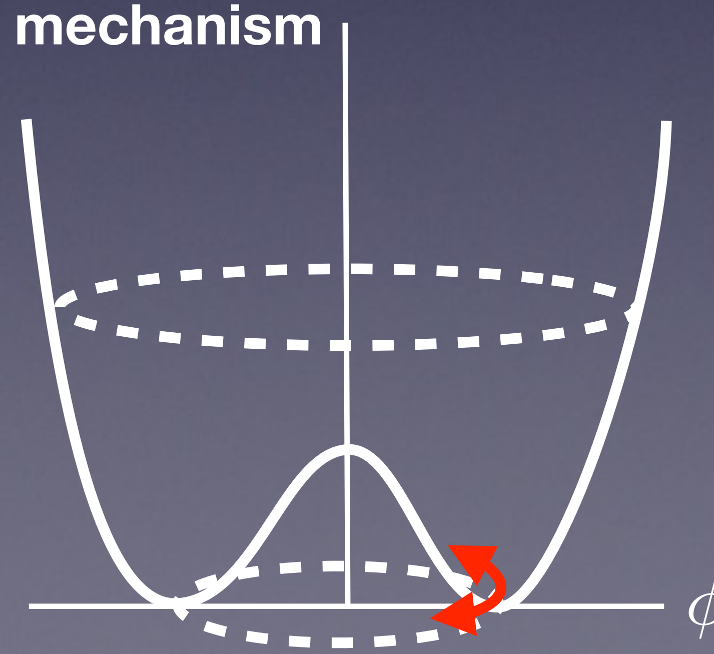
$$\begin{aligned}\alpha = -i\xi^{-1} d\xi &= -ie^{-iT^a\pi^a}(d + iP_\mu dx^\mu)e^{iT^a\pi^a} \\ &= P_\mu dx^\mu + [T^a\pi, iP_\mu dx^\mu + d] + \cdots \\ &= P_\mu dx^\mu + \boxed{T^a(\partial_\mu \pi^a + f_\mu{}^{ba}\pi^b)dx^\mu} + \cdots\end{aligned}$$

Inverse Higgs mechanism

独立な弾性変数

平らな方向が破れた対称性の数に等しくない

Hayata, YH ('14)

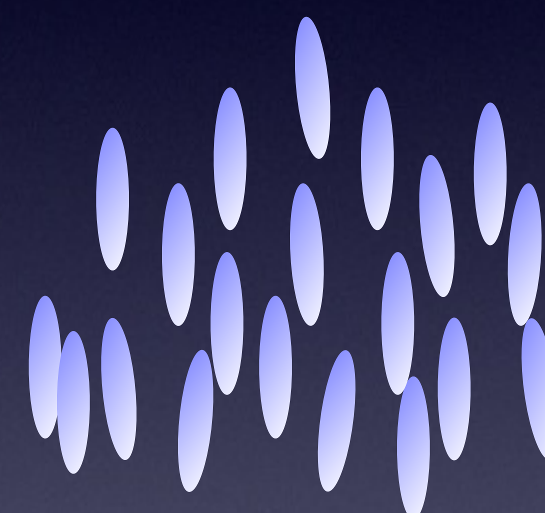


分散関係

例)液晶 (Type-A)

ネマティック相: 回転 O(3)→O(2)

$$N_{\mathrm{BS}} = N_{\mathrm{EV}} = 2 \qquad L_i(x) = \epsilon_{ijk} x^j T^{0k}(x) \quad i = 1, 2$$



分散関係: $\omega = ak^2 + ibk^2$ Hosino, Nakano('82)

実部と虚部が同じオーダー(減衰振動)

$a = 0$の時, 過減衰

例) 表面張力波 (Type-B?)

$$\frac{1}{V}\langle [P_z, N] \rangle \neq 0 \qquad \omega \sim k^{3/2}$$

まとめ

内部対称性に関して統一的な理解が得られた

SSB パターン+ $\langle [Q_a, Q_b] \rangle$ の情報

- 独立な弾性変数の数は破れた対称性の数
- $N_{\mathrm{BS}} - N_{\mathrm{NG}} = \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$
- $N_{\text{type-A}} + 2N_{\text{type-B}} = N_{\mathrm{BS}}$
- $N_{\text{type-B}} = \frac{1}{2}\mathrm{rank}\langle [Q_a, Q_b] \rangle$

Type-A (Type-I): $\omega = ak + ibk^2$

Type-B (Type-II): $\omega = ak^2 + ibk^4$

まとめ: 時空対称性の破れに関して

- 独立な弾性変数の数は破れた対称性に等しくない (Inverse Higgs機構)
- 分散関係は系，理論のパラメータに依存. 温度によって分散が変わる場合も.
- 分散に関して一般的なルールはあるか？