$\beta < 0$ となる 2 次元点渦系での自己組織化の運動論的理解，及び PEZY-SC による数値的検証

静岡大学　八柳祐一

共同研究者：

金沢大学　大塚浩史

核融合研　羽鳥尹承

京都工繊大　三瓶明希夫

理研　戎崎俊一

第 7 回統計物理学懇談会

於　学習院大学

2019 年 3 月 6 日

Agenda

1. 研究の動機

自己組織化，大規模構造形成

2. 絶対温度が負となる状態の導入

Onsager1949

3. 非中性 (純電子) プラズマ実験で見られる自己組織化現象

非中性プラズマと Euler 方程式のつながり

4. 解析的結果

解析対象としての点渦系の導入

点渦系に対するドリフト項と拡散項からなる Fokker-Planck 型運動論的方程式

線形応答による 2 体相関関数の導出

5. 数値的結果

ウルトラ メニーコア スパコン：PEZY-SC

理論的結果の検証

6. Conclusion

1. 研究の動機

・**自己組織化現象，大規模構造形成**を理解したい

・H. Haken による自己組織化の定義 ("*Synergetics*", Springer 1983)
Well-organized spatial, temporal, or spatio-temporal structures arise out of chaotic states.

・Systematic pattern formation,
・Large-scale structure formation, and more

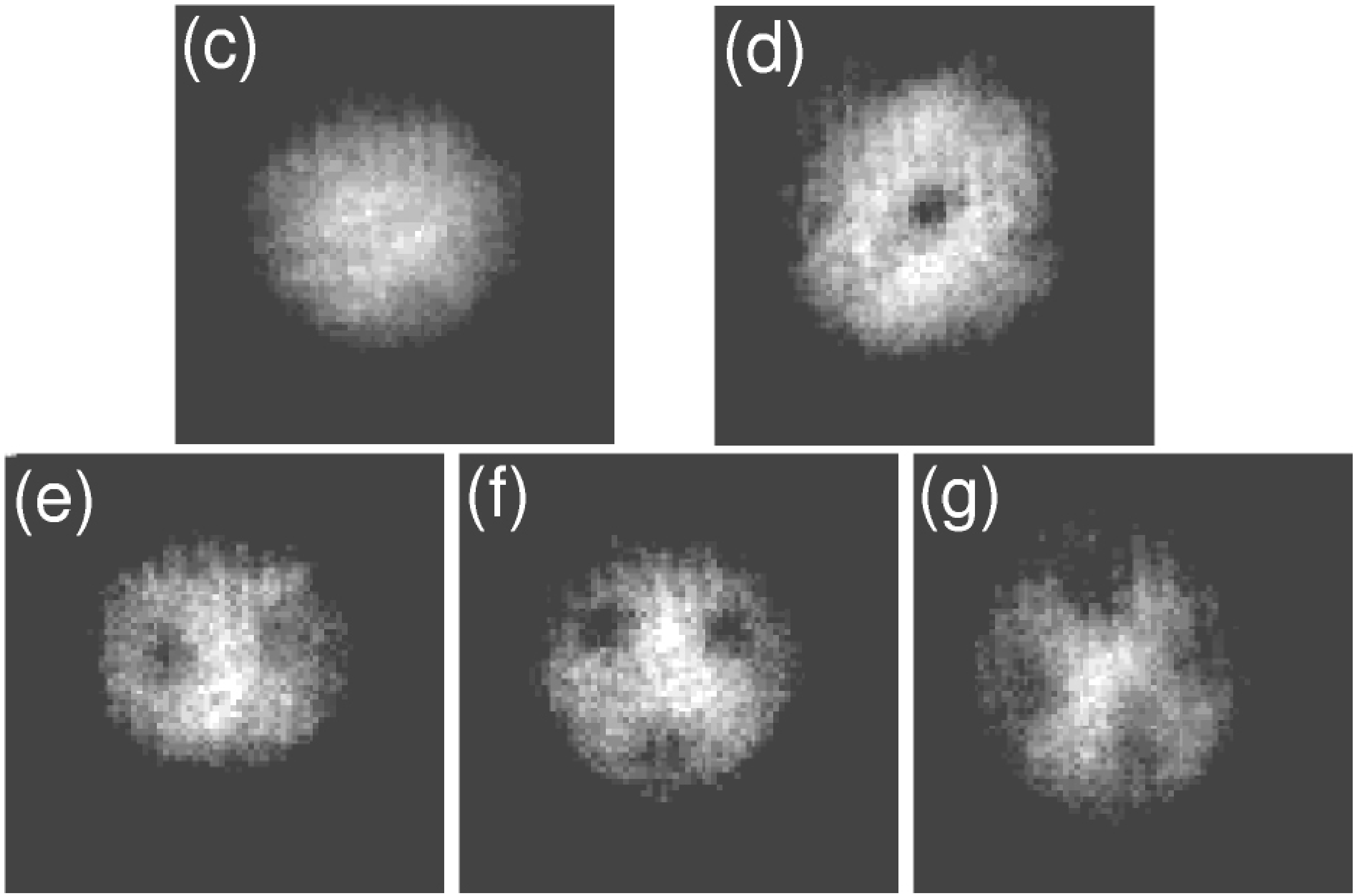


図 1.1　自己組織化／(大規模)構造形成の例 (1)

量子渦結晶

大阪市立大学　坪田さんの御厚意により形成

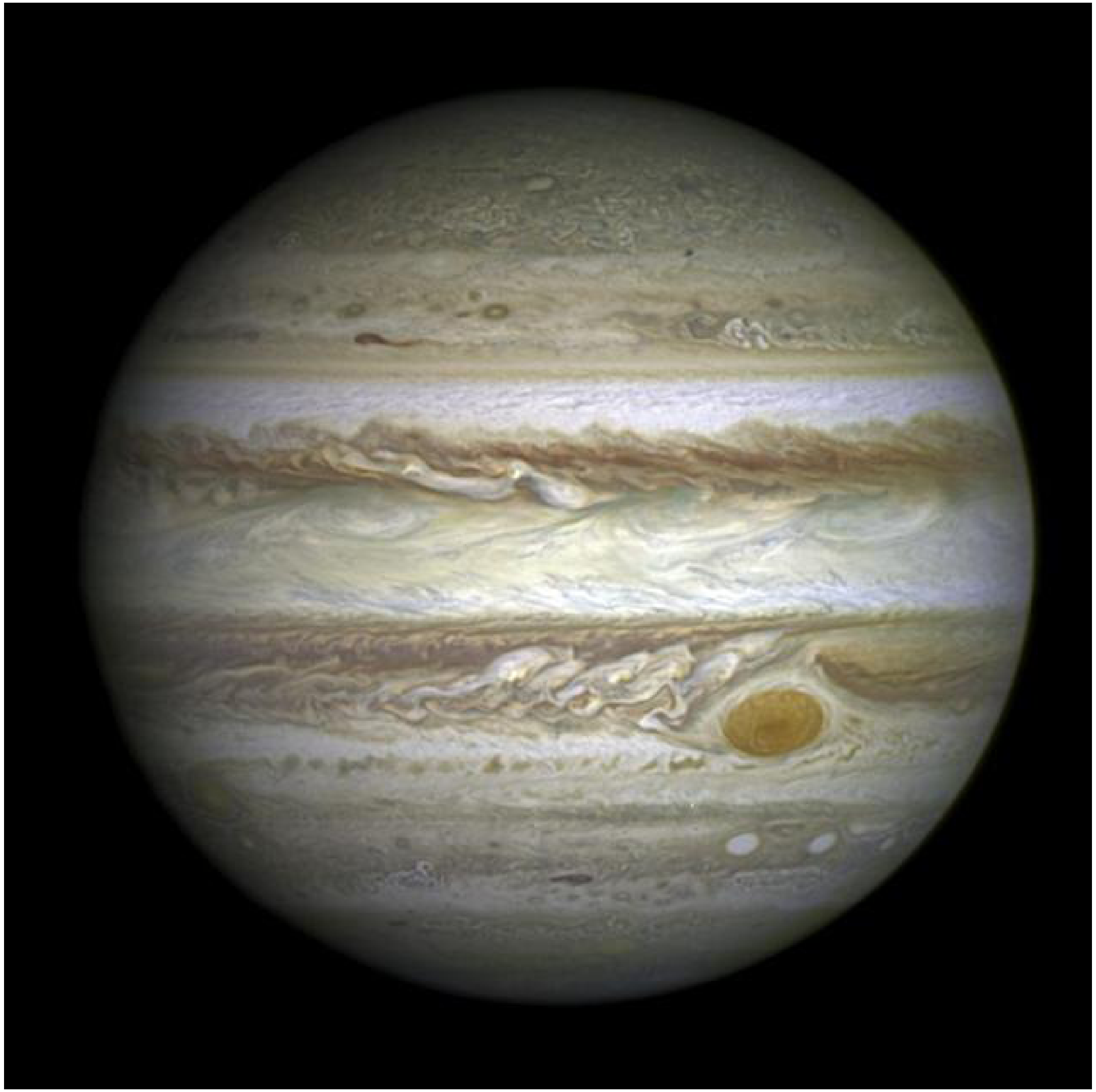


図 1.2　自己組織化／ (大規模) 構造形成の例 (2)
(小さくなった) 大赤斑 2014 Apr. 21
NASA Image Galleries より

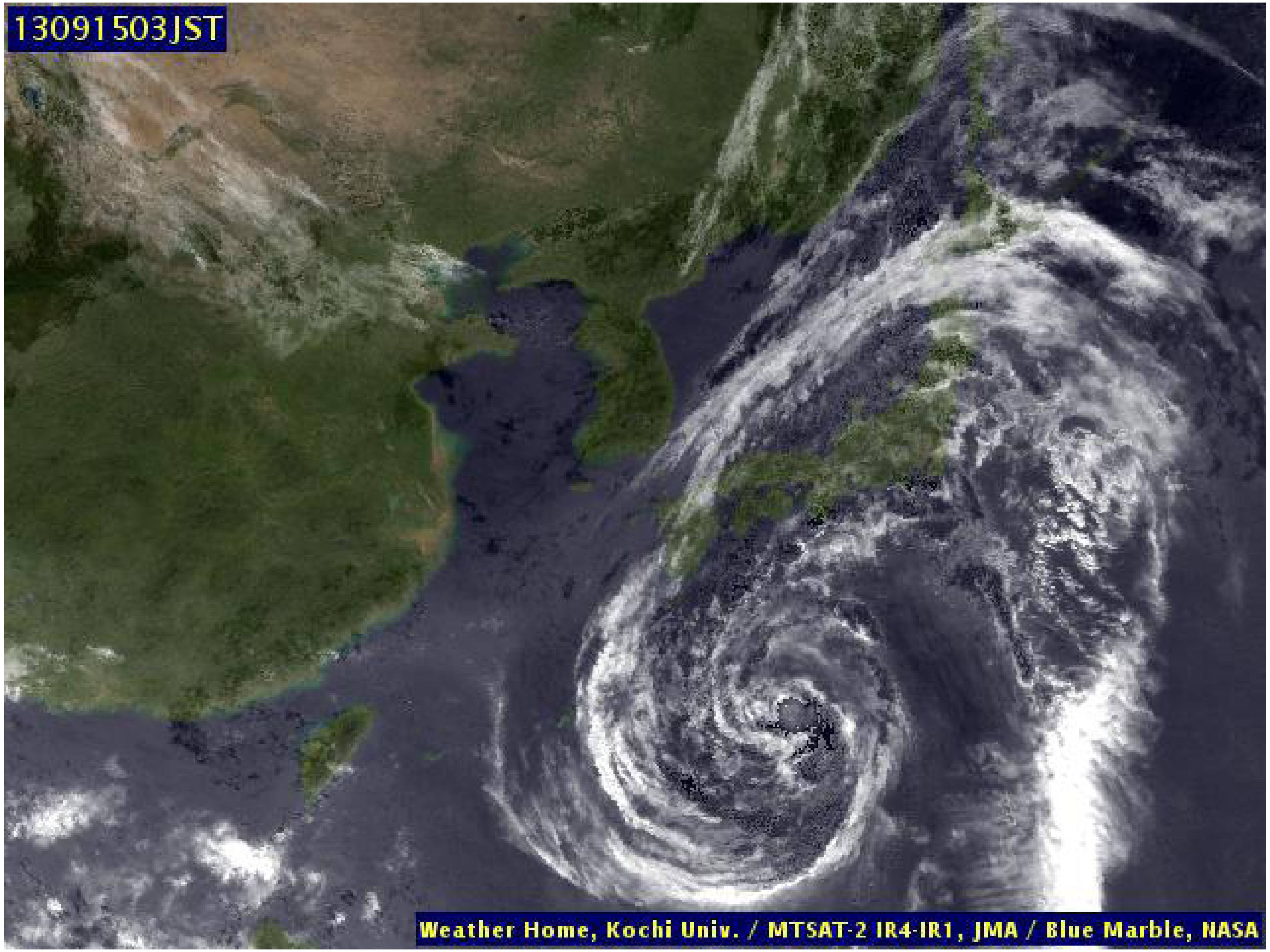


図 1.3　自己組織化／ (大規模) 構造形成の例 (3)

台風

高知大学気象衛星画像アーカイブより

2. 絶対温度が負となる状態の導入

- 大規模構造形成メカニズムを説明するため，Onsager(1949) により導入された。もともとはスピン系で導入された概念。

- エネルギーが大きな状態が実現されやすい

$$P(E) \propto \exp(-\beta E)$$

- 統計力学的な (逆) 温度 β の定義：

$$\beta = \frac{dS}{dE} = \frac{d \log W(E)}{dE}$$

S：エントロピー

$W(E)$：状態密度

E：エネルギー

- $W(E)$ の全空間積分である総相空間体積が有限 (＝状態数が有限) ならば，状態密度関数は，あるエネルギー値 E_0 に少なくともピークをもち，

$$\lim_{E\to\pm\infty} W(E) = 0$$

となる。

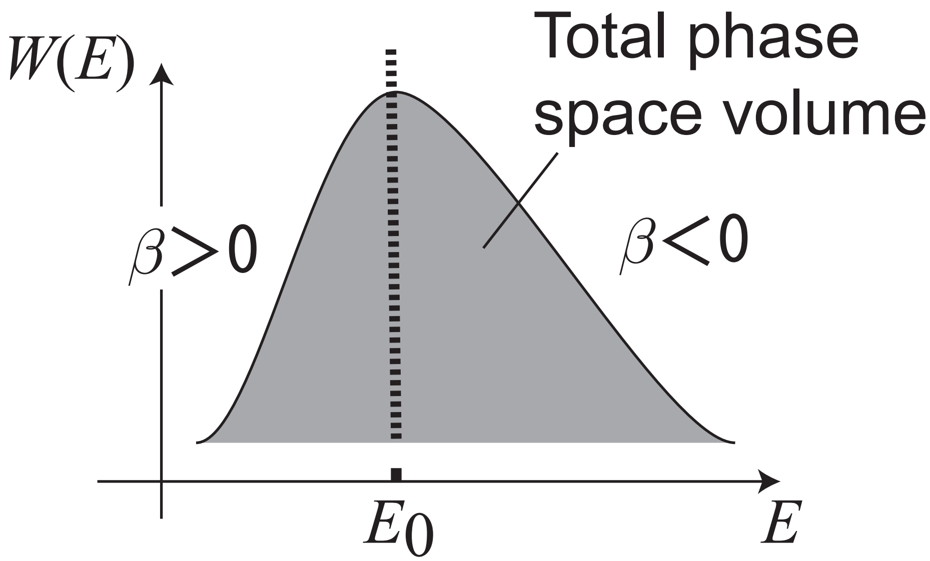


図 2.1　E=E_0 にピークを持つ状態密度関数

- この時，$E > E_0$ において $\beta < 0$ となる。

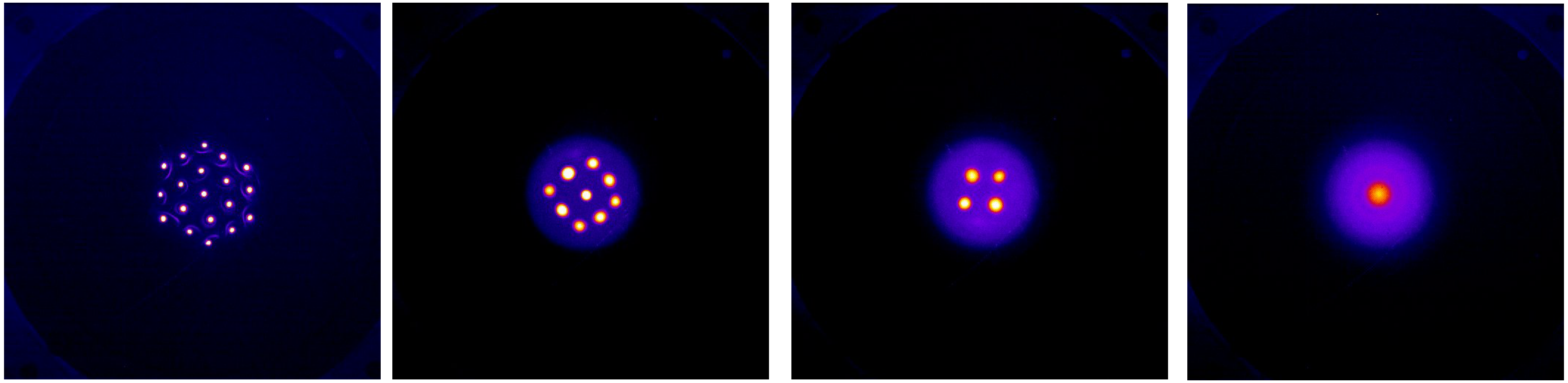
3. 非中性（純電子）プラズマ実験で見られる自己組織化現象

- 非中性？

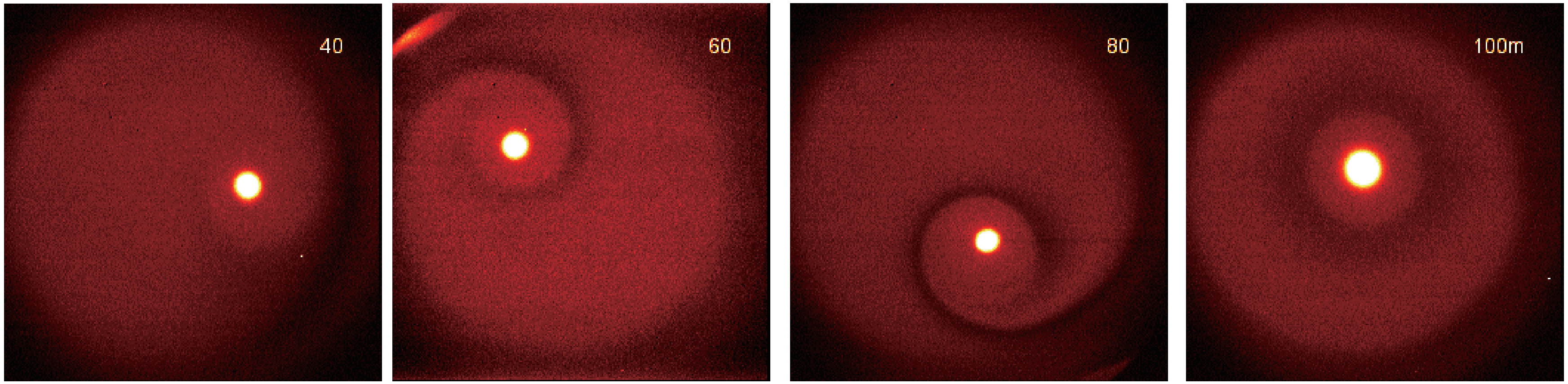
普通のプラズマ　＝　電気的に中性

電気的な中性条件が破れたプラズマ　＝　非中性プラズマ

正負電荷が対にならないので，閉込め特性がよい



(a) Coulomb crystal formation (Dr. Y. Soga at Kanazawa Univ.)



(b) Ring hole formation

図 3.1　純電子プラズマ実験で観測される自己組織化現象

●実験の概要

- 半径方向…軸方向の強磁場
- 軸方法…容器端で負に印加された静電場

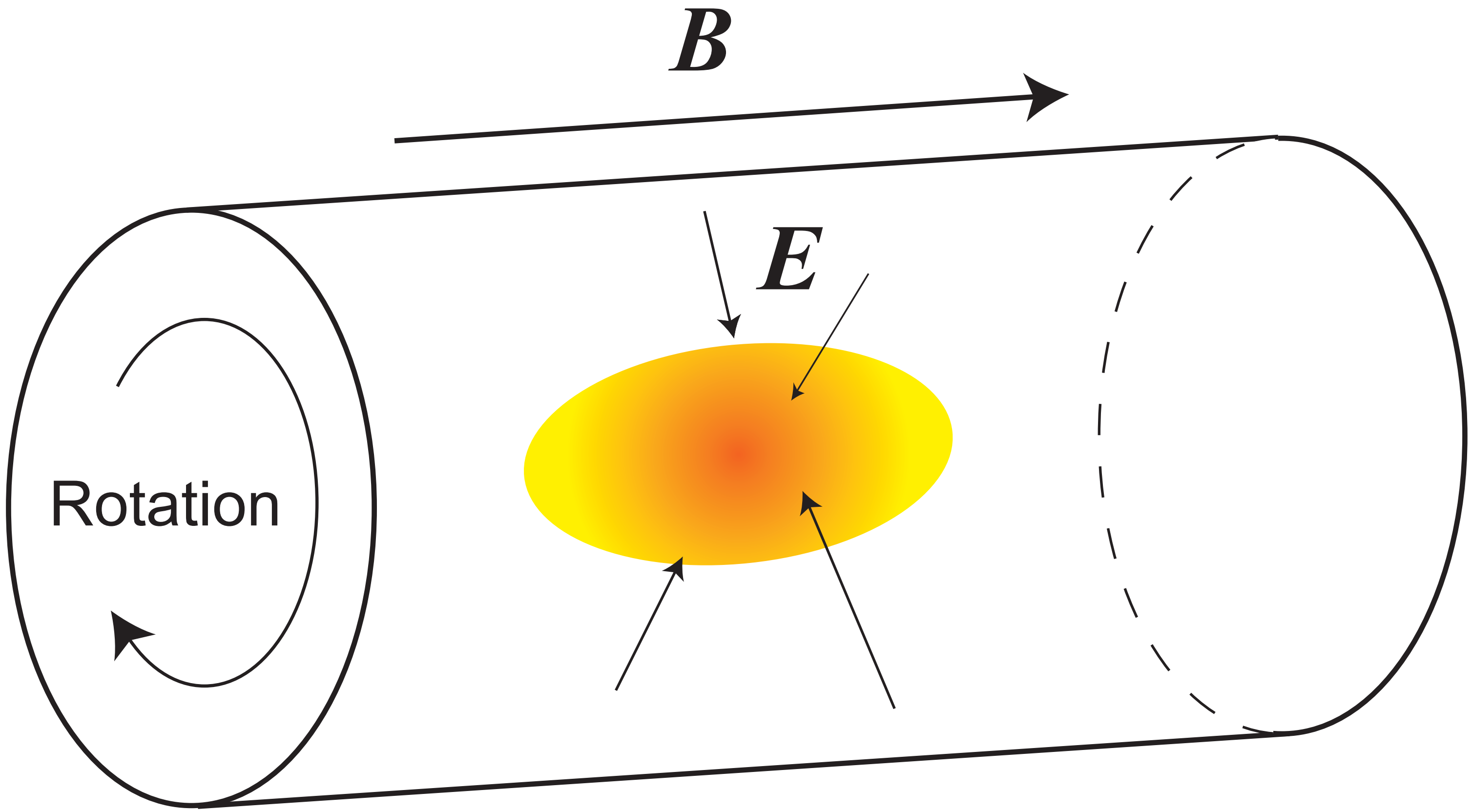


図 3.2　実験の概略図

- 磁場に垂直な断面内の電子運動は，サイクロトロン半径＝0の極限で，$E \times B$ ドリフト (案内中心) 近似で表され，非圧縮が保証される。

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{B_0^2} = -\frac{\nabla \phi \times \hat{\boldsymbol{z}}}{B_0} \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

ここで，電場と磁場に，以下の表式を用いた。

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi, \quad \boldsymbol{B} = B_0 \hat{\boldsymbol{z}}$$

- $\boldsymbol{v}$ について rot をとると，渦度 ω の表式を得る。

$$\omega \hat{\boldsymbol{z}} = \nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{B_0} \nabla^2 \phi = \frac{\hat{\boldsymbol{z}}}{B_0} \left(\frac{e n}{\varepsilon_0} \right) \propto n \ (\text{number density})$$

- 渦度 $\propto$ 電子の数密度

- 一方，電子の数密度は，連続の式を満たす。

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla n = 0$$

- 渦度は電子の数密度に比例するので，連続の式は 2 次元 Euler 方程式と同等の渦度方程式に書き換えられる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = 0$$

- すなわち，2 次元 非圧縮 非粘性 流体実験が，電場と磁場により制御された純電子プラズマ実験により実現可能。

4. 解析的結果

4.1 解析対象としての点渦系の導入

- 点渦解　＝　2 次元渦度方程式の形式的解

$$\hat{\omega}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \Omega_i \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i)$$

粒子的な描像に由来する物理量に ^ を付す。

- 流れ函数 (ポテンシャル)

$$\hat{\psi}(\boldsymbol{r}) = \sum_i \Omega_i G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}_i)$$

- Green 函数

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \quad \text{(no boundary)} \\ -\dfrac{1}{2\pi} \log |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| + \dfrac{1}{2\pi} \log |\boldsymbol{r} - \bar{\boldsymbol{r}}'| - \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{R}{|\boldsymbol{r}'|} \\ \hfill \text{(circular boundary)} \end{cases}$$

- 鏡像 (円形境界)

$$\bar{\boldsymbol{r}}' = \frac{R^2}{|\boldsymbol{r}'|^2} \boldsymbol{r}'$$

- 点渦群の時間発展方程式

$$\Omega_i \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H^N}{\partial y_i}, \qquad \Omega_i \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial H^N}{\partial x_i}$$

$$\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i)$$

$$H^N = \frac{1}{2}\sum_i \Omega_i \hat{\psi}(\boldsymbol{r}_i)$$

（ただし，$\hat{\psi}$内の和は，$i \neq j$）

相空間が $(x_i\,,\ y_i)$ で張られている

→　閉込め領域 (今は円形) が有限なら，負温度状態あり

- 具体的には，(離散的な)Biot-Savart 積分となる

$$\frac{d\boldsymbol{r}_i}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\sum_{j\neq i}\Omega_j \frac{(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)\times\hat{\boldsymbol{z}}}{|\,\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j\,|^2} + \frac{1}{2\pi}\sum_j \Omega_j \frac{(\boldsymbol{r}_i - \bar{\boldsymbol{r}}_j)\times\hat{\boldsymbol{z}}}{|\,\boldsymbol{r}_i - \bar{\boldsymbol{r}}_j\,|^2}$$

4.2 点渦系に対する
ドリフト項と拡散項からなる Fokker-Planck 型運動論的方程式

・詳しい導出方法は,

単一符号版：Y.Y etal: JPSJ, **84** (2015) 014402

正負符号版：Y.Y etal.: Fluid Dyn. Res. **47** (2015) 065506

を参照

・点渦の輸送メカニズムを明らかにするために，プラズマの世界で使われている Klimontovich 方程式から Fokker-Planck 方程式を導く過程をなぞって，点渦系の運動論的方程式を導いた。

デルタ函数解を有する点渦系

⇔　位相空間でデルタ函数解を有する Klimontovich 方程式

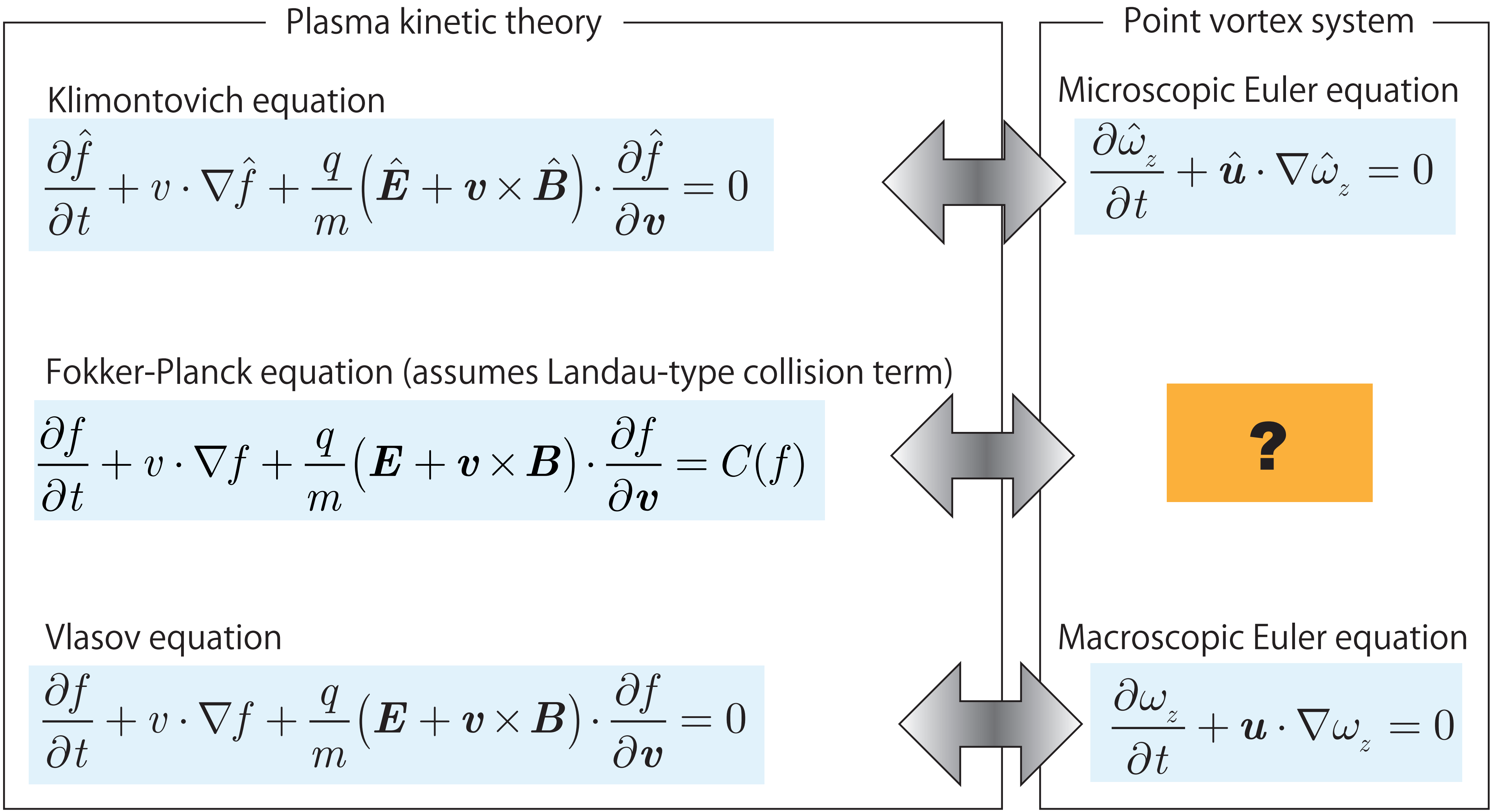


図 4.1　方程式の階層構造

- 正負点渦系の運動論的方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_{\pm} + \nabla\cdot\left(\boldsymbol{u}\omega_{\pm}\right) = -\nabla\cdot\left(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_S\cdot\nabla\omega_{\pm} \pm \boldsymbol{V}_S\omega_{\pm}\right)$$

$$\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_S = K\int d\boldsymbol{r}'\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\left(\omega'_{+}-\omega'_{-}\right)$$

$$\boldsymbol{V}_S = K\int d\boldsymbol{r}'\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\cdot\nabla'\omega'$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\omega + \nabla\cdot\left(\boldsymbol{u}\omega\right) &= -\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}_S \\ &= -\nabla\cdot\left(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_S\cdot\nabla(\omega_{+}+\omega_{-}) + \boldsymbol{V}_S(\omega_{+}-\omega_{-})\right) \\ &= -K\int d\boldsymbol{r}'\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\cdot\left[\left(\omega'_{+}-\omega'_{-}\right)\nabla\omega - \left(\omega_{+}-\omega_{-}\right)\nabla'\omega'\right]\end{aligned}$$

- 衝突項は，拡散項 $\boldsymbol{D}_S$ とドリフト項 $\boldsymbol{V}_S$ からなる。
- 特にドリフト項が，自己組織化の鍵を握るメカニズムを提供

■衝突項が満たす性質

・衝突項は，物理的に望ましい①～⑤の性質を備えている

①正渦と負渦を逆向きに駆動

$$\boldsymbol{\Gamma}_{S+}(\boldsymbol{r}) = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_S \cdot \nabla\omega_+ + \boldsymbol{V}_S\omega_+,$$
$$\boldsymbol{\Gamma}_{S-}(\boldsymbol{r}) = -\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_S \cdot \nabla\omega_- - \boldsymbol{V}_S\omega_-$$

・正負点渦の符号を分離

$$\omega = \omega_+ + \omega_- = \Omega_0(n_+ - n_-) \quad \rightarrow \quad \begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{S+}(\boldsymbol{r}) &= \Omega_0\left(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_S \cdot \nabla n_+ + \boldsymbol{V}_S n_+\right), \\ \boldsymbol{\Gamma}_{S-}(\boldsymbol{r}) &= -\Omega_0\left(-\overleftrightarrow{\boldsymbol{D}}_S \cdot \nabla n_- - \boldsymbol{V}_S n_-\right)\end{aligned}$$

・符号

拡散項　…　同一符号

ドリフト項…　反対符号

・正負点渦系で，正点渦と負点渦をドリフト項が逆向きに駆動
　$\beta < 0$ で見られる，正負渦が分離した平衡分布を実現

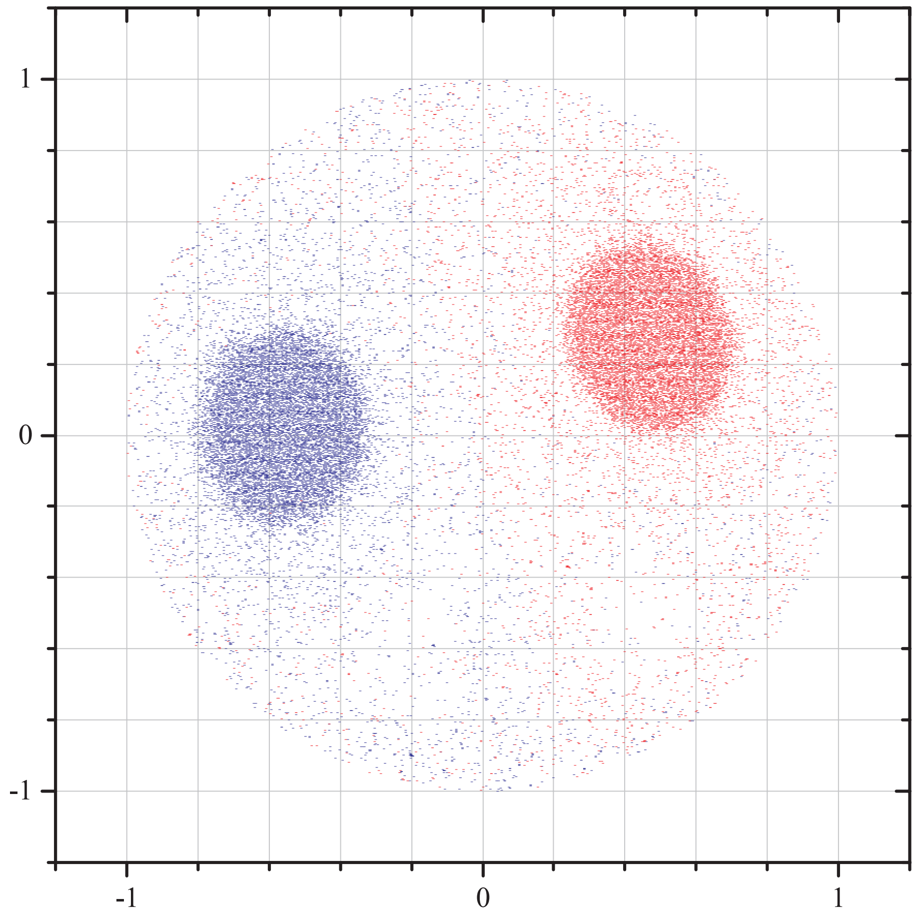


図 4.2　ドリフト項により実現される，符号分離した (準) 平衡分布の例

②局所平衡状態で成り立つ詳細釣合い

- 衝突項の積分（再掲）

$$\int d\boldsymbol{r}' \frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3} \cdot \left[\left(\omega'_+ - \omega'_-\right)\nabla\omega - \left(\omega_+ - \omega_-\right)\nabla'\omega'\right]$$

- 局所平衡状態では，温度が異なる小領域が系内に散在
- 温度が異なる小領域ごとに，以下の関係式が成り立つ。

$$\omega_{\mathrm{leq}\pm}(\boldsymbol{r}) = \omega_{0\pm}(\boldsymbol{r})\exp\left(\mp\beta_{\mathrm{leq}\pm}(\boldsymbol{r})\Omega\psi_{\mathrm{leq}\pm}\right)$$

- 上記の関係式を被積分関数に代入

$$\begin{aligned}
&\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3} \cdot \left[\left(\omega'_+ - \omega'_-\right)\nabla\omega - \left(\omega_+ - \omega_-\right)\nabla'\omega'\right] \\
&= -\beta_{\mathrm{leq}\pm}(\boldsymbol{r})\Omega \frac{\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{leq}} - \boldsymbol{u}'_{\mathrm{leq}}\right)\left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{leq}} - \boldsymbol{u}'_{\mathrm{leq}}\right)}{\left|\boldsymbol{u}_{\mathrm{leq}} - \boldsymbol{u}'_{\mathrm{leq}}\right|^3} \cdot \left(\omega'_{\mathrm{leq}+} - \omega'_{\mathrm{leq}-}\right)\left(\omega_{\mathrm{leq}+} - \omega_{\mathrm{leq}-}\right)\left(\nabla\psi_{\mathrm{leq}} - \nabla'\psi'_{\mathrm{leq}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- 被積分関数がゼロ　→　詳細釣合いが実現

③大域平衡状態での Einstein の関係式

- 大域平衡での Boltzmann 型平衡解

$$\omega_{\mathrm{eq}\pm} = \omega_{0\pm} \exp(\mp\beta\Omega\psi_{\mathrm{eq}})$$

- 上記式をドリフト項に代入すると，拡散項と以下の関係で結ばれることがわかる。平衡状態で成り立つ Einstein の関係式に相当：

$$\boldsymbol{V}_{eq} = -\beta\Omega \overleftrightarrow{D}_{eq} \cdot \nabla\psi_{eq}$$

- 以下の関係式も成立

$$\frac{d\omega_{\mathrm{eq}}}{d\psi_{\mathrm{eq}}} = -\beta\Omega(\omega_{\mathrm{eq}+} - \omega_{\mathrm{eq}-}) \geq 0$$

$$\nabla \cdot \left(\boldsymbol{u}_{\mathrm{eq}}\omega_{\mathrm{eq}}\right) = 0$$

- Lynden-Bell(1967) により予言された，N 体系での 2 段階の緩和

  First stage (collisionless violent relaxation)

  $$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\omega) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma}$$

  Second stage (collisional slow relaxation)

  $$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{u}\omega) = -\nabla \cdot \boldsymbol{\Gamma}$$

- Slow relaxation 中では$\nabla \cdot (\boldsymbol{u}\omega) \approx 0$が成り立つので,

  $$\frac{d\omega}{d\psi} \geq 0$$

  も期待してよい。(この関係式は後で使用)

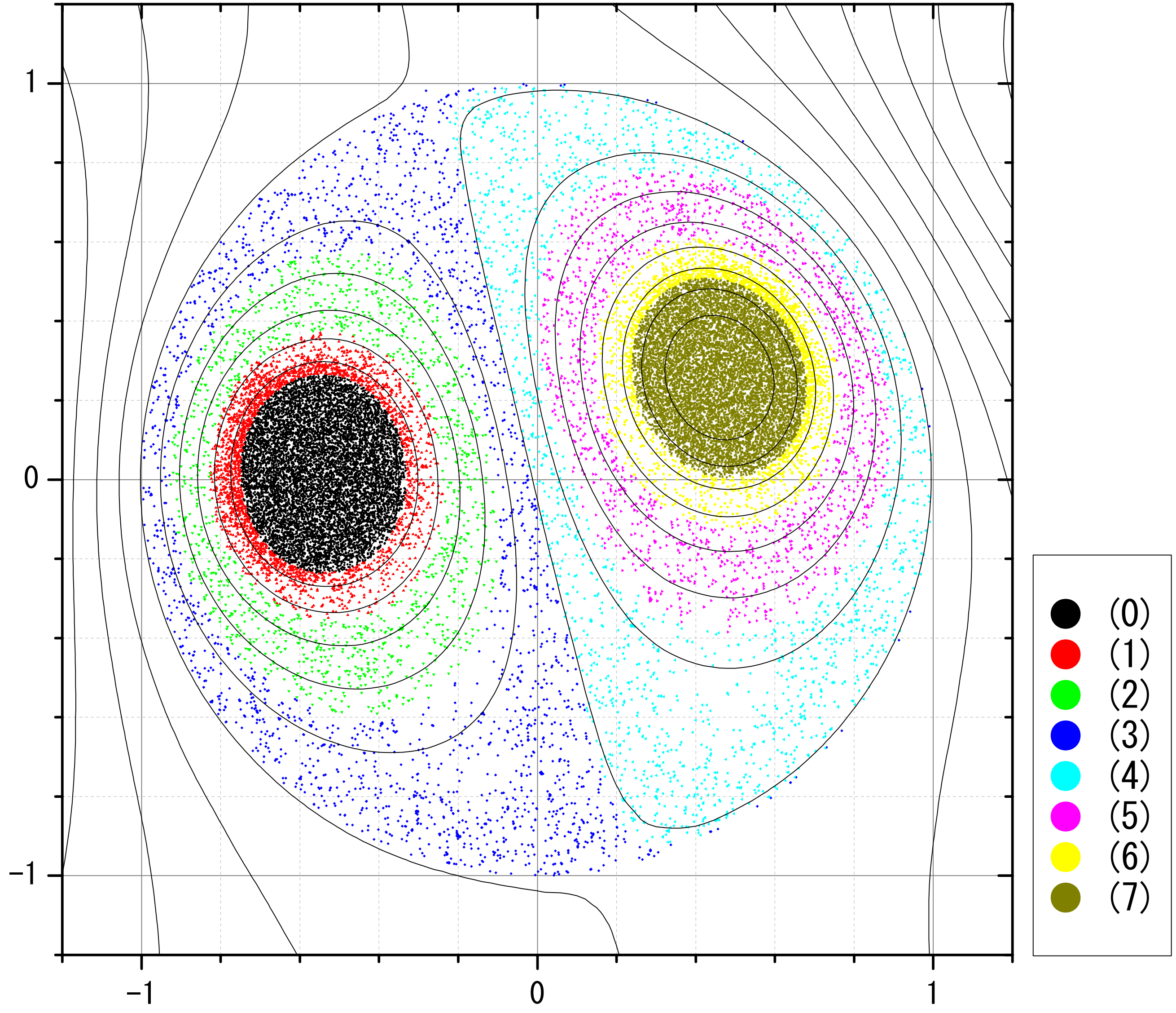


図 4.3　数値的にも，$\nabla \cdot (\boldsymbol{u}\omega) \approx 0$は確認可能

④平均場のエネルギーを保存

- 平均場エネルギーの定義

$$E = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\omega\psi = \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\omega\omega'$$

- 平均場エネルギーの時間微分を計算

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \frac{1}{2}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'G(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\left(\frac{\partial\omega}{\partial t}\omega' + \omega\frac{\partial\omega'}{\partial t}\right)\\
&= -\frac{\Omega}{R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\nabla\psi\cdot\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\cdot\left[\left(\omega'_{+}-\omega'_{-}\right)\nabla\omega-\left(\omega_{+}-\omega_{-}\right)\nabla'\omega'\right]\\
&= -\frac{\Omega}{2R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\left(\nabla\psi-\nabla'\psi'\right)\cdot\frac{(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\cdot\left[\left(\omega'_{+}-\omega'_{-}\right)\nabla\omega-\left(\omega_{+}-\omega_{-}\right)\nabla'\omega'\right]\\
&= 0
\end{aligned}$$

- 拡散項とドリフト項が釣り合って，エネルギー保存を実現している。

$$\frac{dE}{dt} = \left.\frac{dE}{dt}\right|_D + \left.\frac{dE}{dt}\right|_V = 0$$

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_D = -\frac{\Omega}{R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\frac{\left|\nabla\psi\cdot\left(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right)\right|^2}{|\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\,|^3}\left(\omega'_+ - \omega'_-\right)\frac{d\omega}{d\psi} \leq 0$$

$$\left.\frac{dE}{dt}\right|_V = \frac{\Omega}{R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\frac{\left|\nabla\psi\cdot\left(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right)\right|^2}{|\,\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\,|^3}\left(\omega_+ - \omega_-\right)\frac{d\omega'}{d\psi'} \geq 0$$

⑤ H 定理　(これが最後)

・H 関数 (エントロピー) の定義

$$S = -k_B H,$$

$$H = \int d\boldsymbol{r}\, \frac{\omega_+}{\Omega} \ln \frac{\omega_+}{\Omega} + \frac{\omega_-}{-\Omega} \ln \frac{\omega_-}{-\Omega} + \text{const.}$$

・H 関数の時間微分

$$
\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \frac{1}{\Omega}\int d\boldsymbol{r}\,\frac{\partial\omega_+}{\partial t}\left(\ln\omega_+ + 1\right) - \frac{\partial\omega_-}{\partial t}\left(\ln\left|\omega_-\right| + 1\right) \\
&= -\frac{1}{2R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\frac{1}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\left[\omega_+\omega'_+\left|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')\cdot\left(\nabla\ln\omega_+ + \nabla\ln\omega'_+\right)\right|^2\right] \\
&\quad -\frac{1}{2R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\frac{1}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\left[\omega_-\omega'_-\left|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')\cdot\left(\nabla\ln\omega_- + \nabla\ln\omega'_-\right)\right|^2\right] \\
&\quad +\frac{1}{2R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\frac{1}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\left[\omega_+\omega'_-\left|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')\cdot\left(\nabla\ln\omega_+ + \nabla\ln\omega'_-\right)\right|^2\right] \\
&\quad +\frac{1}{2R}\int d\boldsymbol{r}\int d\boldsymbol{r}'\frac{1}{\left|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}'\right|^3}\left[\omega_-\omega'_+\left|(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}')\cdot\left(\nabla\ln\omega_- + \nabla\ln\omega'_+\right)\right|^2\right] \\
&\leq 0
\end{aligned}
$$

・エントロピー生成は拡散項，エントロピー消滅はドリフト項が担う

$$\frac{dS}{dt} = \left.\frac{dS}{dt}\right|_D + \left.\frac{dS}{dt}\right|_V \geq 0$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_D = \frac{k_B}{R}\int dr \int dr' \left(\frac{\left|\nabla\omega_+ \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')\right|^2}{\omega_+} - \frac{\left|\nabla\omega_- \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')\right|^2}{\omega_-} \right) \frac{\omega'_+ - \omega'_-}{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'|^3} \geq 0$$

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_V = -\frac{k_B}{R}\int dr \int dr' \nabla\omega \cdot \frac{(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')}{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'|^3} \cdot \nabla'\omega'$$

$$= -\frac{k_B}{R}\int dr \int dr' \frac{\left|\nabla\psi \cdot (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}')\right|^2}{|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}'|^3} \frac{d\omega}{d\psi} \frac{d\omega'}{d\psi'} \leq 0$$

- 熱平衡状態で成り立つ関係式

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_D = -\left.\frac{dS}{dt}\right|_V \qquad (\geq 0)$$

- すなわち，エントロピー生成が止まる。

$$\frac{dS}{dt} = \left.\frac{dS}{dt}\right|_D + \left.\frac{dS}{dt}\right|_V = 0$$

4.3 線形応答による 2 体相関関数の導出

線形応答 → $\langle \delta\omega(\boldsymbol{r})\delta\omega(\boldsymbol{r}') \rangle$の式を得る

→ Ornstein-Zernike の関係式から 2 体相関関数 g を導入

→ g を求める

・平衡系に対する表式

N 体分布関数

$$\mu^N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N) = \frac{e^{-\beta H^N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)}}{\int e^{-\beta H^N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)d\boldsymbol{r}_1\cdots d\boldsymbol{r}_N}}$$

1 体，2 体分布関数

$$P_1^N(\boldsymbol{r}_1) = \int \mu^N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)d\boldsymbol{r}_2\cdots d\boldsymbol{r}_N$$

$$P_2^N(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \int \mu^N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)d\boldsymbol{r}_3\cdots d\boldsymbol{r}_N$$

• 平衡解の原点に任意の擾乱 (外場) を与える。たとえば, デルタ関数型など :

$$\hat{\omega}_{ex}(\boldsymbol{r}) = \Omega\delta(\boldsymbol{r})$$
$$\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}) = \Omega G_0(\boldsymbol{r}, 0)$$

• 擾乱ありの Hamiltonian

$$H_C^N = H^N + \sum_i c\Omega\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}_i)$$

c は擾乱の強さを表すパラメタ

• この時の N 体分布関数

$$\mu_c^N(\boldsymbol{r}_1, \cdots, \boldsymbol{r}_N) = \frac{e^{-\beta H_c^N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)}}{\int e^{-\beta H_c^N(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)} d\boldsymbol{r}_1 \cdots d\boldsymbol{r}_N}$$

• 同様に $P_{c,1}^N(\boldsymbol{r}_1), P_{c,2}^N(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2)$ も定義

以後の表記についての注意

$$\mu^N = \mu_0^N, P_1^N = P_{0,1}^N$$

・二つのルートで計算

線形応答→熱力学的極限　…(A)

熱力学的極限→線形応答　…(B)

● (A) の計算

・微分してから，摂動＝ 0 の極限をとる

$$\left.\frac{\partial}{\partial c}\mu_c^N\right|_{c=0} = \mu^N(-\beta\Omega)\sum_j \hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}_j) - \mu^N(-\beta\Omega)\mathrm{N}\int P_1^N(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

• 上記より

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial c}P_{c,1}^{N}(\boldsymbol{r}_1)\right|_{c=0} &= \int \left.\frac{\partial}{\partial c}\mu^{N}(\boldsymbol{r}_1,\cdots,\boldsymbol{r}_N)\right|_{c=0} d\boldsymbol{r}_2\cdots d\boldsymbol{r}_N \\
&= \int \mu^{N}(-\beta\Omega)\sum_j \hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}_j)d\boldsymbol{r}_2\cdots d\boldsymbol{r}_N \\
&\quad -P_1^{N}(\boldsymbol{r}_1)(-\beta\Omega)N\int P_1^{N}(\boldsymbol{r}')\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}' \\
&= (-\beta\Omega)\left[P_1^{N}(\boldsymbol{r}_1)\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}_1)+(\mathrm{N}-1)\int {\color{red}P_2^{N}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)}\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}_2)\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_2\right] \\
&\quad +\beta\Omega P_1^{N}(\boldsymbol{r}_1)\mathrm{N}\int P_1^{N}(\boldsymbol{r}_2)\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}_2)\,\mathrm{d}\,\boldsymbol{r}_2
\end{aligned}
$$

• $\omega_c^N = \left\langle \hat{\omega}_c^N \right\rangle = N\Omega P_{c,1}^N$なので，$\times N\Omega$により

$$
\left.\frac{\partial}{\partial c}P_{c,1}^{N}(\boldsymbol{r}_1)\right|_{c=0} \quad\rightarrow\quad \left.\frac{\partial}{\partial c}\omega_c^{N}(\boldsymbol{r}_1)\right|_{c=0}
$$

- 上式は，揺動応答公式で書くことが可能 (詳細は長くなるので省略)

$$\left.\frac{\partial}{\partial c}\omega_c^N(\boldsymbol{r})\right|_{c=0} = -\beta\int\left\langle\delta\omega(\boldsymbol{r})\delta\omega(\boldsymbol{r}')\right\rangle\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}')d\boldsymbol{r}'$$

- Ornstein-Zernike の式により，2 体相関関数 g を導入

$$\left\langle\delta\omega(\boldsymbol{r})\delta\omega(\boldsymbol{r}')\right\rangle = \Omega\omega^N(\boldsymbol{r})\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') + \omega^N(\boldsymbol{r})\omega^N(\boldsymbol{r}')g^N(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

- これより，次を得る。

$$\left.\frac{\partial}{\partial c}\omega_c^N(\boldsymbol{r})\right|_{c=0} = -\beta\Omega\omega^N(\boldsymbol{r})\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}) - \beta\omega^N(\boldsymbol{r})\int g^N(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\omega^N(\boldsymbol{r})\hat{\psi}_{ex}d\boldsymbol{r}'$$

・形式的に $N \to \infty$ とする。これが (A) の結果。

$$\frac{\partial}{\partial c}\omega_c^N(\boldsymbol{r})\bigg|_{c=0} = -\tilde{\beta}\tilde{\Omega}\omega^N(\boldsymbol{r})\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}) - \tilde{\beta}\omega^N(\boldsymbol{r})\int g^N(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\omega^N(\boldsymbol{r})\hat{\psi}_{ex} d\boldsymbol{r}'$$

ただし

$$\omega_c(\boldsymbol{r}) = \lim_{N\to\infty}\omega_c^N(\boldsymbol{r}), \quad g(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) = \lim_{N\to\infty} N g^N(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$$

注：$\omega_c^N(\boldsymbol{r}) = \mathrm{N}\,\Omega P_c^N(\boldsymbol{r}), \Omega = \dfrac{\tilde{\Omega}}{N}, \beta = \tilde{\beta}N$

● (B) の計算

- $N \to \infty$とした平均場方程式からスタート

- $\omega(\boldsymbol{r})$ に対する平均場方程式

$$\omega(\boldsymbol{r}) = -\Delta\psi(\boldsymbol{r}) = \tilde{\Omega}\frac{e^{-\tilde{\beta}\tilde{\Omega}\psi(\boldsymbol{r})}}{\int e^{-\tilde{\beta}\tilde{\Omega}\psi(\boldsymbol{r}')}d\boldsymbol{r}'}$$

- $\omega_c(\boldsymbol{r})$ に対する平均場方程式

$$\omega_c(\boldsymbol{r}) = -\Delta\psi_c(\boldsymbol{r}) = \tilde{\Omega}\frac{e^{-\tilde{\beta}\tilde{\Omega}(\psi_c(\boldsymbol{r})+c\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}))}}{\int e^{-\tilde{\beta}\tilde{\Omega}(\psi_c(\boldsymbol{r}')+c\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r}'))}d\boldsymbol{r}'}$$

- $c \to 0$ の極限をとる。これが (B) の結果。

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\partial}{\partial c}\omega_c\right|_{c=0} &= \tilde{\Omega}\left.\frac{\partial P_c}{\partial c}\right|_{c=0} = \tilde{\Omega}P(\boldsymbol{r})(-\tilde{\beta})\left(\tilde{\Omega}^2 G\left.\frac{\partial P_c}{\partial c}\right|_{c=0} + \tilde{\Omega}\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r})\right) \\
&\quad - \tilde{\Omega}P(\boldsymbol{r})\int P(\boldsymbol{r})(-\tilde{\beta})\left(\tilde{\Omega}^2 G\left.\frac{\partial P_c}{\partial c}\right|_{c=0} + \tilde{\Omega}\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r})\right) \\
&= -\tilde{\beta}\tilde{\Omega}\omega(\boldsymbol{r})\left(G\left.\frac{\partial \omega_c}{\partial c}\right|_{c=0} + \hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r})\right) \\
&\quad + \tilde{\beta}\omega(\boldsymbol{r})\int \omega(\boldsymbol{r})\left(G\left.\frac{\partial \omega_c}{\partial c}\right|_{c=0} + \hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r})\right)
\end{aligned}
$$

- (A) と (B) が等しいとおいて，平均場方程式の線形化作用素を作用させると，$\hat{\psi}_{ex}(\boldsymbol{r})$が任意であることから，

$$\left(-\Delta + \tilde{\beta}\tilde{\Omega}\omega(\boldsymbol{r})\right)\frac{g(\boldsymbol{r})}{-\tilde{\beta}\tilde{\Omega}^2} = \delta(\boldsymbol{r})$$

が得られる。

- Prajapat-Tarantello ('01 Proc. Roy. Soc. Edin.) の結果を適用すると，全空間解や $B_1(0)$ の解を求める事ができる。

- 全空間解では，相関函数が満たす条件式

$$\int_{\mathbb{R}^2} \omega_{eq}(\boldsymbol{r}) g(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = 0$$

が満足できない。よって

$$\int_0^R \omega_{eq}(\boldsymbol{r}) g(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = 0$$

として，切断半径 R を導入する。

$$g(\boldsymbol{r}) = -\tilde{\beta}\tilde{\Omega}^2 \left[\frac{1}{2\pi} \frac{\frac{1}{8}\left|\frac{\boldsymbol{r}}{\varepsilon}\right|^2 - 1}{\frac{1}{8}\left|\frac{\boldsymbol{r}}{\varepsilon}\right|^2 + 1} \left(\ln\left|\frac{\boldsymbol{r}}{R}\right| - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{8}\left|\frac{R}{\varepsilon}\right|^2 + 1 \right) \right) - \frac{1}{2\pi} \right]$$

- $B_1(0)$ の解は，P-T 解に含まれる任意定数 ε を調整することにより，境界条件を満たすようにする。ε は $\tilde{\beta}$ の函数となる。

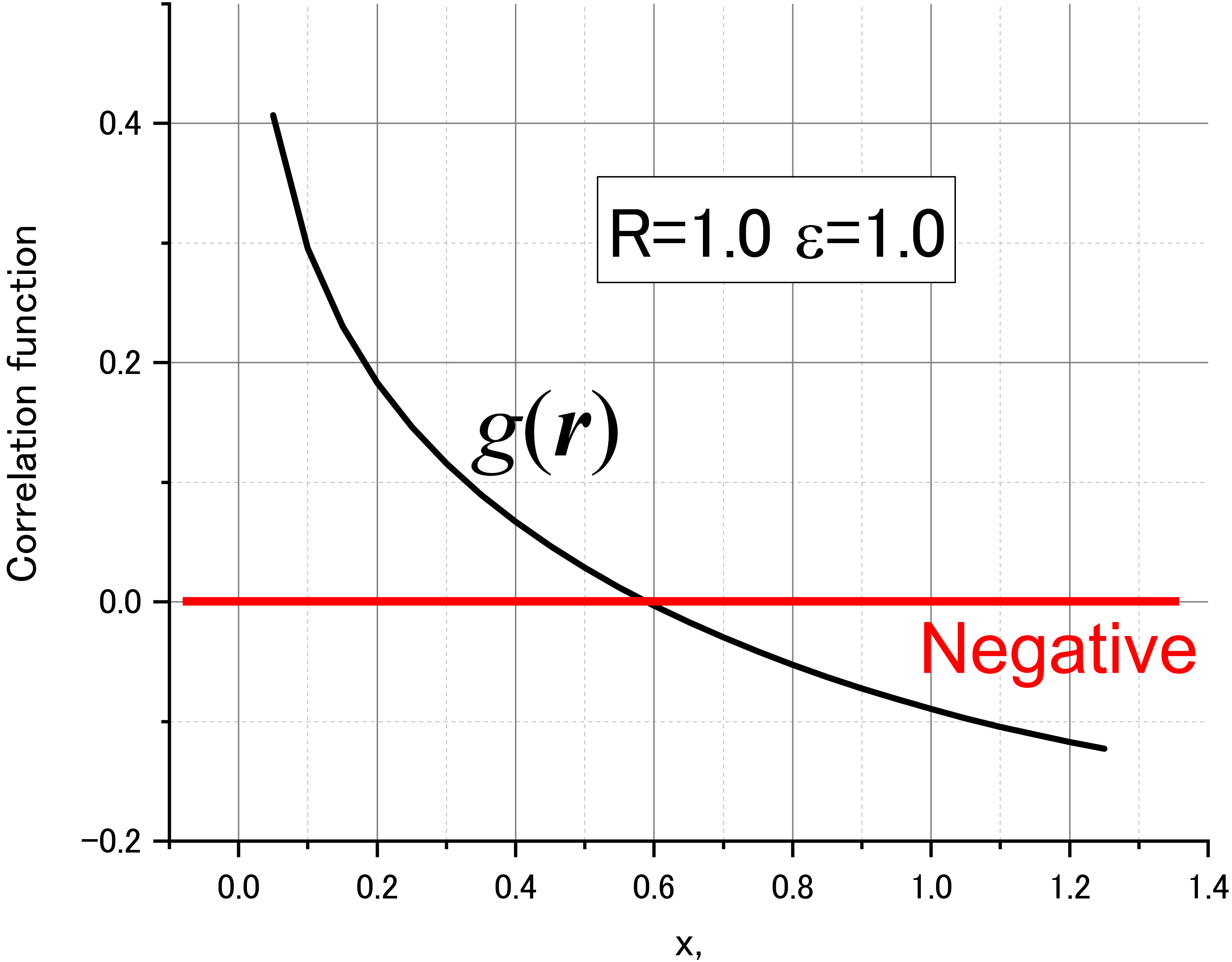


図 4.4　全空間の場合の相関関数の概形

5. 数値的結果

5.1 ウルトラ メニーコア スパコン：PEZY-SC　(Peta-Exa-Zetta-Yotta)

・理研に設置されている菖蒲 System B を使用：

・PEZY Computing / ExaScaler 社により開発

・2018 年秋の GREEN500 スパコンリストで，3 期連続世界 1 位達成！

1 位じゃないとダメなんですよ (笑)

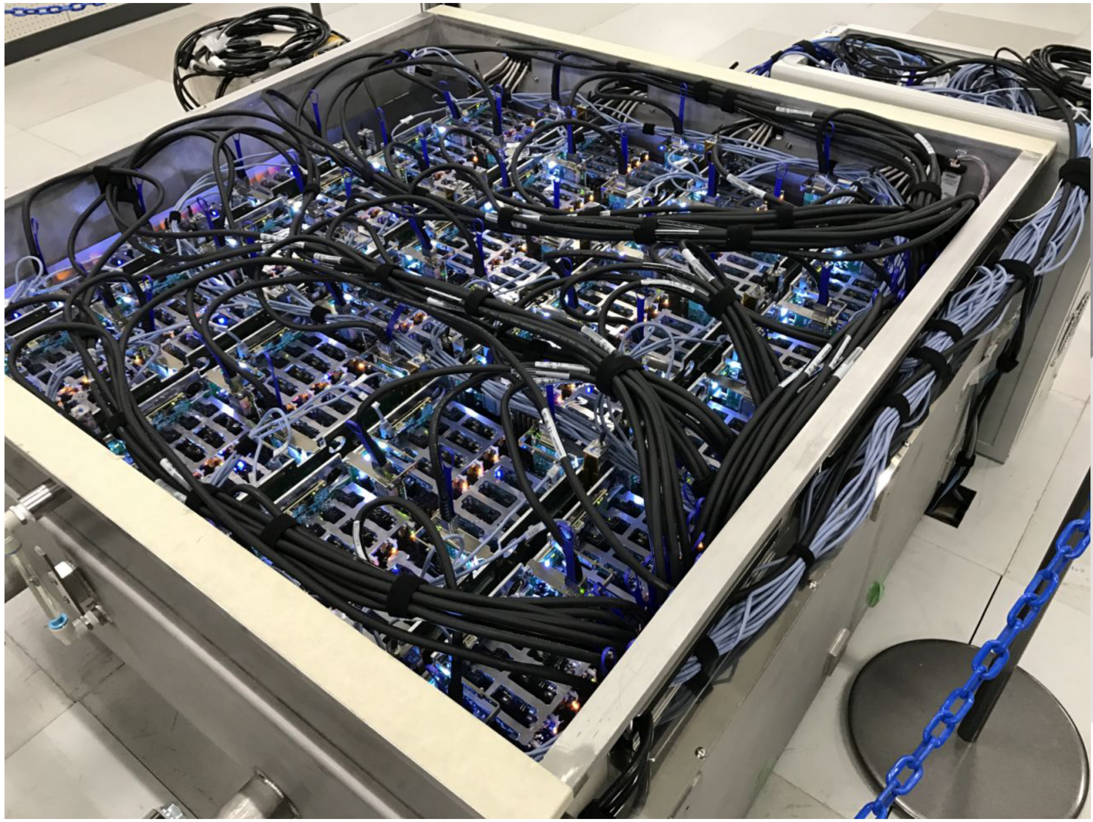


図 5.1　左：液浸槽　右：ブリック (CPU モジュール)

- PEZY-SC プロセッサの特徴：
  - ウルトラ メニーコア
  - PE あたり 8-way マルチスレッディング
  - GPU(= SIMD) とは異なる，MIMD アーキテクチャ：分岐に強い

表 5.1　PEZY-SCx プロセッサ諸元

	SC1	SC2
発表	2014 年 8 月	2017 年 3 月
ノードあたりのプロセッサ数	4	8
プロセッサあたりの PE 数	1024	2048
PE あたりのスレッド数	8	8
プロセッサあたりの全スレッド数	8,192	16,384
ノードあたりの全スレッド数	32,768	131,072
プロセッサあたりの FLOPS(DP)	1.5T	4.1T
プロセッサあたりの FLOPS(SP)	3.0T	8.2T

2019 年中に SC3 を発表予定。

5.2 理論的結果の検証

● Fokker-Planck 型衝突項

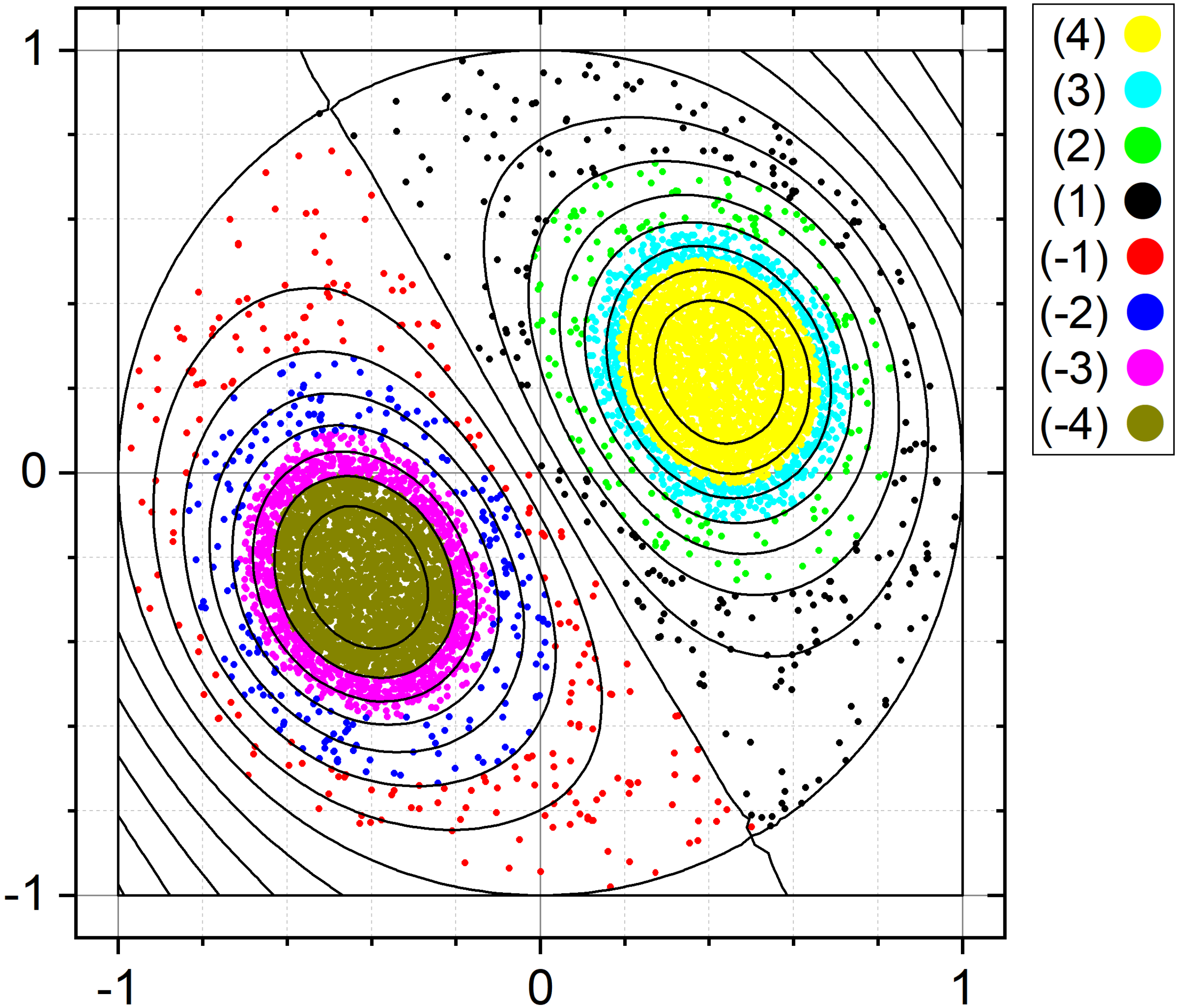


図 5.2　準平衡分布

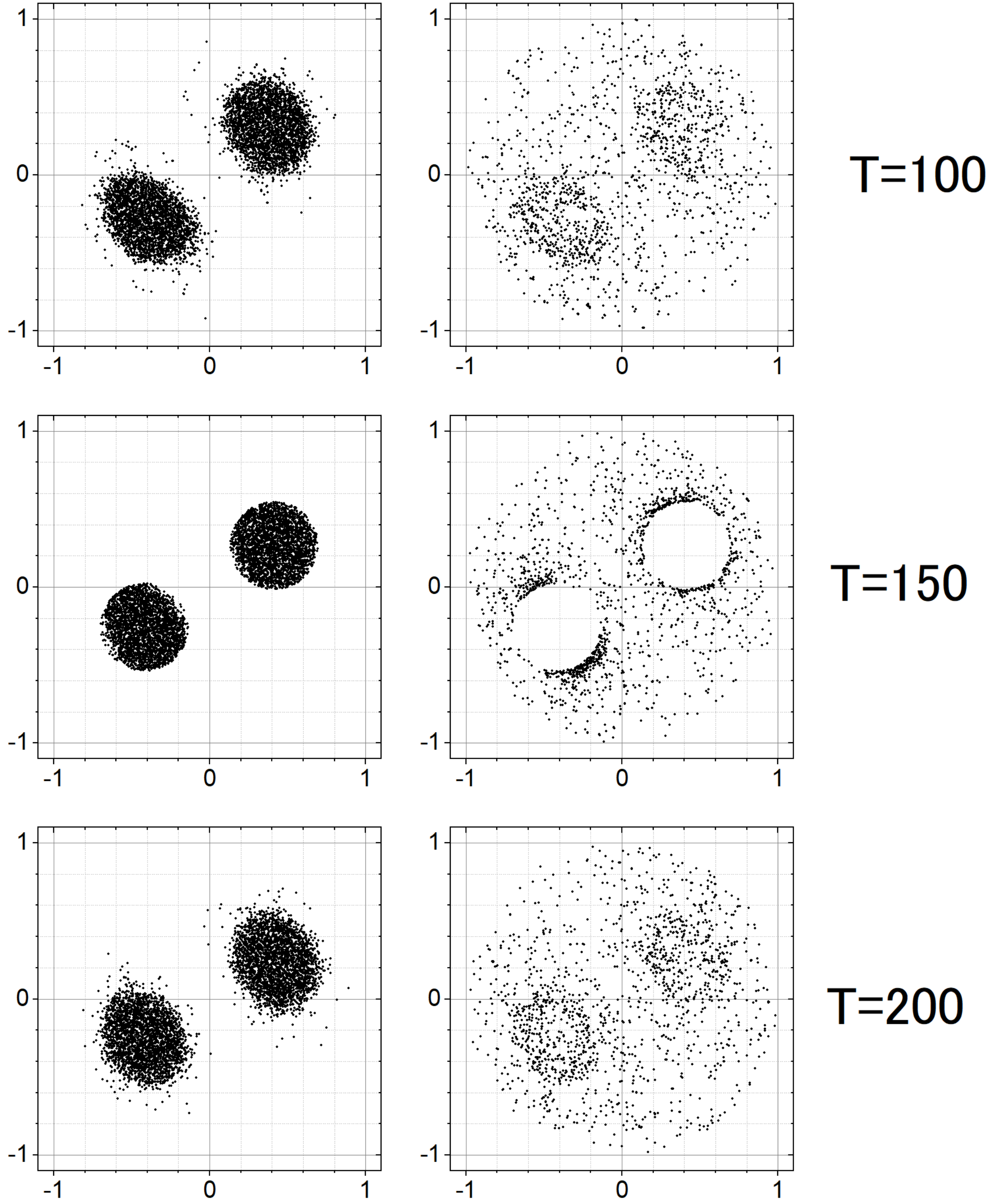
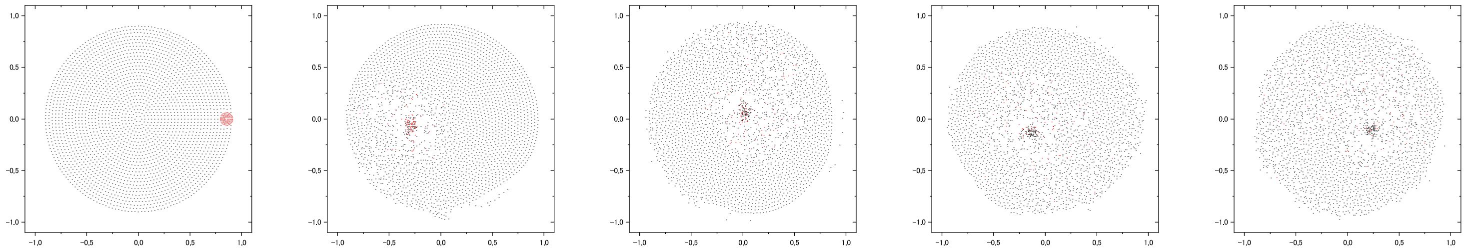


図 5.3　流れ函数の等値面を横切る輸送が確かにある

●リングホール形成

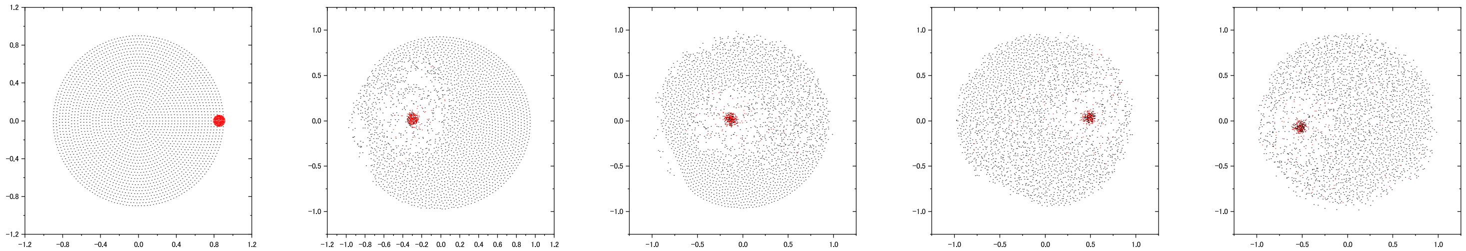
- 綺麗なリングホールが形成される条件

　　背景渦の公転時間スケール～ 40



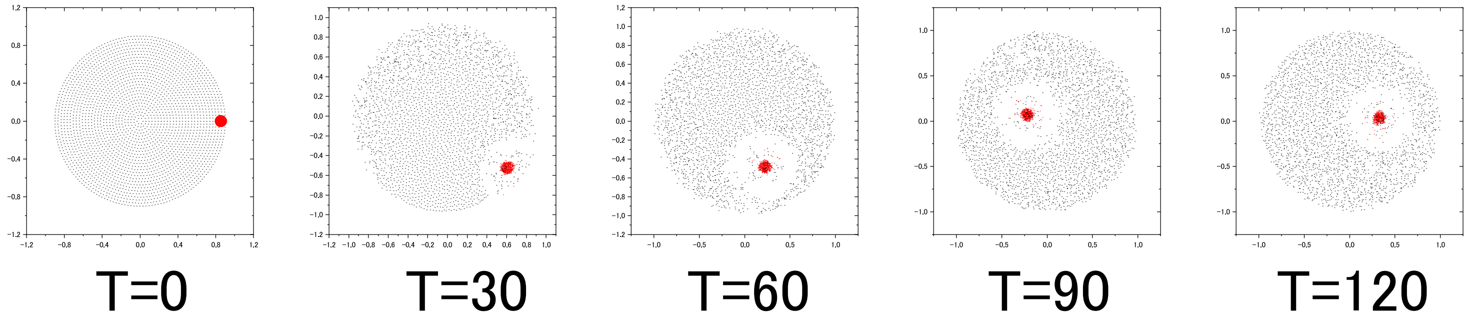
T=0　T=30　T=60　T=90　T=120

(a)　点渦数＝ 94

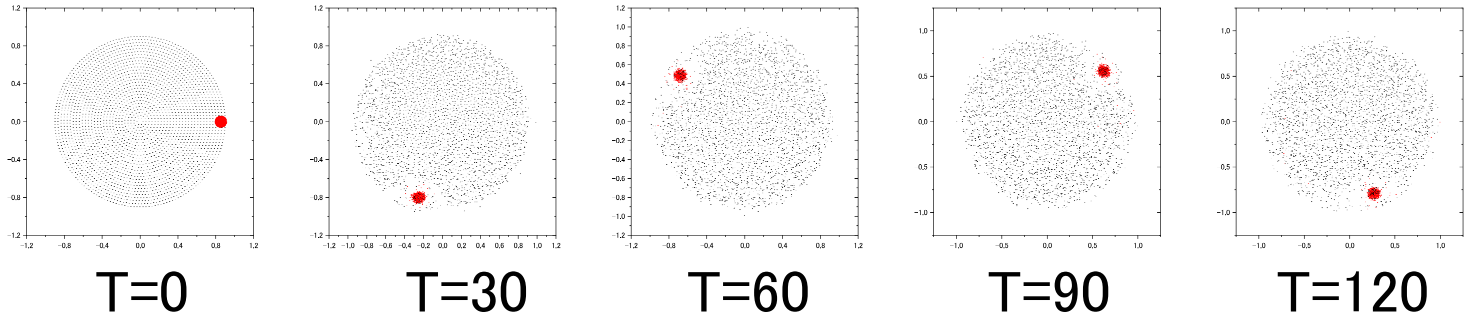


T=0　T=30　T=60　T=90　T=120

(b)　点渦数＝ 226



(c)　点渦数＝ 415



(d)　点渦数＝ 572

図 5.4　クランプの点渦数を変化させたシミュレーション

• リングホール内の平均渦度と背景渦度の比は一定

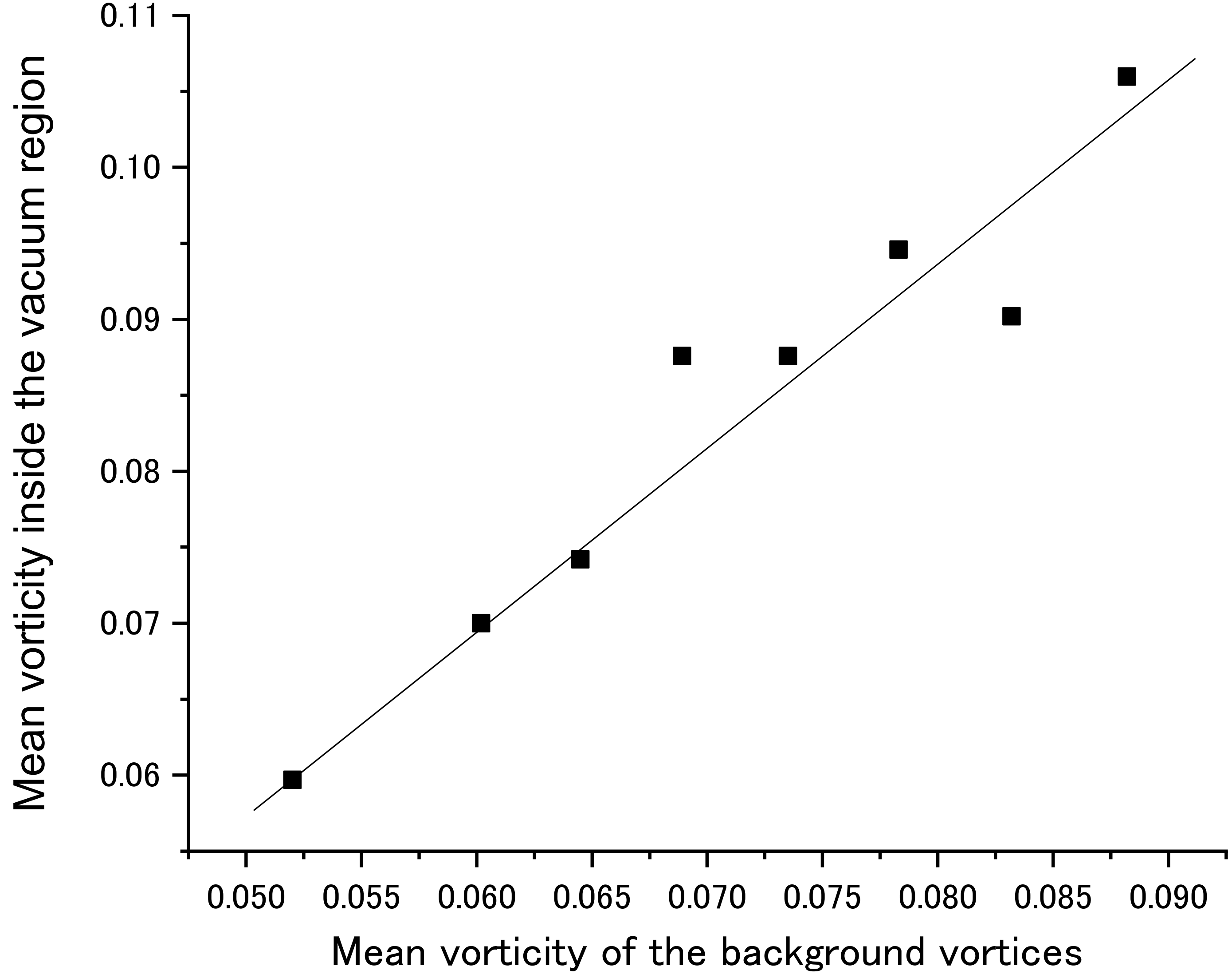


図 5.5　背景渦度とリングホールの平均渦度

- **リングホールのサイズを決める条件**

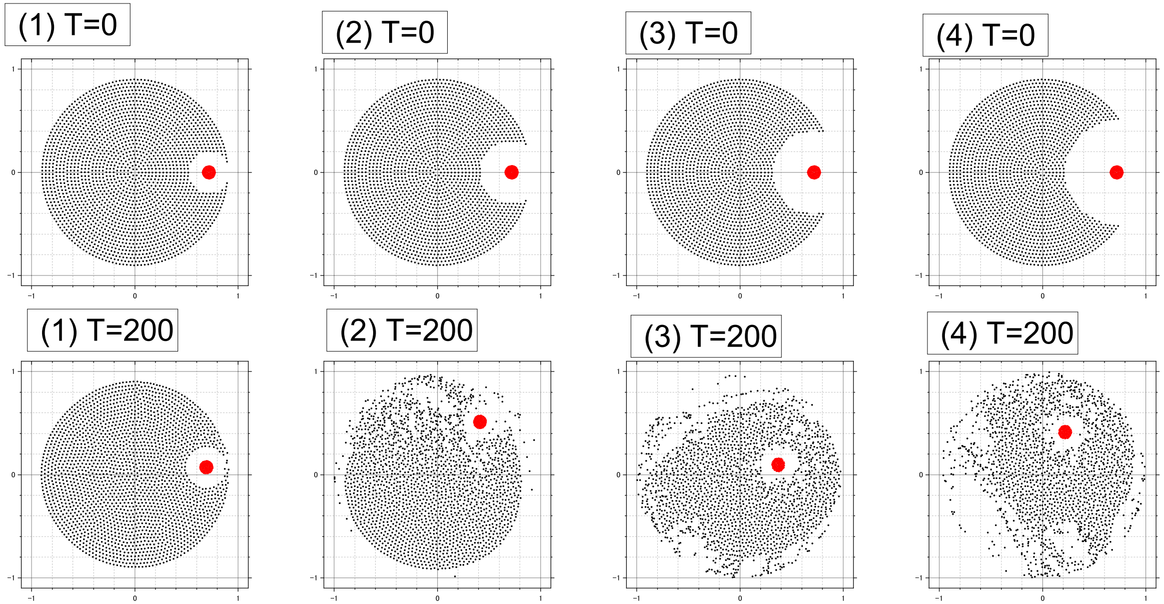


図 5.6　初期のリングホールサイズをパラメタにした
背景とクランプの渦度は一定

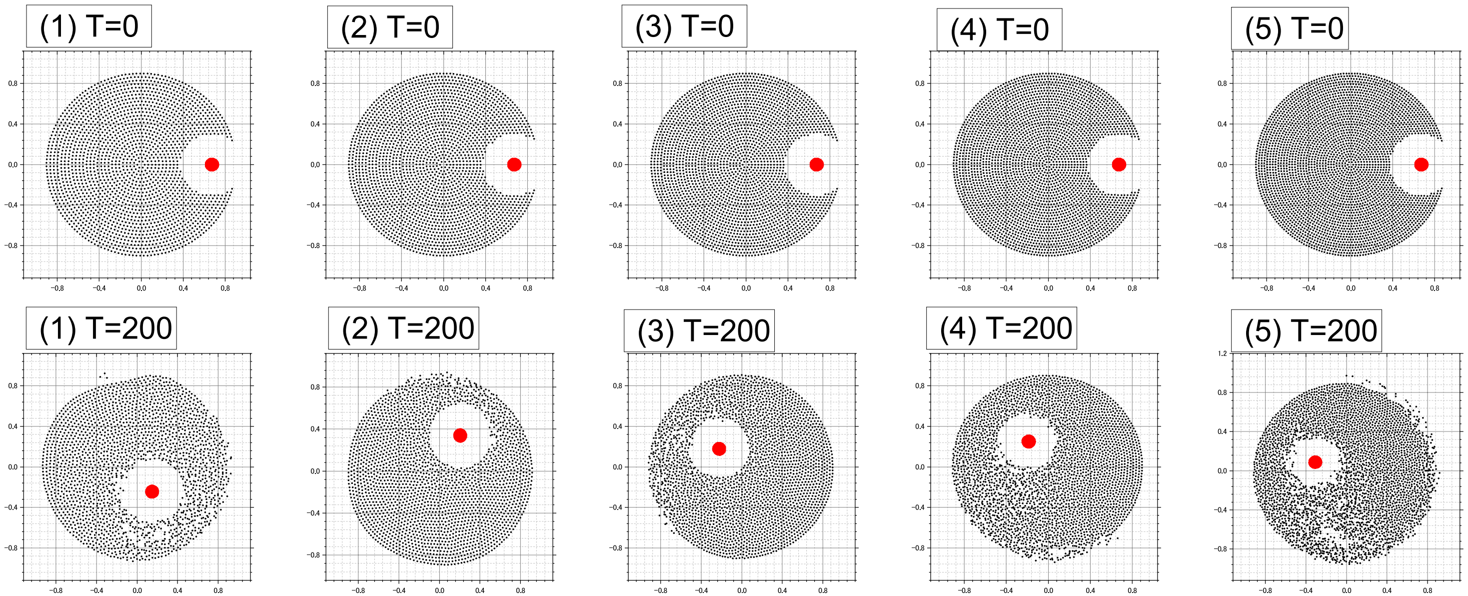


図 5.7　背景渦度をパラメタにした

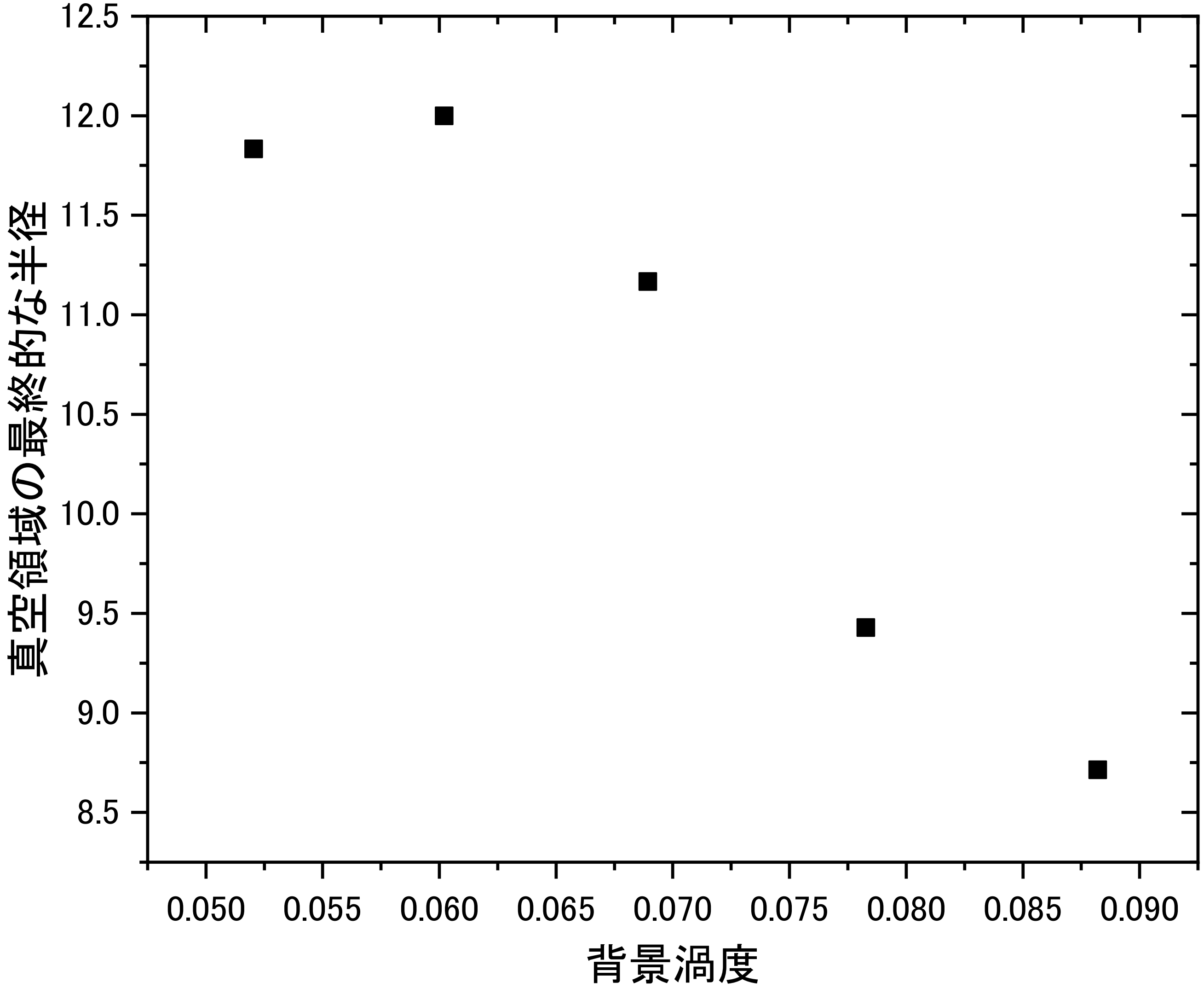


図 5.8　ホールサイズは，背景渦度が強くなるに従って小さくなる

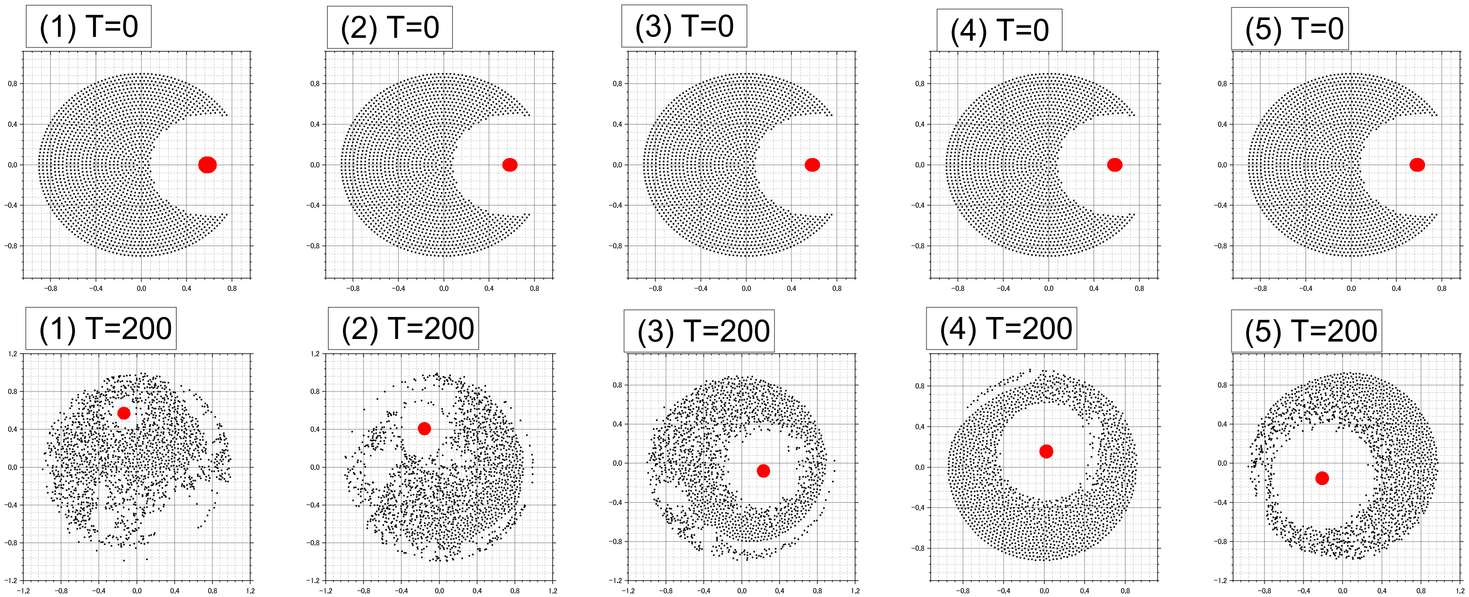


図 5.9　クランプの渦度をパラメタにした

・相関関数に課される条件からホールサイズの上限を見積もってみたところ,

$$\left|\epsilon R\right|^2 \leq \frac{N}{2}$$

という不等式が成立することがわかった。

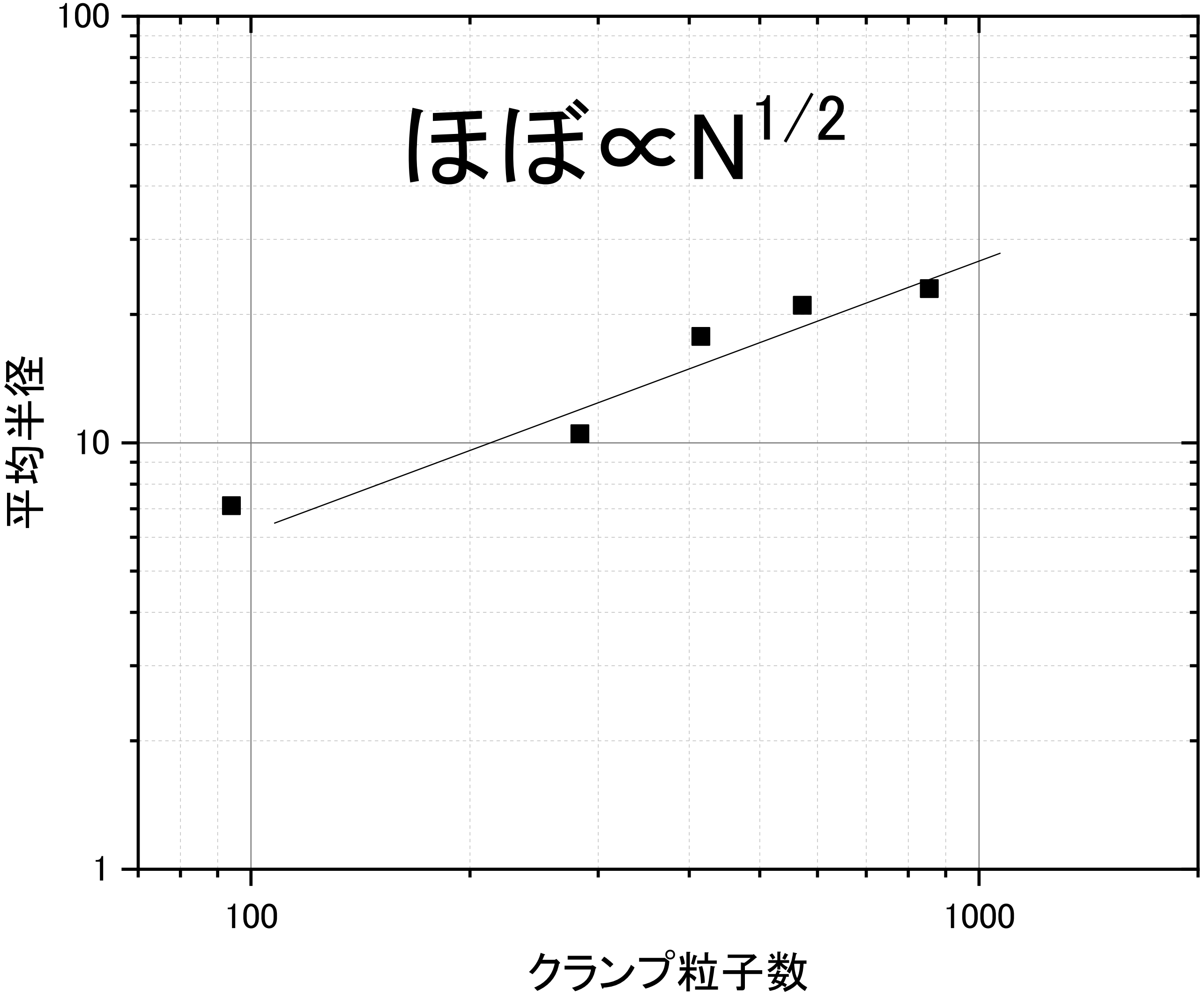


図 5.10　シミュレーションから見積もったホールサイズ

6. Conclusion

- 自己組織化／大規模構造形成のメカニズムを明らかにしたい。
- 点渦系を研究対象とした

  2 次元で簡便

  数学的にも数値的にも扱いやすい
- Fokker-Planck 型衝突項では，ドリフト項が自己組織化の鍵を握る
- Repulsive な効果をもつ相関函数を解析的得ることに成功した
- 数学的に厳密な取り扱いが (厳しいながらも) 可能

- 重力多体系を目指したい