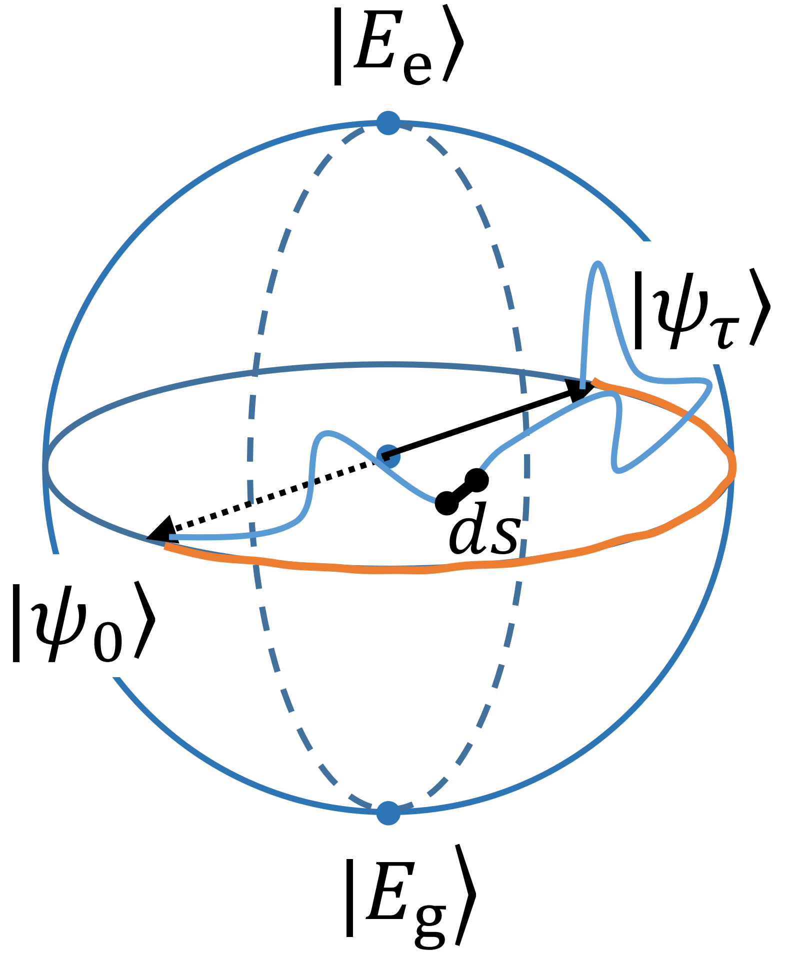
Quantum speed limitsと最近の話題

布能　謙 (北京大学)



統計物理学懇談会（第 6 回）　2018/3/12

quantum speed limits

- Mandelstam-Tamm bound (1945)

$$\tau \geq \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H}$$

- Margolus-Levitin bound (1998)

$$\tau \geq \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\langle H \rangle - E_{\mathrm{g}}}$$

$|\psi(0)\rangle$から直交する状態へと時間発展するために必要な最小時間

→ 量子計算との関連で近年注目を集めている

目次

- ハイゼンベルクの不確定性関係とQuantum speed limit
- Geometricなアプローチ
- 最近の進展
  - Classical speed limit
  - Shortcuts to adiabaticityへの応用

ハイゼンベルクの不確定性関係

$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$ and $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$

Heisenberg, 1927

位置・運動量不確定性関係

- Robertsonの不等式：$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$

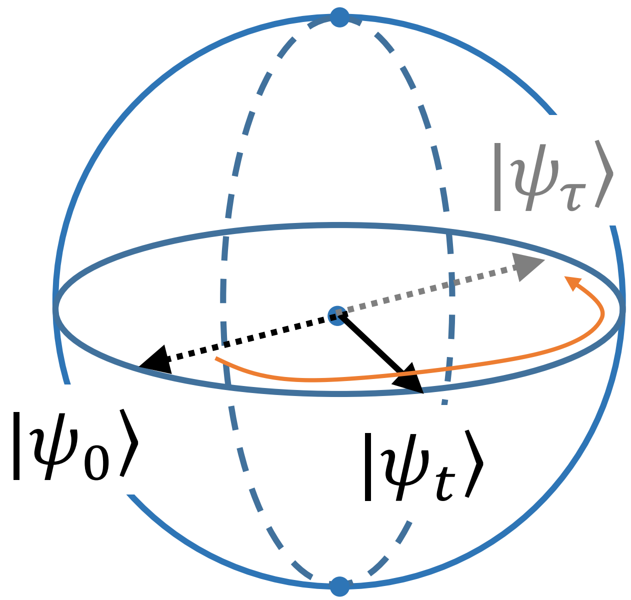
Robertson, 1929

$$\longrightarrow \Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

時間のオペレーター？

Mandelstam-Tammによる不確定性関係の導出

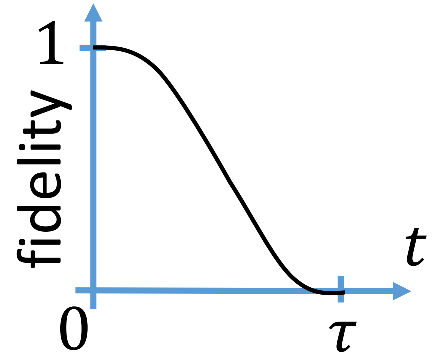
$\Delta x \Delta p \gtrsim \hbar$ and $\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar$



Robertsonの不等式: $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|$

$A = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|, B = H$ を代入

- 初期状態：$|\psi_0\rangle$
- ハミルトニアン：H
- 時刻 τ で直交する状態へと変化：$\langle\psi_0|\psi_\tau\rangle = 0$



時間 → 初期状態への射影によるオーバーラップ

Mandelstam-Tammによる不確定性関係の導出

Robertsonの不等式

$$\Delta H \Delta A_t \geq \frac{1}{2}|\langle [H, A\,] \rangle_t| = \frac{\hbar}{2}|\partial_t \langle A \rangle_t|$$

$$\begin{cases} A = |\psi_0\rangle\langle\psi_0| \\ \langle A \rangle_t = |\langle \psi_t | \psi_0 \rangle|^2 \\ \Delta A_t = \sqrt{\langle A \rangle_t - \langle A \rangle_t^2} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \quad \Delta H \geq \hbar \left| \frac{\partial_t \sqrt{\langle A \rangle_t}}{\sqrt{1 - \langle A \rangle_t}} \right|$$

積分

$$\longrightarrow \quad \frac{\tau}{\hbar}\Delta H \geq \cos^{-1}\underbrace{\sqrt{\langle A \rangle_\tau}}_{0} - \cos^{-1}\underbrace{\sqrt{\langle A \rangle_0}}_{1}$$

$$\longrightarrow \quad \tau \geq \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H}$$ 時間・エネルギー不確定性関係

Mandelstam-Tammによる不確定性関係の導出

時間・エネルギー不確定性関係　Mandelstam and Tamm (1945)

$$\tau \geq \tau_{\mathrm{QSL}} := \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H}$$

- quantum speed limit (QSL)

任意の量子操作に対して操作時間の
普遍的な限界を与える

エネルギーゆらぎの大きさが孤立量子系での
状態変化のスピードを特徴づける

quantum speed limits

- Mandelstam-Tamm (MT) bound

$$\tau \geq \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\Delta H}$$

- Margolus-Levitin (ML) bound

$$\tau \geq \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\langle H \rangle - E_{\mathrm{g}}}$$

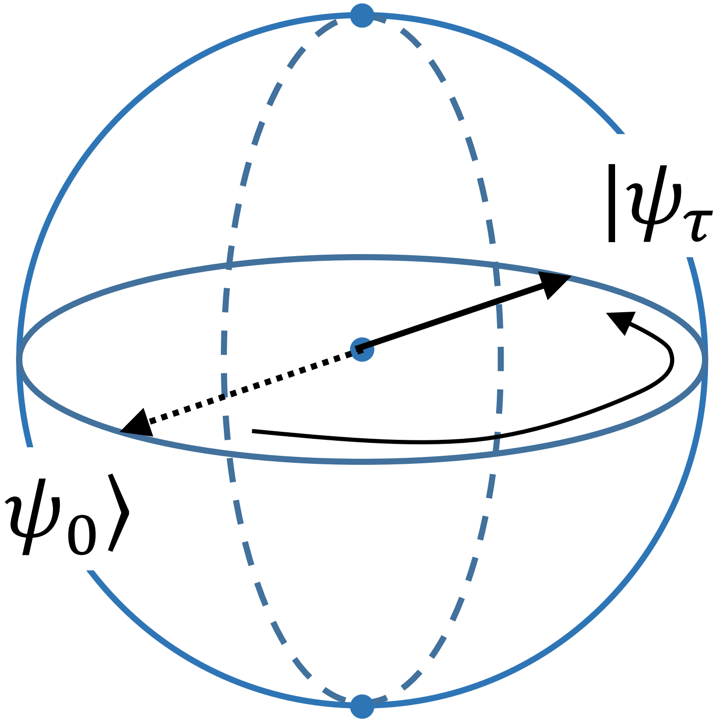
$$\tau \geq \tau_{\mathrm{QSL}} = \max\left\{\frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\Delta H}, \frac{\pi}{2} \frac{\hbar}{\langle H \rangle - E_{\mathrm{g}}}\right\}$$

最小時間はどうやって達成できるか？

quantum speed limitsの等号成立条件

- ２準位系を仮定

$$
\begin{cases}
|\psi_0\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_\mathrm{g}\rangle + |E_\mathrm{e}\rangle\right) \\
|\psi_\tau\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_\mathrm{g}\rangle - |E_\mathrm{e}\rangle\right)
\end{cases}
$$



最小時間を達成

(MT bound) (ML bound)

$$
\tau = \frac{\pi\hbar}{E_\mathrm{e} - E_\mathrm{g}} = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H} = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\langle H\rangle - E_\mathrm{g}}
$$

エネルギーゆらぎや期待値が大きいほど状態が速く回転する

等号成立条件と幾何学

- qubitの状態 → ブロッホ球面上の点

$|\psi_0\rangle$ と $|\psi_\tau\rangle$ の間の最小経路

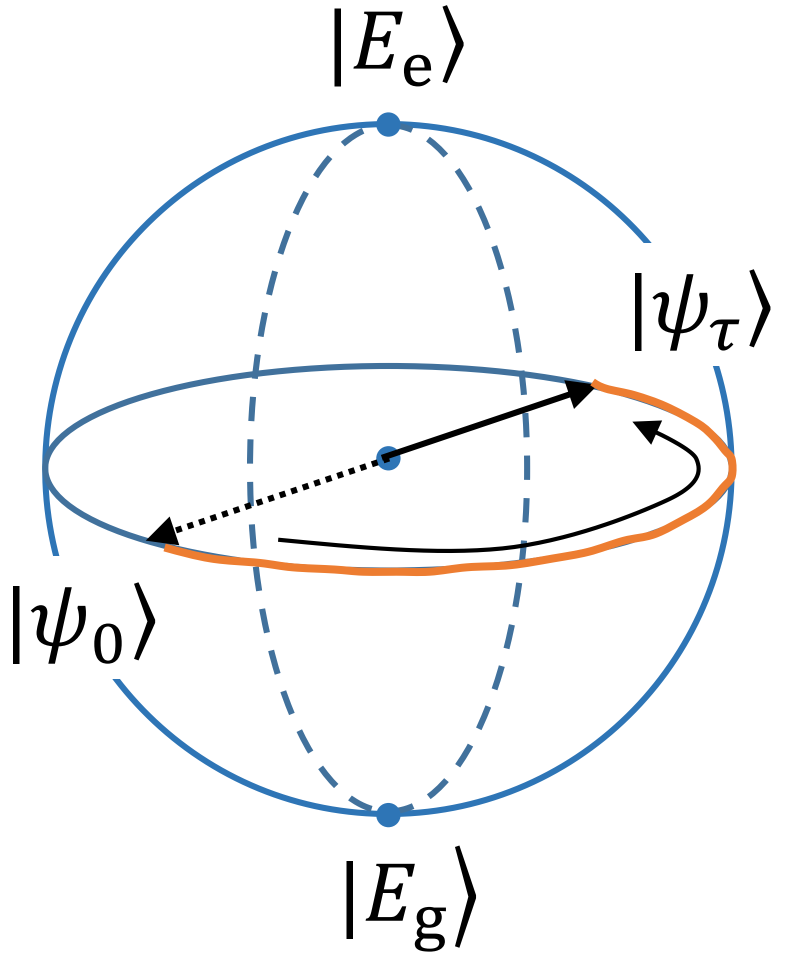
＝測地線

↕

最小時間を達成

(MT bound)　(ML bound)

$$\tau = \frac{\pi\hbar}{E_{\mathrm{e}} - E_{\mathrm{g}}} = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H} = \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\langle H\rangle - E_{\mathrm{g}}}$$



quantum speed limit と量子状態の幾何学の関係性を示唆

目次

- ハイゼンベルクの不確定性関係とQuantum speed limit
- Geometricなアプローチ
- 最近の進展
  - Classical speed limit
  - Shortcuts to adiabaticityへの応用

quantum speed limit: 幾何学的なアプローチ

quantum speed limit

$$\tau \geq \tau_{\mathrm{QSL}} := \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H}$$

- 純粋状態を仮定
- 時刻 τ で直交する状態へと変化した場合に限定
- 孤立量子系を仮定

→ 幾何学的なアプローチで統一的に一般化できる

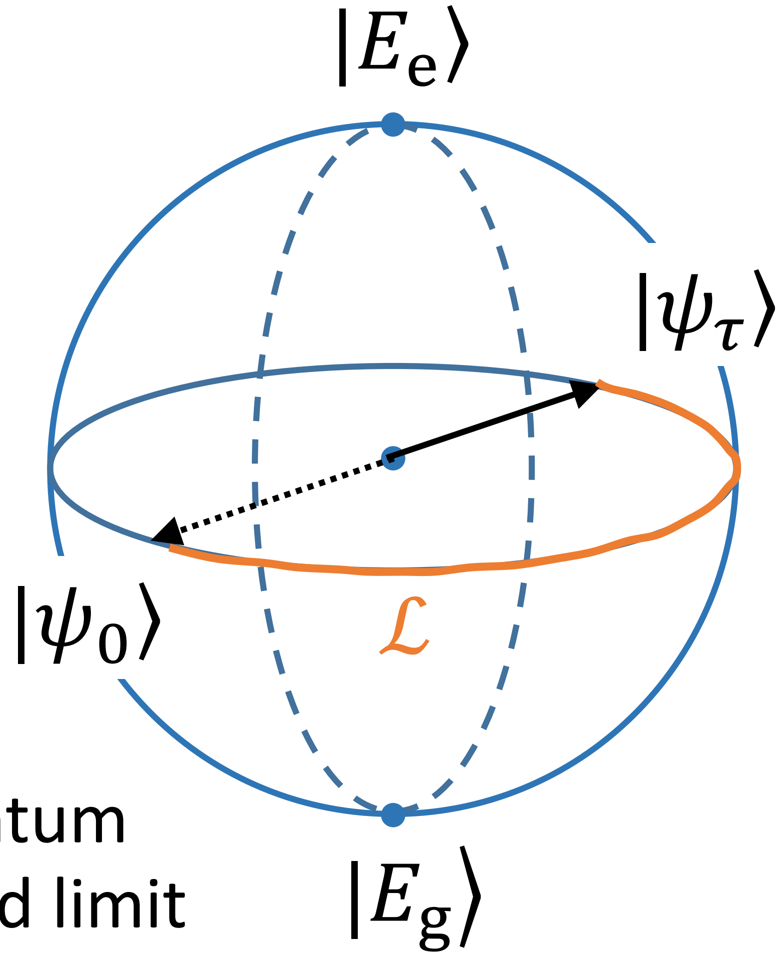
状態間の距離

- $|\psi_0\rangle$ と $|\psi_\tau\rangle$ の間の距離

$$\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) = \cos^{-1}\sqrt{\mathcal{F}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)}$$

- 状態のオーバーラップ (fidelity)

$$\mathcal{F}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) \coloneqq |\langle\psi_\tau|\psi_0\rangle|^2$$



$\lvert\psi_t\rangle$	初期状態	直交する状態
$\mathcal{L}(\lvert\psi_0\rangle, \lvert\psi_t\rangle)$	0	$\pi/2$
$\mathcal{F}(\lvert\psi_0\rangle, \lvert\psi_t\rangle)$	1	0

quantum
speed limit

$$\tau \geq \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H}$$

quantum speed limitsと幾何学

最小時間を達成

$|\psi_0\rangle$ と $|\psi_\tau\rangle$ の間の測地線

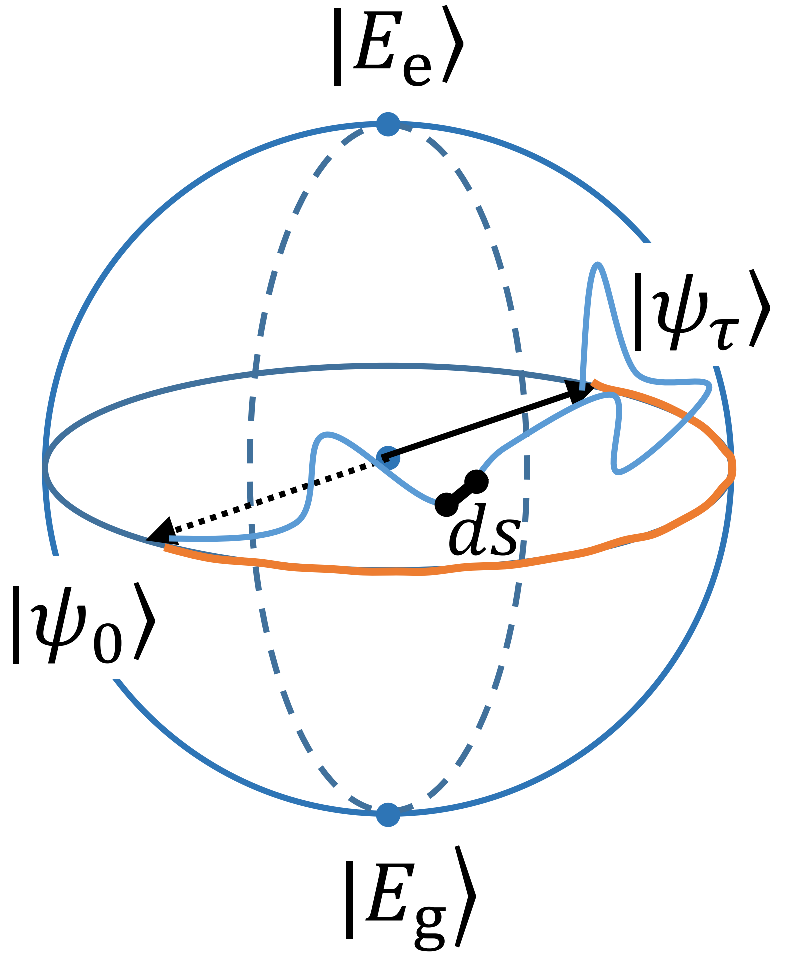
・微小距離

$$ds = \mathcal{L}(|\psi_t\rangle, |\psi_{t+dt}\rangle) = \sqrt{g_{\mathrm{FS}}}dt + O(dt^2)$$

・Fubini-Study metric

$$g_{\mathrm{FS}} := \langle \partial_t \psi_t | (1 - |\psi_t\rangle\langle\psi_t|) | \partial_t \psi_t \rangle$$

時間の変化による状態の変化率＝曲率



quantum speed limit の幾何学的な意味

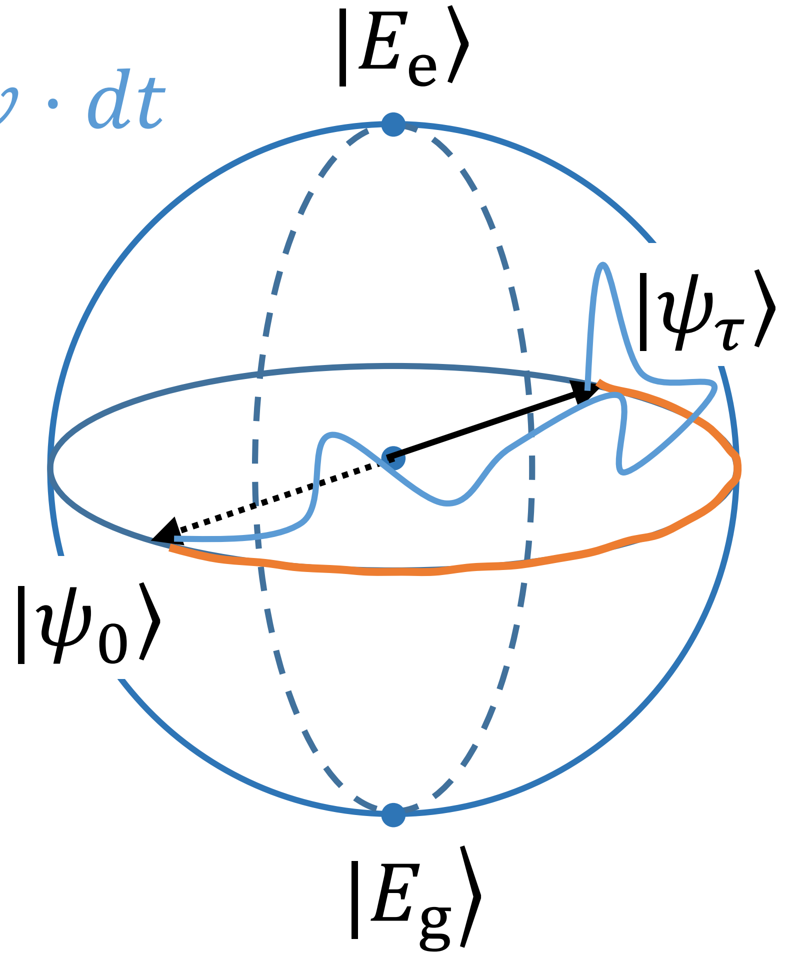
$$\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle) \leq \int dt\, \sqrt{g_{\mathrm{FS}}} = \tau \cdot \frac{1}{\tau} \int v \cdot dt$$

最短経路

状態が実際に移動した長さ

||

状態が移り変わるスピード $v = \sqrt{g_{\mathrm{FS}}}$



geometric quantum speed limit

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_t\rangle)}{\langle v \rangle_\tau}$$

Mandelstam-Tamm quantum speed limit の再導出

- Fubini-Study metric

$$g_{\mathrm{FS}} = \langle \partial_t \psi_t | (1 - |\psi_t\rangle\langle\psi_t|) | \partial_t \psi_t \rangle$$

- Schrodinger equation

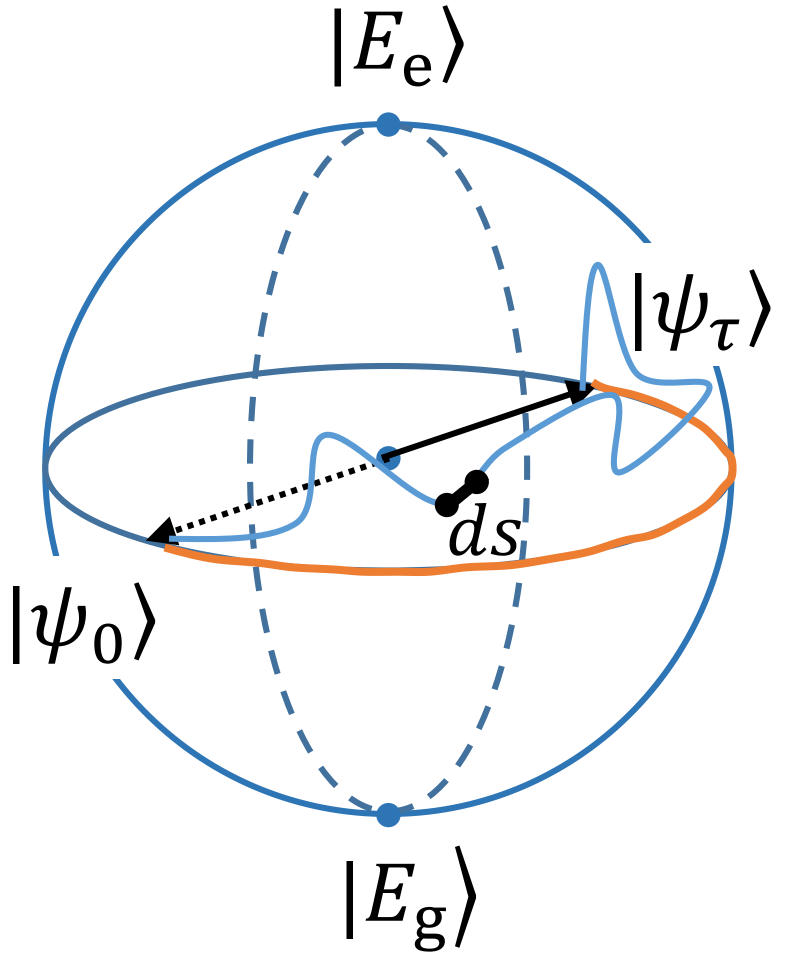
$$\partial_t |\psi_t\rangle = -\frac{i}{\hbar} H(t) |\psi_t\rangle$$

状態が移り変わるスピード

$$v = \sqrt{g_{\mathrm{FS}}} = \frac{\Delta H(t)}{\hbar}$$

quantum speed limit

$$\tau \geq \frac{\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)}{\langle v \rangle_\tau} \rightarrow \tau \geq \frac{\mathcal{L}(|\psi_0\rangle, |\psi_\tau\rangle)}{\langle \Delta H \rangle_\tau}$$



quantum speed limits：一般の場合

$$\mathcal{L} = \cos^{-1}\sqrt{\mathcal{F}} \leq \int dt\,\sqrt{g} = \tau \cdot \langle v \rangle_\tau$$

	状態のオーバーラップ $\sqrt{\mathcal{F}}$	曲率 g
純粋状態	fidelity: $\lvert\langle\phi\vert\psi\rangle\rvert$	Fubini-Study metric
混合状態	Uhlmann fidelity: $\mathrm{Tr}\left[\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}\right]$ quantum affinity: $\mathrm{Tr}\left[\sqrt{\rho}\sqrt{\sigma}\right]$	quantum Fisher information metric Wigner-Yanase information metric
古典確率分布	Bhattacharyya coefficients: $\sum_i \sqrt{p_i q_i}$	classical Fisher information metric

quantum speed limits：一般の場合

$$\mathcal{L} = \cos^{-1}\sqrt{\mathcal{F}} \leq \int dt\,\sqrt{g} = \tau \cdot \langle v \rangle_\tau$$

	状態のオーバーラップ $\sqrt{\mathcal{F}}$	曲率 g
純粋状態	fidelity: $|\langle\phi|\psi\rangle|$	Fubini-Study metric
混合状態	Uhlmann fidelity: $\mathrm{Tr}\left[\sqrt{\sqrt{\rho}\sigma\sqrt{\rho}}\right]$ qu	quantum Fisher information metric Wigner-Yanase information metric
古典確率分布	Bh $\sum$	classical Fisher information metric

孤立量子系（Schrodinger eq.）の場合エネルギーゆらぎと結びつく
→ Mandelstam-Tamm quantum speed limit の一般化

quantum speed limits：一般の場合

$$\mathcal{L} = \cos^{-1}\sqrt{\mathcal{F}} \leq \int dt\,\sqrt{g} = \tau\cdot\langle v\rangle_\tau$$

時間発展のジェネレーターの情報

- Schrodinger equation

  MT-type quantum speed limits

- quantum master equation

  speed limits in open systems

- Liouville equation, etc.

  classical speed limits

L. Mandelstam and I. Tamm, *J. Phys*. (1945)
G. N. Fleming, *Nuovo Cimento A* (1973)
J. Anandan and Y. Aharanov, *PRL* (1990)

A. del Campo, et. al., *PRL* (2013)
M. M. Taddei, et. al., *PRL* (2013)
S. Deffner and E. Lutz, *PRL* (2013)

S. Deffner, *NJP* (2017)
M. Okuyama and M. Ohzeki, *PRL* (2018)
B. Shanahan, et. al., *PRL* (2018)

目次

- ハイゼンベルクの不確定性関係とQuantum speed limit
- Geometricなアプローチ
- 最近の進展
  - Classical speed limit
  - Shortcuts to adiabaticityへの応用

quantum speed limits の応用

- マルコフジャンプ過程の classical speed limit

S. Ito, arXiv:1712.04311, N. Shiraishi, et. al., arXiv:1802.06554

- 非マルコフ過程, 量子コヒーレンスの効果

- 量子計算、情報消去と speed limit

R. Gaudenzi, et. al., arXiv:1703.04607

- shortcuts to adiabaticity との関係

KF, et. al., PRL (2017)

A. C. Santos and M. S. Sarandy, Sci. Rep. (2015), S. Campbell and S. Deffner, PRL (2017)

- quantum metrology との関係

quantum speed limits の応用

・マルコフジャンプ過程の classical speed limit

N. Shiraishi, KF, K. Saito, arXiv:1802.06554

$$\tau \geq \frac{L(\boldsymbol{p}_0, \boldsymbol{p}_\tau)^2}{2\Sigma\langle A\rangle_\tau}$$

variation distance

$$L(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{p}') = \sum_i |p_i - p_i'|$$

・エントロピー生成

熱力学プロセスの不可逆性を特徴づける量

・アクティビティ

状態がどれくらい頻繁に変化するかを特徴づける量

quantum speed limits の応用

- マルコフジャンプ過程の classical speed limit

S. Ito, arXiv:1712.04311, N. Shiraishi, et. al., arXiv:1802.06554

- 非マルコフ過程, 量子コヒーレンスの効果

- 量子計算、情報消去と speed limit

R. Gaudenzi, et. al., arXiv:1703.04607

- shortcuts to adiabaticity との関係

KF, et. al., PRL (2017)

A. C. Santos and M. S. Sarandy, Sci. Rep. (2015), S. Campbell and S. Deffner, PRL (2017)

- quantum metrology との関係

Universal work fluctuations along shortcuts to adiabaticity

in collaboration with:

Jin-Ning Zhang (Tsinghua University)

Cyril Chatou (Universite Paris)

Kihwan Kim (Tsinghua University)

Masahito Ueda (University of Tokyo, RIKEN CEMS)

Adolfo del Campo (Umass Boston)

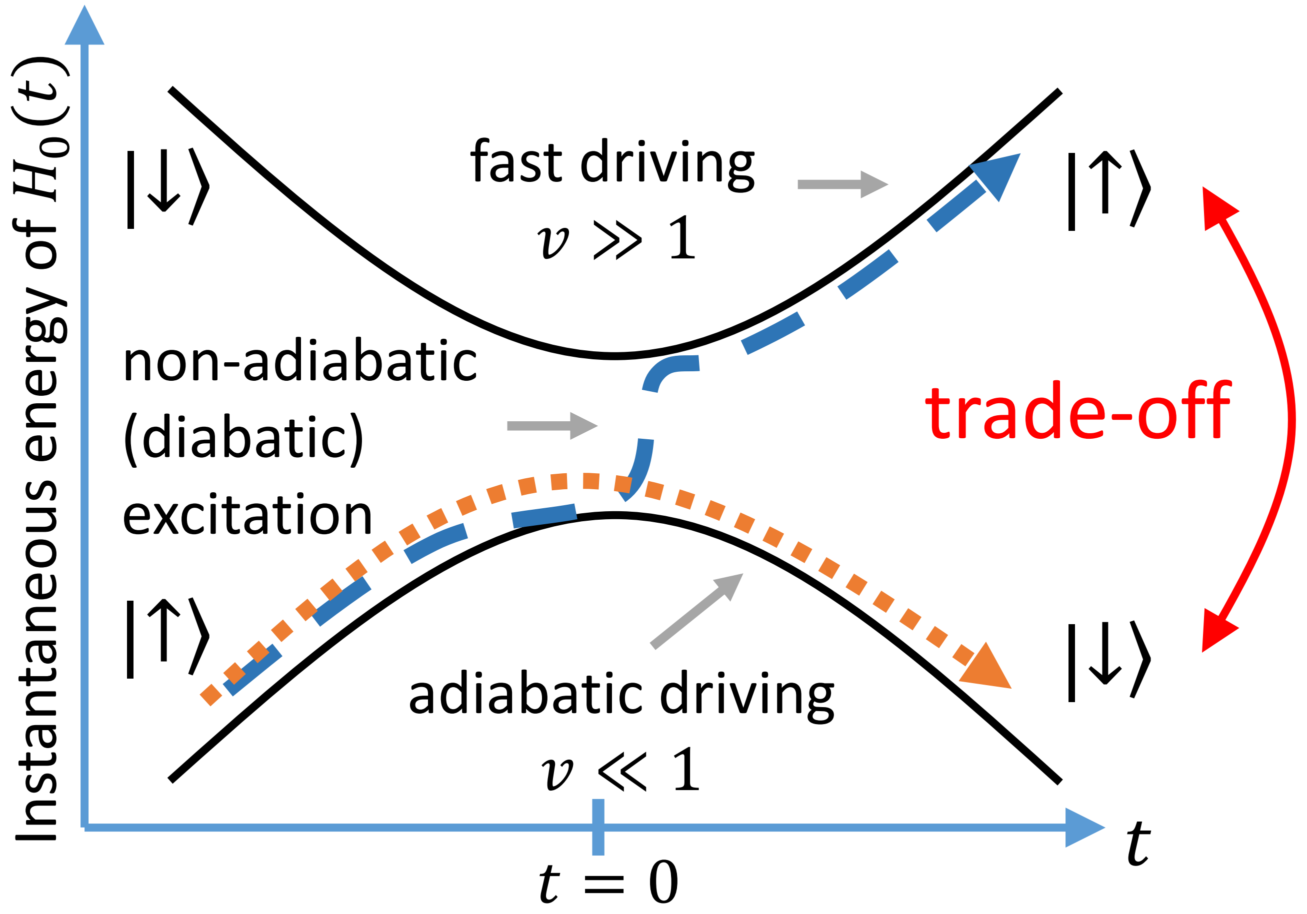
Funo, et al., *PRL **118**, 100602 (2017)*

Trade-off between efficiency and protocol time

$$H_0(t_i) \xrightarrow{\text{driving}} H_0(t_f)$$

ex. Landau-Zener Hamiltonian

$$H_0(t) = \frac{vt}{2}\sigma_z + \frac{\Delta_0}{2}\sigma_x$$



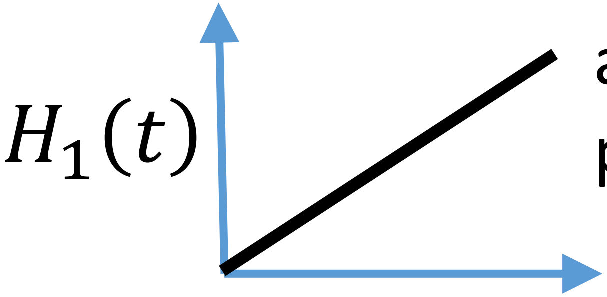
Quantum adiabatic dynamics in a finite time
- Shortcuts to adiabaticity

original Hamiltonian

$$H_0(t) = \frac{vt}{2}\sigma_z + \frac{\Delta_0}{2}\sigma_x$$

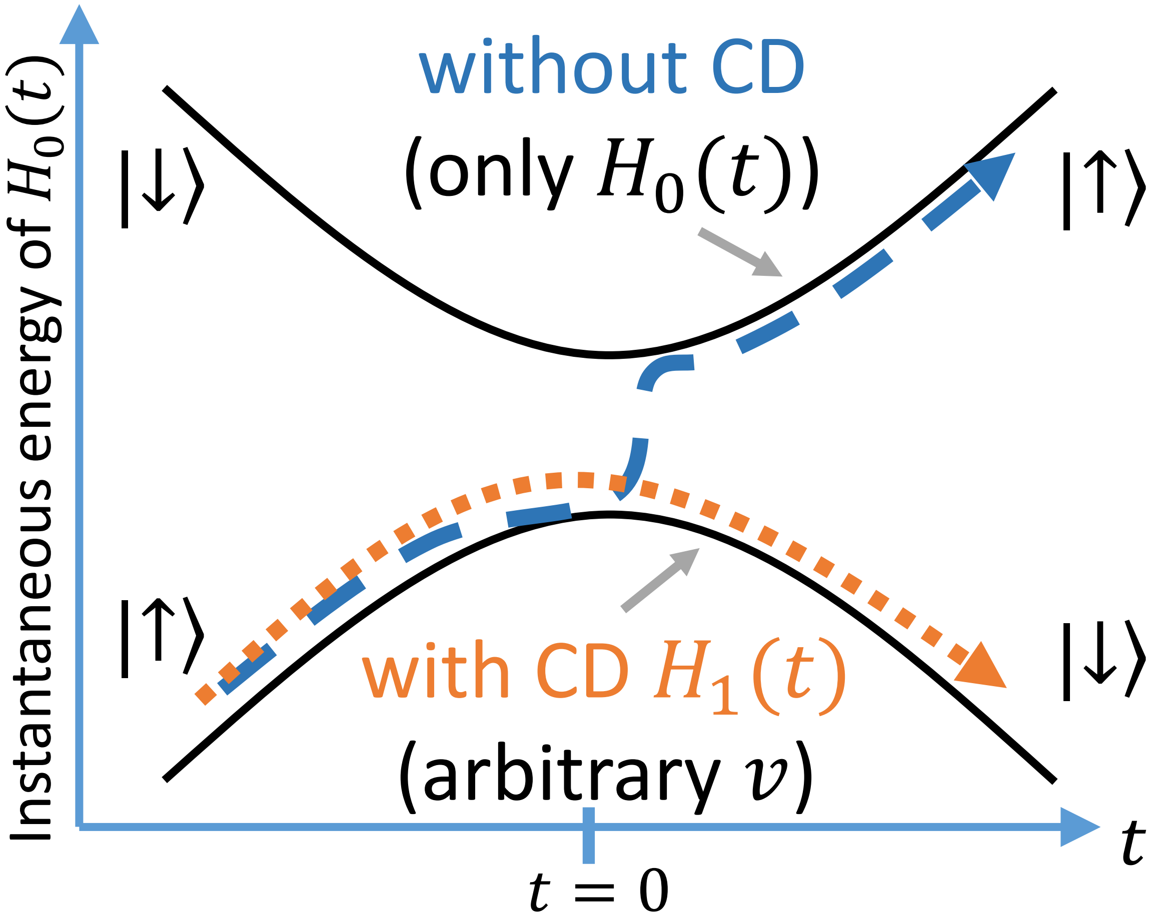
add *Counter-Diabatic* (CD) field

$$H_1(t) = \frac{\Delta_0 v/2}{\Delta_0^2 + v^2 t^2}\sigma_y$$



at minimum gap point ($t = 0$)

v: driving speed



Counter-Diabatic field: 一般の場合

Task: find $\hat{H}_{CD} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ which generates the *adiabatic* time-evolution

$$\hat{U}_{\mathrm{CD}}(t,0) = \sum_n e^{-\frac{i}{\hbar}\int_0^t dt' \epsilon_n(\lambda_{t'})} e^{i\theta_n} |n(\lambda_t)\rangle\langle n(\lambda_0)|$$

$|n\rangle$: energy eigenstates of $\hat{H}_0(\lambda_t)$

$i\theta_n = -\langle n|\partial_t n\rangle$: geometric phase

$$\hat{H}_{\mathrm{CD}}(\lambda_t) = i\hbar \left[\partial_t \hat{U}_{\mathrm{CD}}(t,0)\right] \hat{U}^\dagger_{\mathrm{CD}}(t,0)$$

$$= \underbrace{\sum_n \epsilon_n(\lambda_t)|n\rangle\langle n|}_{\text{original Hamiltonian } \hat{H}_0(\lambda_t)} + \underbrace{i\hbar \sum_n \left[|\partial_t n\rangle\langle n| + i\theta_n |n\rangle\langle n|\right]}_{\text{Counter-Diabatic field } \hat{H}_1(\lambda_t)}$$

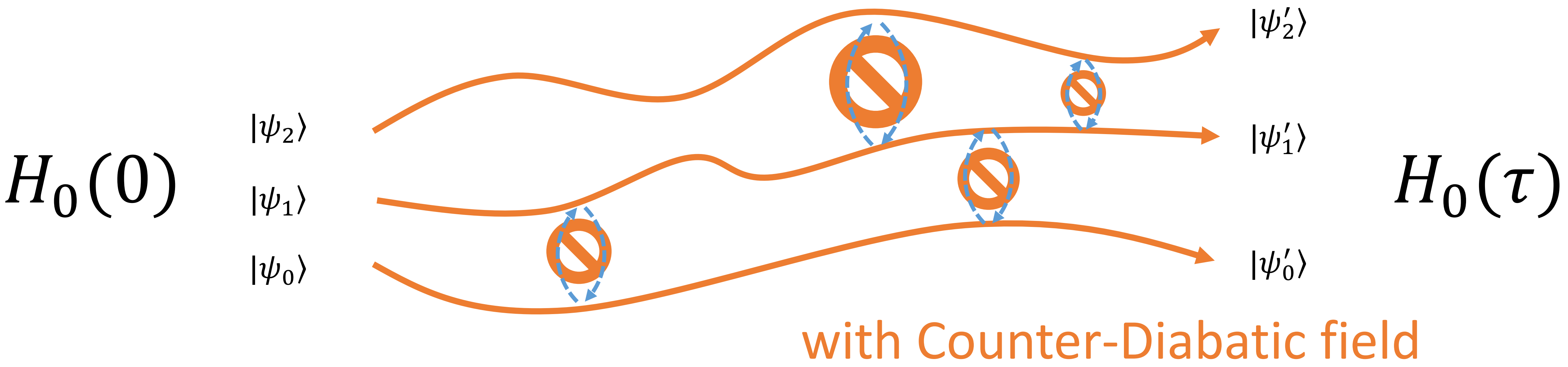
Quantum adiabaticity in finite time
- Shortcuts to adiabaticity

Shortcuts to adiabaticity

- Transitionless quantum driving
- Counterdiabatic driving (CD)

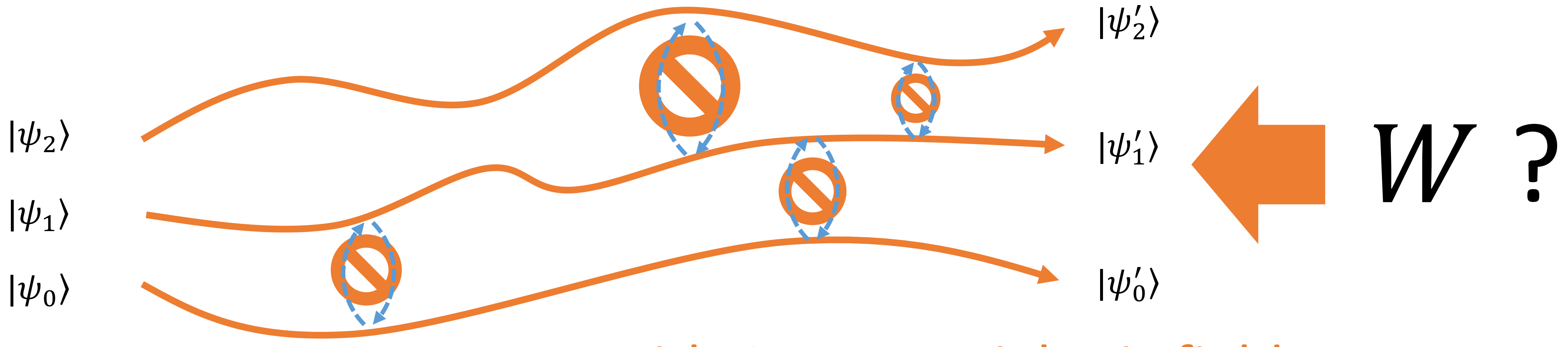
Demirplak and Rice, J. Phys. Chem. A **107**, 9937 (2003)
Berry, J. Phys. A: Math. Theor. **42**, 365303 (2009)
Chen, *et. al.*, PRL **104,** 063002 (2010)
del Campo, PRL **111,** 100502 (2013)

✓有限時間で量子断熱時間発展をショートカットできる



Aim of this study

断熱時間発展をショートカットしたときに余分に必要な仕事?



with Counter-Diabatic field

Setup: $\hat{H}_{\mathrm{CD}}(\lambda_t) = \hat{H}_0(\lambda_t) + \hat{H}_1(\lambda_t)$

counterdiabatic field is switched off at the initial and final stages

$$\widehat{H}_1(\lambda_0) = \widehat{H}_1(\lambda_f) = 0$$

Counter-Diabatic driving を行った時の仕事

- Two-point energy measurements

initial energy

$$W_{n\to k} = E_k(t) - E_n(0)$$

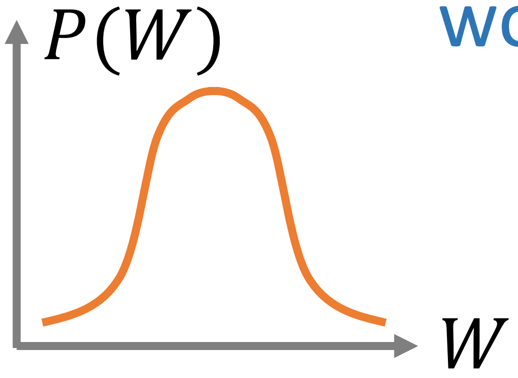
eigenenergy of $H_{\mathrm{CD}} = H_0 + H_1$
at time t

transition probability

$$p^t_{n\to k} = |\langle E_k(t)|U_t|E_n(0)\rangle|^2$$

initial Gibbs distribution

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n(0)}}{Z(0)}$$



work probability distribution

$$P[W(t)]_{\mathrm{CD}} = \sum_{n,k} p_n p^t_{n\to k}\delta(W(t) - W_{n\to k})$$

adiabatic driving を行ったときの仕事

Counter-Diabatic driving

$$P[W(t)]_{\mathrm{CD}} = \sum_{n,k} p_n p^t_{n\to k} \delta(W(t) - W_{n\to k})$$

adiabatic driving ($H_{CD} \to H_0$):

eigenenergy of $H_{\mathrm{CD}} = H_0 + \cancel{H_1}$

eigenenergy of H_0

- no excitations: $p^t_{n\to k} \to \delta_{n,k}$
- control field vanishes: $E_k(t) \to \epsilon_k(t)$

$$P[W(t)]_{\mathrm{ad}} = \sum_{n} p_n \delta(W(t) - [\epsilon_n(t) - \epsilon_n(0)])$$

Main result 1: Work fluctuations under CD

- 仕事の期待値は変化しない

$$\langle W(t)\rangle_{\mathrm{CD}} = \langle W(t)\rangle_{\mathrm{ad}}$$

任意の時間で成立：

$0 \le t \le \tau$

- 仕事ゆらぎはエンハンスされる

$$\mathrm{Var}[W(t)]_{\mathrm{CD}} = \mathrm{Var}[W(t)]_{\mathrm{ad}} + \hbar^2 \sum_n p_n g_{\mathrm{FS}}^{(n)}$$

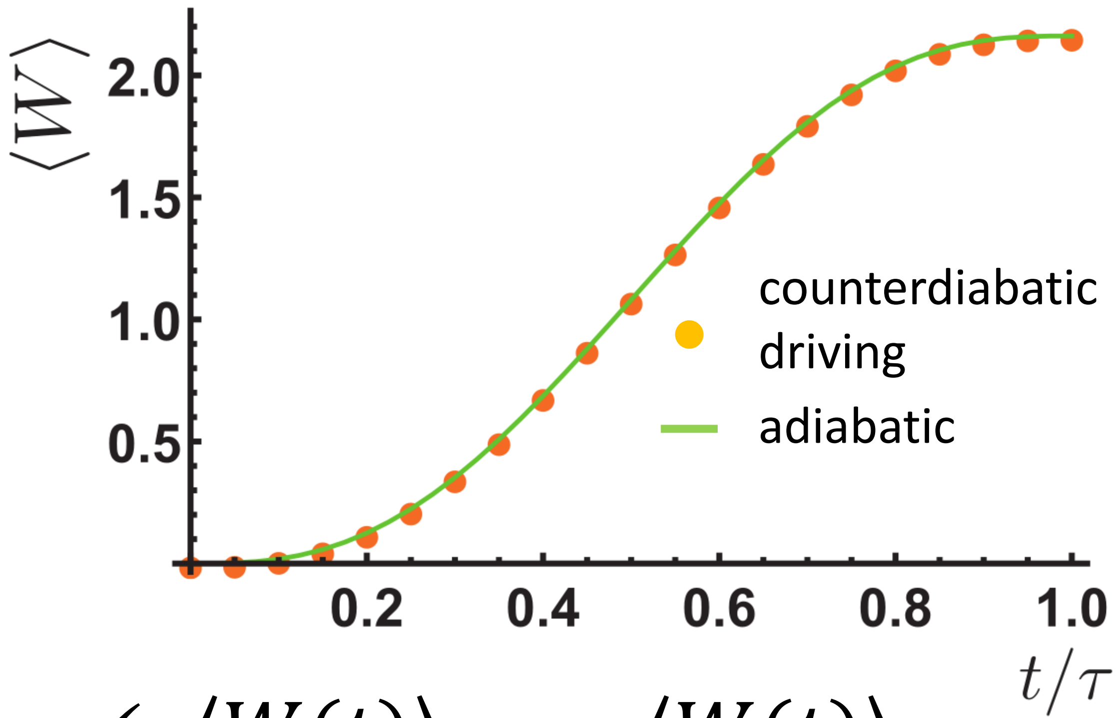
Fubini-Study metric

$$g_{\mathrm{FS}}^{(n)} = \langle \partial_t \epsilon_n(t)|(1 - |\epsilon_n(t)\rangle\langle\epsilon_n(t)|)|\partial_t \epsilon_n(t)\rangle$$

H_0 の固有状態

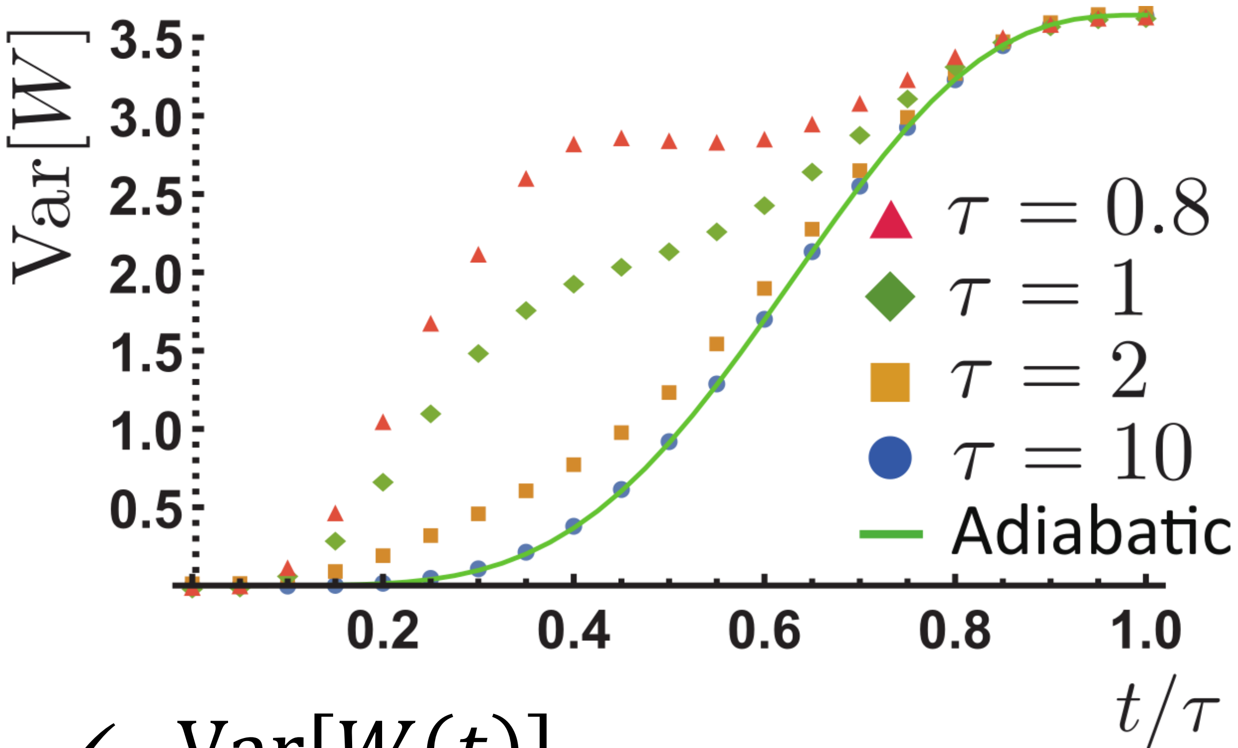
具体例:調和振動子

- work expectation value



✓ $\langle W(t) \rangle_{\mathrm{CD}} = \langle W(t) \rangle_{\mathrm{ad}}$

- work variance



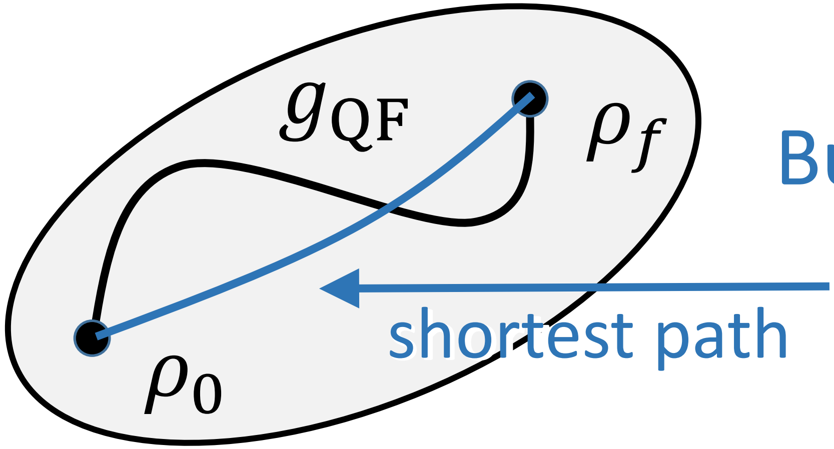
✓ $\mathrm{Var}[W(t)]_{\mathrm{CD}}$

$$= \mathrm{Var}[W(t)]_{\mathrm{ad}} + \hbar^2 \sum_n p_n g_{\mathrm{FS}}^{(n)}$$

Work fluctuations and minimum length

- quantum Fisher information との関係

$$\sum_n p_n g_{\mathrm{FS}}^{(n)} \geq g_{\mathrm{QF}}$$



Bures length:

$$\mathcal{L}(\rho_0, \rho_f) = \arccos\left(\mathrm{Tr}[(\sqrt{\rho_0}\rho_f\sqrt{\rho_0})^{1/2}]\right)$$

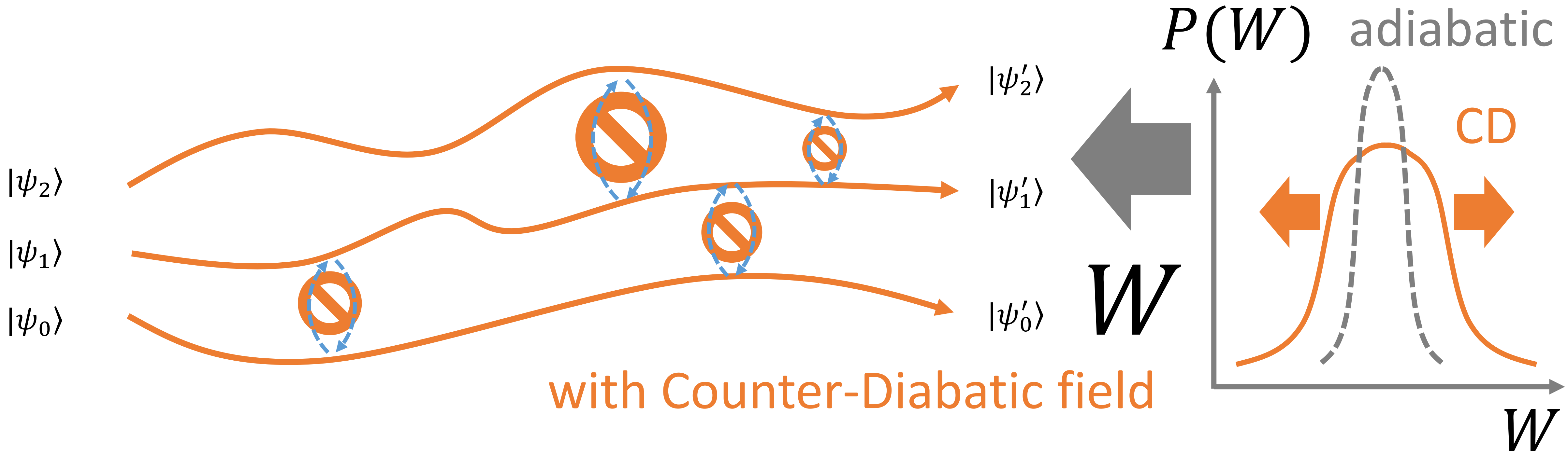
仕事ゆらぎの差分 $(\delta\Delta W)^2 = \mathrm{Var}[W(t)]_{\mathrm{CD}} - \mathrm{Var}[W(t)]_{\mathrm{ad}}$ と最小距離

$$\frac{\tau}{\hbar}\langle\delta\Delta W\rangle_\tau \coloneqq \frac{\tau}{\hbar}\cdot\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \delta\Delta W dt = \int_0^\tau \sqrt{\sum_n p_n g_{\mathrm{FS}}^{(n)}}\, dt \geq \mathcal{L}(\rho_0, \rho_\tau)$$

Main result 2: Time-work uncertainty relation

operation time $\tau \leftrightarrow$ work fluctuations

$$\tau \geq \frac{\hbar \mathcal{L}(\rho_0, \rho_f)}{\langle \delta \Delta W \rangle_\tau} \geq \frac{\hbar \mathcal{L}(\rho_0, \rho_f)}{\langle \Delta E_{CD} \rangle_\tau}$$



Conclusion

quantum speed limit

$$\tau \geq \tau_{\mathrm{QSL}} = \max\left\{\frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\Delta H}, \frac{\pi}{2}\frac{\hbar}{\langle H\rangle - E_{\mathrm{g}}}\right\}$$

- 幾何学的手法との関係

$$\tau \geq \tau_{\mathrm{QSL}} = \frac{\mathcal{L}}{\left\langle\sqrt{g}\right\rangle_\tau} = \frac{\mathcal{L}}{\langle v\rangle_\tau}$$

- 応用 : Markov jump processes, shortcuts to adiabaticity