時間反転対称性によって保護されたトポロジカル相と密度演算子の部分転置について

塩崎　謙　　　理研

時間反転対称性によって保護された トポロジカル相と密度演算子の部分転置について

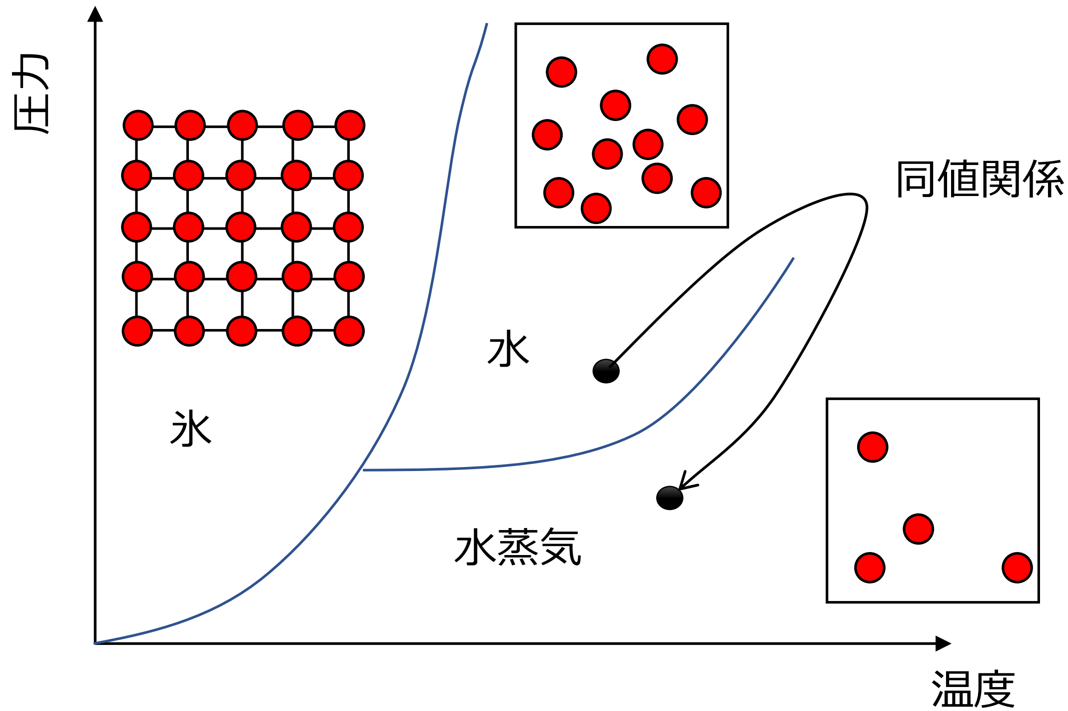
~時間反転対称性によって保護された Haldane鎖のorder parameter~

塩崎　謙　　　理研

目次

1. 対称性によって保護されたトポロジカル相(SPT相)
2. トポロジカル場の理論とSPT相の分類
3. 向き付けのない時空上の場の理論の例
4. 密度演算子の部分転置とHaldane相の非局所秩序変数

- 水の三態



- 氷と水の間には必ず相転移が存在する．氷 $\not\sim$ 水
- 相転移せずに水と水蒸気とを繋ぐ経路が存在する．水～水蒸気
- この例においては，自発的対称性の破れ（連続並進対称性の破れ）によって，{ 氷 }と { 水, 水蒸気 } 間の違いが理解できる．

トポロジカル相

- 自発的対称性の破れを伴わないにもかかわらず，相転移なしに”連続的”に移ることができない相も，論理的には存在して良いだろう．具体的には以下の条件下で考えよう.

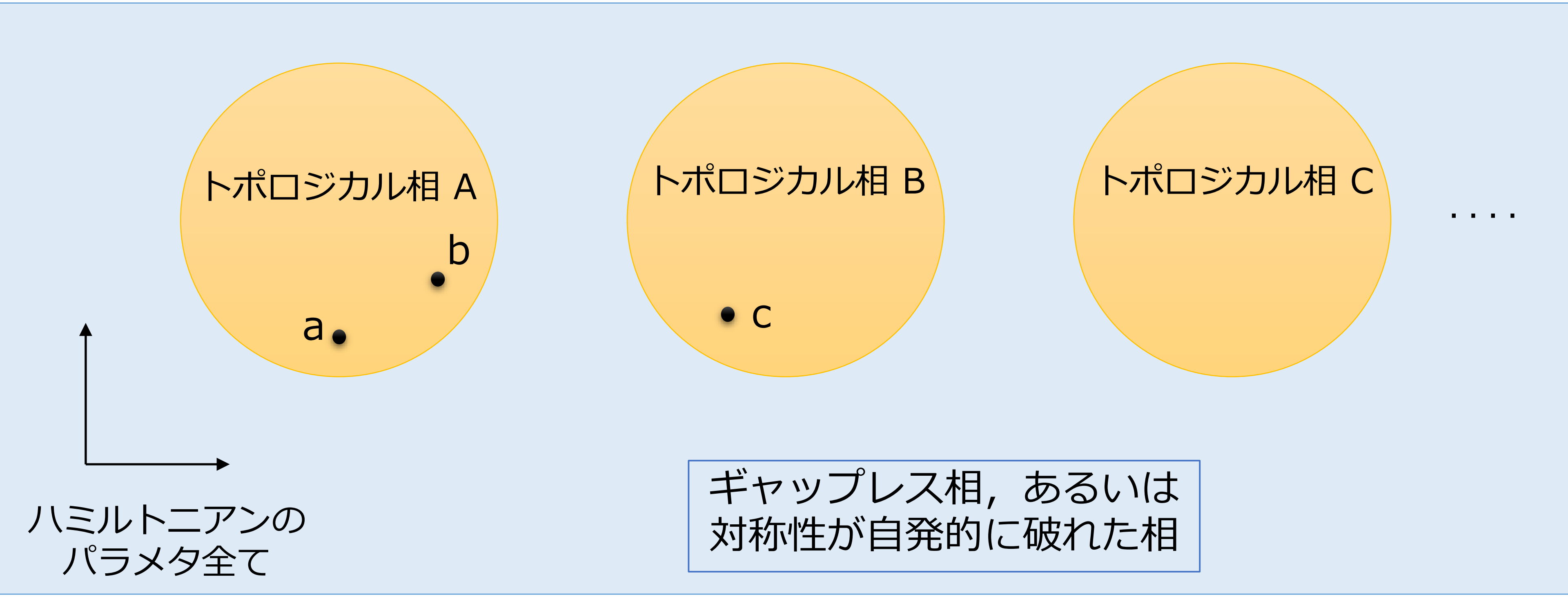
  - ✓ 絶対零度

  - ✓ ギャップのある量子相（基底状態と第一励起状態の間に有限のエネルギーギャップが存在する．）

  - ✓ 何らかの対称性（Z_2 Ising，U(1)粒子数保存，時間反転対称性など）を課す.

トポロジカル相

- すると，ヒルベルト空間をひとつ決め，その上の可能な（短距離相互作用をする）ハミルトニアンの相図を想像すると，以下のようになる.

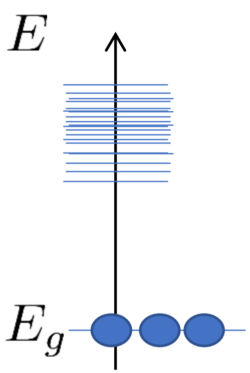


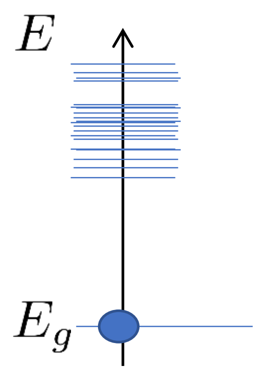
- エネルギーギャップを保ち，かつ自発的対称性の破れを起こさない経路で結ばれる基底状態を同一視する．この同値関係で割った同値類をトポロジカル相と呼ぶ.

Symmetry Protected Topological phases

- トポロジカル相は一般には基底状態に縮退が存在する．縮退する基底状態の数はハミルトニアンを定義する実空間の大域的なトポロジー（例えば，トーラスの穴の数）に依存する．

- 任意の実空間において基底状態に縮退が存在しないトポロジカル相を，SPT相と呼ぶ.





- 以下，SPT相に話を制限する.

- SPT相の例：Haldane鎖，トポロジカル絶縁体・超伝導体,…

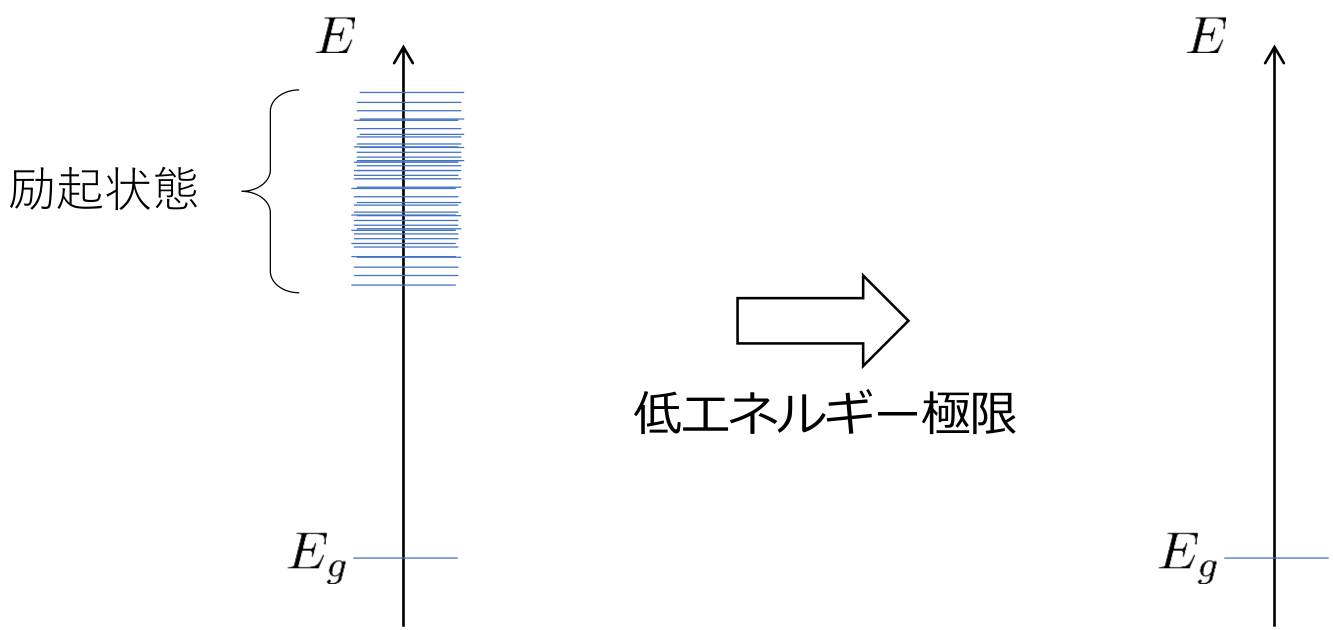
- （基底状態に縮退が存在するトポロジカル相の例：Toric code, 分数量子Hall系,…）

目次

1. 対称性によって保護されたトポロジカル相(SPT相)
2. トポロジカル場の理論とSPT相の分類
3. 向き付けのない時空上の場の理論の例
4. 密度演算子の部分転置とHaldane相の非局所秩序変数

トポロジカル場の理論

- SPT相はどのように特徴づけられるか？
- 以下，有用なconjectureを得るための考察を進める.
- ギャップのある量子相なので，基底状態のみに情報がある.



トポロジカル場の理論

- 場の理論によって記述できると仮定する．特に，ユークリッドな場の理論（時間は虚時間）とする．

- 距離スケールが存在しないのでトポロジカル場の理論に.

- ヒルベルト空間の次元が１なので，演算子は存在せず，時空多様体上の分配関数のみが理論の物理量に.

- 例えば，ある実空間 X 上の分配関数は

$$Z(X \times S^1) = \mathrm{Tr}(1) = \langle GS|GS \rangle = 1.$$

- これでは基底状態から何も情報を引き出すことができない.

A theory　＝　物理量の値の組

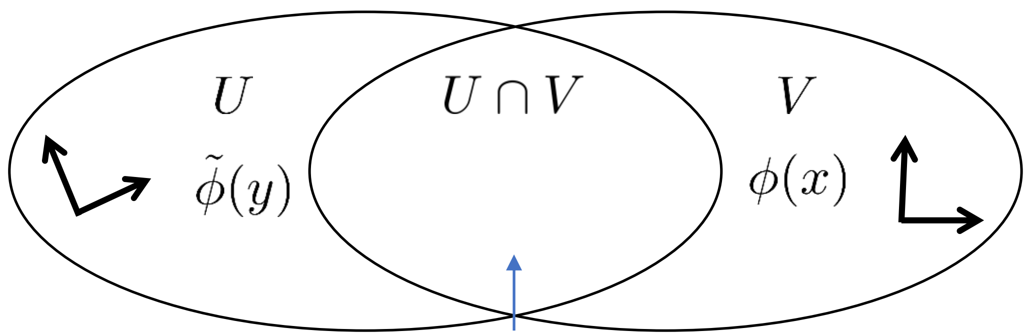
なので，SPT相を区別するには，“異なるSPT相”に対して異なる値を返す物理量が必要．どうするか？

ステップ１：時空多様体を任意に

- 低エネルギーはトポロジカル場の理論で記述されると期待できるので，トポロジカル場の理論が通常有する，ポアンカレ対称性（時空の回転対称性）が emergent に存在すると仮定する．

- (注：もとの理論に回転対称性を課すわけではない．低エネルギーにおける有効的な自由度が，回転に対する挙動を自由度自身が知っている，という仮定．)

- 場の理論においてポアンカレ対称性の存在は，多様体のパッチの重なり部分における場の変換則を定義することに他ならない．



$$\tilde{\phi}(y) = U\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial y_\alpha}(y)\right)\phi(x(y))$$

- 任意の，向き付けのある，閉じた時空多様体 M 上で分配関数を考えることに意味があると期待できる．

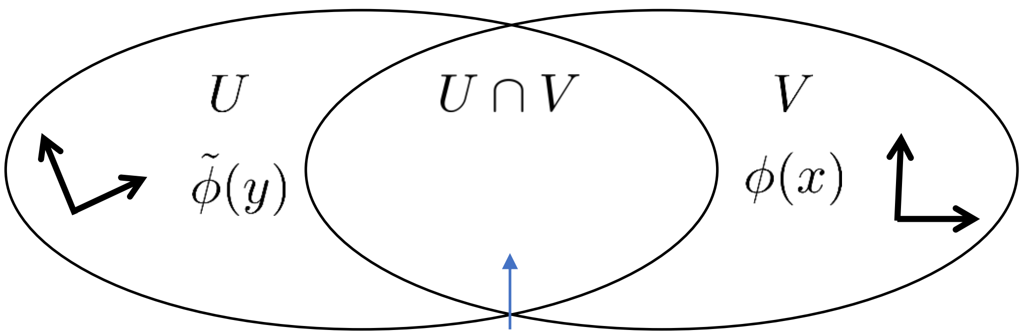
$$Z(M) \in U(1)$$

ステップ２：ゲージ化

- トポロジカル場の理論に，まだ対称性の情報が入っていない．
- 対称性群Gのonsiteのユニタリな対称性を考える．群Gのonsite対称性が存在するということは，場の演算子に対して群Gの作用が定義されているということ．

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{r}) \mapsto g\hat{\phi}(\boldsymbol{r}), \quad g \in G.$$

- この群Gの場への作用を用いて，パッチの重なり部分の場の変換則に対して，群Gの作用を追加することができる（ゲージ化）．



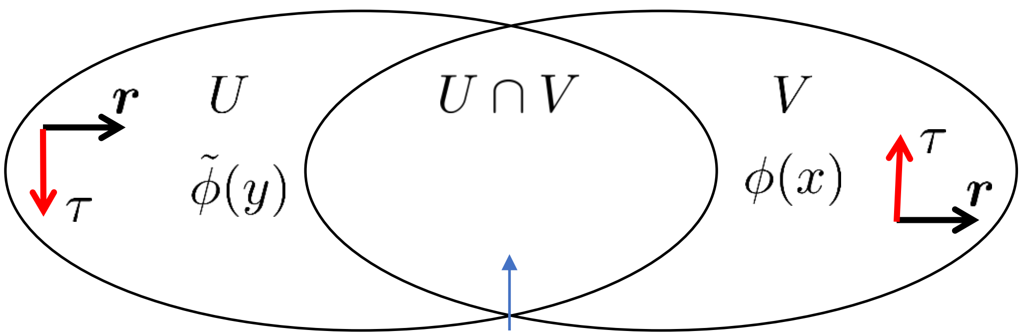
$$\tilde{\phi}(y) = g(x) U \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial y_\alpha}(y) \right) \phi(x(y))$$

- これで理論のパラメタとして，時空多様体 M 上のG束（群Gの外場） A が追加された．

ステップ３：向き付けのない時空多様体

- 時間反転対称性など，時空の向き付けを変化させる対称性も“ゲージ化”できる：

- 場の演算子に対して時間反転が定義されていれば，それを用いて，向き付けが変化するパッチの重なり部分における場の変換則が定義できる．



$$\tilde{\phi}(\boldsymbol{r}, -\tau) = T\phi(\boldsymbol{r}, \tau)$$

- これで理論のパラメタとして，向き付けのない時空多様体たちが追加された．

トポロジカル場の理論のパラメタ

- ステップ1,2,3をまとめると，理論の"物理量"は以下の形の分配関数が全て

$$Z(M, A) \in U(1)$$

G束（群Gの外場，単にG場と呼ぶ）

閉じた時空多様体.

時空の向き付けを変化させる対称性が存在する場合は，M は向き付けのない時空多様体を含む.

- 注：G場はstatic.　異なるG場について足し上げない.

SPT相の分類

- ここで

$$\text{A theory} \quad = \quad \text{物理量の値の組}$$

　を思い出す.

- さらに，トポロジカル場の理論を仮定しているので，分配関数は(*M*,*A*)の連続変化に対して不変である.

- したがって，SPT相の分類は，多様体 *M* とG場 *A* の組（*M*,*A*）の大域的なトポロジーのみに依存するU(1)値の有効作用の分類と等価であると期待できる.

$$Z(M,A) = e^{2\pi i S_{\mathrm{top}}(M,A)} \in U(1)$$

Cobordismを用いたSPT相の分類

- SPT相の分配関数は，トポロジカル不変性よりも，ある意味より”強い”cobordism不変性を満たす，と議論（証明？）されている．[Kapustin, Freed, Hopkins]

- それを信じると，SPT相はcobordism群（のtorsion部分）によって分類される．

時空の構造 (向き付けの有無，spin構造など）を指定

$$\Omega_d^{\mathrm{str}}(BG)$$

Gの分類空間．G場を記述

時空の次元

- 注：cobordism群とは，時空多様体 (M,A) たちにcobordantと呼ばれるある種の同値関係を導入し，その同値類たちに和の構造をdisjoint unionにより導入して作られたアーベル群のこと．詳しくはwikipediaを参照．

時間反転対称性によって保護されたHaldane鎖

- 空間１次元における，時間反転対称性によって保護されたボソンのSPT相
- 時間反転対称性が存在するので，向き付けのない時空多様体を考える.
- 対応するcobordismは unoriented cobordism $\Omega_2^O = \mathbb{Z}_2$
- これはSPT相の分類がZ_2により与えられることを示す.
- トポロジカル有効作用は2次のStiefel-Whitney classで与えられる.

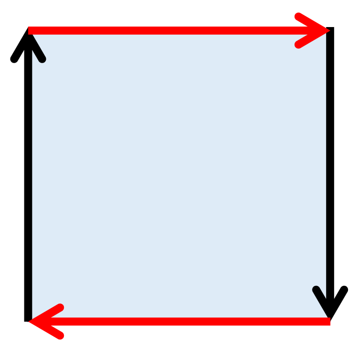
$$Z_\nu(M) = e^{\pi i \nu \int w_2(TM)}, \quad \nu = \begin{cases} 0 & (\mathrm{triv}) \\ 1 & (\mathrm{Haldane}) \end{cases}$$

- したがって，与えられた理論が自明相かHaldane相に属するかどうかは，理論の分配関数を実射影平面 RP^2 上で計算すれば良い．（クロスキャップの数が奇数の場合にのみ，非自明な値を返す．クロスキャップは後述．）

$$Z_\nu(RP^2) = e^{\pi i \nu \int w_2(T(RP^2))} = (-1)^\nu.$$

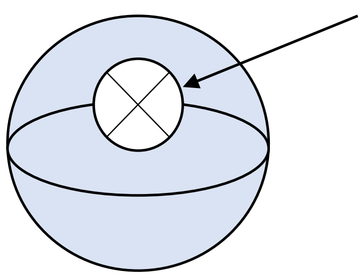
時間反転対称性によって保護されたHaldane鎖

- この実射影平面のHaldane鎖における意味を説明することがこの発表の主目的.
- まずは，実射影平面上で分配関数を計算すると (-1) を返すような，おもちゃの場の理論模型について考える.
- その後，基底状態と時間反転演算子を用いてどのように実射影平面を実現するかを見る.



対辺を同一視

$\cong$

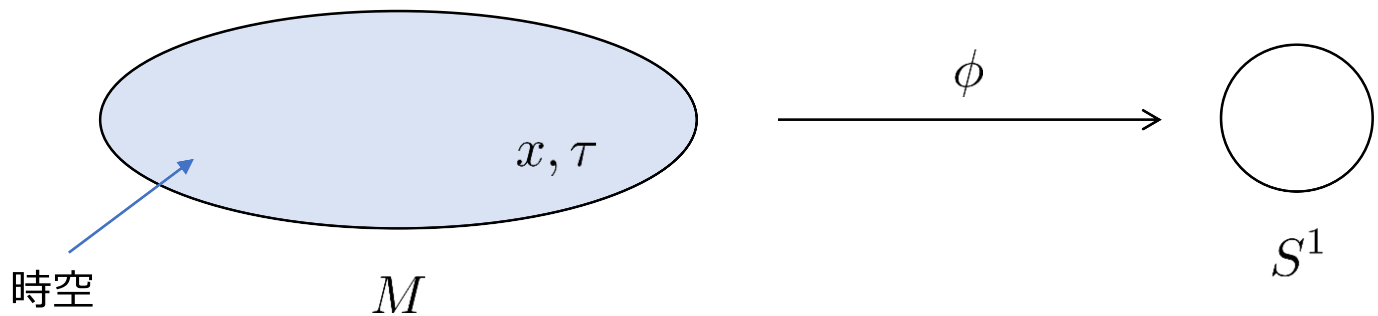


目次

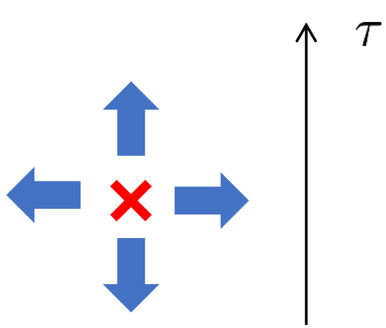
2d abelian sigma model

- Haldane鎖の記述する最も簡単なtoy model.
- AF鎖のO(3) modelのeasy plane limit (例 : Takayoshi-Pujol-Tanaka)
- Target space = S^1.

$$\phi : M \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1$$



- 場の虚時間発展において，vortexイベントを許す.



2d abelian sigma model

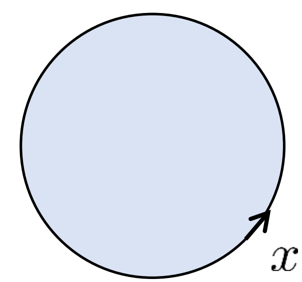
- Theta 項

$$Z[M] = \int D\phi \exp\Big[- S_{\mathrm{kin}}[\phi] + i\theta(\# \text{ of vortices})\Big], \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

運動項は重要でないので，単に無視する．

✓ 計算例：S^1上の基底状態の波動汎関数（Disc状態）

$$\begin{aligned} GS[\phi(x)] &= e^{i\theta \oint_{S^1} d\phi} \\ &= e^{i\theta(\text{winding number})}. \end{aligned}$$



✓ 計算例：閉じた向き付けのある時空多様体上における分配関数

$$Z[M] = 1.$$

2d abelian sigma model

- 時間反転

$$T\hat{\boldsymbol{S}}T^{-1} = -\hat{\boldsymbol{S}} \qquad \Rightarrow \qquad \phi(x,\tau) \mapsto \phi(x,-\tau) + \pi$$

- 注 : semiclassical description: $\boldsymbol{S}(x) \sim (-1)^x \boldsymbol{n}(x)$
- Easy plane limit $\boldsymbol{n} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$
- 時間反転対称性 = 相関関数が経路積分変数の時間反転に対して不変

$$\phi(x,\tau) \mapsto \phi(x,-\tau) + \pi.$$

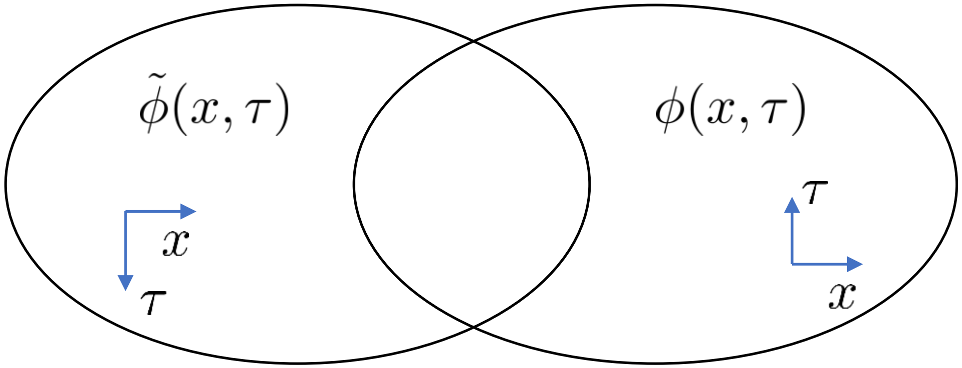
- 時間反転対称性 → θ が量子化

$$\theta \in \{0, \pi\}$$

- $\theta=\pi$ がHaldane相に対応.
- θを検出するには？ → 実射影平面

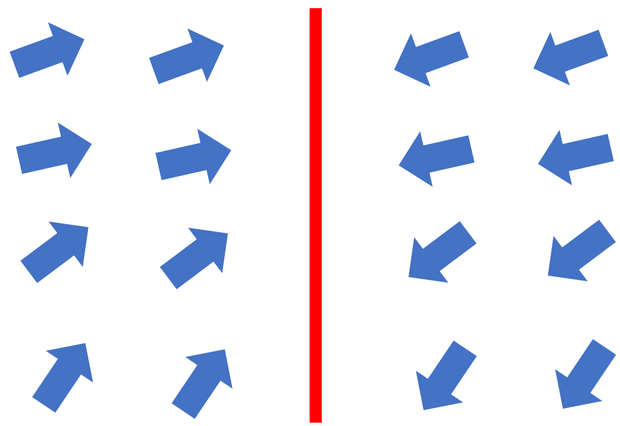
2d abelian sigma model

- 時間反転対称性の”ゲージ化” = 向け付けのない時空多様体上に理論をおく.



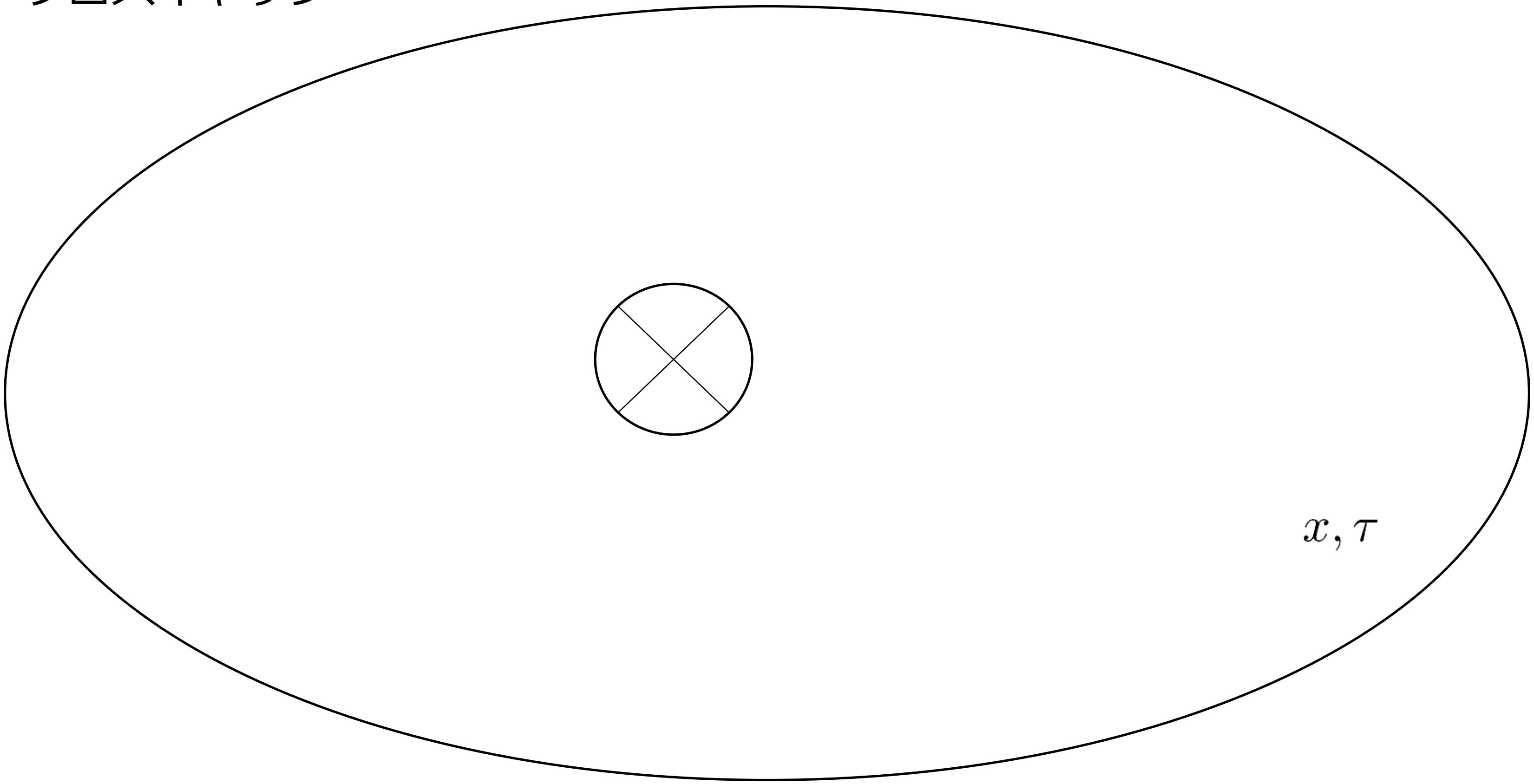
$$\tilde{\phi}(x,-\tau)=\phi(x,\tau)+\pi$$

- すると，向き付けが変化する線上で，場が π だけシフトする！



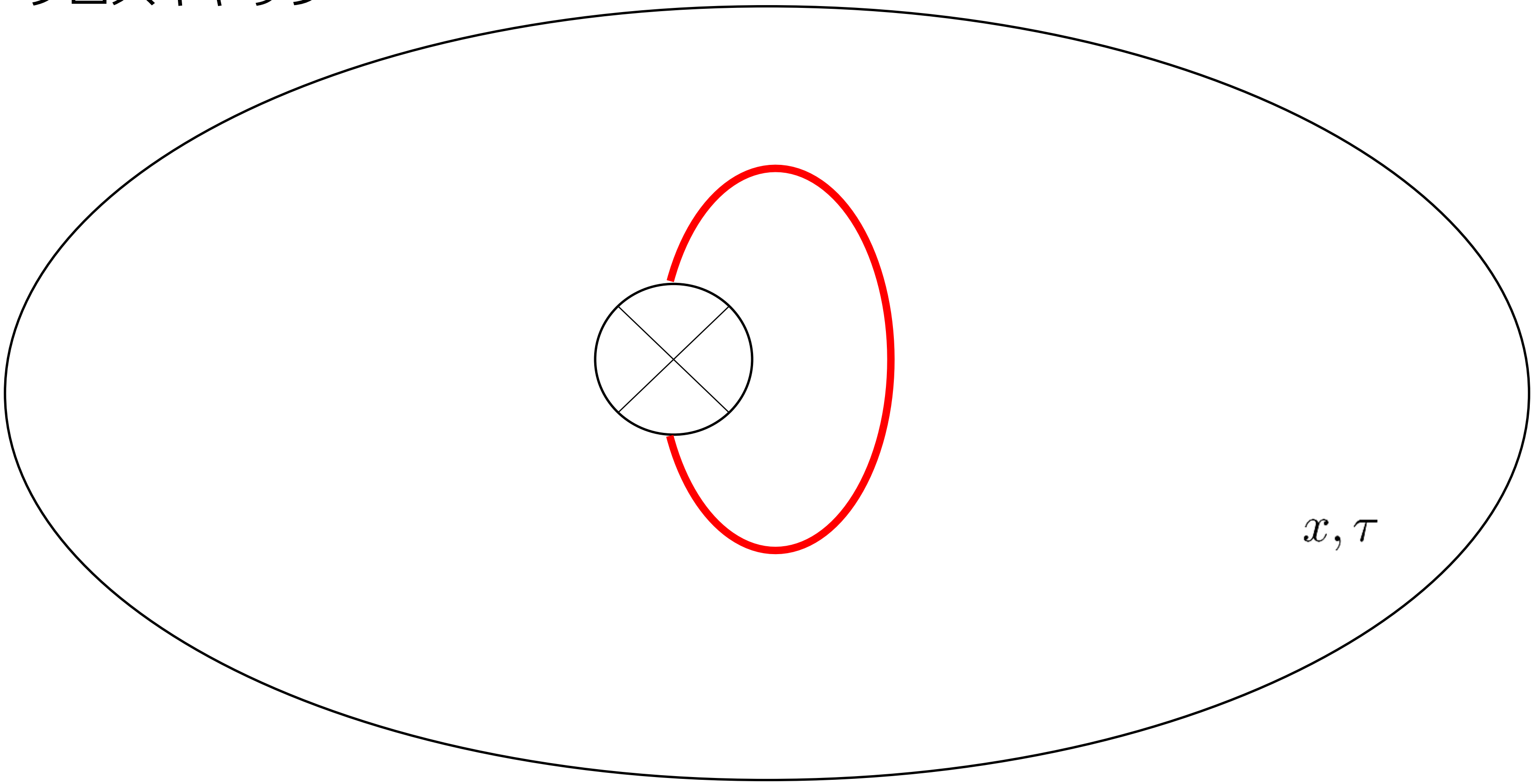
2d abelian sigma model

- クロスキャップ



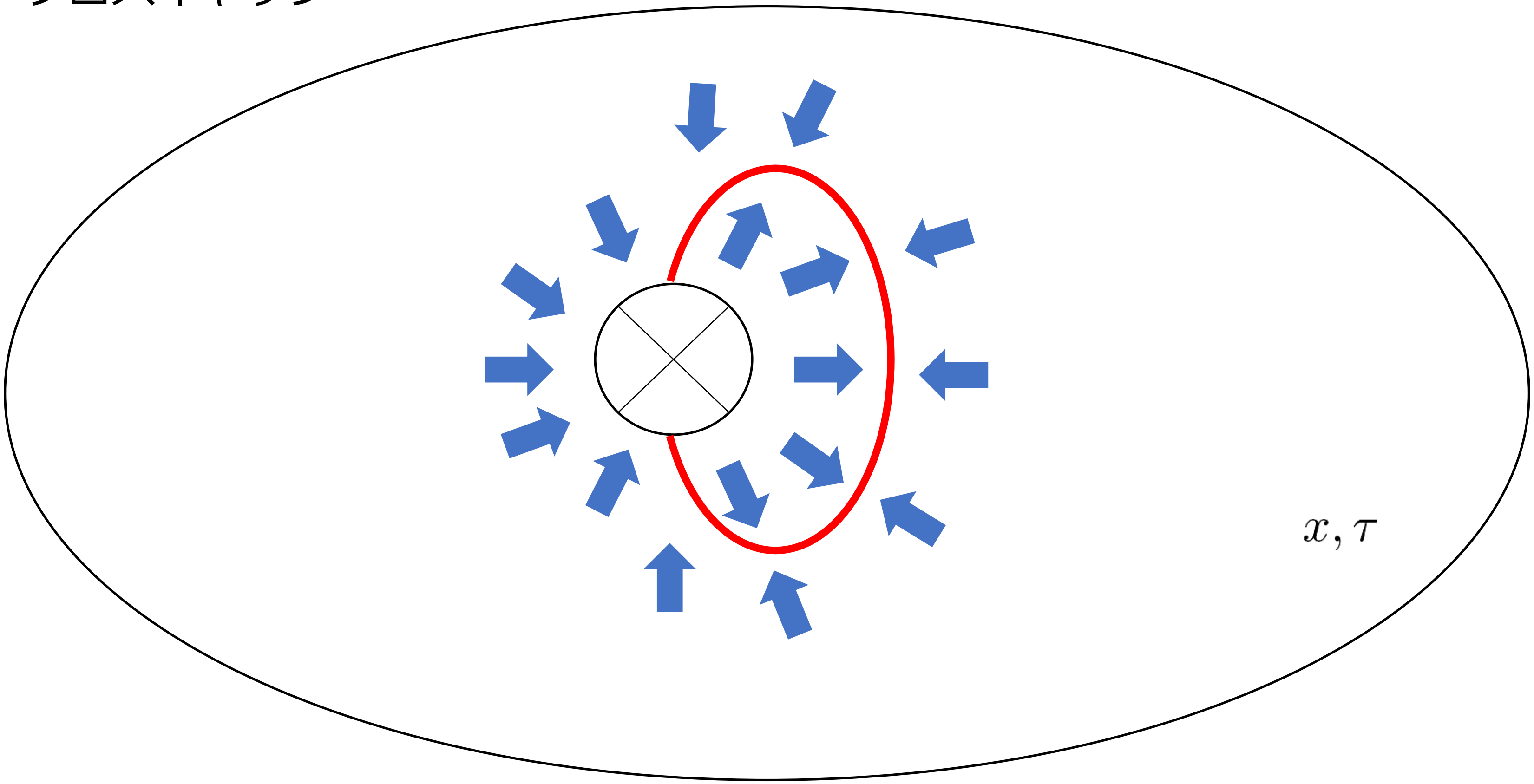
2d abelian sigma model

- クロスキャップ



2d abelian sigma model

- クロスキャップ

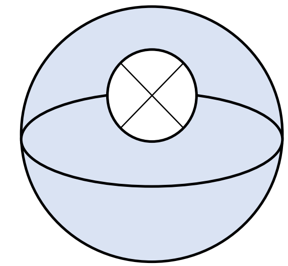


- クロスキャップの周りでは，vortex数が必ず奇数に！

2d abelian sigma model

- 実射影平面上の分配関数

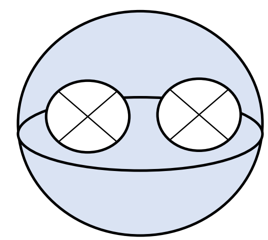
$$Z[RP^2] = e^{i\theta} = \begin{cases} 1 & (\theta = 0, \mathrm{trivial}), \\ -1 & (\theta = \pi, \mathrm{Haldane}). \end{cases}$$



Sphere with a cross-cap
= Real projective plane

- Cf. クラインボトル上の分配関数

$$Z[KB] = e^{2i\theta} = 1$$



Klein bottle

- 確かに，実射影平面上の分配関数が，異なるSPT相を区別する”order parameter”として機能している．

目次

1. 対称性によって保護されたトポロジカル相(SPT相)
2. トポロジカル場の理論とSPT相の分類
3. 向き付けのない時空上の場の理論の例
4. 密度演算子の部分転置とHaldane相の非局所秩序変数

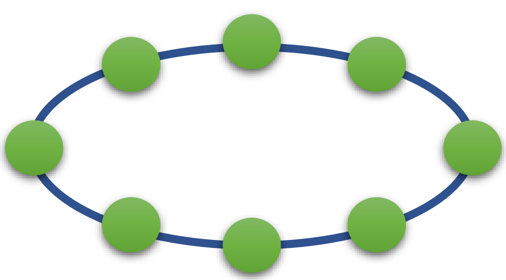
秩序変数

- 物性物理学の立場では,

  ”時間反転対称性によって保護されたHaldane相の秩序変数は実射影平面上の分配関数である”

という理解では，不十分.

- 与えられた純粋状態，あるいは密度演算子がHaldane相か自明相かを判断したい.
- 残っている登場人物は時間反転演算子そのもの.
- 問題設定：



$|\psi\rangle$

純粋状態

何らかの操作

$\Rightarrow$

$|\psi\rangle, T$

$$\nu \in \mathbb{Z}_2$$

時間反転 → 転置

- 時間反転は時空の向きを変化させるので，時間反転演算子を上手く利用して実射影平面を実現する，というのが方針.
- クロスキャップは局所的に導入可能　→　実空間において，なんらかの”部分的”な操作を量子状態に施す必要があることを示唆する.
- 一方で時間反転は反ユニタリなので，複素共役が系全体に作用してしまう.
- 時間反転演算子から，ユニタリでかつ時空の向きを変化させる操作を抽出できないか？

時間反転 → 転置

- 次の量を考えよう： $\langle\psi|T|\psi\rangle$
- この量はill-defined
- しかし，絶対値はwell-defined.

$$
\begin{aligned}
|\langle\psi|T|\psi\rangle|^2 &= \langle\psi| U |\psi\rangle^* \langle\psi|^* U^\dagger |\psi\rangle && \longleftarrow \quad T = UK \quad (K \text{ is complex conj.}) \\
&= \mathrm{tr}[|\psi\rangle \langle\psi| U |\psi\rangle^* \langle\psi|^* U^\dagger] \\
&= \mathrm{tr}[\rho U \rho^* U^\dagger] && \longleftarrow \quad \rho = |\psi\rangle\langle\psi| \\
&= \mathrm{tr}[\rho U \rho^{tr} U^\dagger], && \longleftarrow \quad \rho^\dagger = \rho.
\end{aligned}
$$

- 有用そうな組み合わせが出てきた：

$$
U\rho^{tr}U^\dagger
$$

- この操作であれば，後で見るように密度演算子に対して”部分的”な操作を定義できる.

$$U\rho^{tr}U^\dagger$$

- この組み合わせが出現したのは偶然ではない.
- 単なる転置操作を考えると，基底に依存するので，転置操作はill-definedであることある.

$$\mathcal{O}^{tr} \mapsto (V^\dagger \mathcal{O} V)^{tr} = V^\dagger (VV^{tr})\mathcal{O}^{tr}(VV^{tr})^\dagger V$$

- 時間反転演算子のユニタリ部分と組み合わせて，始めてwell-definedな転置操作が定義できる：時間反転 *T* に対して *T*-転置を

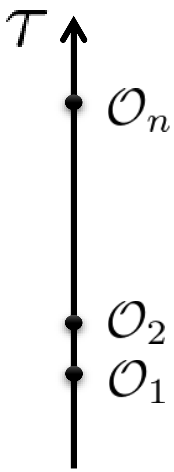
$$\phi_T(\mathcal{O}) := U\mathcal{O}^{tr}U^\dagger$$

と定義すると，基底変換は

$$\phi(\mathcal{O}) \mapsto \phi(V^\dagger \mathcal{O} V) = U(V^\dagger \mathcal{O} V)^{tr}U^\dagger = V^\dagger (VUV^{tr})\mathcal{O}^{tr}(VUV^{tr})V$$

となる．*U*の基底変換は $U \mapsto VUV^{tr}$だから，最右辺は基底変換後の*T*-転置なので，基底に依存せず定義されている.

- 転置操作は虚時間発展の時間反転と理解できる.



$$(\mathcal{O}_1\mathcal{O}_2\ldots\mathcal{O}_n)^{tr} = \mathcal{O}_n^{tr}\cdots\mathcal{O}_2^{tr}\mathcal{O}_1^{tr}$$

- よって，転置操作を用いると，向き付けのない時空多様体上の分配関数の対応物が演算子形式で計算できる，と期待できる.

ボソン系の部分転置

- ヒルベルト空間を２つに分ける.

- $I_1 \cup I_2$上の演算子:

$$A = \sum_{ij,kl} A_{ij,kl} \left| i \in I_1, j \in I_2 \right\rangle \left\langle k \in I_1, l \in I_2 \right|$$

- 部分系 I_1 に関する部分転置を，単なる部分系I_1 における部分転置と定義する．（ただの行列だからこれが可能．）

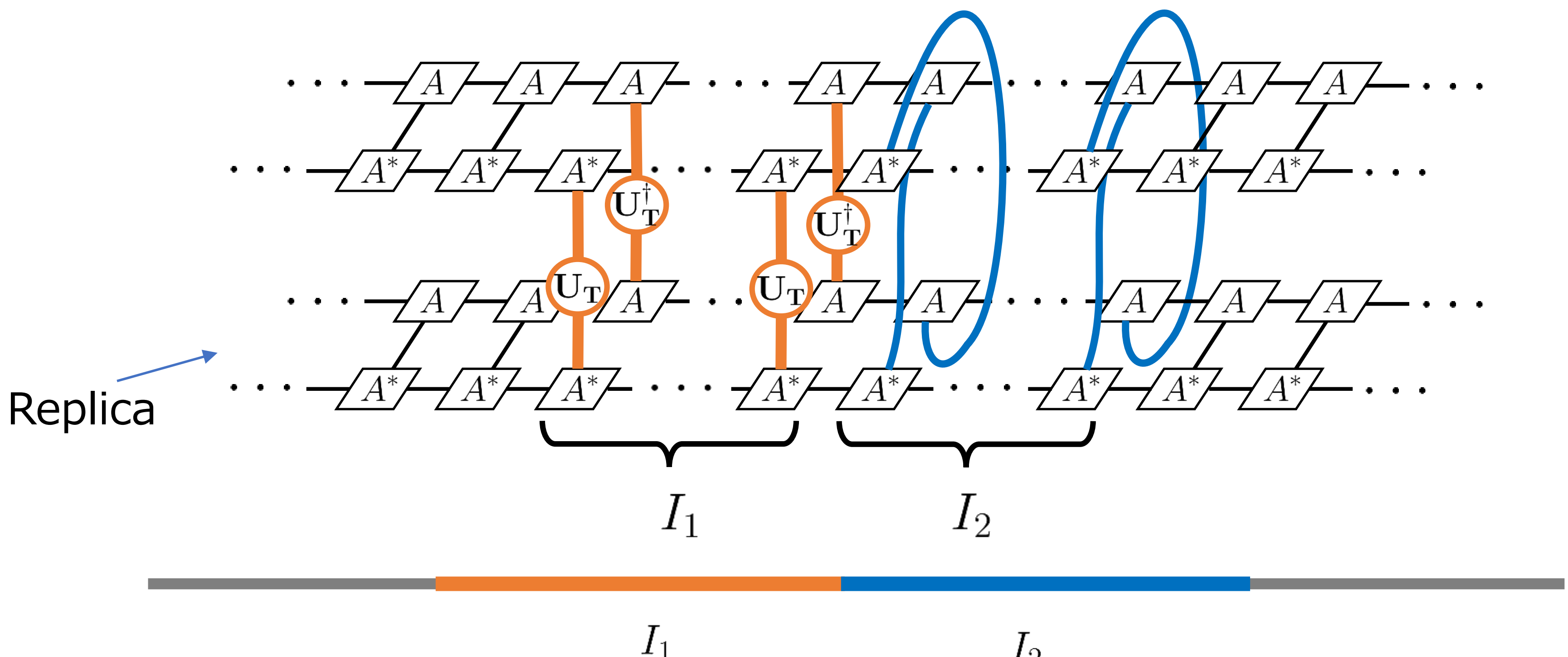
$$A^{tr_1} = \sum_{ij,kl} A_{ij,kl} \left| k \in I_1, j \in I_2 \right\rangle \left\langle i \in I_1, l \in I_2 \right|$$

Haldane鎖の非局所秩序変数

- Pollmann-TurnerはMPS(matrix product state)を用いて，時間反転対称性によって保護されたHaldane鎖の非局所秩序変数として，隣接した２つの区間に対する部分転置を用いて，次のように与えられることを見出した.

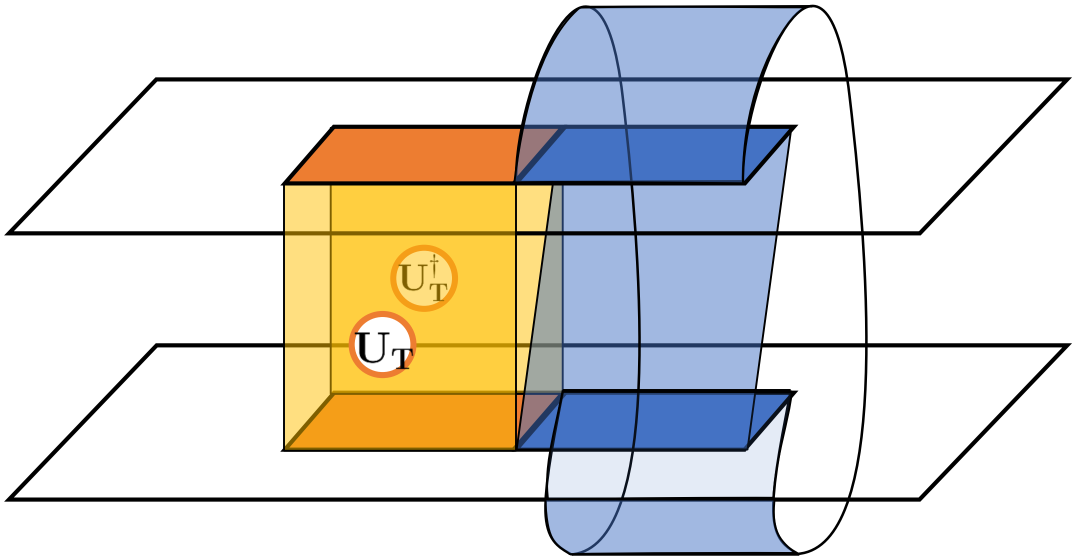
$$Z := \mathrm{tr}\left[\rho_{I_1\cup I_2}\left(\prod_{x\in I_1} U_x\right)\left(\rho_{I_1\cup I_2}\right)^{tr_1}\left(\prod_{x\in I_1} U_x^\dagger\right)\right] \to |Z|\times(\pm 1), \quad (|I_1|,|I_2|\gg \xi_{\mathrm{cor}})$$

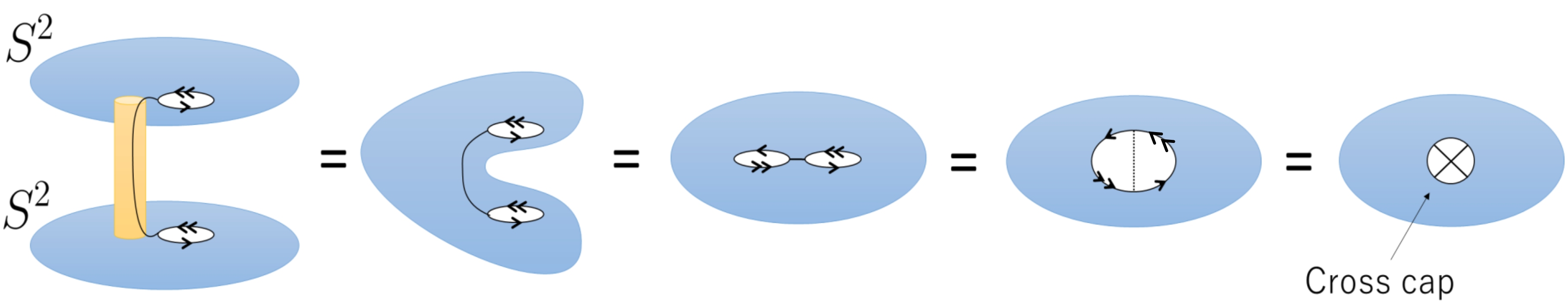
[Pollmann-Turner,12]



- Pollmann-Turner不変量は，実射影平面上の分配関数と等価 [KS-Ryu, 16]

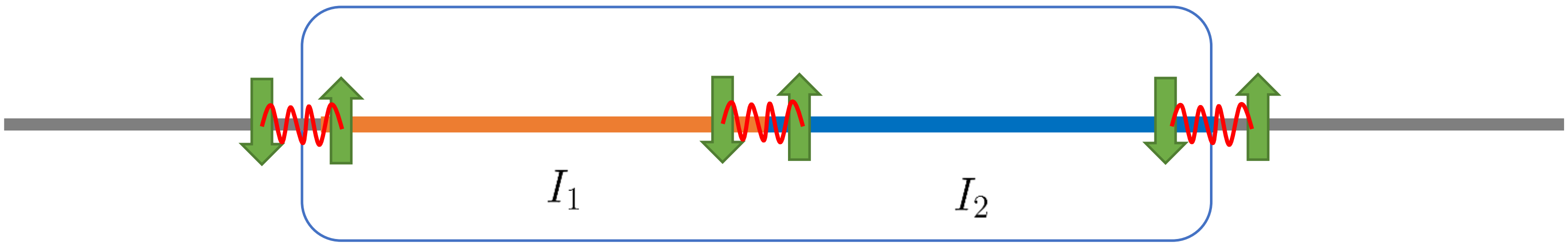
$$Z = \mathrm{tr}\left[\rho_{I_1\cup I_2}\left(\prod_{x\in I_1} U_x\right)(\rho_{I_1\cup I_2})^{tr_1}\left(\prod_{x\in I_1} U_x^\dagger\right)\right] \sim Z[RP^2]$$





- Cut and glue を用いたPollmann-Turner不変量の計算例 [KS-Ryu]

  ✓ バルクはHaldane鎖とする．
  ✓ 低エネルギーの縮約密度演算子は，系の端のspin 1/2の自由度のみで近似できる．つまり，次の６個のスピン1/2自由度からなる，singlet×3



  ✓ $I_1 \cup I_2$以外の自由度をtrace outすると$I_1 \cup I_2$上の縮約密度行列を得る．
  ✓ 時間反転を

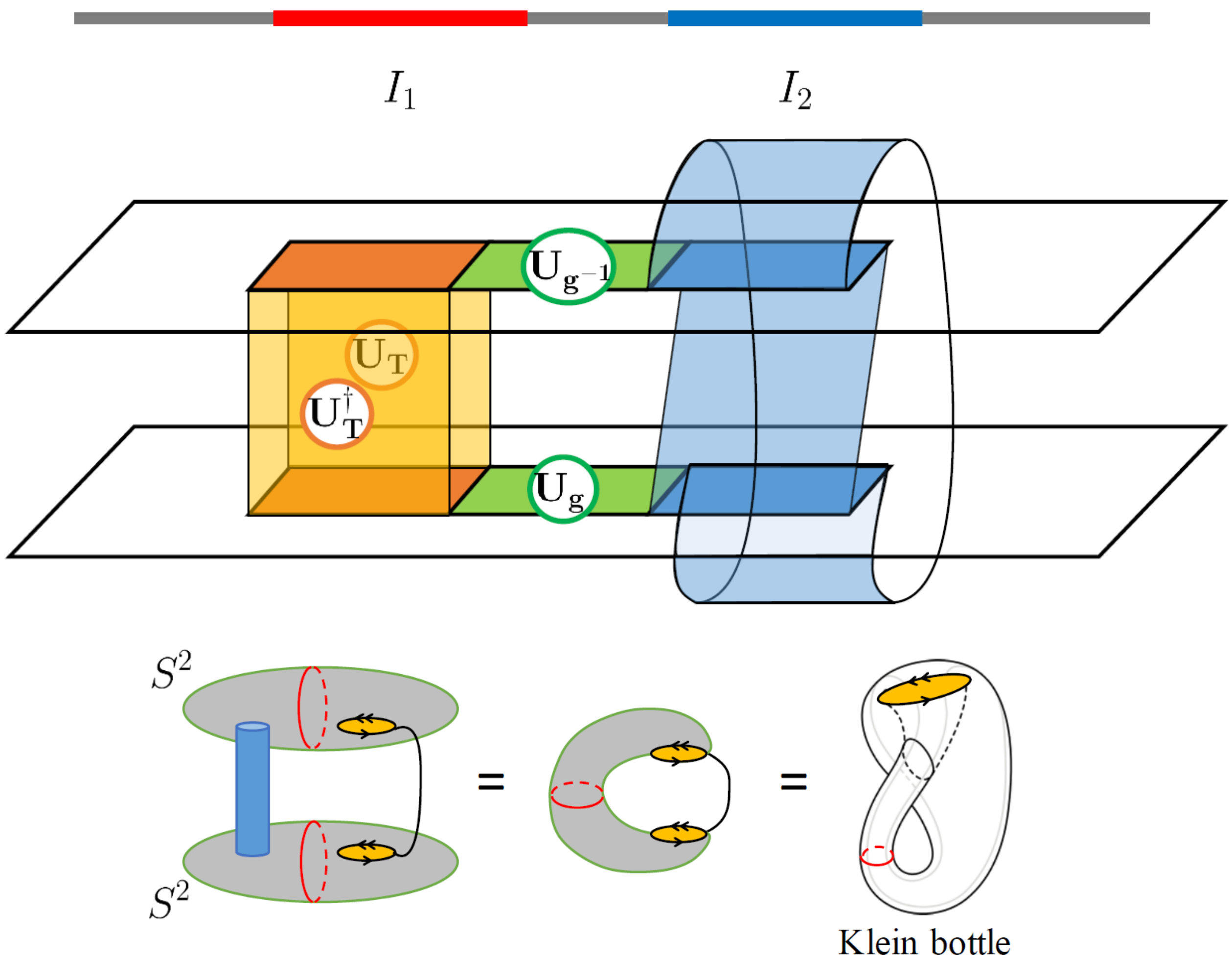
$$U\left|\uparrow\right\rangle = \left|\downarrow\right\rangle, \quad U\left|\downarrow\right\rangle = -\left|\uparrow\right\rangle$$

とすると，Pollmann-Turner不変量は

$$Z = -\frac{1}{8}$$

と計算できる．

- 離れた２つのinterval対してPollmann-Turner不変量はクラインボトルと等価 [Calabrese-Cardy-Tonni,12]



- クラインボトルは，より高次元のSPT相の非局所秩序変数の構成において重要な役割を果たす．[KS-Shapourian-Gomi-Ryu,17]

SPT相の非局所秩序変数の構成方法

- Cobordism群の生成元となる時空多様体＋G場 (M,A) を決定する.
- その生成元 (M,A) を純粋状態と対称性演算子だけを用いて”simulate”する非局所秩序変数を構成する.

他のSPT相の非局所秩序変数の構成例については，以下を参照して下さい.

- Shapourian-KS-Ryu, 1607.03896: フェルミオンSPT相のいくつかの例
- KS-Ryu, 1607.06504：空間１次元ボソンSPT相
- KS-Shapourian-Ryu, 1609.05970：フェルミオンSPT相，点群対称性
- KS-Shapourian-Gomi-Ryu, 1710.01886：フェルミオンSPT相，反ユニタリな対称性

まとめ

- SPT相の分類 ＝ トポロジカル場の理論の分配関数の分類
- トポロジカル場の理論は非局所秩序変数の構成と矛盾しない
- トポロジカル場の理論の分配関数は，非局所秩序変数を定義する上で指針を与える.

今日話さなかったこと

- フェルミオンにおける部分転置を定義した[1607.03896, 1710.01886].
- それを用いて，フェルミオンSPT相の非局所秩序変数の構成を行った.
- また，それを用いて， Majorana bond のエンタングルメントが検出可能なフェルミオンのentanglement negativityを定義した. [1611.07536]

例：ボソンのSPT相，onsite対称性

- (以下２ページの詳細は説明しない)
- 有限群Gのonsite対称性を有するボソンSPT相の場合
- G束の分類に他ならない．分類は群コホモロジーで与えられる．[Dijkgraaf-Witten 90; Chen-Gu-Liu-Wen 11]

$$\underbrace{H^d(BG, U(1))}_{\text{G場を与えたときのU(1)値関数の分類を与える}} = H^d_{\text{group}}(G, U(1))$$

- dは時空次元
- 詳細は割愛．形式的には，与えられたd-コサイクルを時空多様体に引き戻すことによりトポロジカル作用が構成できる．

- 例：Z2×Z2対称性によって保護された空間１次元ボソンSPT相（Haldane鎖）

$$H^2_{\rm group}(Z_2\times Z_2, U(1)) = \mathbb{Z}_2$$

✓ これは，Z2×Z2場にZ2で分類される非自明なトポロジカル作用が存在することを示す．具体的には

$$\exp 2\pi i S_{\rm top}(M,A) = \exp \pi i \int_M \underbrace{A_1}_{Z_2\times 1\text{場}} \cup \underbrace{A_2}_{1\times Z_2\text{場}} \in \{\pm 1\}.$$

✓ すると，

自明相 $\rightarrow$ $Z(M,A)=1$

Haldane相 $\rightarrow$ $Z(M,A)=\exp \pi i \int_M A_1\cup A_2$

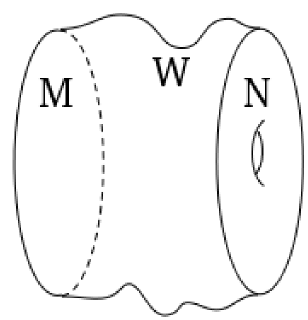
✓ この有効作用に基づいた非局所秩序変数の構成については，[KS-Ryu, 17]を参照.

Cobordismを用いたSPT相の分類

- SPT相の分配関数は，トポロジカル不変性よりも，ある意味”強い”cobordism不変性を満たす，と議論（証明？）されている．[kapustin, Freed, Hopkins]

- Cobordismとcobordism群:

  ✓ d次元多様体 M と N がcobordant, $M \sim N$, とはそれらを境界にもつ ($d+1$) 次元多様体 W が存在するとき.



(from wikipedia)

  ✓ Cobordant は同値関係.

  ✓ さらにDisjoint union によりアーベル群の構造を入れる.

$$[M] + [N] := [M \sqcup N]$$

  ✓ このアーベル群をCobordism群と呼ぶ.　Ω^{SO} などと書く.

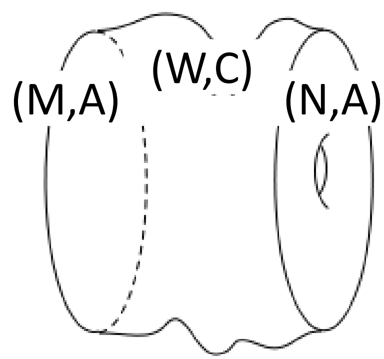
  ✓ G場付きに拡張可能. $\Omega^{SO}(BG)$ などと書く.

Cobordismを用いたSPT相の分類

- SPT相の分配関数は，トポロジカル不変性よりも，ある意味”強い”cobordism不変性を満たす，と議論（証明？）されている．[kapustin, Freed, Hopkins]

- この意味は，分配関数はcobordism不変だ，ということ

$$(M, A) \sim (N, B) \quad \Rightarrow \quad Z(M, A) = Z(N, B).$$



- すると，あるcobordism不変な理論は，アーベル群であるCobordism群から同じくアーベル群であるU(1)群への準同型と思える.

$$\text{An SPT phase} \in \mathrm{Hom}(\Omega^{SO}(BG), U(1))$$