

統計物理学懇談会

数値相対論と 連星中性子星からの重力波

関口 雄一郎 (東邦大学)

一般相対性理論と時空計量

重力波

アインシュタイン方程式

数値相対論の開拓・展開

連星中性子星合体



一般相対性理論と時空の計量

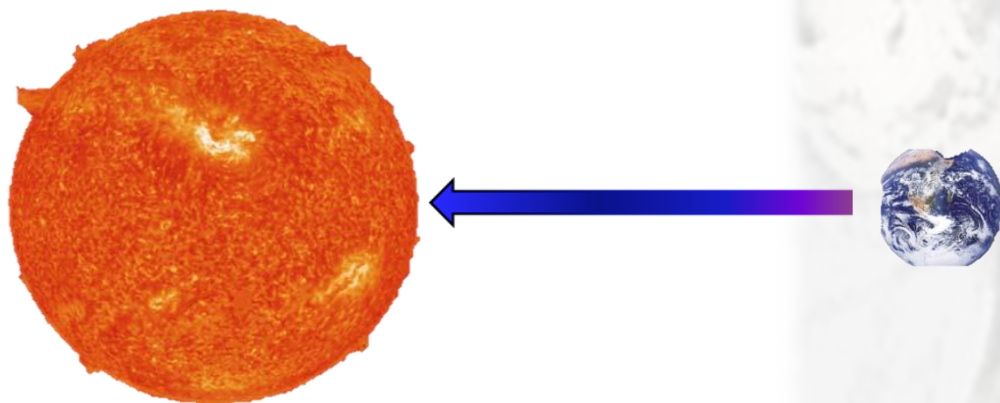


ニュートン理論における重力描像

- ▶ 地球には「重力が作用して(働いて)」太陽の周りを公転

総てのものはお互いに引きつけあう
例えば地球と地球の上にあるもの
手を放すともものは落ちる

アイザック・ニュートン「プリンキピア第3巻(万有引力の法則)」(1687年)



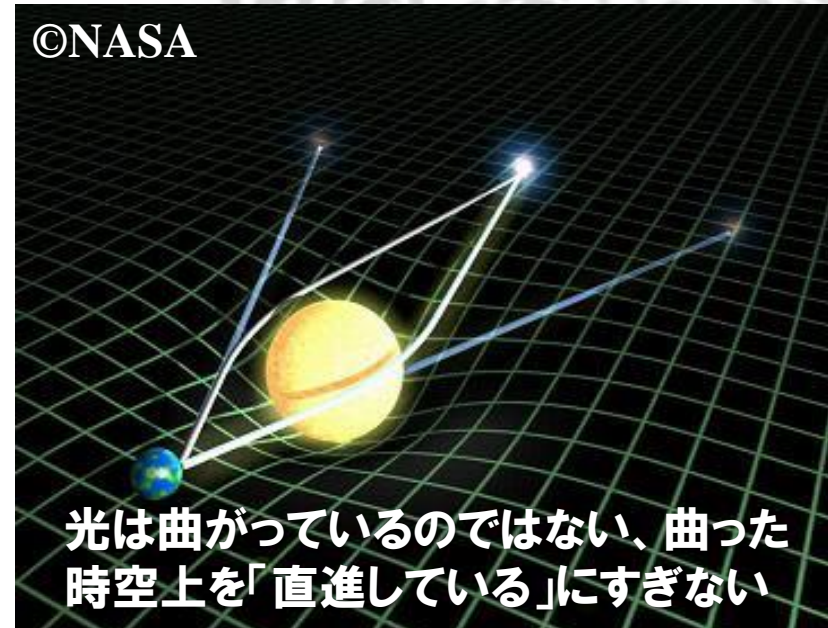
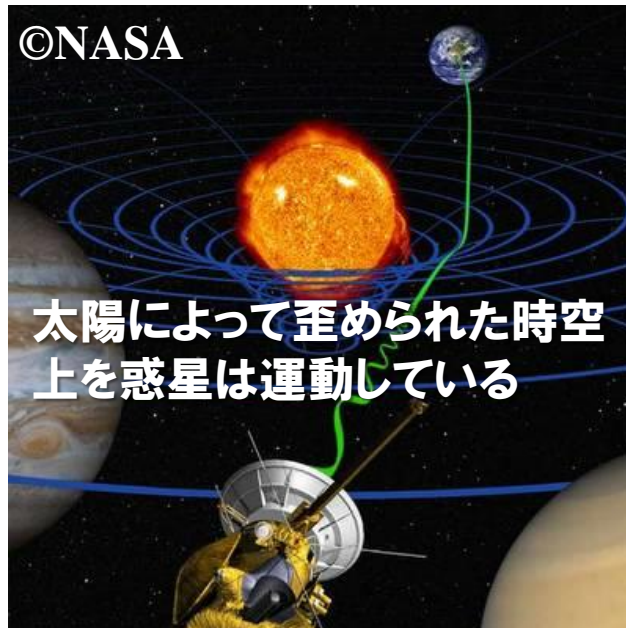
一般相対性理論における重力描像

- ▶ **重力の再解釈： 太陽が存在することで時空が曲がり、地球はその曲がった時空の上を運動している**

重力は時空(空間と時間)の曲がりである

物体によって時空は曲がり その中を進む物体の軌道が曲がる

アルバート・アインシュタイン「一般相対性理論」(1915年)



時空計量：時空の曲がり(重力)の正体

▶ 時空の幾何学的性質(重力)は時空計量にすべて含まれる

- ▶ 計量は内積を与えるものとして特徴づけられる

$$V^\alpha (e_\alpha)^a \cdot W^\beta (e_\beta)^a = V^\alpha W^\beta g_{\alpha\beta} \Rightarrow g_{\alpha\beta} = (e_\alpha)^a \cdot (e_\beta)^a$$

- ▶ 平坦時空の(曲線座標系の)場合、基底ベクトルの内積が計量の成分を与える
- ▶ 曲がった時空では「内積」を計量が定義する

- ▶ 数学的には計量は (0,2)テンソル： $V \otimes V \Rightarrow \mathbb{R}$

- ▶ $g(V, W) = g_{ab} V^a W^b = g_{\alpha\beta} V^\mu W^\nu (e_\mu)^\alpha (\xi^\alpha)_a (e_\nu)^\beta (\xi^\beta)_b = g_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta$

- $g_{ab} = g_{\alpha\beta} (\xi^\alpha)_a (\xi^\beta)_b$, $(e_\mu)^\alpha (\xi^\alpha)_a = \delta_\mu^a$, $(\xi^\alpha)_a$: dual basis

▶ 時空計量は時空版「三平方の定理」を定義する といってもよい

- ▶ 2次元空間距離： $dr^2 = dx^2 + dy^2$

- $g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

- ▶ 空間が曲がると計量は違ったものになる

$$dr^2 = (\text{曲がりによる補正}) dx^2 + (\text{曲がりによる補正}) dy^2 + \dots$$



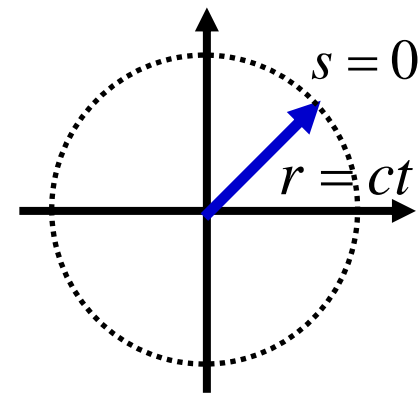
時空における「三平方の定理」

▶ 特殊相対性理論：光速度不変の原理

- ▶ 光の到達位置は観測者によらない(ローレンツ変換で不変)
- ▶ 光の進む距離が常に 0 になるように時空距離 s を定義する

$$ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2$$

- ▶ ローレンツ変換でものさしや時間の刻みが伸び縮みしても光の到達距離 $s = 0$ は不変
- ▶ **時空距離 = - 時間距離 + 空間距離**



▶ 平坦な時空(ミンコフスキー時空)の計量

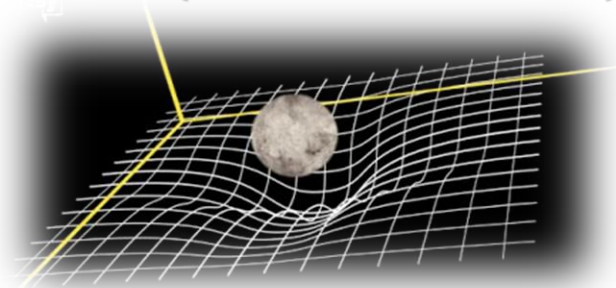
$$ds^2 = -(cdt)^2 + dr^2 = -(cdt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{tt} & g_{tx} & g_{ty} & g_{tz} \\ g_{xt} & g_{xx} & g_{xy} & g_{xz} \\ g_{yt} & g_{yx} & g_{yy} & g_{yz} \\ g_{zt} & g_{zx} & g_{zy} & g_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

曲がった時空の計量

- ▶ 一般相対性理論：曲がった時空

$$ds^2 = -(\text{曲がりによる補正}) (cdt)^2 + (\text{曲がりによる補正}) dr^2 + \dots$$

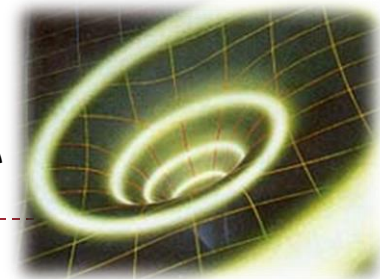


時空計量の符号が逆転して
時空距離 = + 時間距離 - 空間距離
となる場合もある(ブラックホール)

- ▶ Schwarzschild black hole 計量

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (cdt)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

- ▶ $r = \frac{2GM}{c^2}$ の内側(ブラックホール)では**時空計量の符号の逆転**が起こる
 - ▶ **時間座標 t と空間座標 r の役割が入れ替わる**
 - ▶ 因果律: 時間は遡れない $\Rightarrow r = \frac{2GM}{c^2}$ の内側では r を遡れない
 - ▶ $r = \frac{2GM}{c^2}$ は事象の地平面: 一度入ったら落ち込むことしかできない



重力波

重力(時空の曲がり)の源となる質量(エネルギー)が激しい運動をすると
時空のさざなみ(重力波)が光と同じ速さで伝わっていく

アルバート・アインシュタイン(1916年)



重力波(線形近似)

- ▶ 平坦時空上の spin 2 の場として記述(線形近似): $g_{ab} = \eta_{ab} + h_{ab}$
- ▶ 適当なゲージ条件(de Donder gauge)の下で Einstein 方程式から波動方程式を得る

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad \partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$$

- ▶ Multipole 展開 (= low velocity 展開): 最低次は四重極

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) &= \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}(t_{\text{ret}}, \mathbf{x}') & S^{ij}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) \\ \bar{h}_{ij}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) &= \frac{4G}{c^4} \frac{1}{r} \Lambda_{ij,kl} \left[S^{kl} + \frac{1}{c} n_m \dot{S}^{kl,m} + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \ddot{S}^{kl,mp} + \dots \right] & S^{ij,k}(t) &= \int d^3x T^{ij}(t, \mathbf{x}) x^k \\ h_{ij}^{\text{TT,quad}}(t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl} \ddot{M}^{kl}(t - r/c) & M^{ij}(t) &= \int d^3x T^{00}(t, \mathbf{x}) x^i x^j \end{aligned}$$

- ▶ 作用(Pauli-Fierz action)から重力波のエネルギー運動量テンソルも計算できる

$$\begin{aligned} S_G &= \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad \longrightarrow \quad S_G = -\frac{c^3}{64\pi G} \int d^4x \left[\partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial^\mu h^{\alpha\beta} - \partial_\mu h \partial^\mu h + 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\nu h - 2\partial_\mu h^{\mu\nu} \partial_\rho h^\rho_\nu \right] \\ t^{\mu\nu} &= -\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu h_{\alpha\beta})} \partial^\mu h_{\alpha\beta} + \eta^{\mu\nu} L \quad \longrightarrow \quad t^{\mu\nu} = \frac{c^3}{32\pi G} \left\langle \partial^\mu h^{\alpha\beta} \partial^\nu h_{\alpha\beta} \right\rangle \end{aligned}$$

- ▶ 幾何学的に導いた結果と場の理論的に導いた結果は基本的に一致

重力波源

- ▶ $\frac{GM}{Rc^2}$ が大きく(強重力), 動的な天体現象(球対称ではないもの)

連星ブラックホール合体



ブラックホール時空の振動

ブラックホールの誕生

連星中性子星合体

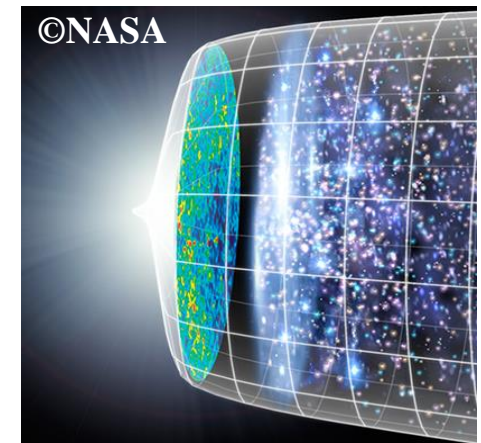


中性子星の振動

中性子星の誕生

変形した中性子星
(パルサー)の回転

初期宇宙

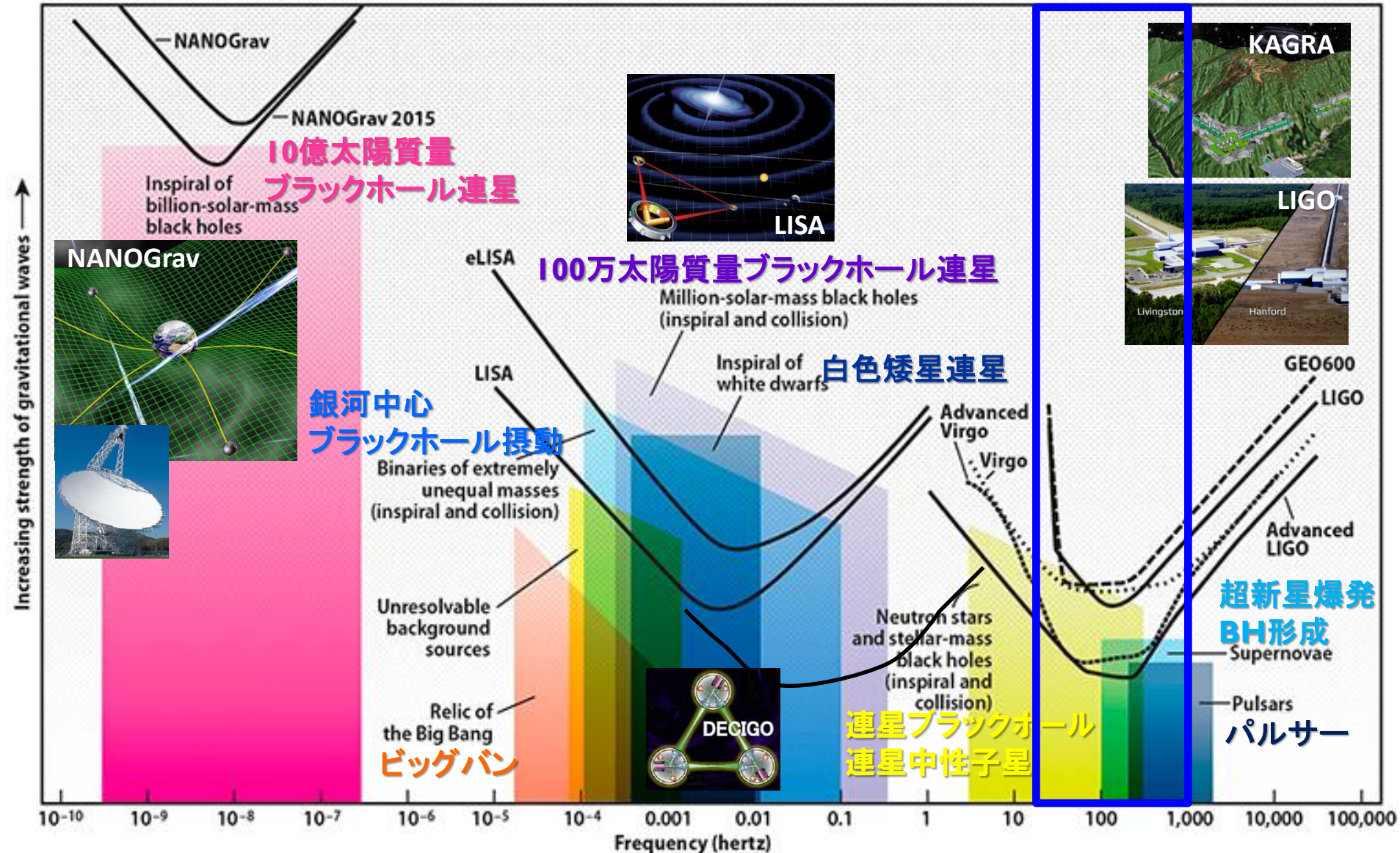


密度 = M/R^3 は小さいが、
 $M/R = \text{密度} \times R^2$ は大きい!

宇宙の平均密度: 10^{-29} g/cm³,
地平面までの距離 130億光年

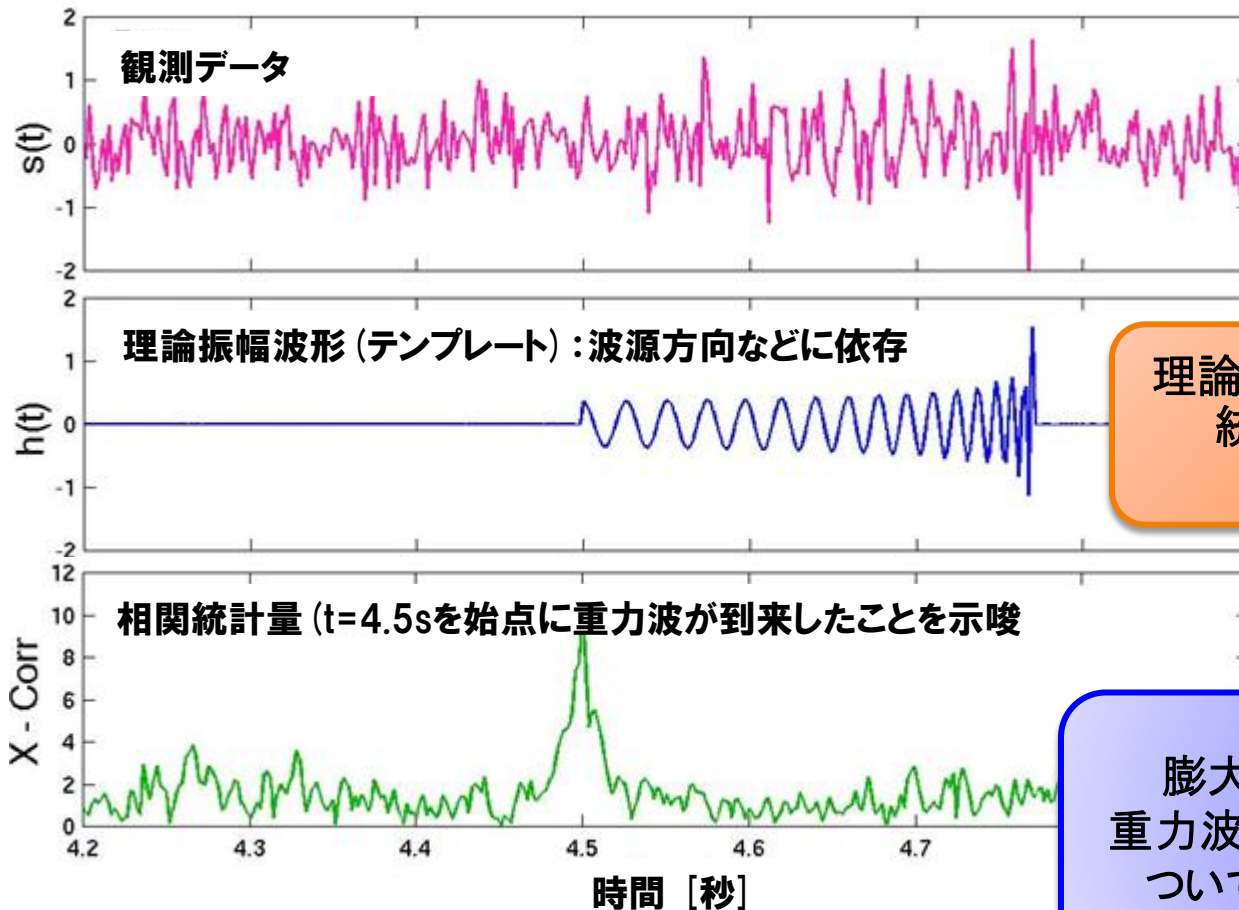
$$\Rightarrow \frac{GM}{Rc^2} \sim 1$$

天体起源の重力波と重力波検出器(計画)



重力波の検出方法

- ▶ ノイズを含むデータからの抽出：波形の理論予測（波源の理解）が必要



理論波形を用いた観測データの統計解析(Matched filter)
波源の情報の抜き取り

膨大なデータの解析が必要
重力波の到来方向や発生時間についての情報も極めて有用！

理論波形の準備 = アインシュタイン方程式を解く

▶ 重力波波形予測・天体現象説明⇒ **アインシュタイン方程式を解く必要**

自然界に知られる4つの力
(重力、電磁気力、弱い力、強い力)
全てを考慮する必要がある

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

ブラックホール時空
(特異点含)の発展
拘束系の数値発展

$\nabla_a T^{ab} = 0$
一般相対論的流体
一般相対論的磁気流体
マックスウェル方程式
ニュートリノ輸送

中性子星の内部の物理
(素粒子・原子核物理学
強い相互作用)

ニュートリノ物質相互作用
(素粒子・原子核物理学
弱い相互作用)

極めて複雑な方程式

摂動的に解く方法(PN展開)も
あるが高次までの拡張は困難

数値相対論：スーパーコンピュータも必要

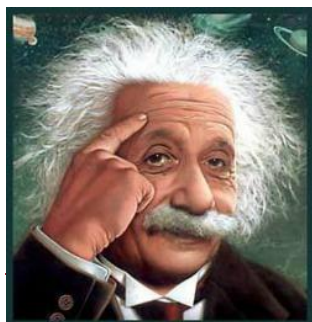
- ▶ **数値相対論**：アインシュタイン方程式を数値的に解く
 - ▶ 非常に複雑な計算であるためスーパーコンピュータが必要



IBM 7090 (1961) : 100 kflops



K computer (2011~) : 10 Pflops



ただし、計算機パワーに任せて力任せに解けるような問題ではない

アインシュタイン方程式



アインシュタイン方程式の型は何か？

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} \sum_c \sum_d g^{cd} R_{cd}$$

$$R_{ab} = \sum_c \frac{\partial}{\partial x^c} \Gamma^c_{ab} - \frac{\partial}{\partial x^a} \left[\sum_c \Gamma^c_{cb} \right] + \sum_c \sum_e \left(\Gamma^e_{ab} \Gamma^c_{ec} - \Gamma^e_{cb} \Gamma^c_{ea} \right)$$

$$\Gamma^c_{ab} = \frac{1}{2} \sum_d g^{cd} \left[\frac{\partial g_{bd}}{\partial x^a} + \frac{\partial g_{ad}}{\partial x^b} - \frac{\partial g_{ab}}{\partial x^d} \right]$$

時空計量 g_{ab} に関する2階偏微分方程式

時間微分と空間微分が入り混じった複雑な形をしている

「偏微分方程式の型」が明らかではない

⇒ アインシュタイン方程式の型が明らかになるような定式化が必要

マックスウェル方程式からの知見

▶ 特殊相対論におけるマックスウェル方程式

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 4\pi J^\nu$$

$$\sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F_*^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^x & E^y & E^z \\ -E^x & 0 & B^z & -B^y \\ -E^y & -B^z & 0 & B^x \\ -E^z & B^y & -B^x & 0 \end{pmatrix}$$

$$F_*^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & B^x & B^y & B^z \\ -B^x & 0 & -E^z & E^y \\ -B^y & E^z & 0 & -E^x \\ -B^z & -E^y & E^x & 0 \end{pmatrix}$$

▶ ベクトル方程式 (具体形を得るために方向を1つ指定)

▶ 時間方向成分 (\vec{e}_t)

$$\vec{e}_t \cdot \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \vec{e}_t \cdot 4\pi J^\nu \quad \rightarrow \quad \text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho$$

$$\vec{e}_t \cdot \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F_*^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{div } \mathbf{B} = 0$$

▶ 空間方向成分 ($\vec{e}_i : i = x, y, z$)

$$\vec{e}_i \cdot \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = \vec{e}_i \cdot 4\pi J^\nu \quad \rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\vec{e}_i \cdot \sum_{\mu=0}^3 \frac{\partial F_*^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} = 0 \quad \rightarrow \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

時間方向成分からは楕円型の微分方程式 (ガウスの法則、モノポール無し条件)

空間方向成分からは双曲型の発展方程式 (アンペールの法則、ファラデーの法則)

アインシュタイン方程式への適用

▶ アインシュタイン方程式: 2階のテンソル方程式

$$G_{ab} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{ab}$$

- ▶ 具体形を得るために方向を2つ指定
 - ▶ 時間・時間方向 \Rightarrow 重力場も含めたエネルギー保存則(楕円型)
 - ▶ 時間・空間方向 \Rightarrow 重力場も含めた運動量保存則(楕円型)
 - ▶ 空間・空間方向 \Rightarrow 重力場の発展方程式(双曲型)

相対論的マクスウェル方程式の場合と同様に、

「時間」方向を含む成分からは楕円型の微分方程式(エネルギー・運動量保存則)

「空間」方向成分からは**双曲型**の微分方程式(重力場の発展方程式)

しかし...

▶ 絶対時間・空間がない!

- ▶ 「時間発展」の「時間」とは何か? 「空間方向」の「空間」とは何か?
 - ▶ ブラックホールの例: 時間座標と空間座標が入れ替わる可能性もある





John von Neumann

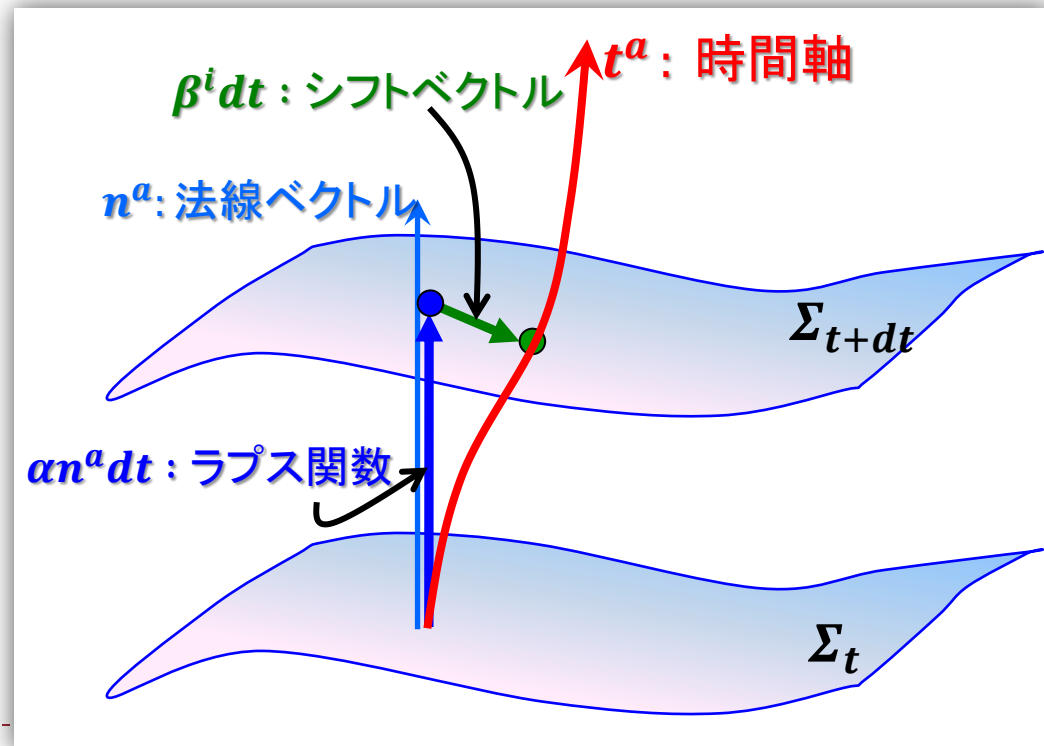
“非線形問題の解法として、高速電子計算機を用いる時代が必ず到来する”

数値相対論の開拓



時間軸と空間軸の導入 (一般共変性)

- ▶ 時間方向と空間方向を計算者が指定することが必要
 - ▶ 初期空間 Σ_t を用意する(初期条件) \Rightarrow 法線ベクトル n^a が定まる
 - ▶ 空間の各点での時間の進ませ方の自由度 : α (ラプス関数)
 - ▶ ニュートン理論では時間の進み方は一様
 - ▶ 時間軸を空間方向に曲げる自由度 : β^a (シフトベクトル)
 - ▶ ニュートン理論では時間軸は時間一定面に垂直
- ▶ 時間軸 : $t^a = \alpha n^a + \beta^a$
- ▶ 次の空間 Σ_{t+dt} を用意することができる(逐次的に)
- ▶ α, β^a をどのように決めるかは重要な問題(後述)

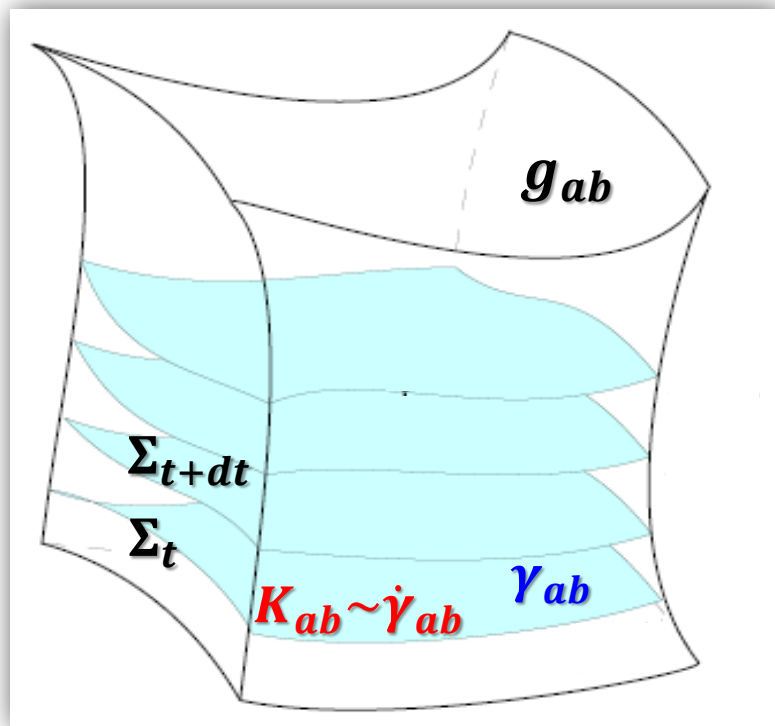


「時空をつくりだす」とはどういうことか？

- ▶ $(\alpha, \beta^a$ が与えられれば) 初期条件から未来の空間 Σ_{t+dt} が求められる
 - ▶ Σ_t の空間計量 γ_{ab} が初期条件として与えられる
 - ▶ アインシュタイン方程式は時間について2階の微分方程式 $\Rightarrow \gamma_{ab}$ の「速度」 $K_{ab} \sim \dot{\gamma}_{ab}$ (外的曲率と呼ばれる) も初期条件として与える

- ▶ 時空の幾何学のすべては時空計量 g_{ab} が担っている

- ▶ 初期条件 $\Sigma_t, \gamma_{ab}, K_{ab}$ を与え
 - ▶ α, β^a を指定する処方箋も必要
- ▶ それらから時空計量を計算することができれば「時空を作り出した」ことになる
- ▶ 未来の γ_{ab}, K_{ab} を計算するための方程式がアインシュタイン方程式
 - ▶ 拘束条件 + 発展方程式 (後述)



Einstein 方程式の 3+1 分解

▶ **ADM 形式** (Arnowitt, Deser & Misner 1962; York 1978)

▶ 微分幾何でよく知られている関係式を利用

$$\begin{aligned} \perp R_{abcd}^{(4)} &= R_{abcd} + K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{bc} \quad (\text{Gauss's equation}) \\ \perp R_{abc}^{(4)d} n_d &= D_b K_{ac} - D_a K_{bc} \quad (\text{Codazzi's equation}) \\ \perp R_{abc}^{(4)d} n^c n_d &= \mathcal{L}_n K_{ab} + K_{ac}K_b^c + a_a a_b + D_a a_b \quad (\text{Ricci's equation}) \end{aligned}$$

D_a : covariant derivative
w. r. t γ_{ab}

$$\perp_a^b = \delta_a^b + n^a n_b$$

$$a_b = n^a \nabla_a n_b$$

▶ Einstein 方程式の 3+1 分解 : **拘束条件** + **発展方程式**

$$\begin{aligned} G_{ab} n^a n^b = 8\pi T_{ab} n^a n^b &\longrightarrow R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E \quad (\text{Hamiltonian constraint}) \\ \perp G_{ab} n^a = 8\pi \perp T_{ab} n^a &\longrightarrow D_j (K^{ij} - \gamma^{ij} K) = 8\pi J^i \quad (\text{Momentum constraint}) \\ \perp G_{ab} = 8\pi \perp T_{ab} &\longrightarrow (\partial_t - \mathcal{L}_\beta) K_{ij} = -D_i D_j \alpha + \alpha (R_{ij} - 2K_{ik} K_j^k + K K_{ij}) \\ &\quad + 4\pi \alpha (\gamma_{ij} (S - E) - 2S_{ij}) \quad (K_{ab} \text{ 発展方程式}) \end{aligned}$$

$$E = T_{ab} n^a n^b, \quad J_b = \perp T_{ab} n^a, \quad S_{ab} = \perp T_{ab}$$

▶ K_{ab} の定義式

$$(\partial_t - \mathcal{L}_\beta) \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} \quad (\gamma_{ab} \text{ 発展方程式})$$

\mathcal{L} : Lie derivative

$K = \text{tr}K, \quad S = \text{tr}S$

時空計量 g_{ab} の構築

▶ 時空版「三平方の定理」が定義できればよい

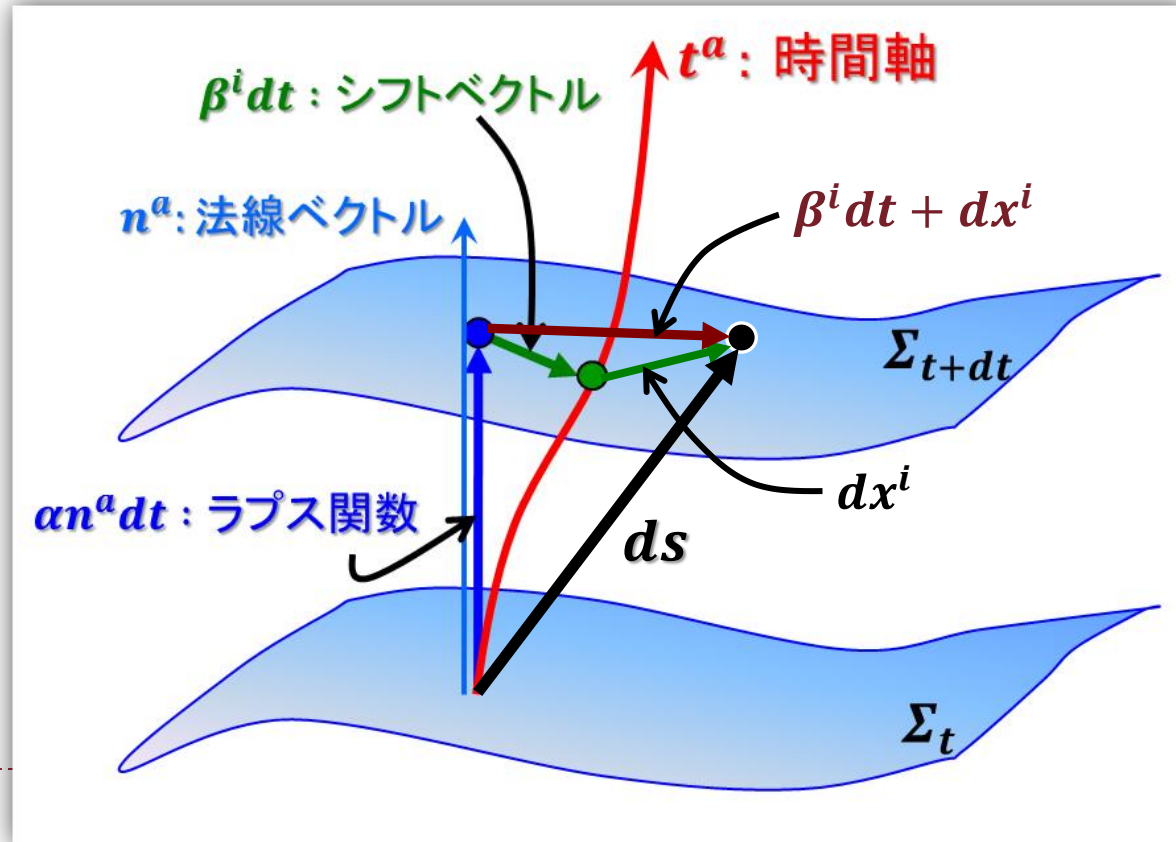
- ▶ 時間軸から dx^i 離れた点を考える
- ▶ 法線軸からの変位は $\beta^i dt + dx^i$

$$ds^2 = -(\alpha dt)^2 + \gamma_{ij}(\beta^i dt + dx^i)(\beta^j dt + dx^j)$$

▶ 時空距離 ds を計算:

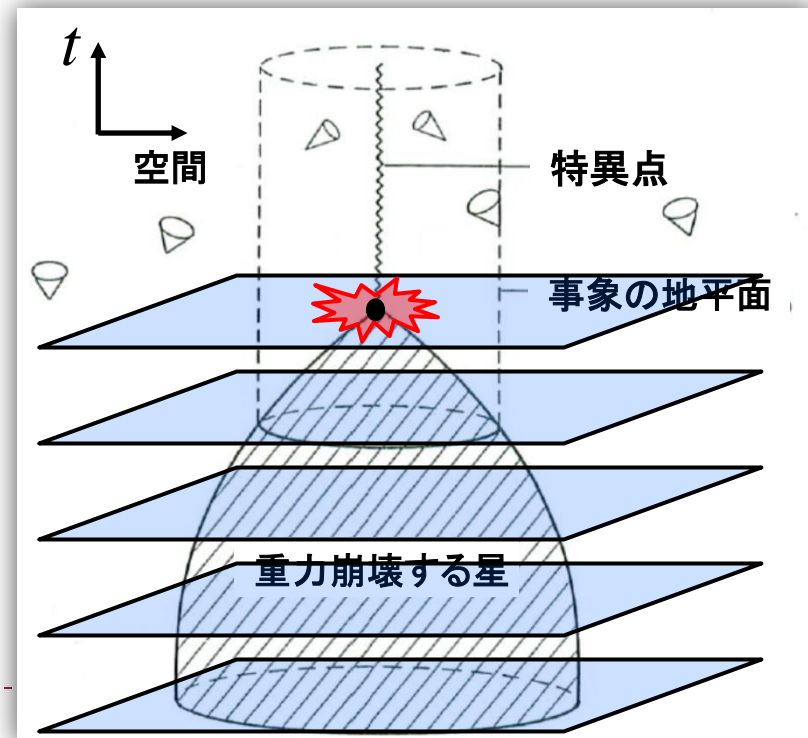
- ▶ 「三平方の定理」が定義できる
- ▶ $\alpha, \beta^a, \gamma_{ab}$ から時空計量 g_{ab} を構築可能

あとはどのように
 α (ラプス関数),
 β^a (シフトベクトル)
を選ぶかが問題



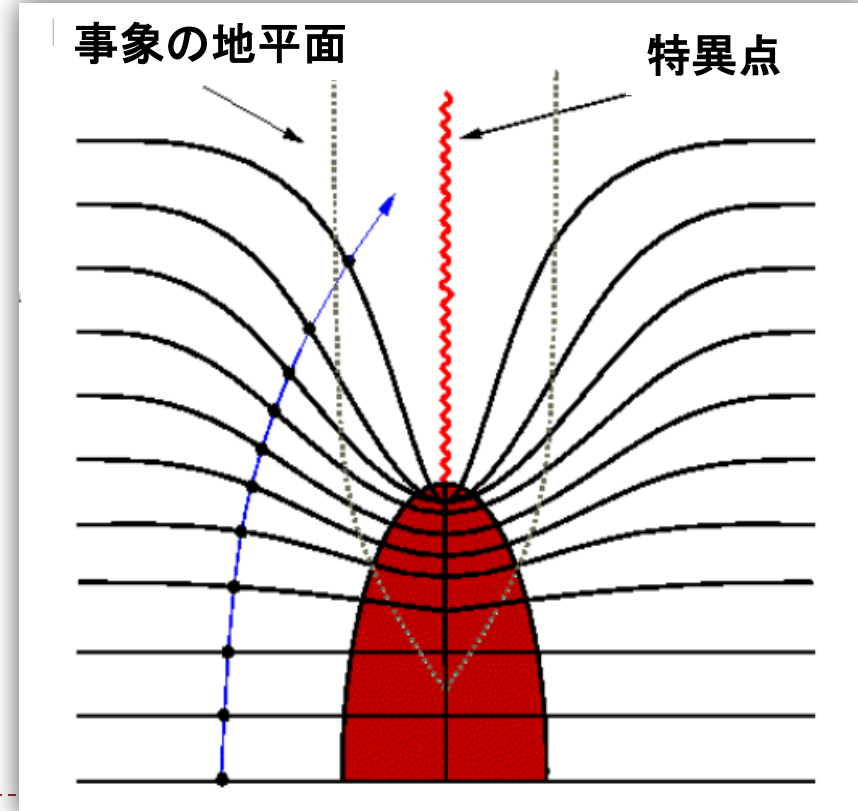
ラプス関数 α の選び方

- ▶ 数値相対論では時間軸・空間軸の指定を「厄介事」とは考えない
 - ▶ むしろシミュレーションの安定性や精確性の向上に積極的に利用
 - ▶ 定常な系が定常に見える、漸近的に平坦になる
 - ▶ ブラックホール内部まで座標特異点が存在しない
- ▶ ブラックホール内部には特異点が存在
 - ▶ 特異点定理 (ホーキング & ペンローズ 1970)
 - ▶ ラプス関数 $\alpha = 1$ の場合
 - ▶ ニュートンの絶対空間的ラプス関数
 - ▶ 特異点では物理法則が破綻するのでこれ以上シミュレーションを継続できない



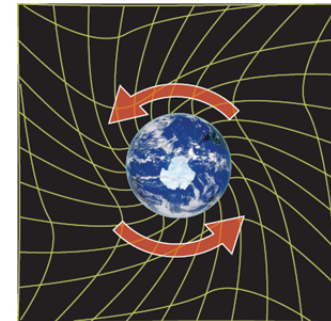
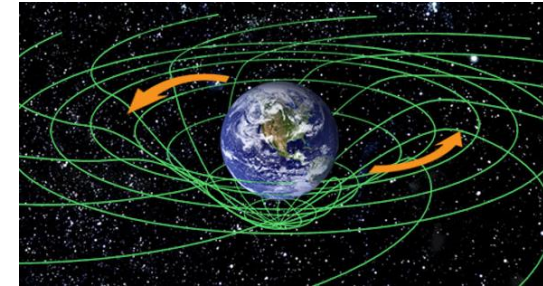
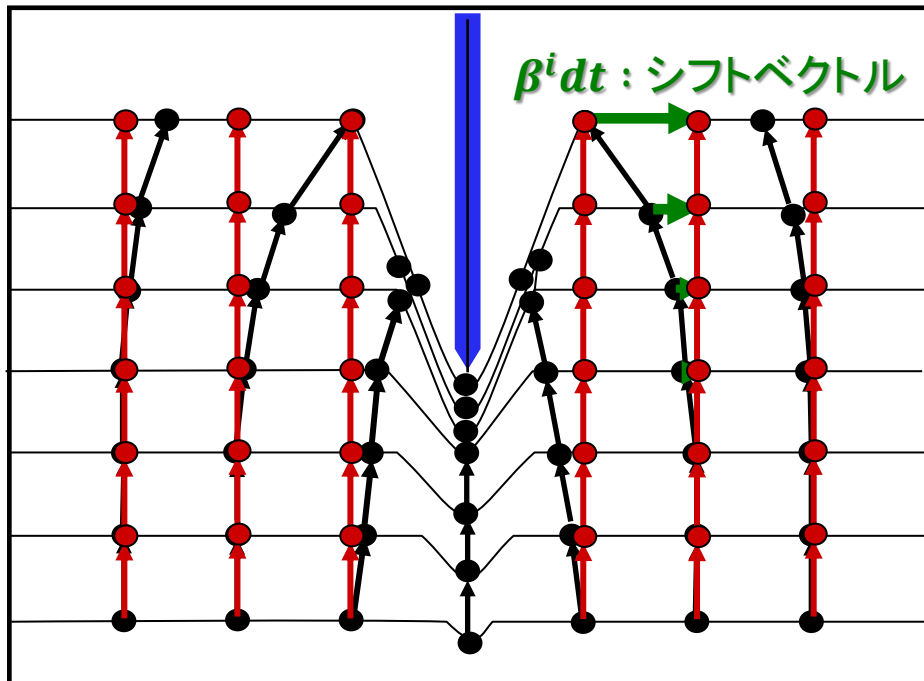
ラプス関数 α の選び方

- ▶ 例: Maximal slicing (Smarr & York 1978)
 - ▶ 3次元体積要素を極大にとることで特異点近傍の時間発展を遅くする
 - ▶ $V[S] = \int_S \sqrt{\gamma} d^3x$, $\mathcal{L}_t V[S] = - \int_S \alpha \text{tr}K \sqrt{\gamma} d^3x = 0$ (時間方向Lie微分)
 - ▶ $\text{tr}K = 0$, $\mathcal{L}_t \text{tr}K = 0$ (α に関する条件式)
 - ▶ 特異点避けて長時間シミュレーションを実行可能
 - ▶ ただし、法線ベクトルの方向が特異点へフォーカスしていく
 - ▶ やがて計算が破綻する
 - ▶ シフトベクトル β^a の利用が必要
 - ▶ Maximal slicing 条件は楕円型
 - ▶ **双曲型**の有用なラプス関数指定法が開発されている



シフトベクトル β^a の選び方

- ▶ 時間軸の歪みがシミュレーション遂行の問題
 - ▶ ブラックホール形成における n^a の歪み
 - ▶ 回転重力場における座標系の引きずり
- ▶ シフトベクトルをうまく利用することで回避



有用なシフトベクトルが
これまでに開発されている

連続体力学・弾性体力学の
知識が有効であった

時空 \leftrightarrow 弾性体

シフトベクトル β^a の選び方

▶ 例: Minimal distortion 条件 (Smarr & York 1978)

▶ unit normal vector の歪みを極小にする

- ▶ 4次元版ヘルムホルツの分解定理

$$\nabla_a n_b = \omega_{ab} + \sigma_{ab} + \frac{1}{3}\gamma_{ab}\theta - n_a a_b$$

- ▶ distortion functional

$$D[\sigma] \equiv \int \sigma^{ab} \sigma_{ab} \sqrt{\gamma} d^3x$$

- ▶ を最小化

▶ シフトベクトルに対する楕円型の方程式が得られる

$$D^c D_c \beta^a + D^a D_c \beta^c + R^{ab} \beta_b = D_b (2\alpha K^{ab, \text{TF}})$$

▶ Minimal distortion と同等の性質をもつ **双曲型** のシフトベクトル条件が開発されている

- ▶ これら座標条件は最終的には数値計算でテスト・改良されている

$$\gamma_{ab} = g_{ab} + n_a n_b \text{ (induced metric)}$$

$$\omega_{ab} = \perp \nabla_{[a} n_{b]} \text{ (twist tensor)}$$

$$\sigma_{ab} = \perp \nabla_{(a} n_{b)}^{\text{TF}} \text{ (shear tensor)}$$

$$\theta = \nabla_c n^c \text{ (expansion)}$$

$$a^b = n^c \nabla_c n^b \text{ (acceleration)}$$



黎明期の数値相対論の問題点

- ▶ **長時間安定にシミュレーションができない**
 - ▶ ほとんどのシミュレーションがいわば「瞬間芸」的
 - ▶ 数値相対論の発展における困難の一つ: 拘束条件の問題
 - ▶ 1990年頃から連星合体が有望な重力波源であることが明らかに
 - ▶ 連星運動を追跡する長時間安定なシミュレーションの必要性
- ▶ 最も有望な重力波源である連星系の定式化がなされていない
- ▶ 物質場の「現実的な」物理を考慮していない
 - ▶ 一般相対論的流体・磁気流体・輻射流体
 - ▶ 素粒子・原子核理論に基づく中性子星などの超高密度天体の内部状態の記述
 - ▶ 重力場の問題にかかりっきりで手が回らなかったという側面もある
- ▶ 計算機の性能による制約



数値相対論の発展



なぜ長時間シミュレーションができなかったか？

▶ アインシュタイン方程式は「拘束系」

- ▶ 時間方向成分(エネルギー・運動量保存則)は時間発展方程式ではない
- ▶ 各 Σ_t で重力場・物質場が満たさなければならない条件式(拘束条件)
 - ▶ マックスウェル方程式の時間成分はガウスの法則 $\text{div } E = 4\pi\rho$ を含む
 - 各 Σ_t で電場と電荷が満たさなければならない拘束条件
 - (空間成分の)時間発展マックスウェル方程式を正しく解く限り、自動的に満たされることが**数学的には保証**されている
 - 数値シミュレーションでは拘束条件はしばしば破れてしまう
 - ▶ 拘束条件を数値計算で満たすことは難しい \Rightarrow 破綻へとつながる
 - ▶ 各時間において拘束条件(楕円型方程式)を解けば問題は起こらないが...
 - ▶ 楕円型方程式を解くコストが膨大な(1000倍以上の場合も)ため非現実的

▶ ADM形式は「弱双曲系(weakly-hyperbolic)」

- ▶ Cauchy 問題は「不良設定(ill-posed)」

▶ 拘束条件の破れが増大しないような再定式化が必要不可欠

- ▶ 少なくとも「強双曲系(strongly-hyperbolic)」であることが必要
-



Reformulating Einstein's equations

- ▶ 方程式系の双極性を上げたい : Maxwell 方程式とのアナロジー

$$-\partial_t^2 A_i + \nabla^k \nabla_k A_i - \nabla_i \nabla_k A^k = \nabla_i \partial_t \phi$$

波動演算子からのずれ(双極性悪化の要因)

良いゲージ条件の採用

$$\text{Lorenz gauge : } \partial_\mu A^\mu = 0$$
$$\partial^\mu \partial_\mu A^i = 0$$

$$\text{Coulomb gauge : } \nabla_k A^k = 0$$
$$\partial^\mu \partial_\mu A^i = \nabla_i \partial_t \phi$$

Generalized harmonic
gauge formulation
(Garfinkle 2002; Pretorius 2005)

新たな独立変数の導入

$$F = \nabla_k A^k$$
$$\partial^\mu \partial_\mu A_i = \nabla_i \partial_t \phi + \nabla_i F$$

F の発展方程式

$$\partial_t F = -\nabla_k E^k - \nabla^k \nabla_k \phi$$

BSSN formulation
(Shibata & Nakamura 1995;
Baumgarte & Shapiro 1998)

拘束条件の利用

$$\nabla_k E^k = 4\pi\rho_e$$
$$\partial_t F = -\nabla_k E^k - \nabla^k \nabla_k \phi$$

$$\nabla_k E^k = 4\pi\rho_e$$
$$\partial_t F = -4\pi\rho_e - \nabla^k \nabla_k \phi$$

BSSN 形式：日本発のブレイクスルー

▶ Shibata & Nakamura 1995年

- ▶ シミュレーションが延命する定式化を発見
 - ▶ 1987年 Nakamura
- ▶ 拘束条件の破れが増大する理由にたどり着く
 - ▶ 1990年中頃 Nakamura & Shibata
 - ▶ ADMの定式化：双曲型ではあるが性質の悪い項を含む

$$\boxed{-\frac{\partial^2 \gamma_{ab}}{\partial t^2} + \nabla^2 \gamma_{ab}} + \boxed{\partial_a (\partial_b \gamma_{ab})} + \dots$$

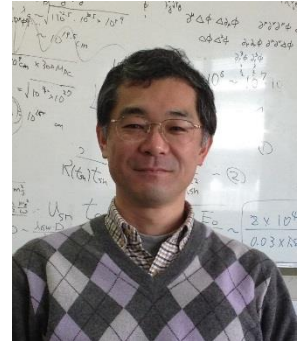
波動方程式型：性質良

発散型：性質悪

- ▶ $F_a = \partial_b \gamma_{ab}$ を新たに独立変量とすることで問題を解消
 - ▶ 長時間の安定なシミュレーションが可能に！

▶ 1999年 Baumgarte & Shapiro による同等の定式化(BSSN形式)

座標条件が特異点回避・引きずり解消に利用されていたため、座標条件改良による定式化の研究はあまり進んでいなかった



BSSN 形式 (Shibata & Nakamura 1995; Baumgarte & Shapiro 1998)

▶ 重力場の真の自由度を抜き出す

- ▶ 共形分解 (York PRL 26, 1656 (1971); PRL 28, 1082 (1972))

- ▶ the two degrees of freedom of the gravitational field are carried by the conformal equivalence class of 3-metric, related each other by the conformal transformation

$$\gamma_{ab} = \psi^4 \tilde{\gamma}_{ab}$$

- ▶ 外的曲率 $K_{ab} \sim \dot{\gamma}_{ab}$ も共形分解される

- ▶ トレース部分は座標条件と関連 (c.f. maximal slicing) \Rightarrow 分離する

$$K_{ab} = \psi^4 \tilde{K}_{ab} + \frac{1}{3} \gamma_{ab} \text{tr}(K)$$

- ▶ 新たに $F^a = \partial_b \tilde{\gamma}^{ab}$ を変数として導入

- ▶ 新しい変数に基づく再定式化

$$e^\phi = \psi, \quad \tilde{\gamma}_{ab}, \quad \tilde{K}_{ab}, \quad K = \text{tr}(K), \quad F^a = \partial_b \tilde{\gamma}^{ab}$$

- ▶ 拘束条件を利用した双曲性の向上

- ▶ 双曲型の座標条件の開発・利用
-



BSSN equations

$$(\partial_t - \beta^k \partial_k) \phi = \frac{1}{6} (-\alpha K + \partial_k \beta^k)$$

$$(\partial_t - \beta^k \partial_k) \tilde{\gamma}_{ij} = -2\alpha \tilde{K}_{ij} + \tilde{\gamma}_{k(i} \partial_{j)} \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}_{ij} \partial_k \beta^k$$

$$\begin{aligned} (\partial_t - \beta^k \partial_k) \tilde{K}_{ij} = & e^{-4\phi} (\alpha R_{ij} + D_i D_j \alpha)^{\text{TF}} + \alpha (K \tilde{K}_{ij} - 2 \tilde{K}_{ik} \tilde{K}_j^k) \\ & + \tilde{K}_{k(i} \partial_{j)} \beta^k - \frac{2}{3} \tilde{K}_{ij} \partial_k \beta^k - 8\pi\alpha (e^{-4\phi} S_{ij})^{\text{TF}} \end{aligned}$$

$$(\partial_t - \beta^k \partial_k) K = -D^k D_k \alpha + \left(\tilde{K}^{ij} \tilde{K}_{ij} + \frac{1}{3} K^2 \right) + 4\pi\alpha (E + S)$$

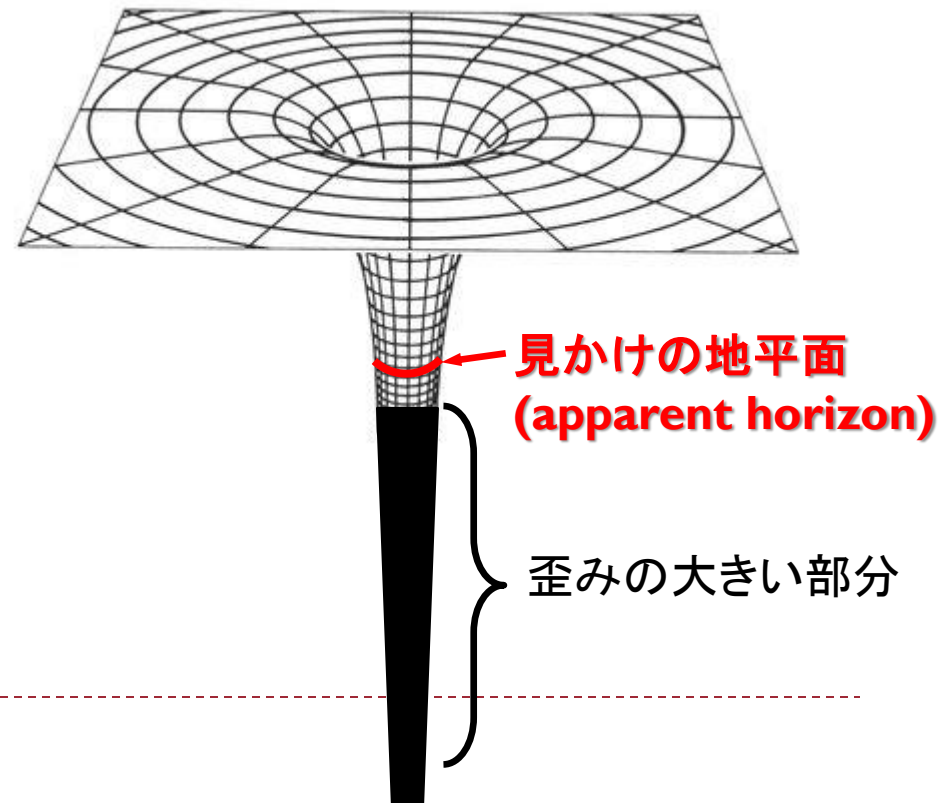
$$\begin{aligned} (\partial_t - \beta^k \partial_k) F^i = & 2\alpha \left(\tilde{\Gamma}_{jk}^i \tilde{K}^{jk} + 6 \tilde{K}^{ik} \partial_k \phi - \frac{2}{3} \tilde{\gamma}^{ik} \right) - 26 \tilde{K}^{ik} \partial_k \alpha - 16\pi\alpha J^i \\ & + \beta^k \partial_k F^i - F^k \partial_k \beta^i + \frac{2}{3} F^i \partial_k \beta^k + \frac{1}{3} \tilde{\gamma}^{ij} \partial_j \partial_k \beta^k + \tilde{\gamma}^{jk} \partial_j \partial_k \beta^i \end{aligned}$$

D_α : covariant derivative w.r.t γ_{ab} , $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$: Christoffel symbol w.r.t $\tilde{\gamma}_{ab}$

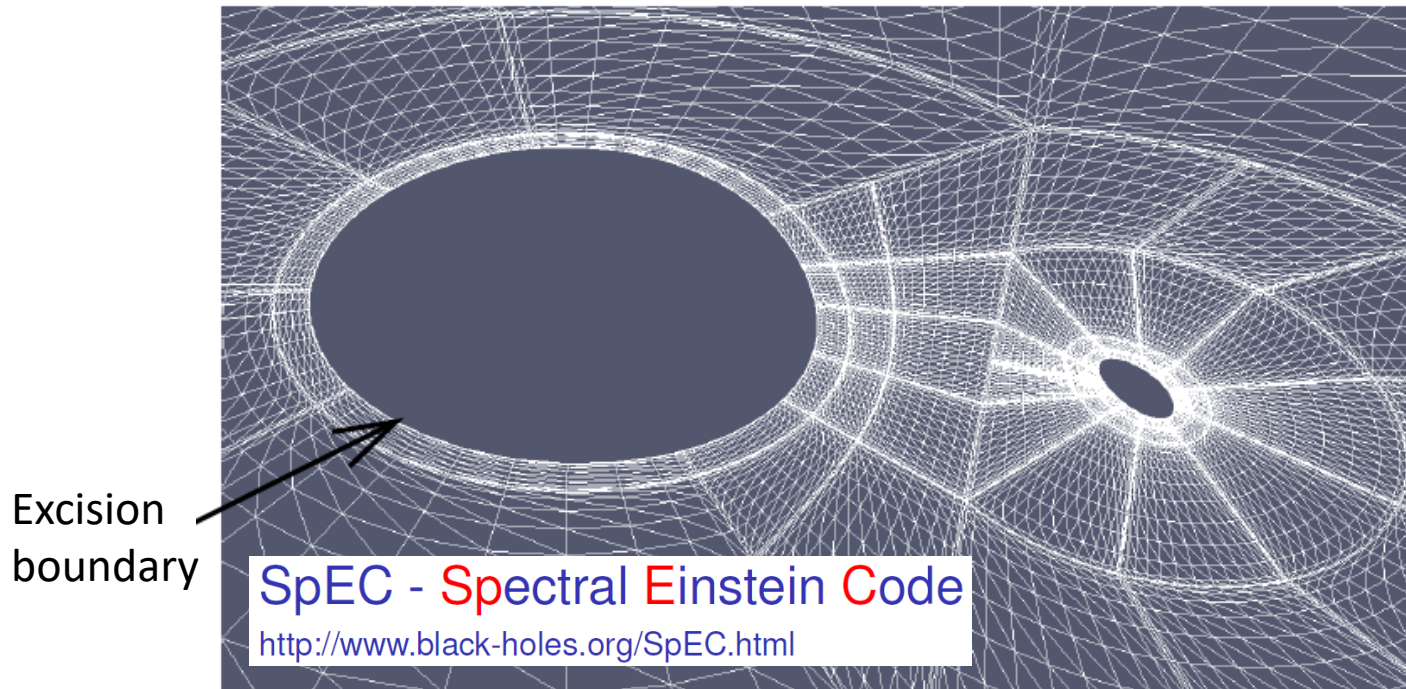
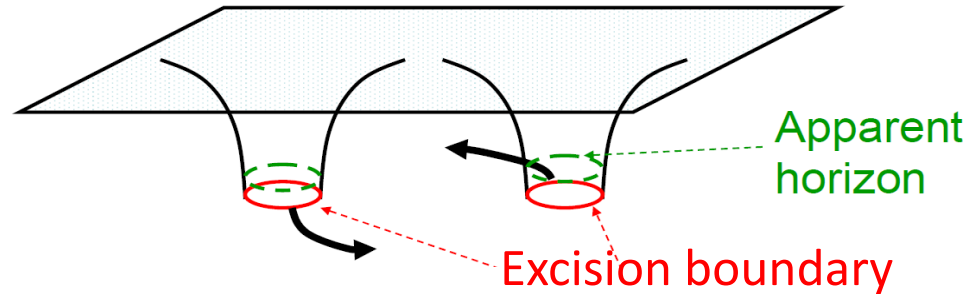


連星ブラックホール：最後の難関

- ▶ 2005年まで連星ブラックホール・高速回転ブラックホールの長時間安定シミュレーションはできなかった
 - ▶ 動く特異点：ラプス関数、シフトベクトルを用いても歪みを解消しきれない
- ▶ 1つのアイデア：ブラックホールの切り取り技法
 - ▶ 事象の地平面の内側
 - ▶ 因果的にはつながっていない領域
 - ▶ 歪みの大きい部分を計算領域から取っ」ても原理的には影響がない
 - ▶ 実際上「切り取り」の影響を排除するのは困難
 - ▶ 特性方向に沿った適切な差分
 - ▶ 座標(ゲージ)条件
 - ▶ F. Pretorius によるブレイクスルー
 - ▶ 2005年：独自の定式化



連星ブラックホール：最後の難関



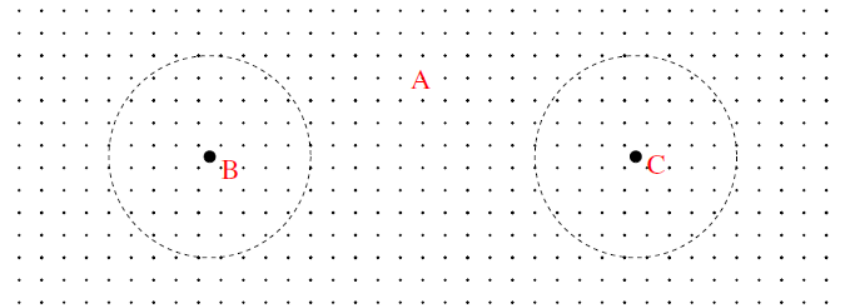
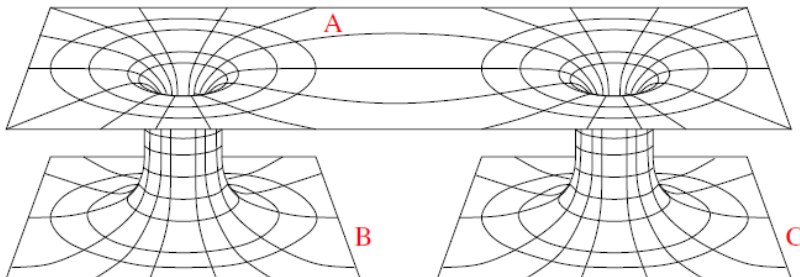
連星ブラックホール：最後の難関

- ▶ パンクチャー法 : Campanelli et al., PRL (2006); Baker et al. PRL (2006)
 - ▶ 最も難しかった連星ブラックホール合体を一気に身近にした手法
 - ▶ Schwarzschild BH 時空の wormhole 構造

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \longrightarrow \quad ds^2 = -\left(\frac{2-\psi}{\psi}\right)^2 d\tilde{t}^2 + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2)$$

$$r = \psi^2 \tilde{r}, \quad \psi = 1 + \frac{M}{2\tilde{r}}$$

- ▶ 時間一定面のトポロジー : $\mathbb{R}_+ \times S^2 \sim \mathbb{R}^3 / \{0\}$: 幾何学的には wormhole
- ▶ 発散する部分を共形因子に繰り込む
- ▶ 有限の解像度 \Rightarrow 特異点にはぶつからない \Rightarrow natural excision



連星ブラックホール：最後の難関

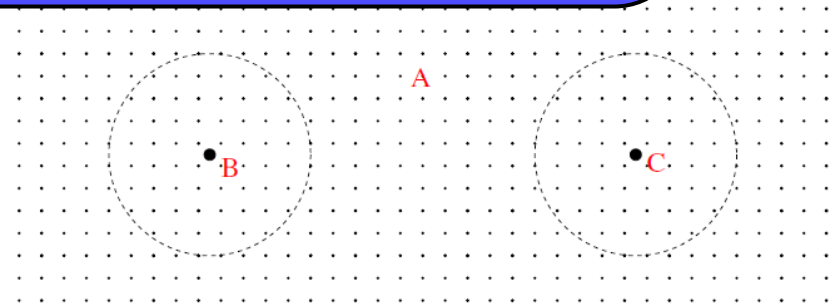
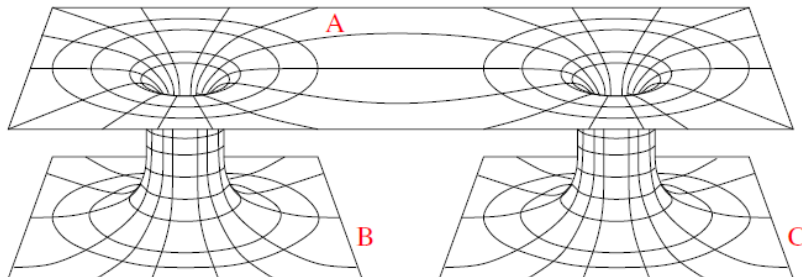
- ▶ パンクチャー法 : Campanelli et al., PRL (2006); Baker et al. PRL (2006)
 - ▶ 最も難しかった連星ブラックホール合体を一気に身近にした手法
 - ▶ Schwarzschild BH 時空の wormhole 構造

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad \longrightarrow \quad ds^2 = -\left(\frac{2-\psi}{\psi}\right)^2 d\tilde{t}^2 + \psi^4 (d\tilde{r}^2 + \tilde{r}^2 d\Omega^2)$$

$$r = \psi^2 \tilde{r}, \quad \psi = 1 + \frac{M}{2\tilde{r}}$$

- ▶ 時間一定面のトポロジー: $\mathbb{R}_+ \times S^2 \sim \mathbb{R}^3 / \{0\}$: 幾何学的には wormhole
- ▶ 発散する部分を井形因子で隠して
- ▶ 有限の解像度 \Rightarrow 特異点には近づかない natural excision

2005~2006年は連星ブラックホールシミュレーション時代の幕開け

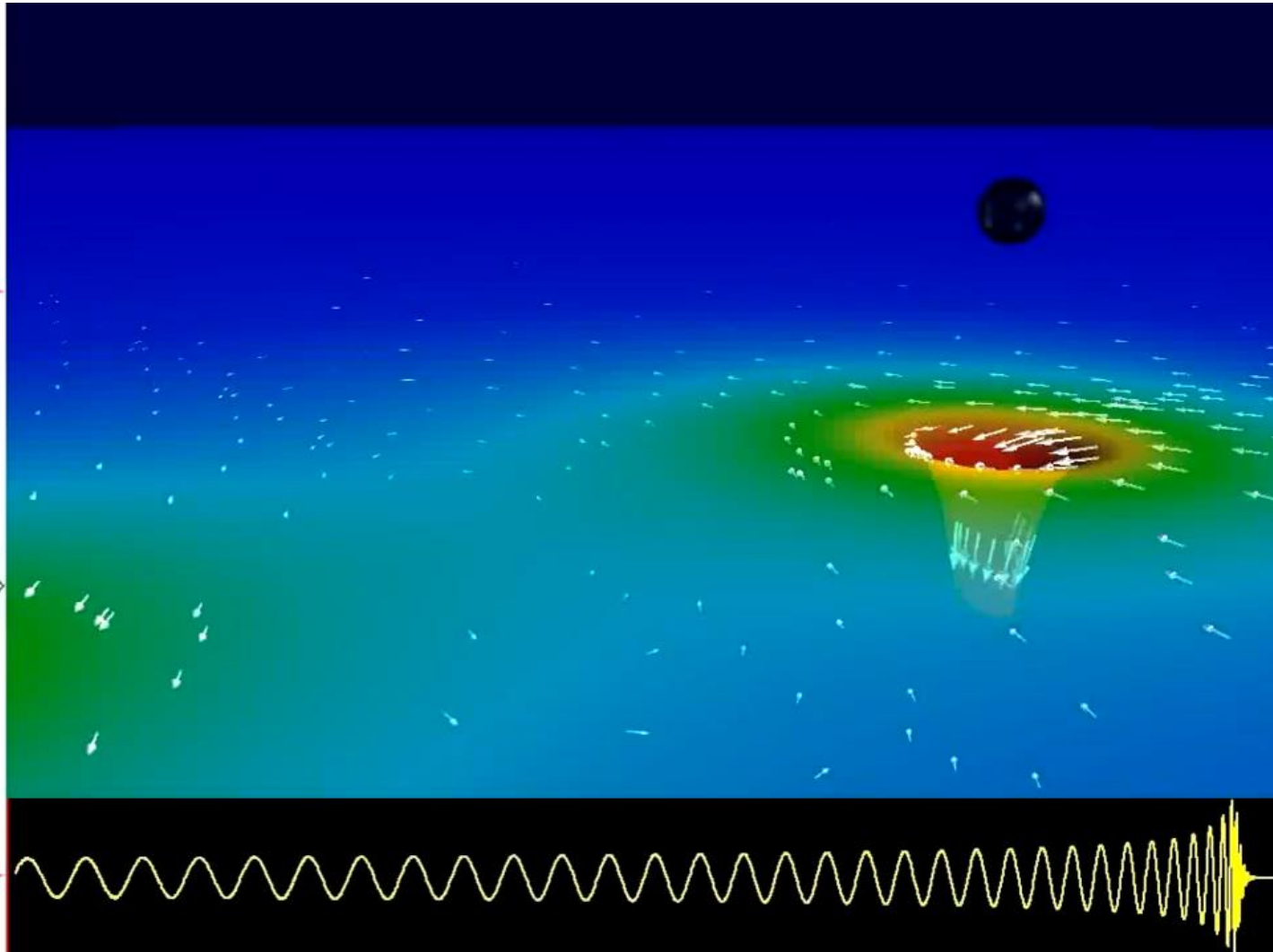


A milestone simulation by SXS collaboration: Long-term simulation of BH-BH merger

Scheel et. al., Phys. Rev. D 79, 024003 (2009); Cohen et. al., Class. Quantum Grav. 26 035005 (2009)

Binary Black Hole Evolution:
Caltech/Cornell Computer Simulation

Top: 3D view of Black Holes
and Orbital Trajectory

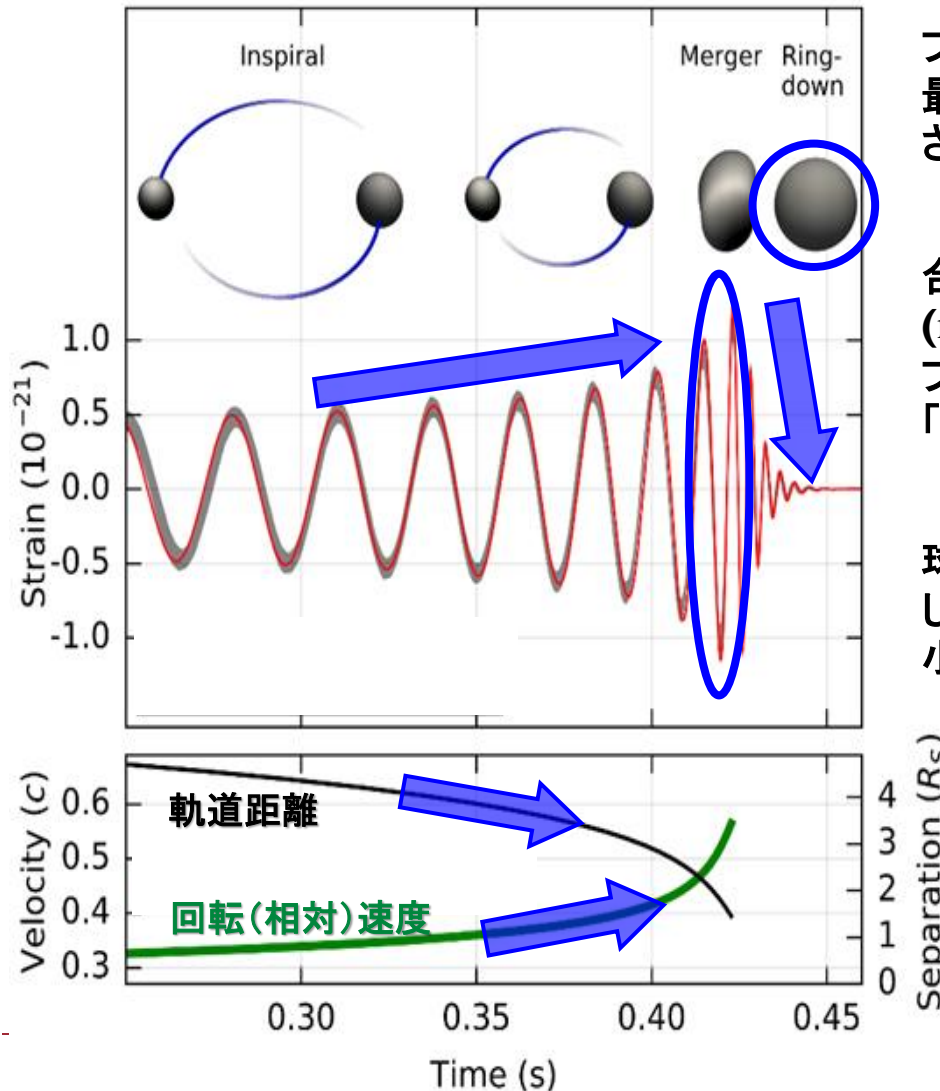


連星ブラックホールからの重力波

ブラックホール接近による重力場の増大と回転速度増加により、重力波振幅と周波数が増大

重力波がエネルギーを運び去るので軌道が縮む

軌道が縮んだことにより回転速度は増加



ブラックホール合体瞬間に最大振幅の重力波が放射される

合体後、その特有の性質 (no hair theorem) により、ブラックホールは急速に「丸く」なる

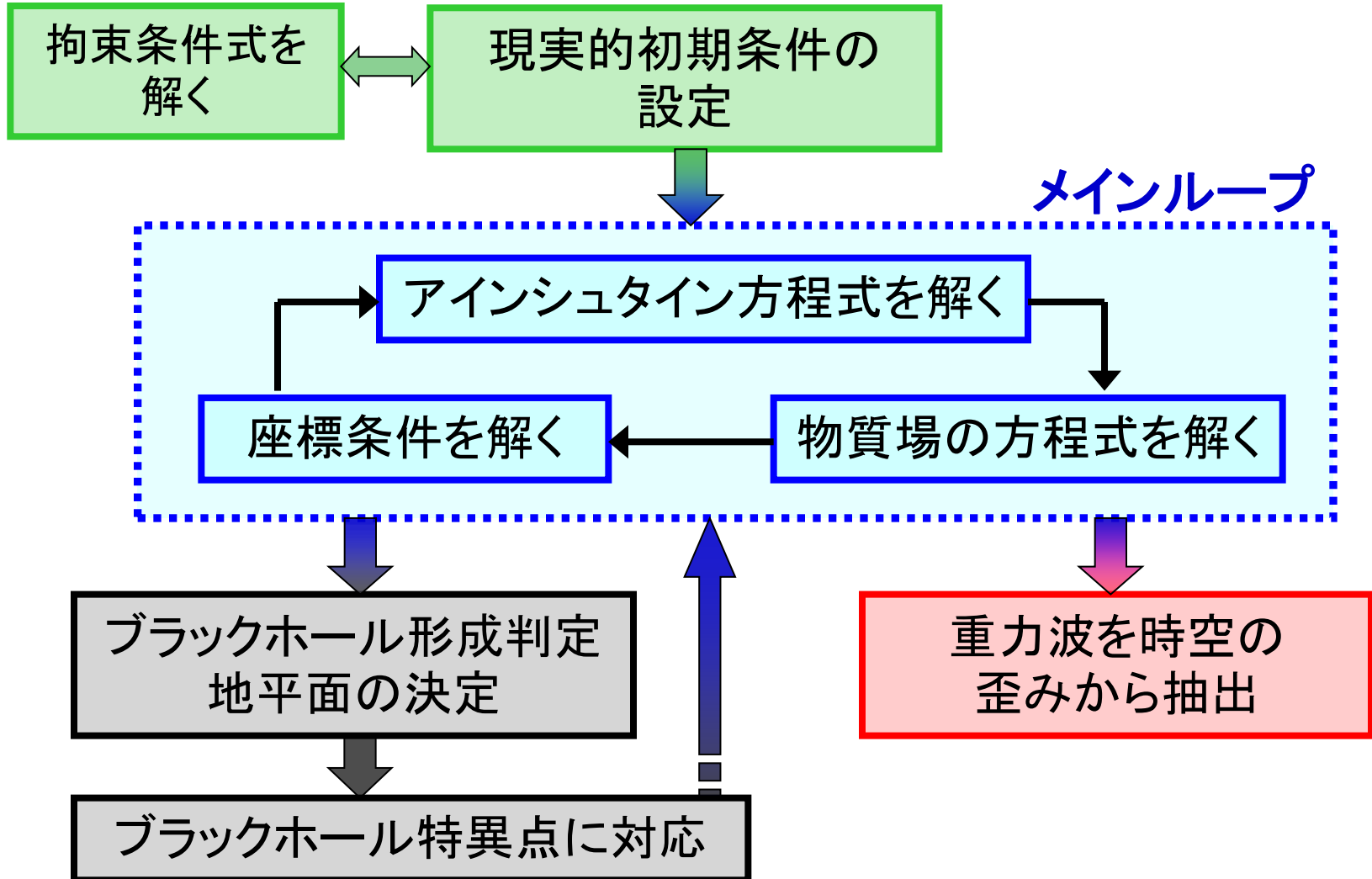
球形天体は重力波を放射しないので、振幅は急激に小さくなる



そして10年後、2015年9月14日



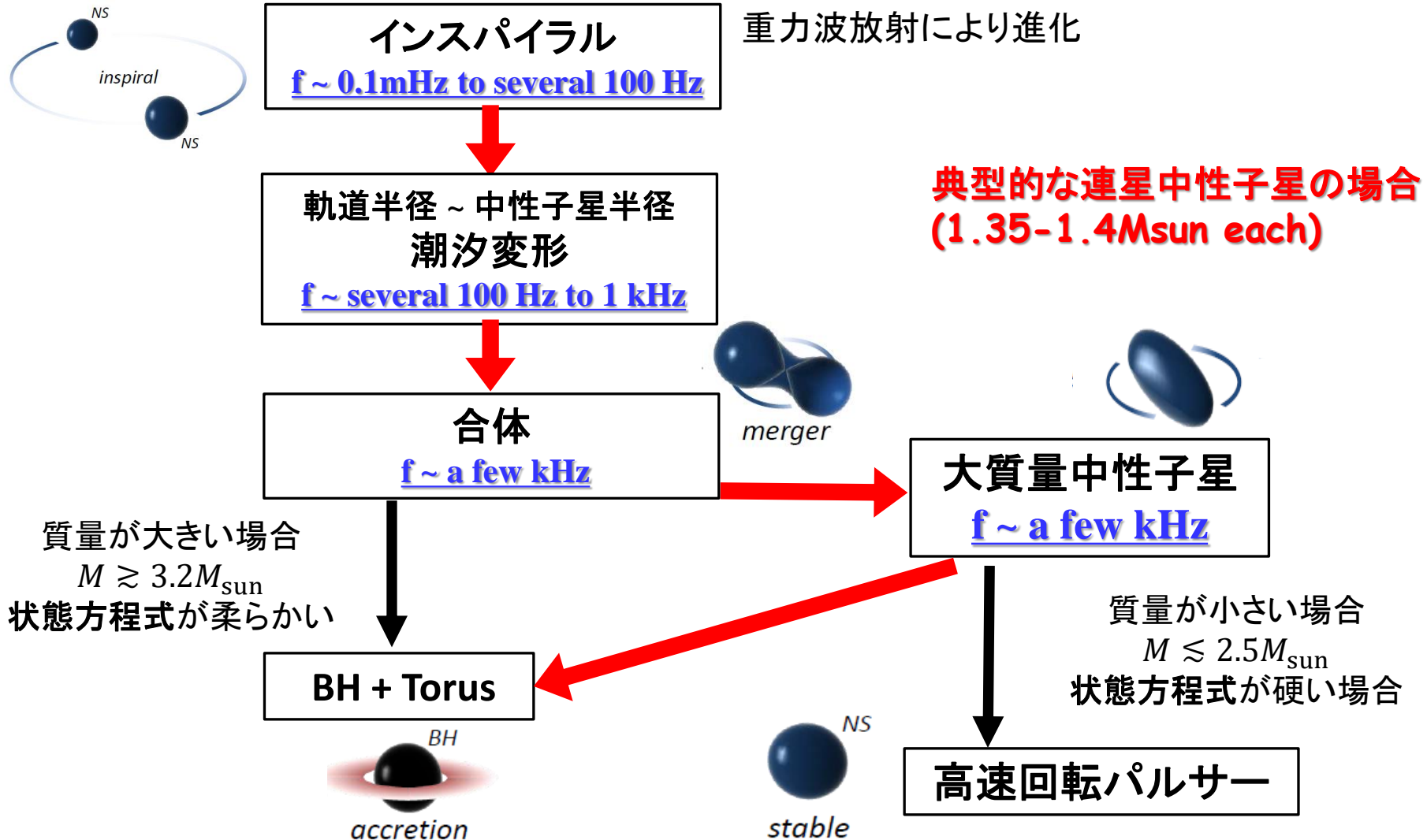
数値相対論：ほかにもいろいろ考慮する必要

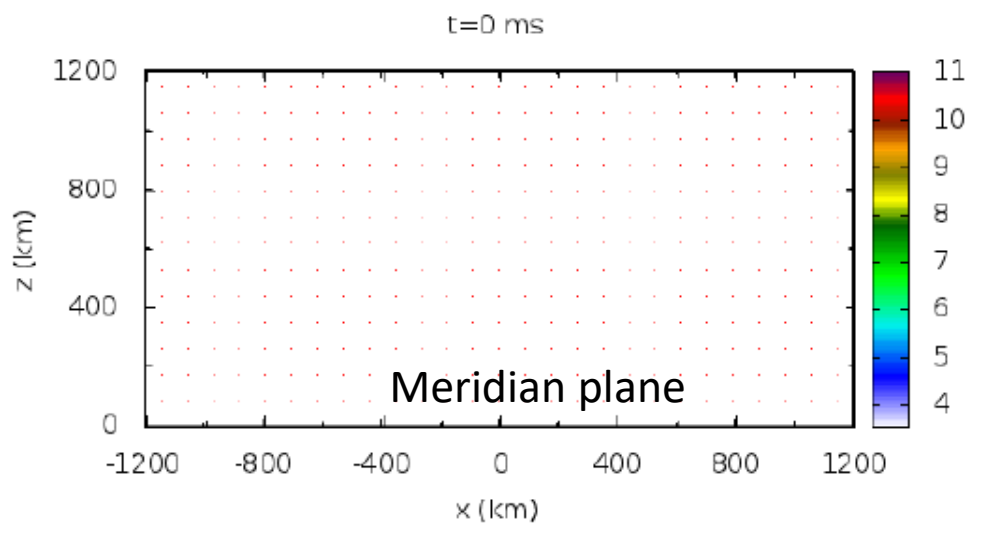
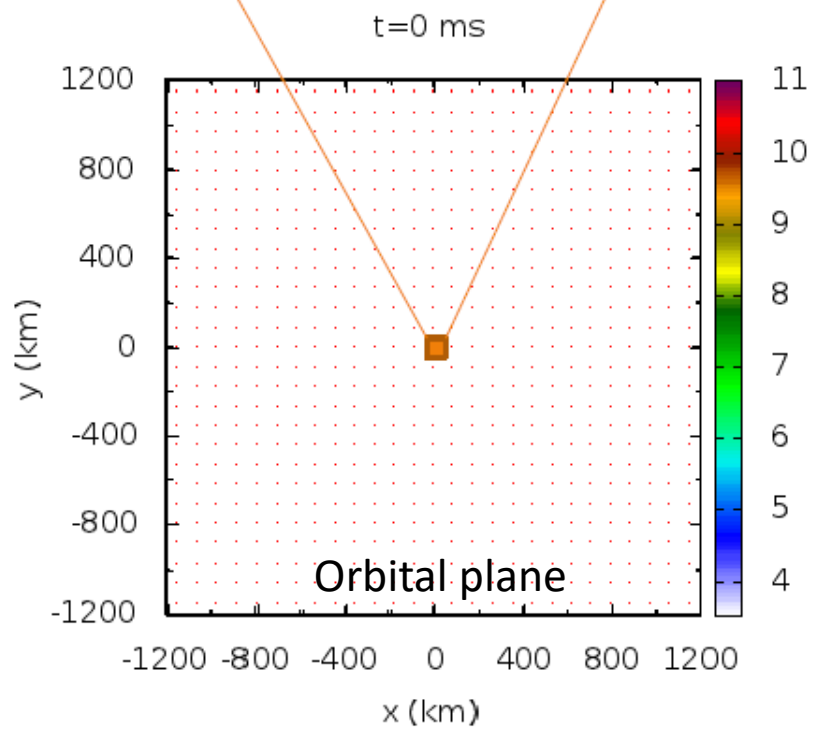
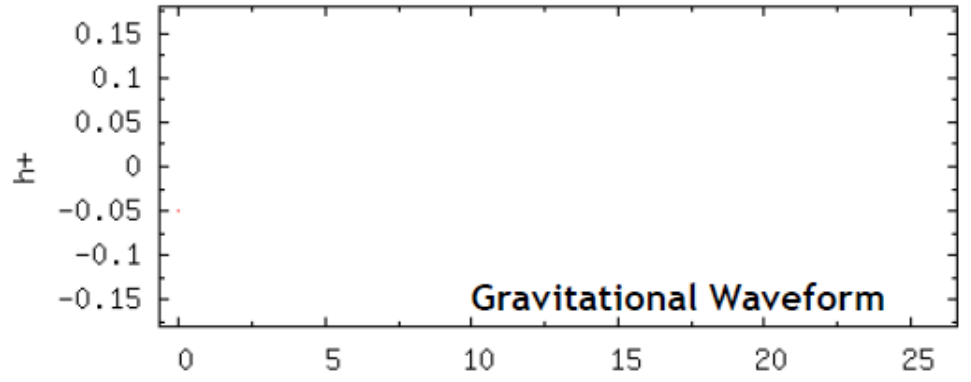
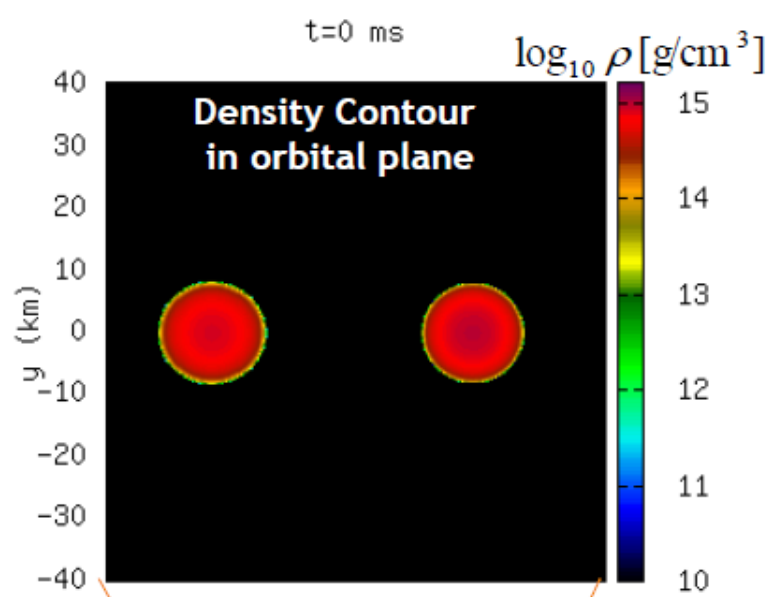


連星中性子星合体からの重力波



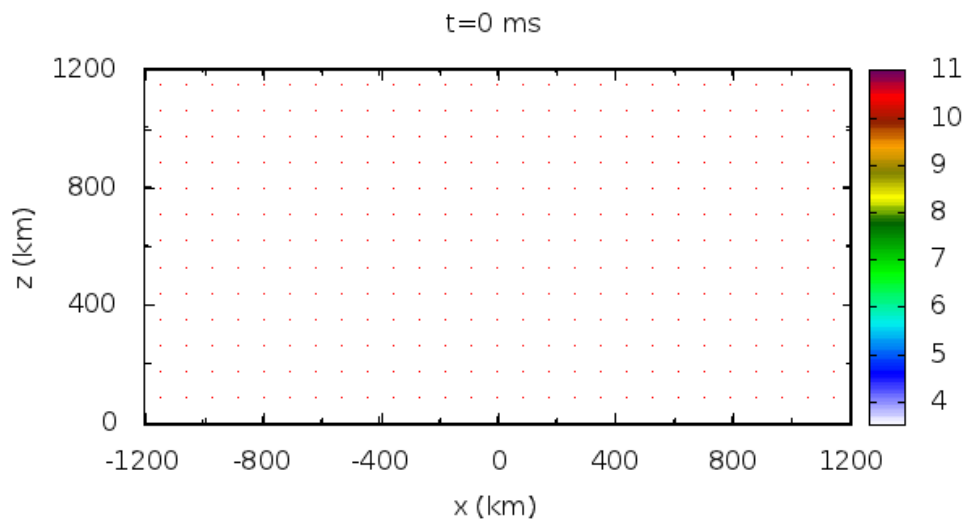
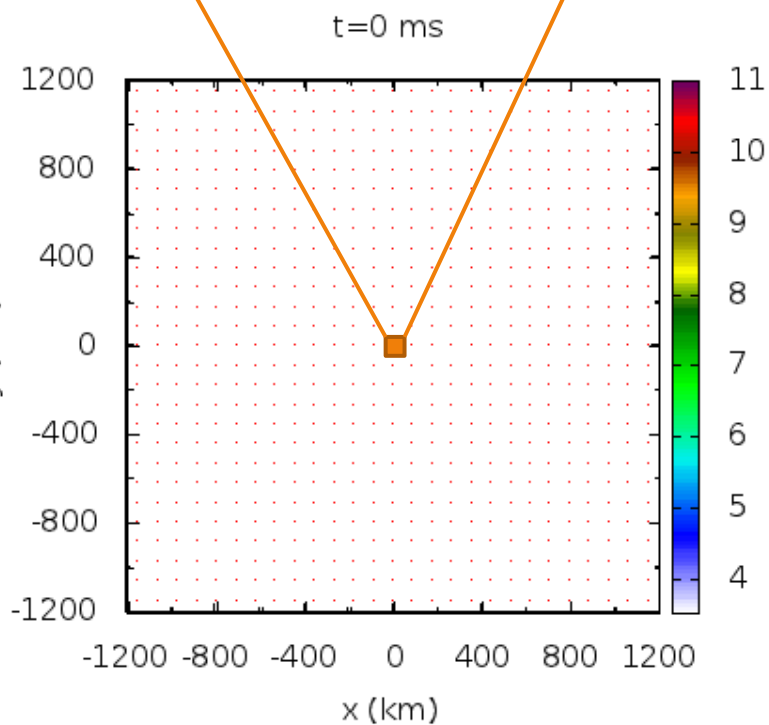
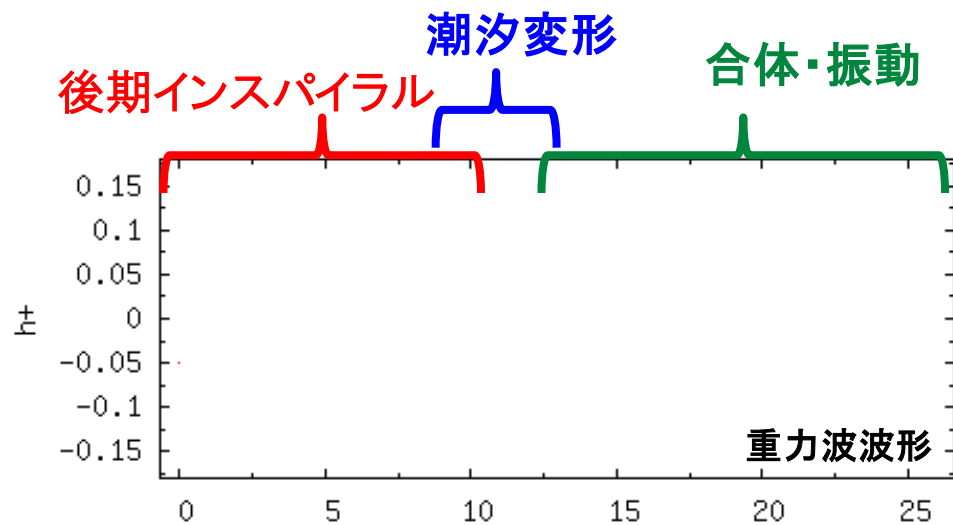
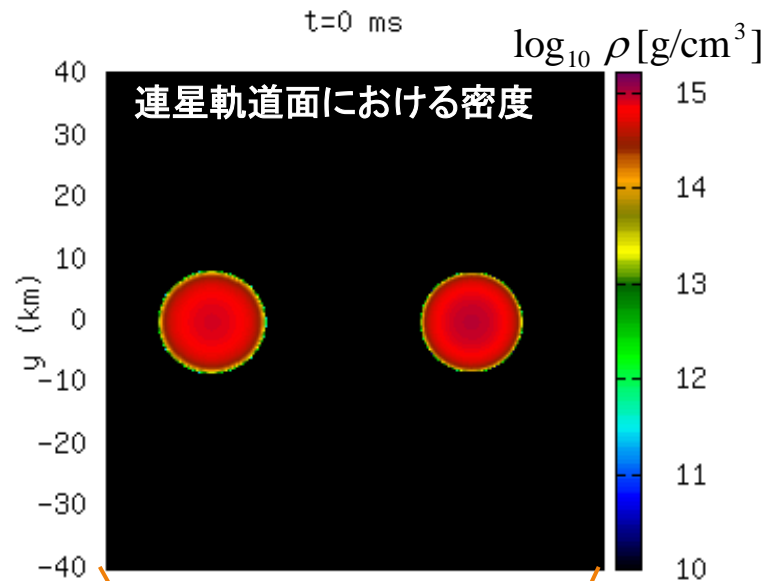
連星中性子星の進化





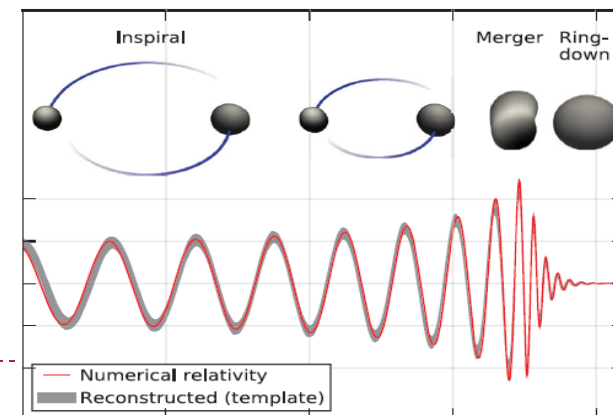
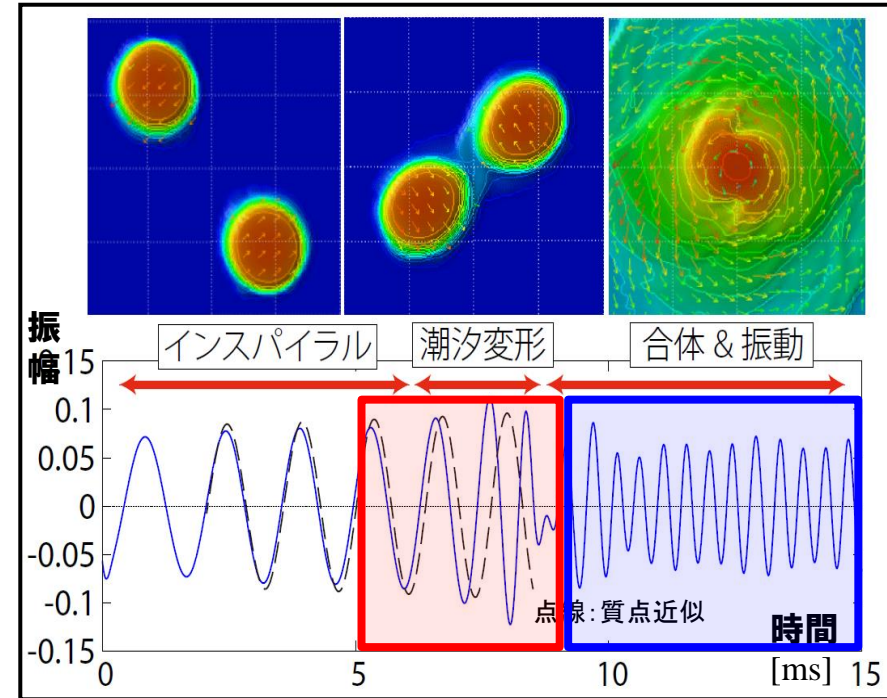
Animation by Hotokezaka

Sekiguchi et al. PRL (2011a, 2011b)
 Kiuchi et al. PRL (2010); Hotokezaka et al. (2013)



連星中性子星合体からの重力波

- ▶ 連星ブラックホールからの重力波に似ている
- ▶ ブラックホールより半径が大きく、相手の**潮汐力** (潮の満ち引きをつくる力) **によって変形しやすい**ため、**速く軌道進化**する
- ▶ 合体後の中性子星は**非球形変動**するため、**準周期的重力波を放射**
 - ▶ ブラックホールは急速に球形になり重力波を放射しなくなる
 - ▶ 重力波放射により角運動量 (遠心力)、ニュートリノにより熱エネルギー (圧力) を失って最終的にはブラックホールに重力崩壊



GW170817: 連星中性子星合体イベント

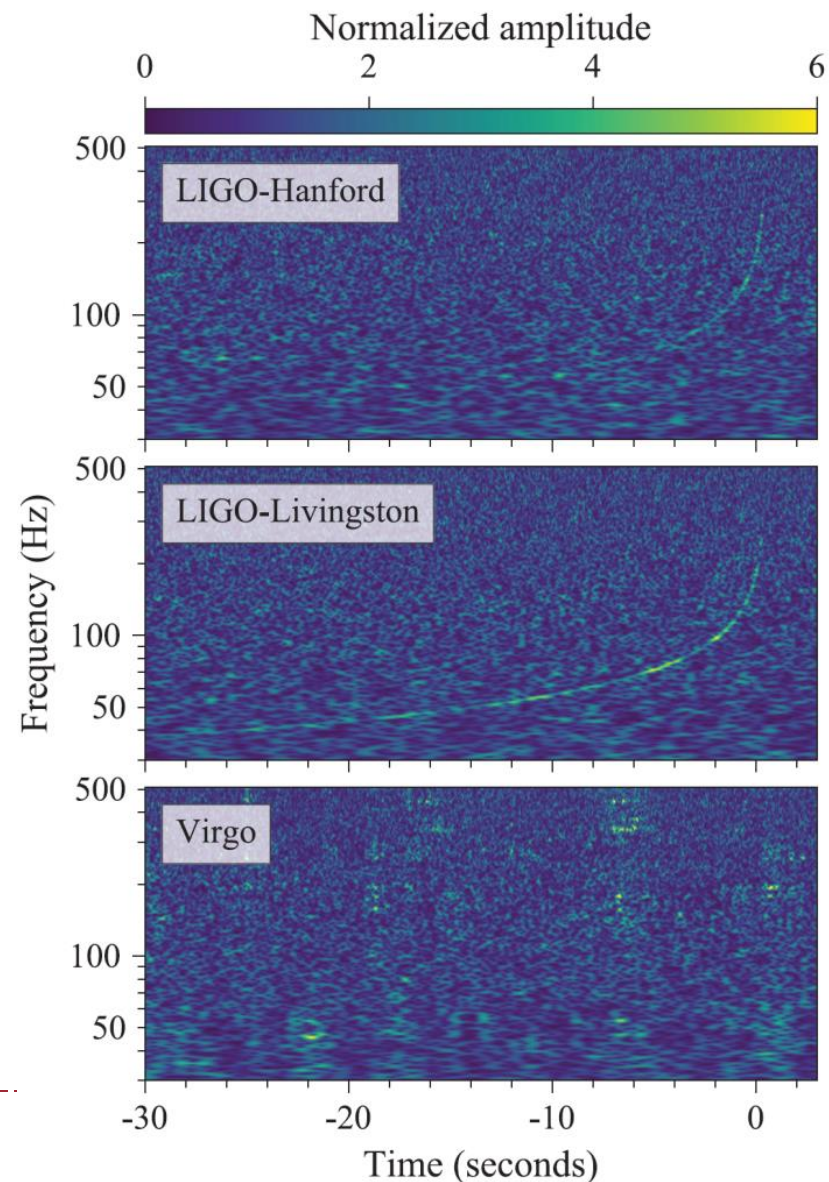
**RIPPLES OF GRAVITY,
FLASHES OF LIGHT:**

**WORLD'S OBSERVATORIES
WITNESS A COSMIC CATAclysm**



インスパイラル波形：質量の情報 (90% C.L.)

- ▶ S/N = 32.4 (signal/noise)
- ▶ 中性子星は(black hole のように)高速回転していないと仮定
 - ▶ BH: 非線形強重力によって 高速回転可能
- ▶ Chirp 質量 : $\frac{(m_1 m_2)^{3/5}}{(m_1 + m_2)^{1/5}} = 1.188 M_\odot$ (0.1%)
 - ▶ 全質量 : $2.74 M_\odot$ (1%)
 - ▶ 質量比 : $m_1/m_2 = 0.7 - 1.0$
 - ▶ Primary mass (m1) : 1.36-1.60 Msun
 - ▶ Secondary (m2) : 1.17-1.36 Msun
- ▶ Luminosity distance : 40_{-14}^{+8} Mpc
- ▶ **Inclination angle : $< 30^\circ$**



Major scientific achievements: GW170817 provided us clues to

▶ 中性子星物質の状態方程式

▶ 質量, 潮汐変形率の抜き取り

▶ ショートガンマ線バーストの 中心動力源

▶ 重元素の起源

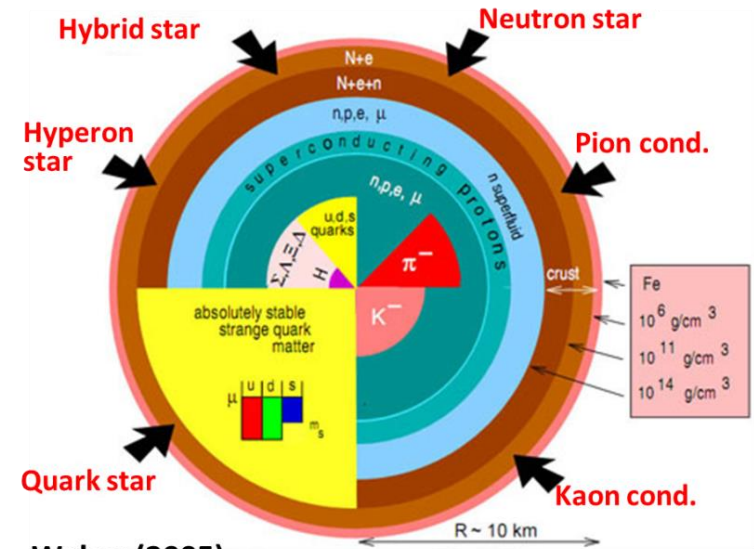
▶ r過程(速い中性子捕獲)元素合成

▶ Kilonova (c.f. supernova) の観測

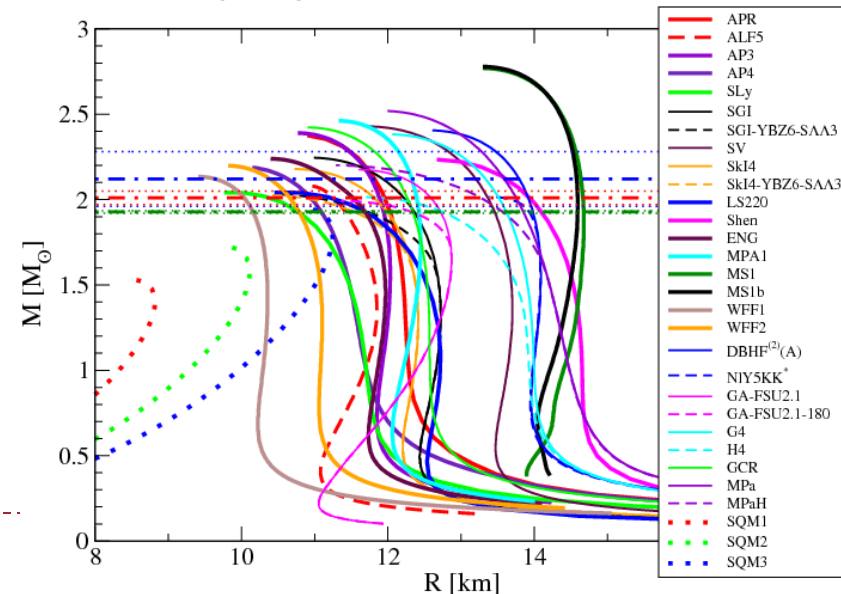
▶ 中性子過剰核の崩壊熱によって
紫外～赤外域で明るく輝く

▶ GW as standard siren

▶ Hubble 定数の測定

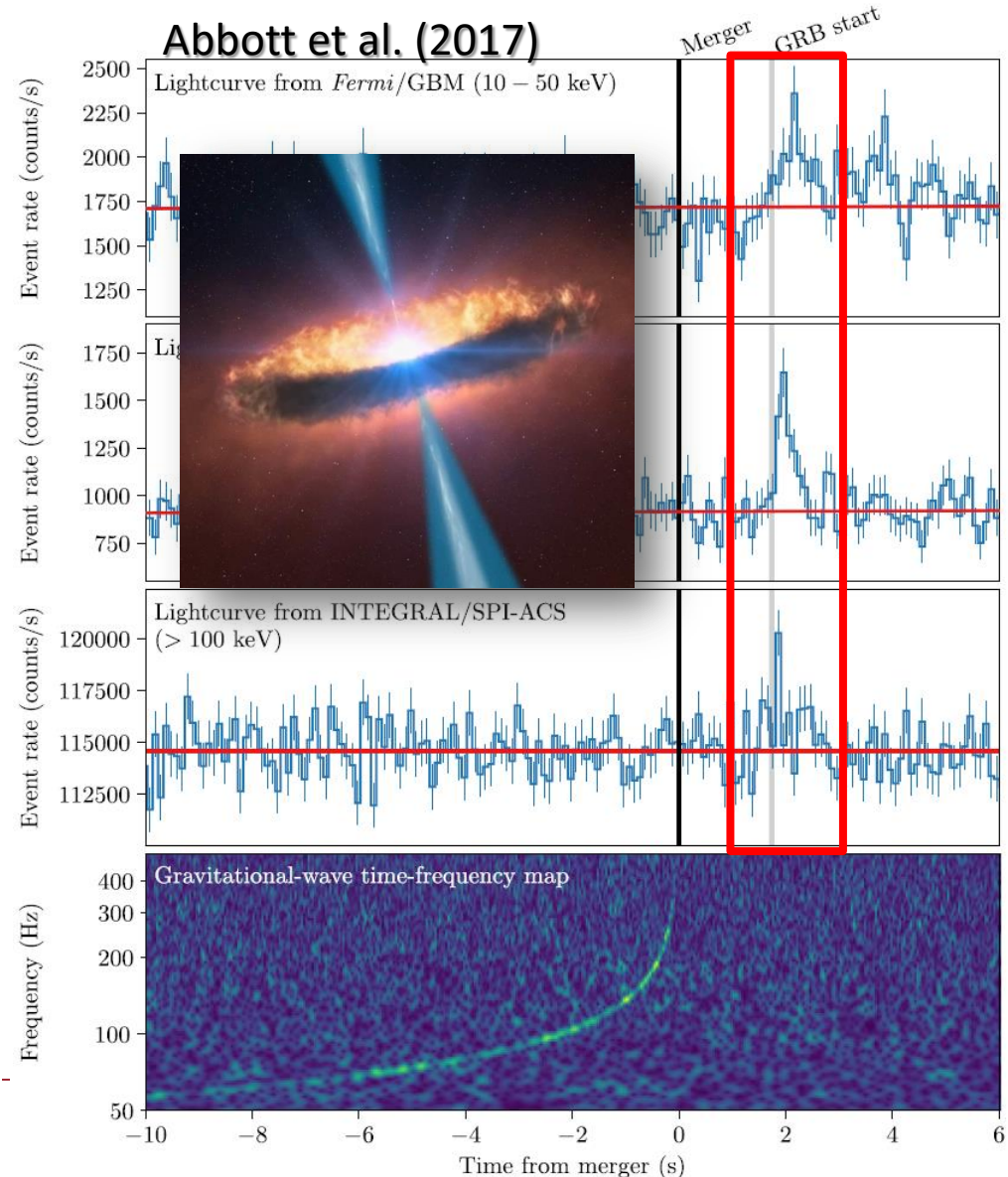


Weber (2005)



Major scientific achievements: GW170817 provided us clues to

- ▶ 中性子星物質の状態方程式
 - ▶ 質量, 潮汐変形率の抜き取り
- ▶ ショートガンマ線バーストの中心動力源
- ▶ 重元素の起源
 - ▶ r過程(速い中性子捕獲)元素合成
 - ▶ Kilonova (c.f. supernova) の観測
 - ▶ 中性子過剰核の崩壊熱によって紫外～赤外域で明るく輝く
- ▶ GW as standard siren
 - ▶ Hubble 定数の測定



Major scientific achievements: GW170817 provided us clues to

▶ 中性子星物質の状態方程式

- ▶ 質量, 潮汐変形率の抜き取り

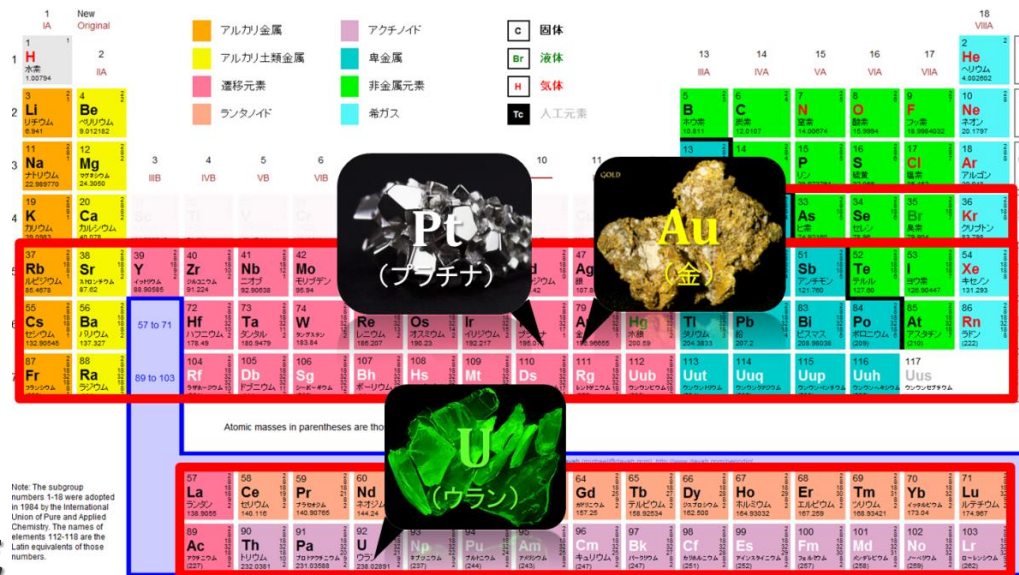
▶ ショートガンマ線バーストの中心動力源

▶ 重元素の起源

- ▶ r過程(速い中性子捕獲)元素合成
- ▶ Kilonova (c.f. supernova) の観測
 - ▶ 中性子過剰核の崩壊熱によって紫外～赤外域で明るく輝く

▶ GW as standard siren

- ▶ Hubble 定数の測定



Major scientific achievements: GW170817 provided us clues to

▶ 中性子星物質の状態方程式

- ▶ 質量, 潮汐変形率の抜き取り

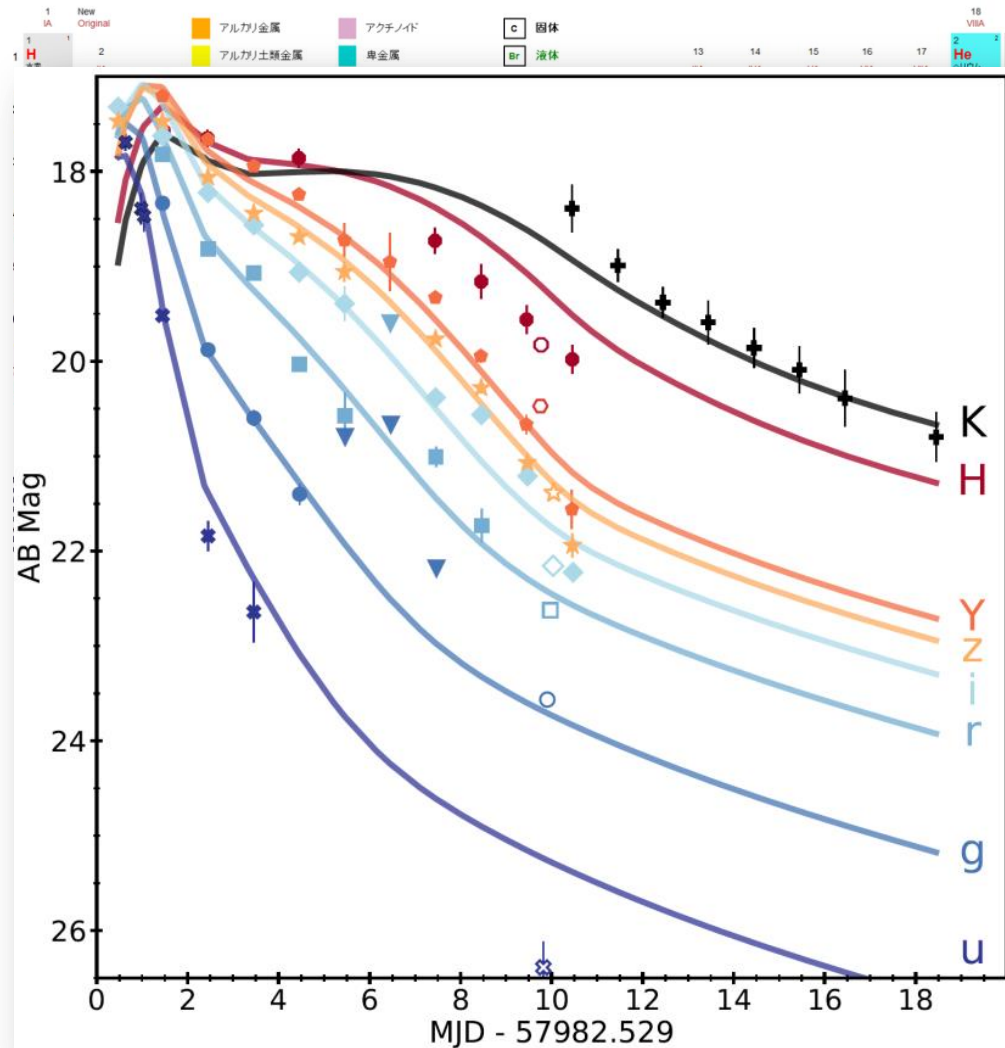
▶ ショートガンマ線バーストの中心動力源

▶ 重元素の起源

- ▶ r過程(速い中性子捕獲)元素合成
- ▶ Kilonova (c.f. supernova) の観測
 - ▶ 中性子過剰核の崩壊熱によって紫外～赤外域で明るく輝く

▶ GW as standard siren

- ▶ Hubble 定数の測定



Major scientific achievements: GW170817 provided us clues to

▶ 中性子星物質の状態方程式

- ▶ 質量, 潮汐変形率の抜き取り

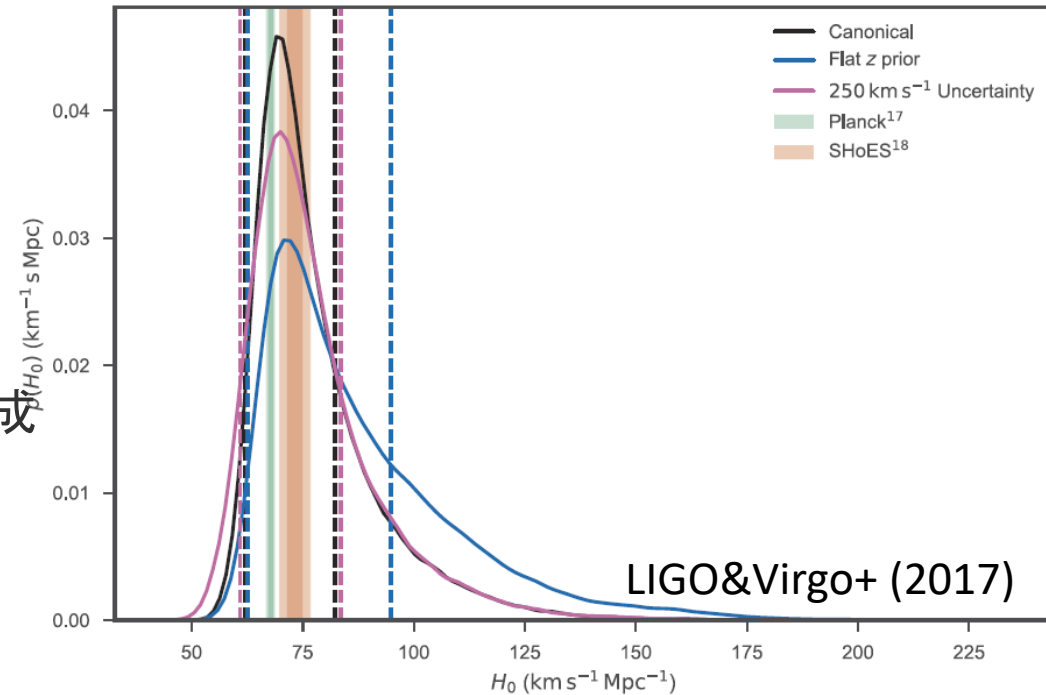
▶ ショートガンマ線バーストの 中心動力源

▶ 重元素の起源

- ▶ r過程(速い中性子捕獲)元素合成
- ▶ Kilonova (c.f. supernova) の観測
 - ▶ 中性子過剰核の崩壊熱によって
紫外～赤外域で明るく輝く

▶ GW as standard siren

- ▶ Hubble 定数の測定



潮汐変形率

▶ 潮汐 Love 数 : λ

- ▶ Response of quadrupole moment Q_{ij} to external tidal field E_{ij}

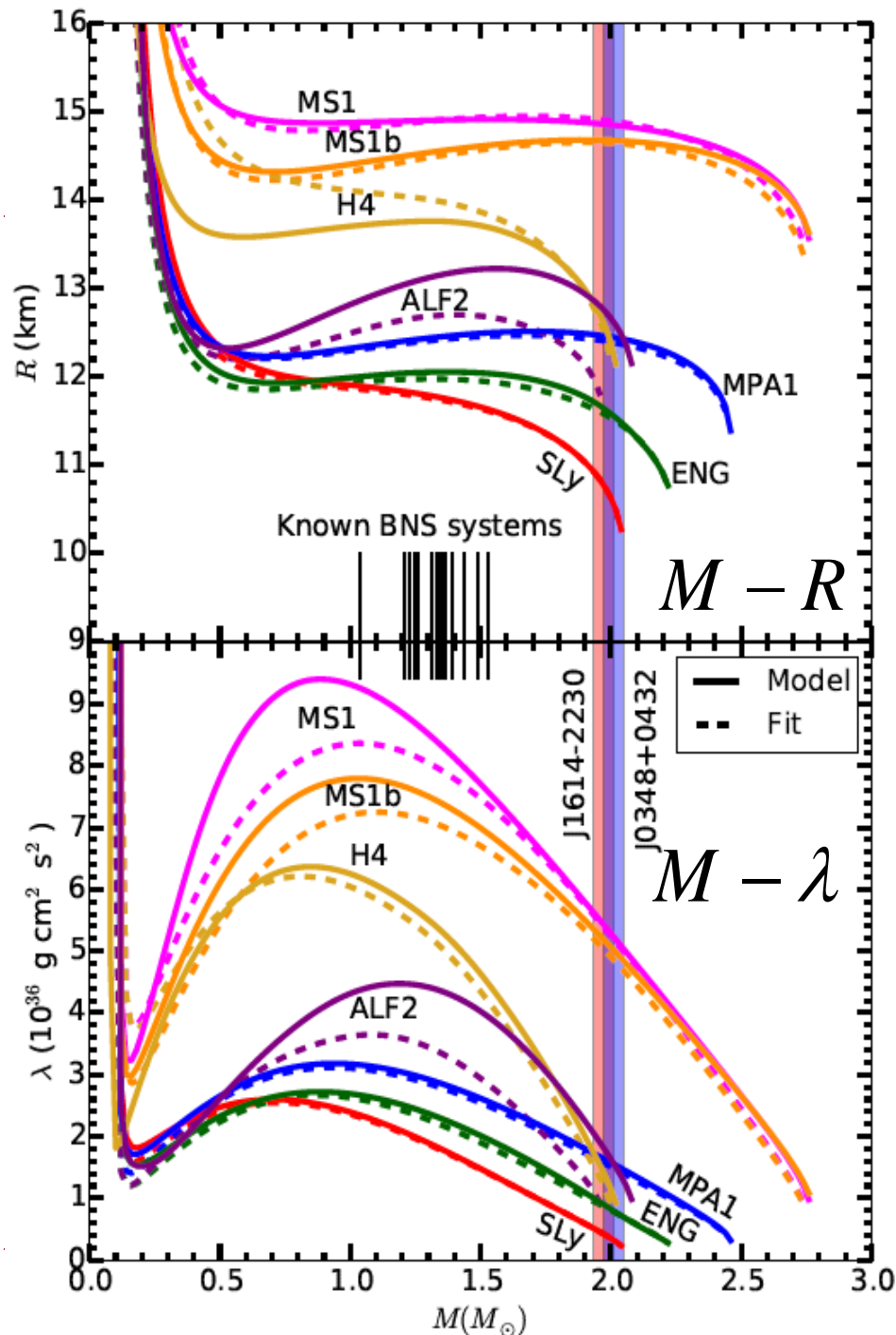
$$Q_{ij} = -\lambda E_{ij}$$

- ▶ 中性子星状態方程式が固い \Rightarrow 中性子星半径大 \Rightarrow 潮汐Love数大 \Rightarrow 軌道の質点からのずれ(潮汐効果) \Rightarrow 重力波波形に痕跡

- ▶ 潮汐変形率(無次元化): Λ

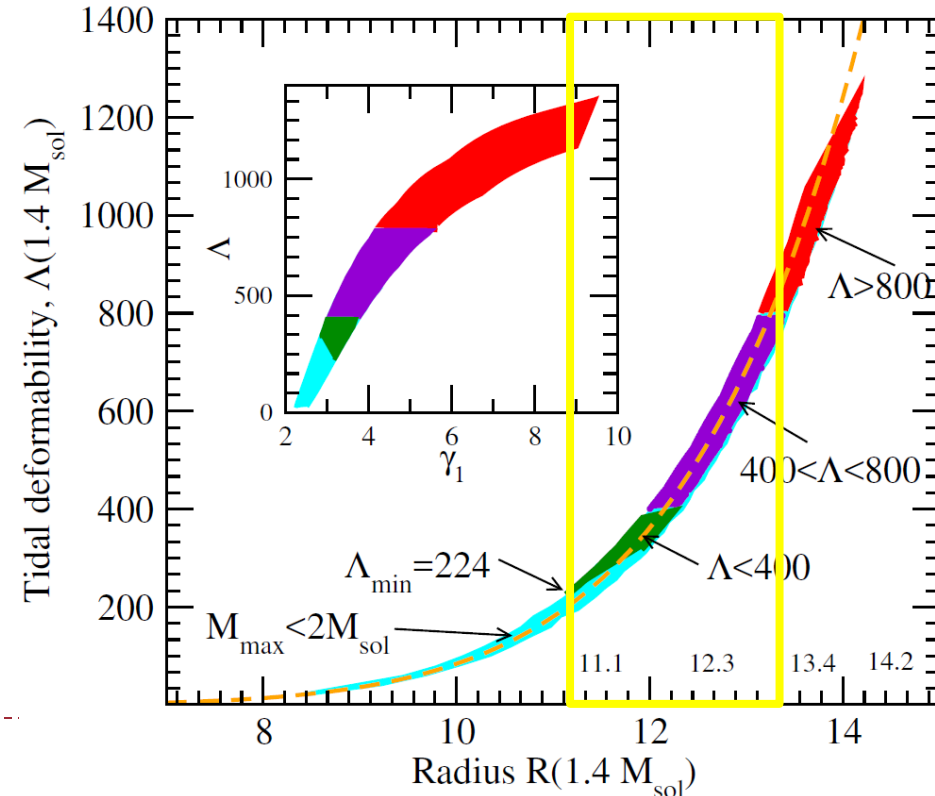
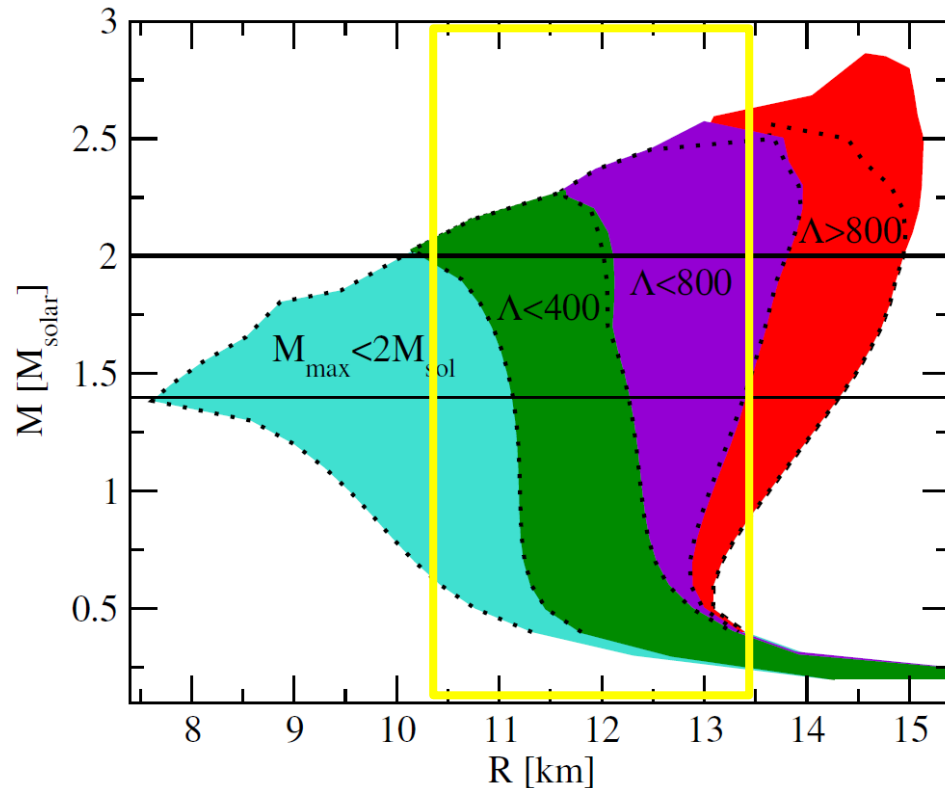
$$\lambda = \frac{C^5}{G} \Lambda R^5 \quad C = \frac{GM}{c^2 R}$$

- ▶ GW170817 でつけられた上限 $\Lambda \lesssim 800$ at 90% C.L.



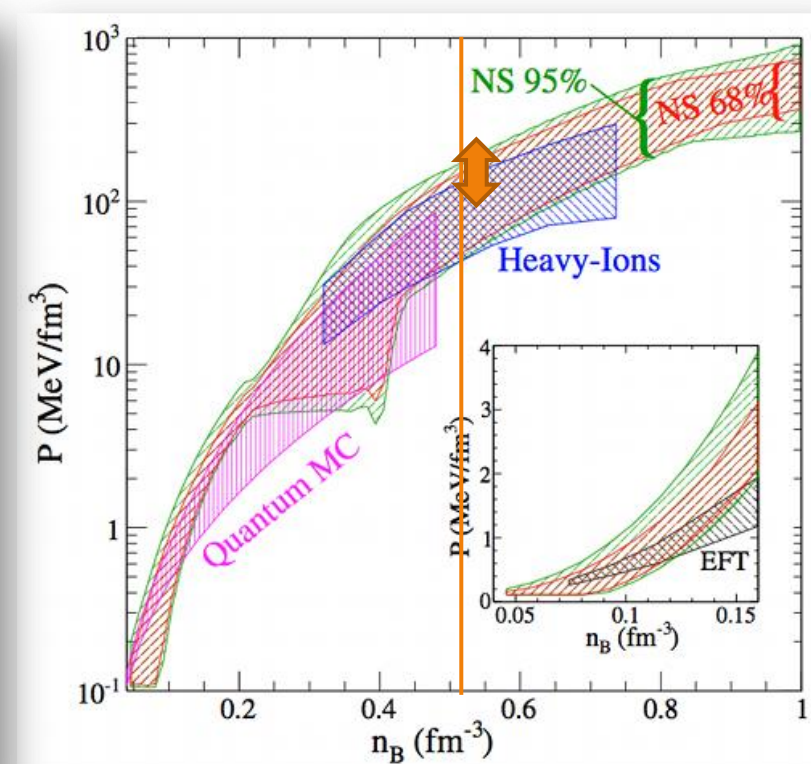
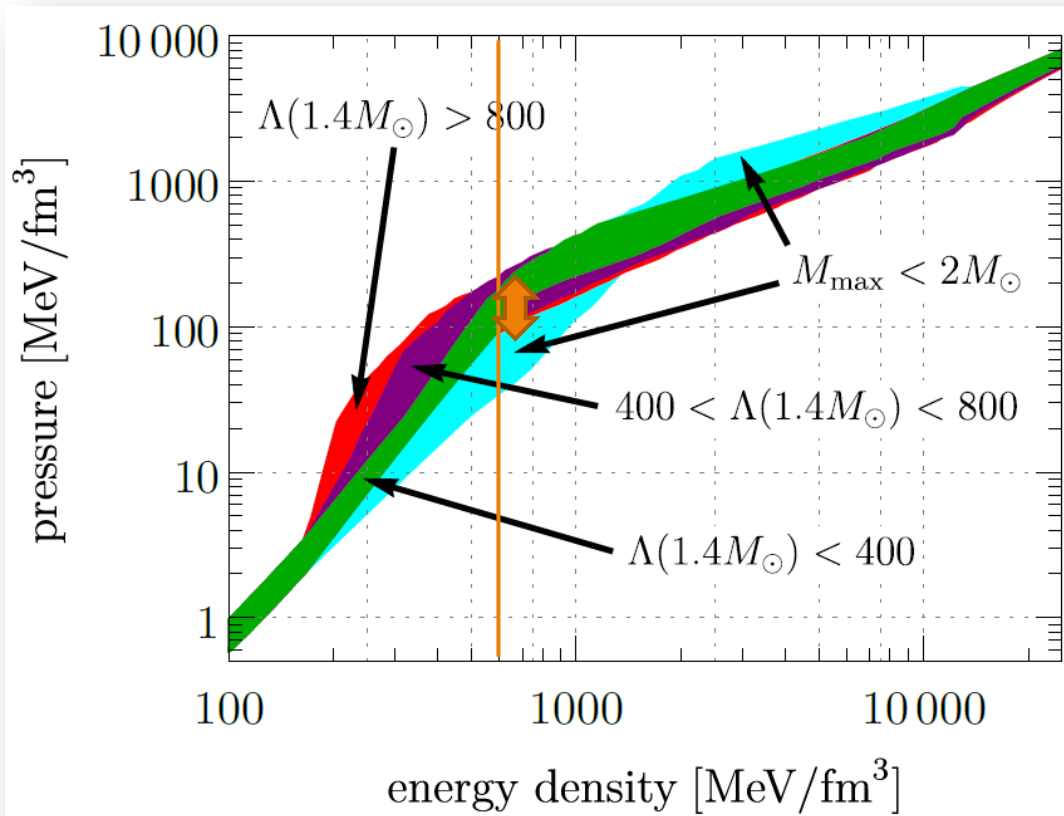
潮汐変形率 Λ の上限のインパクト

- ▶ $\Lambda < 800$ の上限は中性子星半径 $R_{1.4} < 12.5\text{-}13.5$ km に対応
 - ▶ 非常に幅広いクラスの状態方程式に対して Hebeler et al. (2013)
 - ▶ $2M_{\odot}$ の中性子星が見つかった ⇒ 状態方程式は柔らかすぎたはだめ
⇒ $200 \lesssim \Lambda \lesssim 800$



潮汐変形率 Λ の上限のインパクト

- ▶ 中性子星状態方程式は思っていたより「柔らかい」
- ▶ 重イオン衝突実験の結果と併せて考えると
 - ▶ $P \sim 100 \text{ MeV}/\text{fm}^3$ at $n_B \sim 3n_0$?



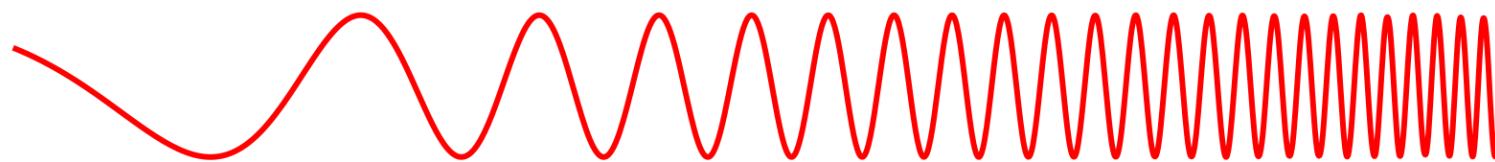
まとめ

- ▶ **重力波とは？**
 - ▶ 重力波とは光の速さで伝わる時空のさざなみ
- ▶ **有望な重力波源**
 - ▶ 強い重力場を持ち、激しく時間変動する天体現象
 - ▶ ブラックホール、中性子星、宇宙そのもの の非球対称動的現象
- ▶ 重力波は微弱 ⇒ **数値相対論**による理論波形の計算がカギ
- ▶ **連星ブラックホールGW150914における重力波の直接観測：**
 - ▶ 我々が **宇宙を見る新しい「目(耳)」**を手にした ことを意味する
- ▶ **連星中性子星 原子核・素粒子物理学の実験場**
 - ▶ **GW170817: 中性子星内部の物理状態を重力波によって探査可能に！**
 - ▶ **付随する電磁波放射現象の探究も今後ますます重要になる**
 - ▶ 未解明の金やウランなどの**重元素の起源**としても重要！

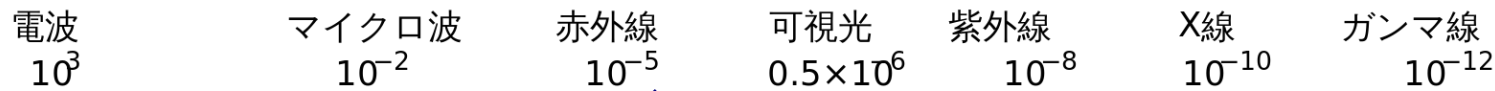


重力波の直接検出の意義: 人類は宇宙を見る新しい「目（耳?）」を手に入れた!

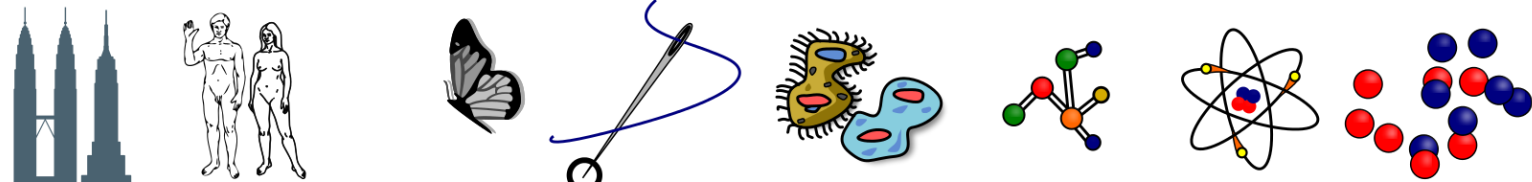
地球の大気を
透過できるか?



電磁波の種類
波長(m)

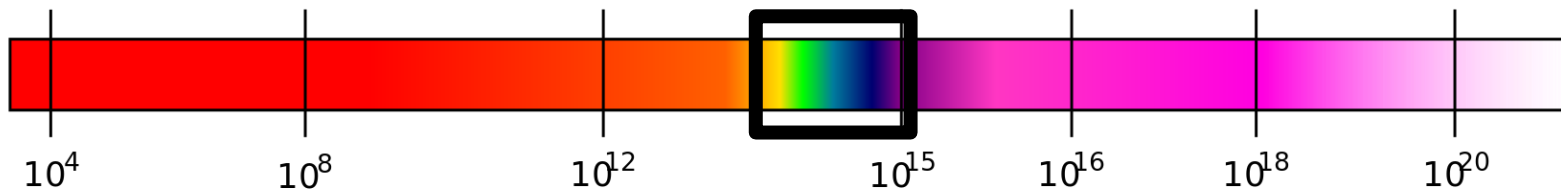


波長のおよその大きさ

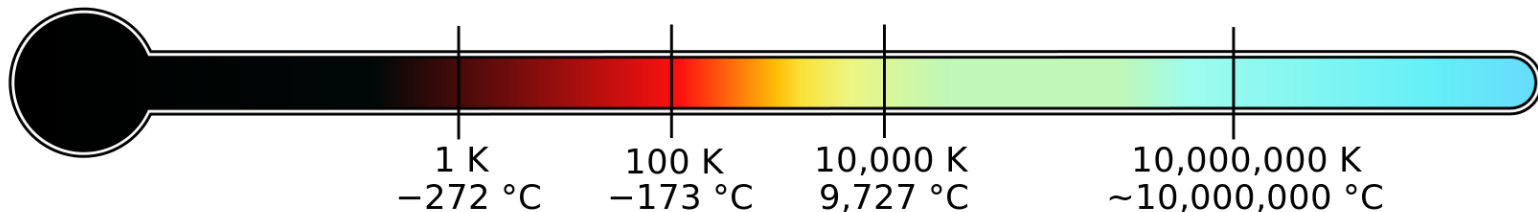


建築物 人間 チョウ 針の先端 原生動物 分子 原子 原子核

周波数 (Hz)



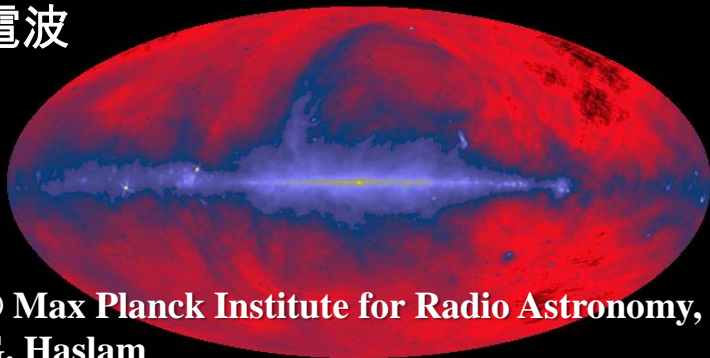
その波長の光を
強く発している
物体の温度



重力波の直接検出の意義:

人類は宇宙を見る新しい「目（耳？）」を手に入れた！

電波



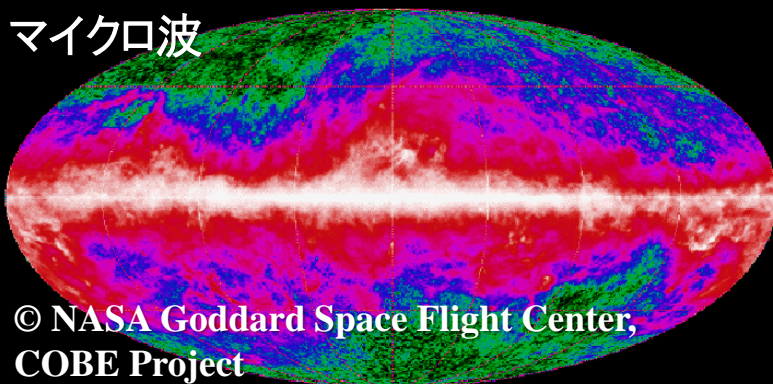
© Max Planck Institute for Radio Astronomy, G. Haslam

可視光



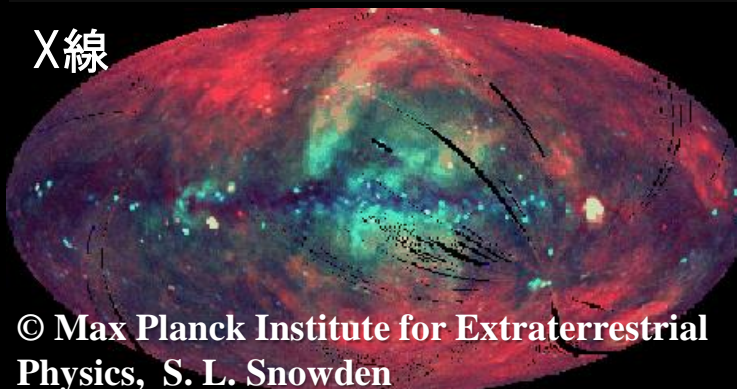
© NASA, A. Mellinger Photomosaic

マイクロ波



© NASA Goddard Space Flight Center, COBE Project

X線



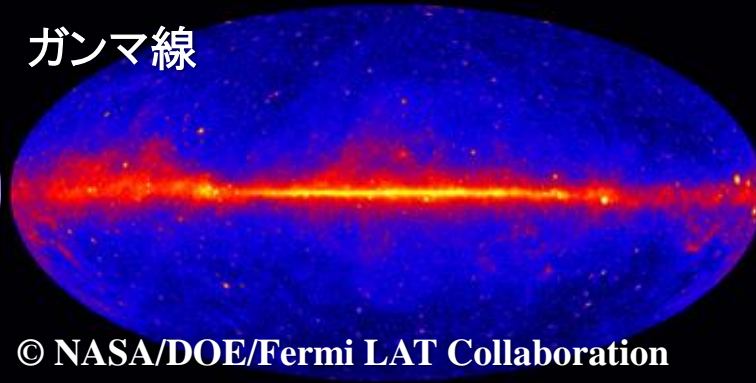
© Max Planck Institute for Extraterrestrial Physics, S. L. Snowden

赤外線



© JAXA, AKARI ALL-SKY IMEGE

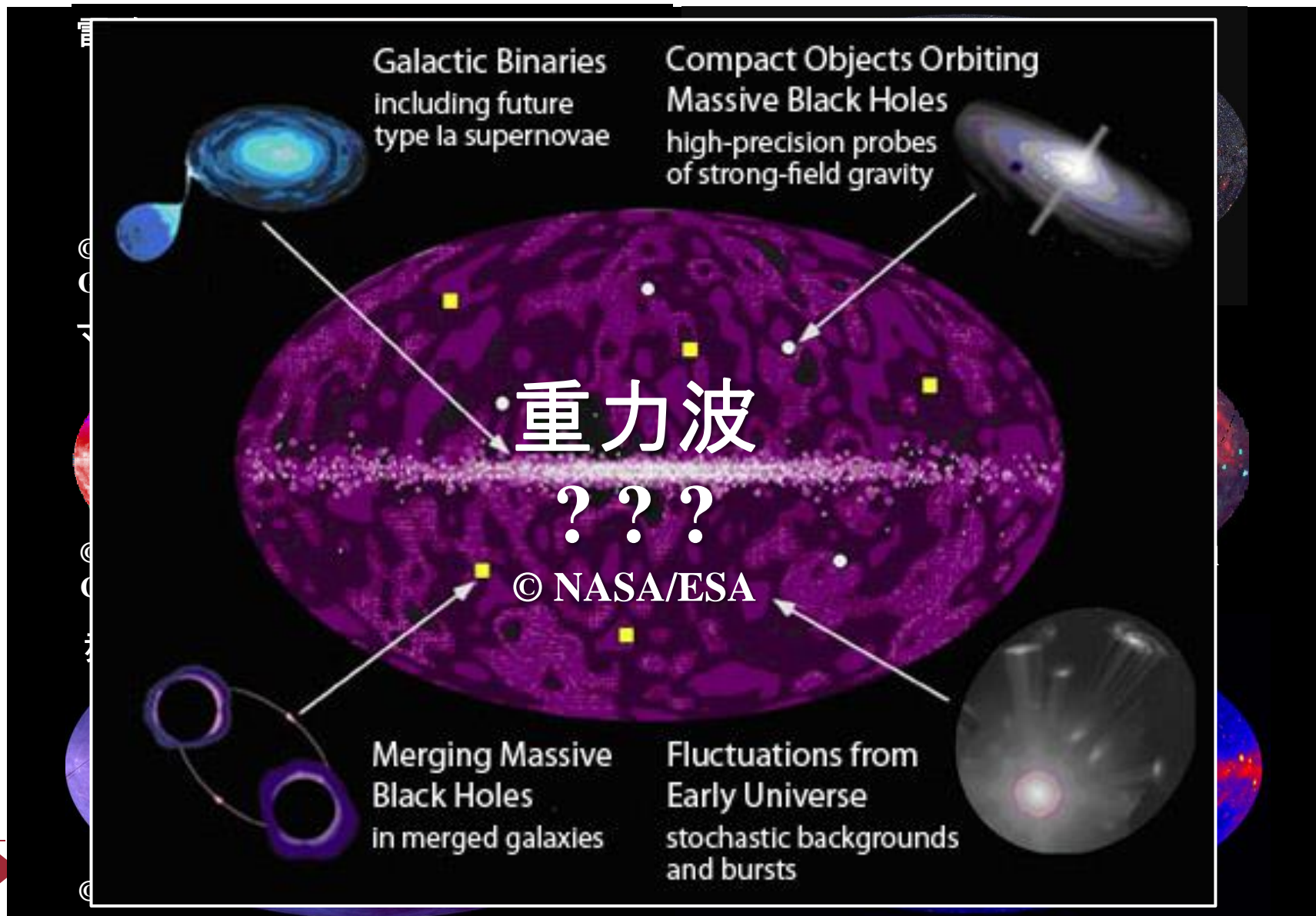
ガンマ線



© NASA/DOE/Fermi LAT Collaboration

重力波の直接検出の意義:

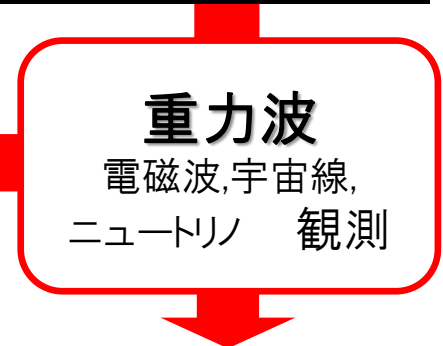
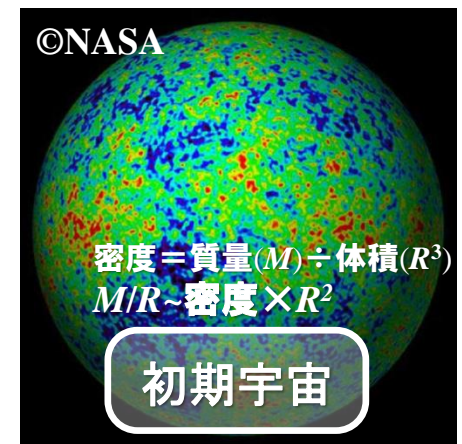
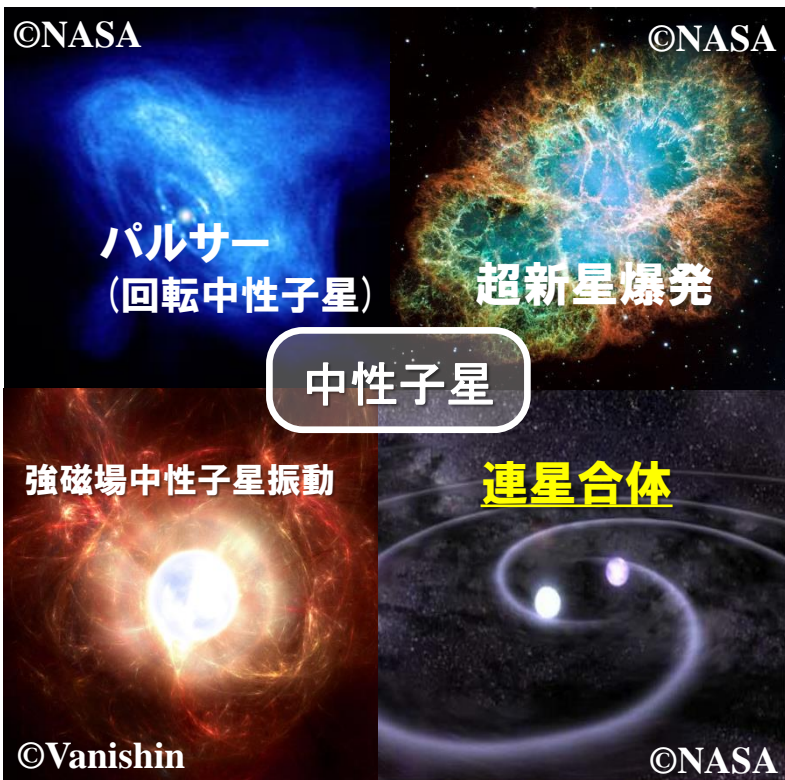
人類は宇宙を見る新しい「目（耳？）」を手に入れた！



重力波天文学・物理学

▶ 有望な重力波源: **強い重力場** (質量/大きさ (M/R) 大) が **動的に変動**する現象

- ▶ 中性子星(質量:太陽程度, 半径:10km程, 中心密度: 10^{15}g/cm^3 :ゴマ粒で数1000トンの重さ)
- ▶ ブラックホール(アインシュタイン方程式が予言する光すらも脱出不可能な強重力天体)



高エネルギー天体現象
の総合的理解

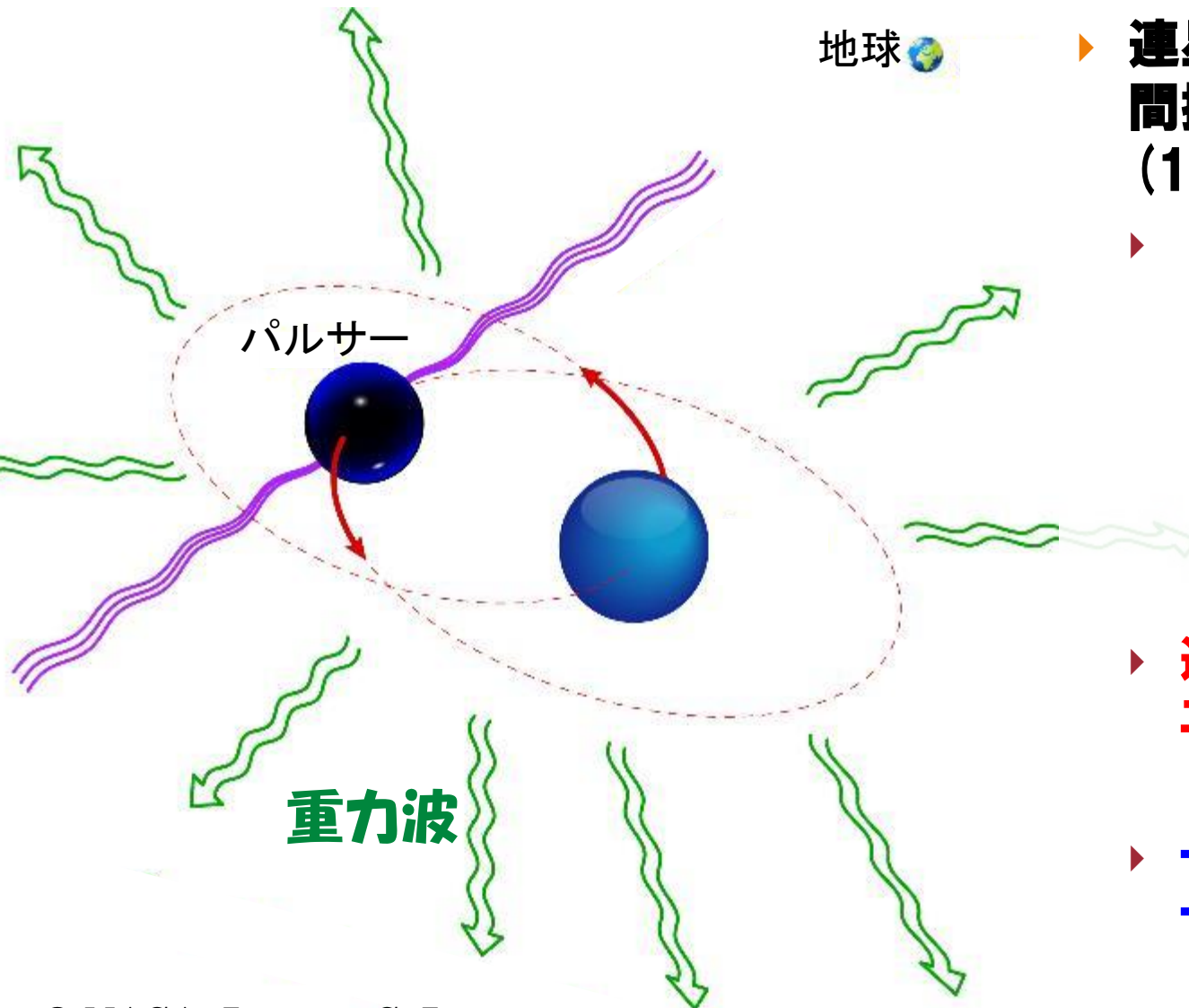
高密度天体の内部状態
原子核・ハドロン物理

一般相対性理論の検証
強い重力場での物理法則

補足資料



重力波存在の間接的証拠：連星パルサーの観測



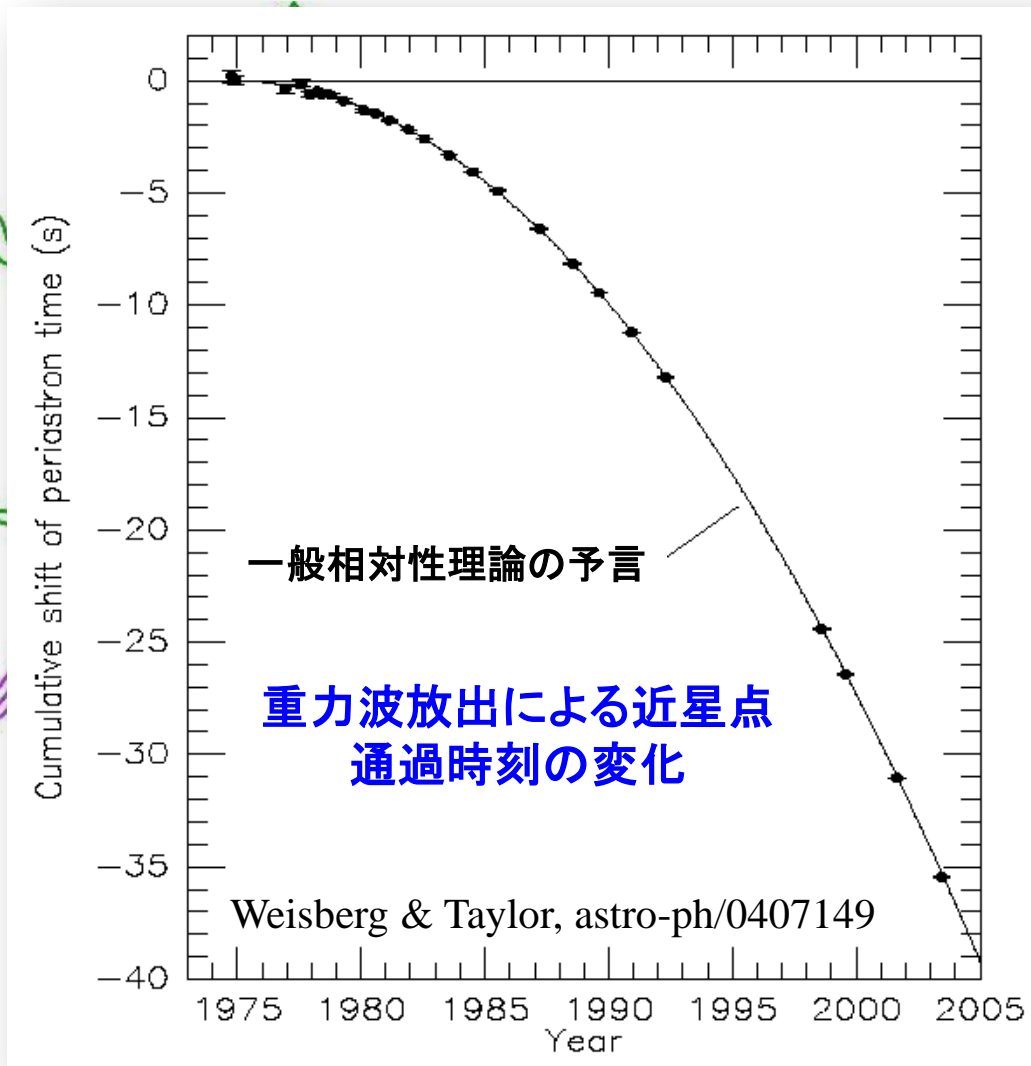
▶ **連星パルサー観測による
間接的証拠は存在
(1993年ノーベル賞)**

▶ Hulse & Taylor

▶ **連星軌道は重力波による
エネルギー損失で変化**

▶ **一般相対論の予言と
一致！**

重力波存在の間接的証拠：連星パルサーの観測



▶ 連星パルサー観測による間接的証拠は存在 (1993年ノーベル賞)

▶ Hulse & Taylor

▶ 連星軌道は重力波によるエネルギー損失で変化

▶ 一般相対論の予言と一致！

一般相対性理論：絶対時間・空間がない！

- ▶ 絶対時間・空間がない！
 - ▶ 「時間方向」の「時間」とは何か？ 「空間方向」の「空間」とは何か？
 - ▶ ブラックホールの例：時間座標と空間座標が入れ替わる可能性もある
- ▶ 重力場の正準形式の研究において定式化がなされた
 - ▶ (正準)量子化の試みにおける重力場の正準形式の重要性
 - ▶ 重力場の正準量子化には「拘束系の量子化」というもう一つの困難がある
 - ▶ 通常ハミルトン形式および量子力学では「時間」は天与のもの
 - ▶ Dirac とも精力的に研究していた
 - ▶ 1960年代に1つの定式化を与えたのは
ADM (Arnowitt, Deser, & Misner)

The theory of gravitation in Hamiltonian form

By P. A. M. DIRAC, F.R.S.
St John's College, Cambridge

(Received 13 March 1958—Revised 21 April 1958)

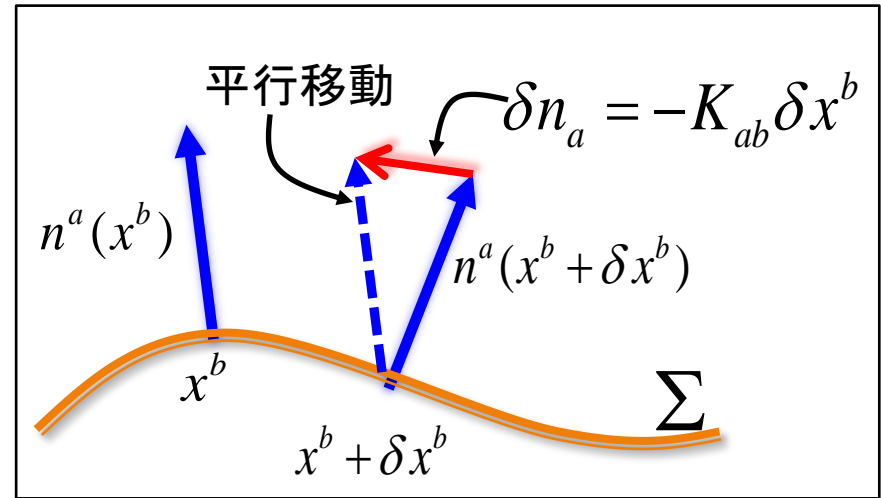
R. Arnowitt,ⁱ S. Deser,ⁱⁱ and C. W. Misnerⁱⁱⁱ

The Dynamics
of General Relativity

1962年 !!

補足：外的曲率 K_{ab} の幾何学的意味

- ▶ Σ_t において n^a が平行移動された場合からのずれに関係
 - ▶ 時空に Σ_t が平らに埋め込まれている場合にはずれ (K_{ab}) はゼロ
 - ▶ Σ_t の時空への埋め込まれ方 (外部から見た曲がり具合) \Rightarrow 外的曲率



- ▶ なぜ空間計量 γ_{ab} の「速度」と関連しているか
 - ▶ ゴムシートとの類推によって直感的に理解できる
 - ▶ 平らではないゴムシート \Rightarrow 張力が働くので潜在的に「速度」を持った状態
 - ▶ 時空に曲がって埋め込まれた $\Sigma_t \Rightarrow$ 外的曲率すなわち「速度」が大きい

重力場の量子化の分野での座標条件の研究

- ▶ 重力場の量子化の分野における研究成果が、発展方程式の定式化の進展に大きく貢献
- ▶ 座標条件 (α, β^a の設定) に関しては重力場の量子化の分野における研究成果はそれほど役に立たなかった模様
 - ▶ 数値相対論：ブラックホール特異点の回避、回転重力場における座標系の引きずりの解消などの技術的な側面での研究が必要
 - ▶ 重力場の量子化：量子化に便利な座標の研究が進められていた (Diracら)
 - ▶ (後述する) 拘束条件がここでも大問題となっていた (らしい)

PHYSICAL REVIEW

VOLUME 114, NUMBER 3

MAY 1, 1959

Fixation of Coordinates in the Hamiltonian Theory of Gravitation

P. A. M. DIRAC*

Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey

(Received December 10, 1958)

The theory of gravitation is usually expressed in terms of an arbitrary system of coordinates. This results in the appearance of weak equations connecting the Hamiltonian dynamical variables that describe a state at a certain time, leading to supplementary conditions on the wave function after quantization. It is then difficult to specify the initial state in any practical problem.

To remove the difficulty one must eliminate the weak equations by fixing the coordinate system. The general procedure for this elimination is here described. A particular way of fixing the coordinate system is then proposed and its effect on the Poisson bracket relations is worked out.

数値相対論の発展：まとめ

- ▶ ADM形式 / 3+1分解 (Arnowitt, Deser, & Misner 1962)
 - ▶ 一般相対性理論：時間空間が融合した時空多様体上の理論
 - ▶ 方程式中に時間微分と空間微分が混在して出現
 - ▶ どの型の偏微分方程式系なのかが良くわからない
 - ▶ 初期値問題としての定式化
- ▶ 座標条件に関する基本的アイデア (Smarr, Yorkら1970年代)
 - ▶ 一般相対性理論：絶対時空間がない
 - ▶ 時間軸と空間軸を計算者が指定することが必要
 - ▶ BH特異点回避、座標の引きずりの解消
- ▶ 先駆的研究 (Nakamura, Ohara, Teukolskyら1980年代)
 - ▶ 初めての Full GR 重力崩壊計算 (Nakamura 1980's)



数値相対論の発展：まとめ

- ▶ BSSN形式 (Shibata & Nakamura 1995; Baumgarte & Shapiro 1999)
 - ▶ Einstein 方程式：拘束条件の存在
 - ▶ Maxwell方程式： Gauss's law, No-Monopole条件
 - ▶ Einstein方程式： Hamiltonian(エネルギー), Momentum 拘束条件
 - ▶ ADM形式：拘束条件の破れが単調増加して計算を壊す
 - ▶ 長時間安定なシミュレーションが可能に
 - ▶ 初めての Full GR 連星中性子星合体 (Shibata & Uryu 2000)
- ▶ BH 時空を追える技法の開発 (Pretorius 2005; Campanelliら2006)
 - ▶ BH切り取り法：BH内部は“見えない”
 - ▶ 初めての連星BH合体 (Pretorius 2005)
 - ▶ 上手な変数と座標条件の採用：BSSN-Puncture
 - ▶ 爆発的な連星BH合体シミュレーション (2006～)

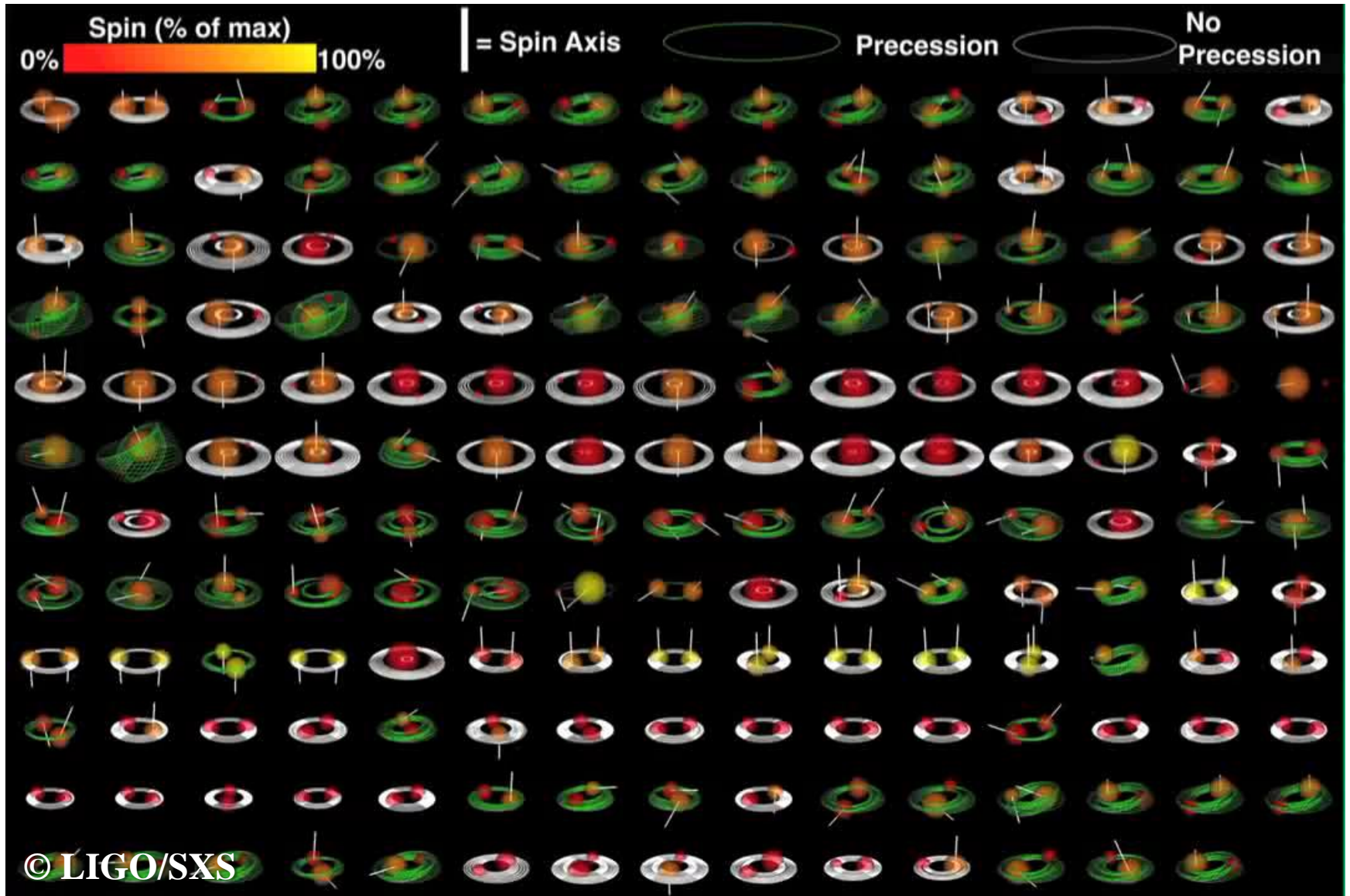


物質場の方程式の発展：まとめ

- ▶ 一般相対論的流体(1990年後半)
 - ▶ バレンシア大学, マックスプランク研究所
- ▶ 一般相対論的磁気流体(2005年頃～)
 - ▶ バレンシア大学, Shibata & Sekiguchi, イリノイ大学
- ▶ 微視的物理を組み入れた数値相対論 (Sekiguchi 2007,2010)
 - ▶ 高密度核物質理論に基づく有限温度状態方程式
 - ▶ 電子捕獲反応、ニュートリノ生成・散乱
- ▶ 輻射流体,粘性流体計算も可能になりつつある
 - ▶ 最後のフロンティア
 - ▶ Shibata et al. (2011); Sekiguchi & Shibata (2011); Shibata et al. (2017)

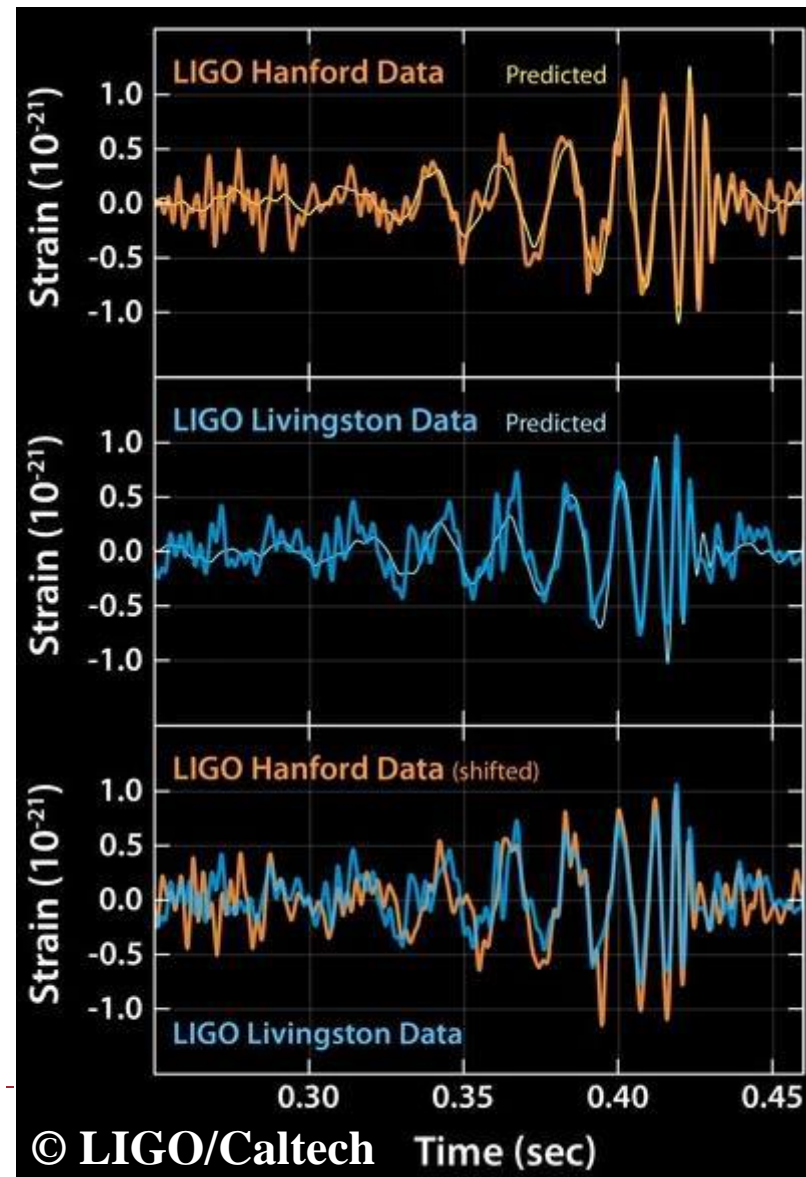


重力波カタログの作成



GW150914 における重力波

- ▶ **目で見てわかる教科書的重力波**
 - ▶ **大振幅の重力波だった**
 - ▶ 陽子の大きさの1/1000ほどのゆがみをとらえた
- ▶ **観測された波形と数値相対論の予言が見事に一致**
 - ▶ 実験物理学、理論物理学および**計算機科学**の歴史的勝利
- ▶ 距離13億光年で
- ▶ 太陽の36倍と29倍の質量の**ブラックホール連星**が合体して
- ▶ 62倍のブラックホールが形成したときの重力波だった！
- ▶ 残り(太陽3個分)が重力波となった



コンパクト天体連星形成後の進化

- ▶ 主に重力波放出によるエネルギー/角運動量損失による

$$\tau_{GW} \sim 2 \times 10^8 q^{-1} (1+q)^{-1} \left(\frac{a}{R_{\text{sun}}} \right)^4 \left(\frac{M_1}{1.4 M_{\text{sun}}} \right)^{-3} \text{ yr}$$

$$L_{GW} \sim 9 \times 10^{51} q^2 (1+q) \left(\frac{a}{100 \text{ km}} \right)^{-5} \left(\frac{M_1}{1.4 M_{\text{sun}}} \right)^5 \text{ erg/s}$$

$$h \sim 6 \times 10^{-23} q \left(\frac{a}{100 \text{ km}} \right)^{-1} \left(\frac{M_1}{1.4 M_{\text{sun}}} \right)^2 \left(\frac{D}{100 \text{ Mpc}} \right)^{-1}$$

$$f_{GW} \sim 200 \left(\frac{a}{100 \text{ km}} \right)^{-3/2} \left(\frac{M}{2.8 M_{\text{sun}}} \right)^{1/2} \text{ Hz}$$



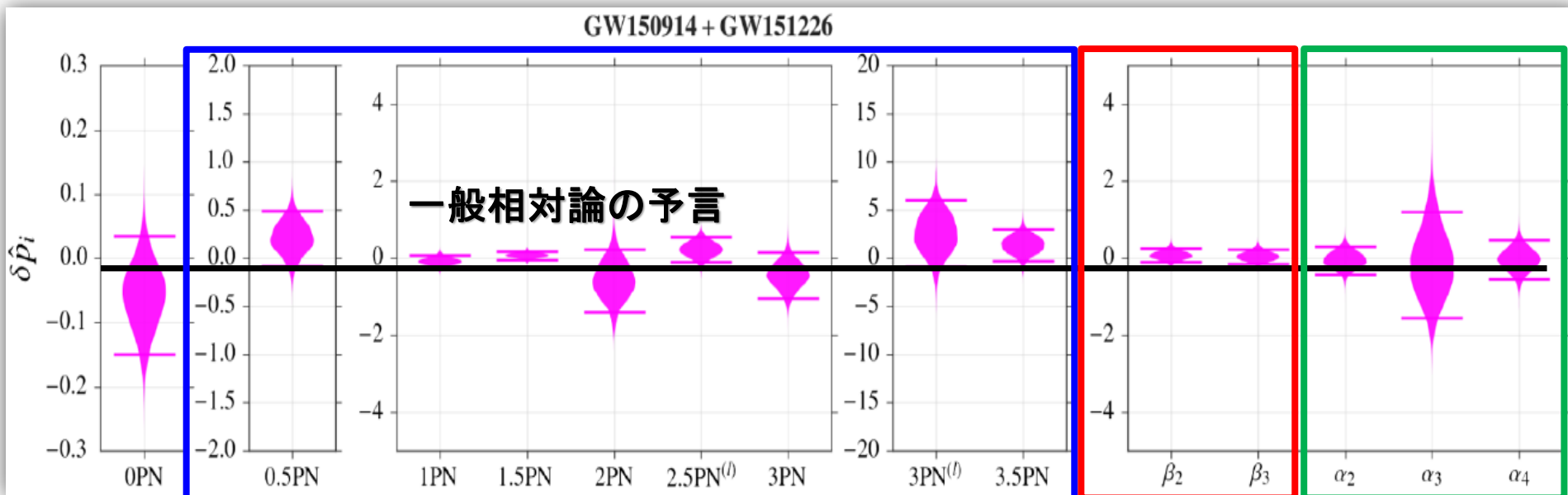
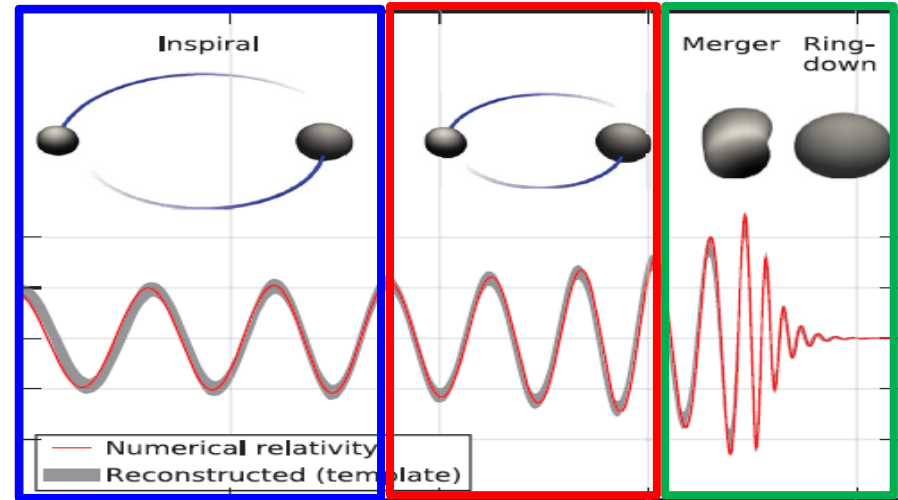
一般相対性理論は越えられるか？

▶ 一般相対論のテスト

- ▶ 太陽系 (弱い重力場)
- ▶ 連星パルサー (重力波の間接的証拠)
- ▶ 連星ブラックホール (強い重力場)

▶ 今のところ一般相対論からの有意なずれはみられない

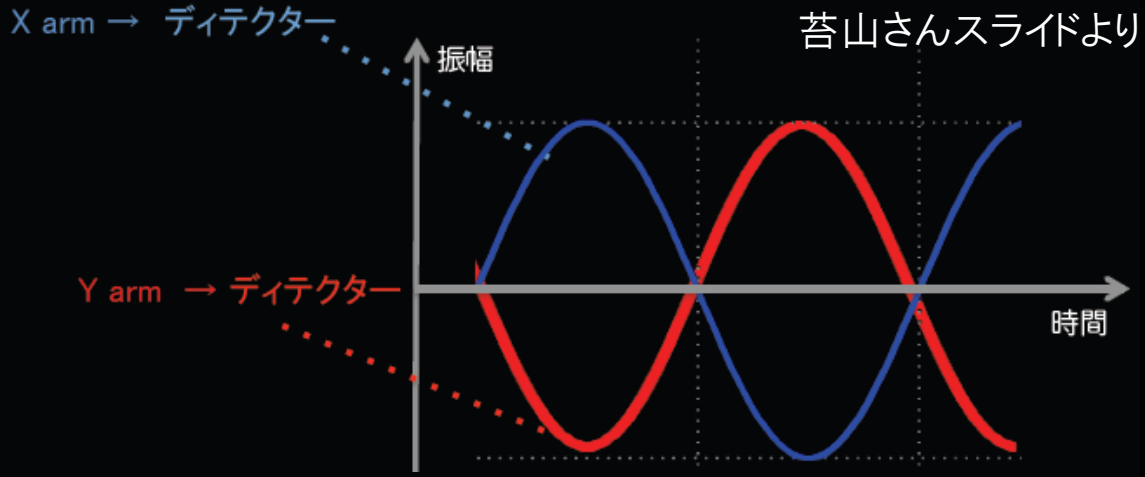
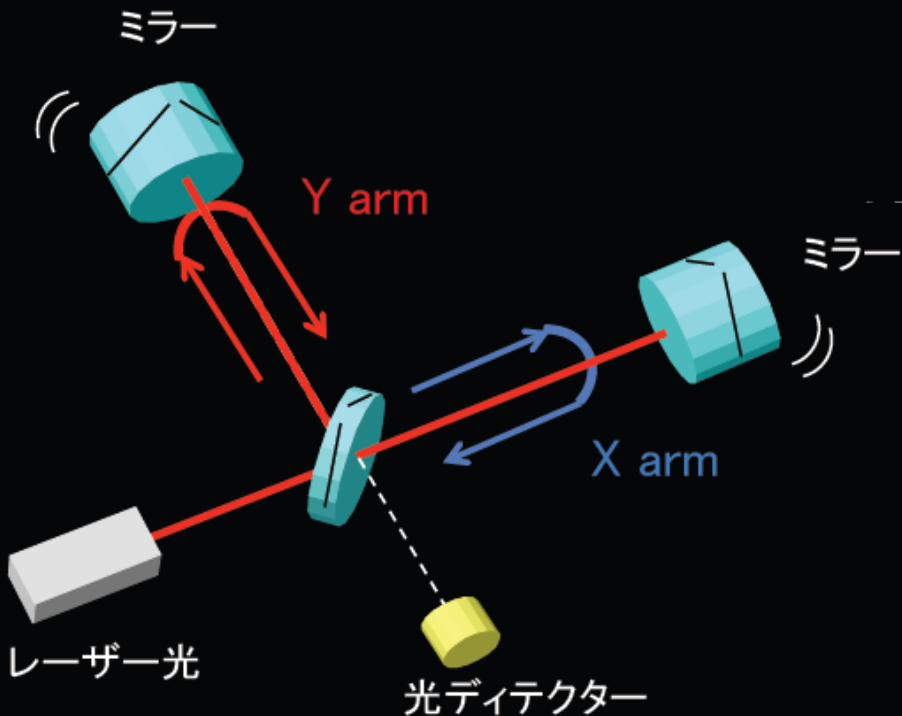
- ▶ 将来観測に期待！



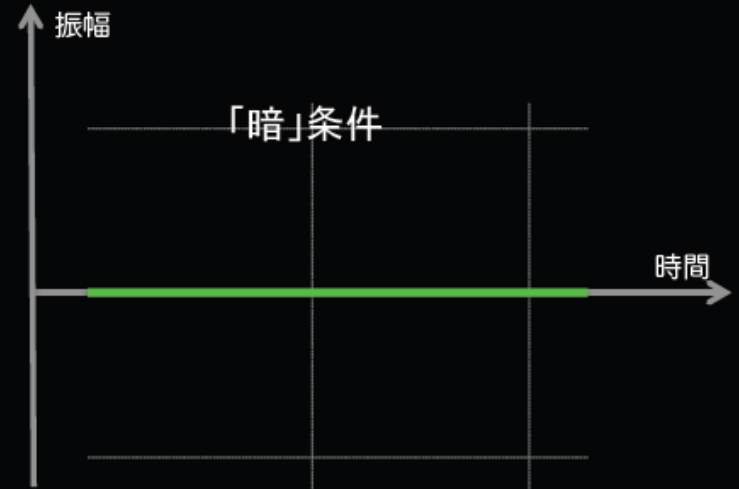
重力波検出：空間の伸縮を検出する

- ▶ **マイケルソン干渉計**：縦方向が伸びると横方向が縮む重力波による歪みの性質を利用

光を干渉計の腕の中に閉じ込め、光ディテクターでは2つの腕からの光が打消しあうように調整する



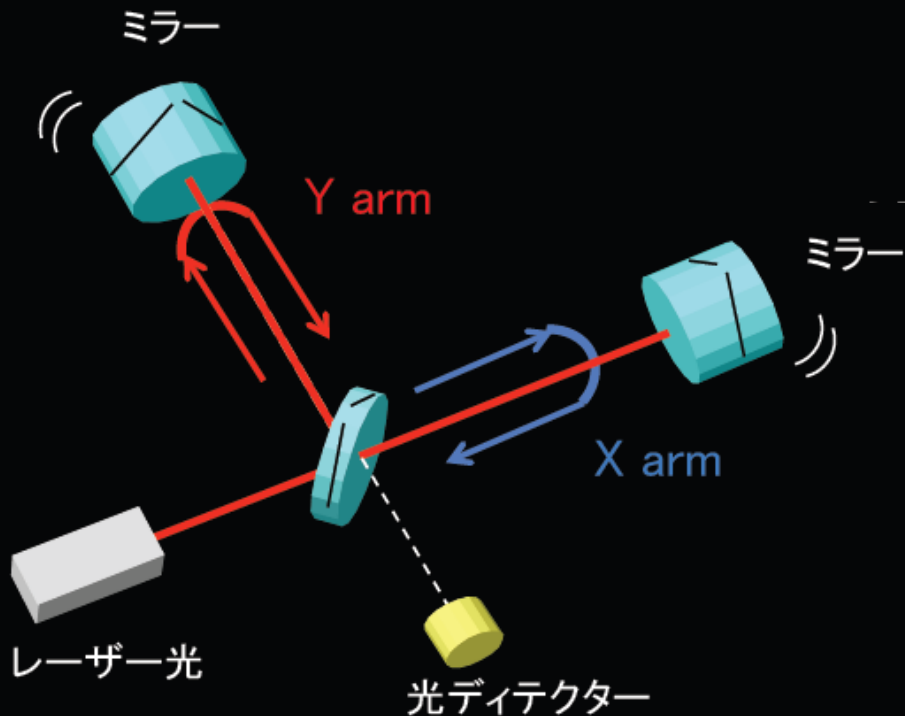
光ディテクター出力



重力波検出：空間の伸縮を検出する

- ▶ **マイケルソン干渉計**：縦方向が伸びると横方向が縮む重力波による歪みの性質を利用

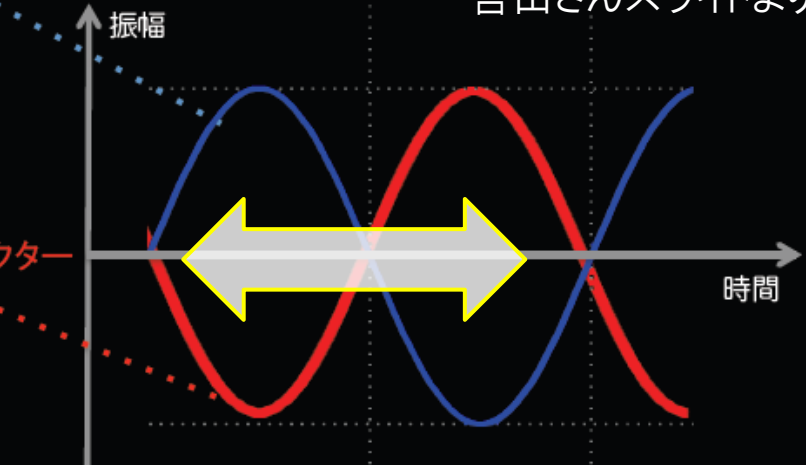
重力波が到来すると、X arm と Y arm
で腕の長さの変動の仕方が違うので、
打消し合いの関係が崩れる



X arm → デテクター

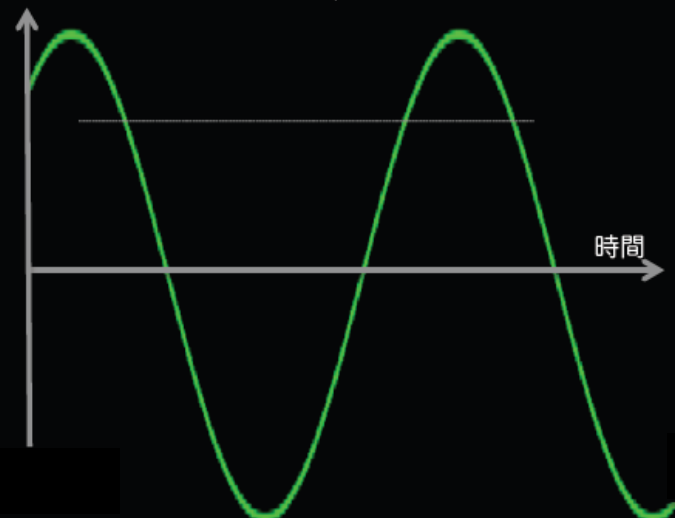
Y arm → デテクター

苔山さんスライドより



光ディテクター出力

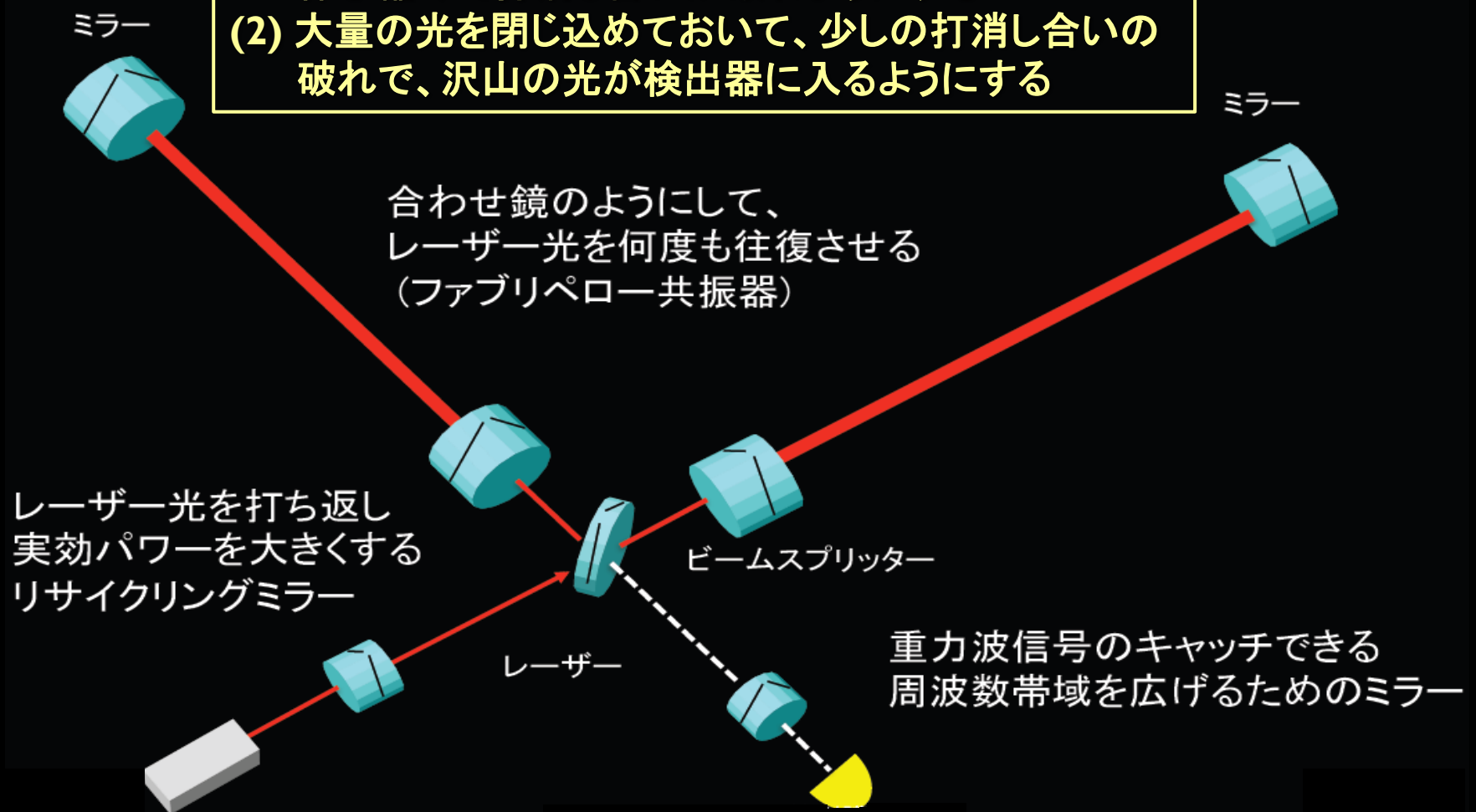
↓ 干渉



重力波検出：更なる装置の工夫が必要

苔山さんスライドより

- (1) 腕の長さをできるだけ長くすることで、少しの割合の伸び縮みで打消し合いが破れようにする
- (2) 大量の光を閉じ込めておいて、少しの打消し合いの破れで、沢山の光が検出器に入るようにする



重力波望遠鏡 KAGRA

岐阜県飛騨市神岡町の神岡鉱山地下内に 3km のトンネルを掘り、望遠鏡が建設中。
地下なので振動雑音が少ない。冷やす計画なので熱雑音も少ない
2016年3月末～4月上旬に試運転を完了、現在アップグレード中。



重力波望遠鏡 KAGRA

岐阜県飛騨市神岡町の神岡鉱山地下内に 3km のトンネルを掘り、望遠鏡が建設中。
地下なので振動雑音が少ない。冷やす計画なので熱雑音も少ない
2016年3月末～4月上旬に試運転を完了、現在アップグレード中。



重力波放射現象は電磁波で輝くか？

- ▶ **重力波データ解析 ⇒ 電磁波による到来時間・方向の情報は貴重**
- ▶ **重力波の位置決定精度はあまりよくない ⇒ 電磁波による精密決定**
- ▶ **重力波放射現象が電磁波で輝く可能性の研究が重要**
 - ▶ 物質(荷電粒子)が存在しないと電磁波では輝かない
 - ▶ 連星ブラックホール:合体時には周りに物質が存在しないので光らない
- ▶ **連星中性子星:合体時に中性子星物質が宇宙空間に放出される**
 - ▶ 中性子:クーロン力(電気力)による反発がないので原子核にとりこまれる(重元素合成反応)
 - ▶ **中性子過剰となった原子核は強い放射能 ⇒ 電磁波を放射する!**
 - ▶ 可視光から赤外線領域で明るく輝く
 - ▶ その他、様々な電磁波放射の可能性が探求されている
 - ▶ 放出物質が星間物質ぶつかったときの電波放射
 - ▶ 異なる速度を持つ放出物質どうしがぶつかったときのX線放射

