
量子Ising模型における新奇な非平衡量子多体現象

濱崎立資 (理研CPR白眉/iTHEMS)

統計物理学懇談会

2022/3/10-11 @ online

共同研究者

吉永敦紀 (東大/産総研)、箱嶋秀昭 (大阪大)、井元隆史 (産総研)、松崎雄一郎 (産総研)
中川大也 (東大)、芳賀大樹 (大阪府立大)、上田正仁 (東大)

Refs.

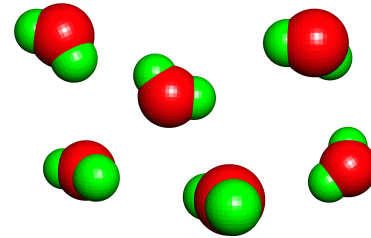
*A. Yoshinaga, H. Hakoshima, I. Imoto, Y. Matsuzaki, and R. Hamazaki [arXiv:2111.05586]

*R. Hamazaki, Nature Communications 12, 5108 (2021).

*R. Hamazaki, M. Nakagawa, T. Haga, M. Ueda, in preparation.

非平衡統計力学の舞台としての人工量子系

平衡量子統計力学



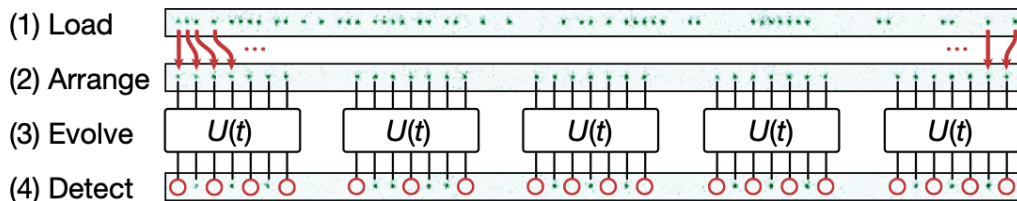
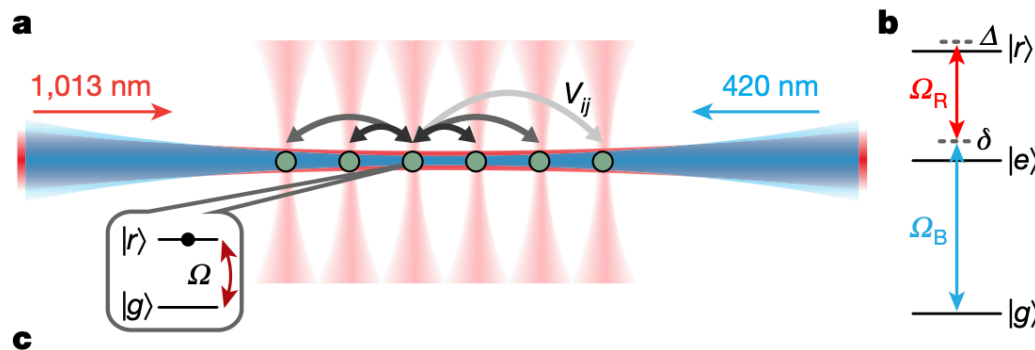
$$\frac{e^{-\beta H}}{Z}$$



非平衡量子統計力学を理解したい

人工量子系（冷却原子系など）：非平衡現象の探索の舞台

ミクロな自由度を制御 → 多体ダイナミクスの観測



1原子レベルでの測定
& リアルタイムでの制御

H. Bernien et al., Nature (2017)

孤立量子系は熱平衡化するか？

$$\langle \psi(0) | \hat{O} | \psi(0) \rangle \xrightarrow{?} \text{Tr}[\hat{\rho}_{\text{mic}} \hat{O}]$$

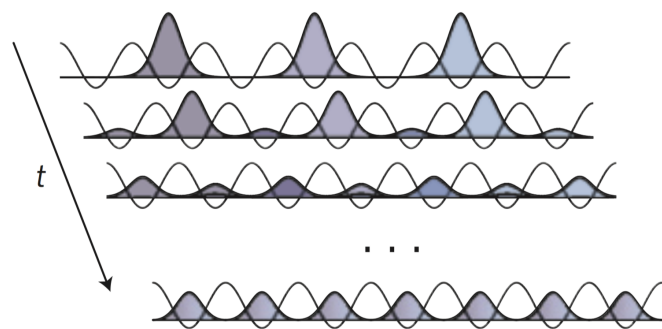
ユニタリー時間発展 (量子力学) \rightarrow ミクロカノニカル分布 (平衡統計力学)

von Neumannに始まる問題 (1929)



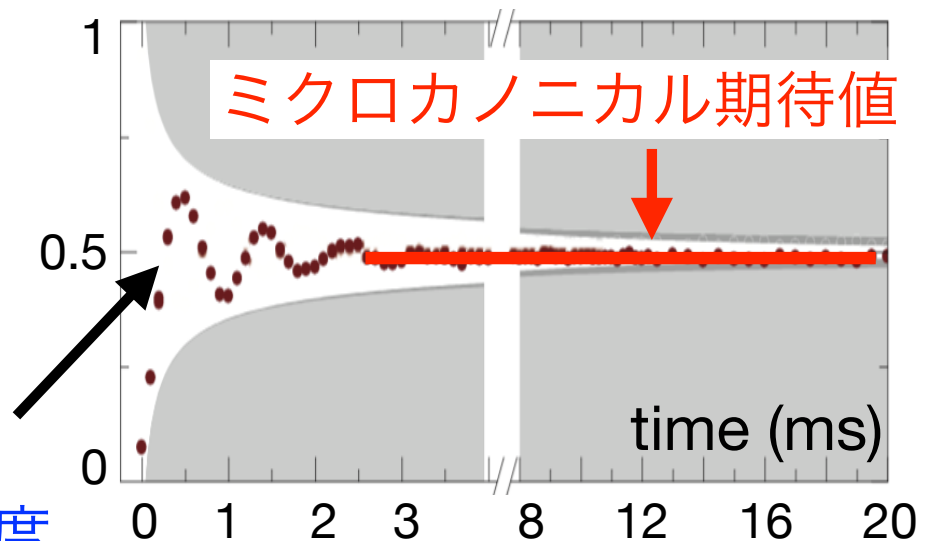
https://en.wikipedia.org/wiki/John_von_Neumann#/media/File:JohnvonNeumann-LosAlamos.gif

実験的な観測



S. Trotzky et al., Nat. Phys.(2012). $O(t)$

奇数サイトの粒子密度



Eigenstate thermalization hypothesis (ETH)

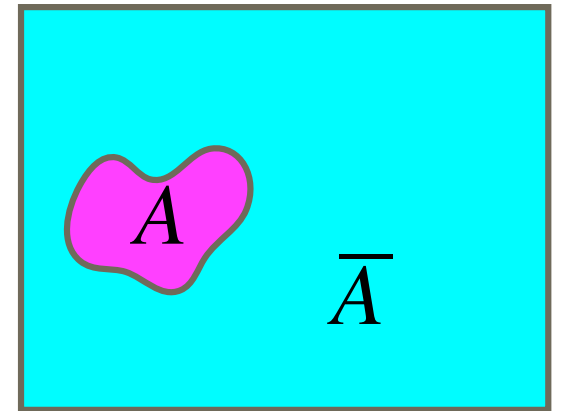
ETH (熱平衡化の**十分条件**) :

ハミルトニアンエネルギー固有状態 $|E_\alpha\rangle$ 自身が「熱的」
十分高いエネルギーを持つ任意の $|E_\alpha\rangle$ と

任意の局所領域 A について、

$$\text{Tr}_A[|E_\alpha\rangle\langle E_\alpha|] \simeq \text{Tr}_A[\hat{\rho}_{\text{mic}}(E_\alpha)]$$

\swarrow A への縮約密度行列



→ 固有状態のエンタングルメントエントロピーの体積則なども従う

$$S_A(|E_\alpha\rangle) \propto V_A$$

* 局所保存則がある場合、その値を指定した部分空間内で議論
(粒子数保存や電荷保存など)

* (相互作用距離が長すぎない) 典型的な並進対称多体系での数値的検証

S. Sugimoto, [R. Hamazaki](#), M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* 126 (12), 120602 (2021).

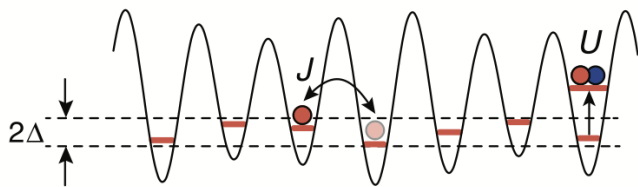
S. Sugimoto, [R. Hamazaki](#), M. Ueda, [arXiv:2111.12484](#)

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

①熱平衡化しない系

*Many-body localization (MBL)



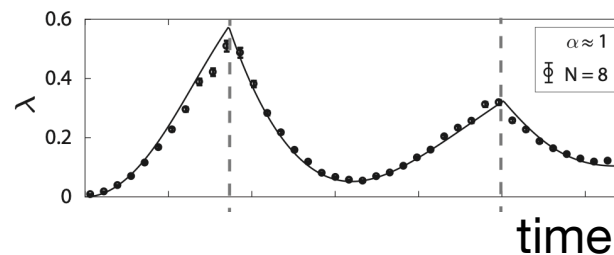
M. Schreiber et al.,
Science (2015)

*量子多体スカー

*ヒルベルト空間分割

②緩和過程の物理

*動的量子相転移



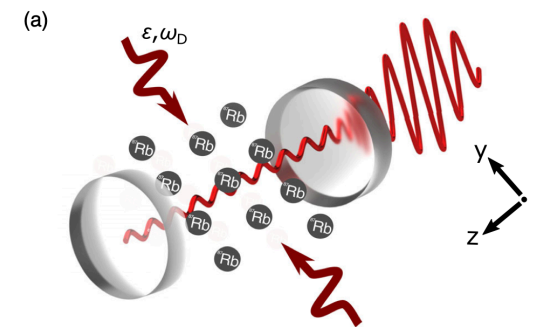
P. Jurcevic et al., PRL (2017)

*動的スケーリング則

*プレサーマル時間結晶

③散逸の加わった系

*散逸離散時間結晶



H. Keßler et al., PRL (2021)

*観測誘起相転移

*MBLの融解

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

① 熱平衡化しない系

② 緩和過程の物理

③ 散逸の加わった系

本発表の主題

量子多体系の最も基本的なモデルの一つである、
量子Ising模型における新奇な非平衡多体現象を議論する

$$\hat{H} = J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z + \sum_i g_i \hat{\sigma}_i^x + h_i \hat{\sigma}_i^z$$

*量子多体スカー

*動的スケーリング則

*観測誘起相転移

*ヒルベルト空間分割

*プレサーマル時間結晶

*MBLの融解

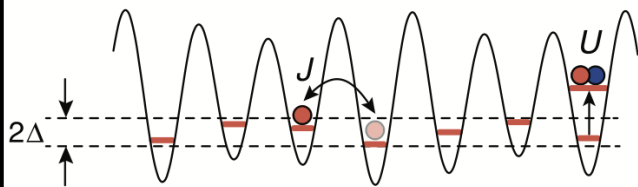
1)

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

①熱平衡化しない系

*Many-body localization (MBL)



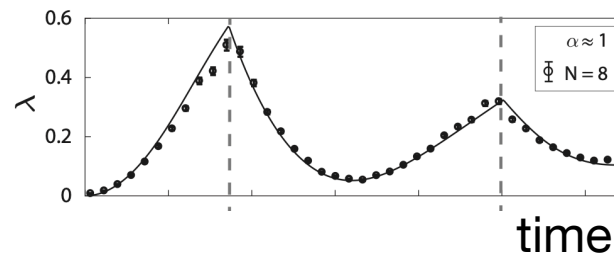
M. Schreiber et al.,
Science (2015)

*量子多体スカー

*ヒルベルト空間分割

②緩和過程の物理

*動的量子相転移



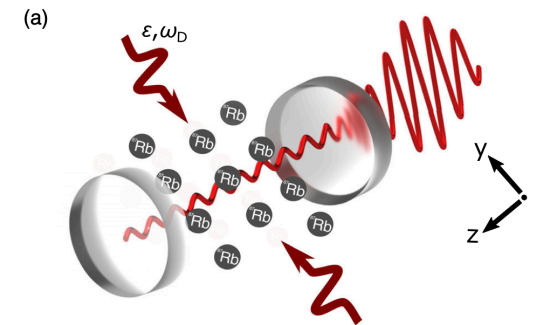
P. Jurcevic et al., PRL (2017)

*動的スケーリング則

*プレサーマル時間結晶

③散逸の加わった系

*散逸離散時間結晶



H. Keßler et al., PRL (2021)

*観測誘起相転移

*MBLの融解

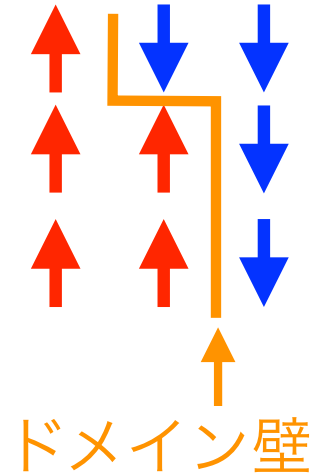
高次元量子Ising模型のダイナミクス

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{DW}} + h_x \sum_i \hat{\sigma}_i^x$$

(超立方格子を仮定)

$$\hat{H}_{\text{DW}} = - \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z$$

ドメイン壁のエネルギー



一次元：可積分系、ETHの破れ

高次元：非可積分系と考えられている

二次元系の有限系の数値計算 ($N \leq 20$)

R. Mondaini et al., PRE (2016)

→ $|h_x| \sim 1$ ならETHが成立 (熱平衡化)

($|h_x| \ll 1, |h_x| \gg 1$ ではcontroversial)

モチベーション

高次元量子Isingモデルは解けないと考えられているが、特定のレジームで熱平衡化の有無を議論できるか？

結果

Yes. 横磁場Ising模型（次元 $d \geq 2$ ）の弱磁場極限で、ヒルベルト空間分割(HSF)が起こってETHが破れ、非熱的ダイナミクスが現れる

モデルとセットアップ

横磁場Ising模型

ドメイン壁のエネルギー

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{DW}} + h_x \sum_i \hat{\sigma}_i^x$$

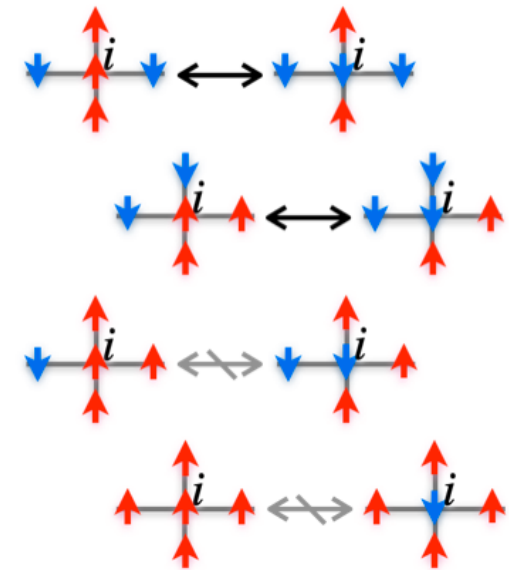
$$\hat{H}_{\text{DW}} = - \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^z \hat{\sigma}_j^z$$

弱磁場極限 $h_x \rightarrow 0$ での

実効モデル (やはり非可積分)

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{\text{DW}} + h_x \sum_i \hat{\sigma}_i^x \hat{Q}_i$$

\hat{Q}_i : サイト i の周りの磁化の和がゼロなら1,
それ以外は0への射影



ダイナミクスは非自明な制限を受ける

モデルとセットアップ

横磁場Ising模型

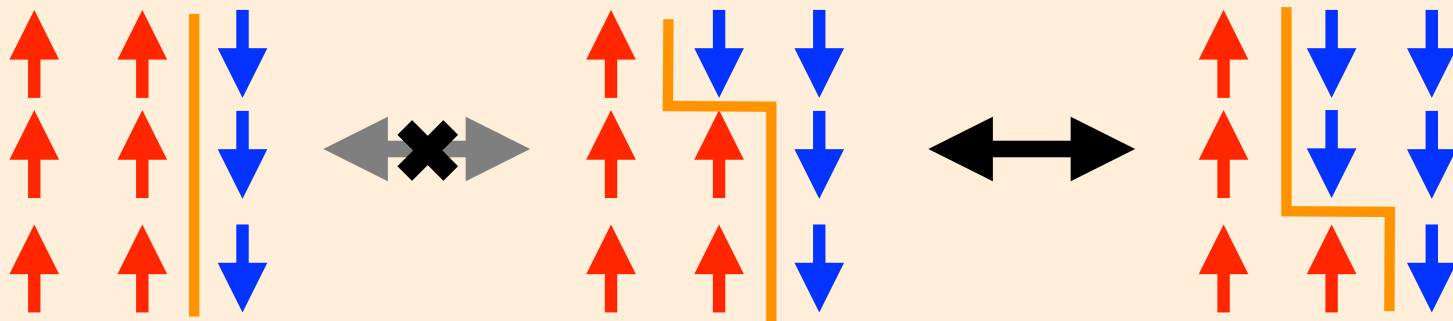
ドメイン壁のエネルギー

$$\hat{H} = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \hat{\sigma}_i^x \hat{\sigma}_j^x - h \sum_i \hat{\sigma}_i^z$$

\hat{H}_{DW} が横磁場に比べ、支配的で保存する

(全エネルギー以外に局所保存量は \hat{H}_{DW} のみ)

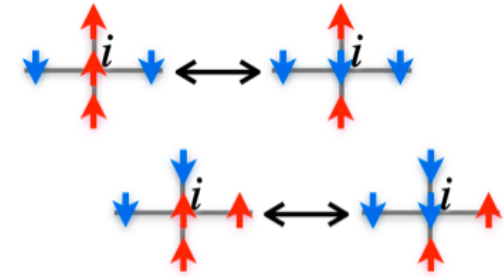
ドメイン壁のエネルギーを変えない遷移のみ存在



ダイナミクスは非自明な制限を受ける

凍った領域

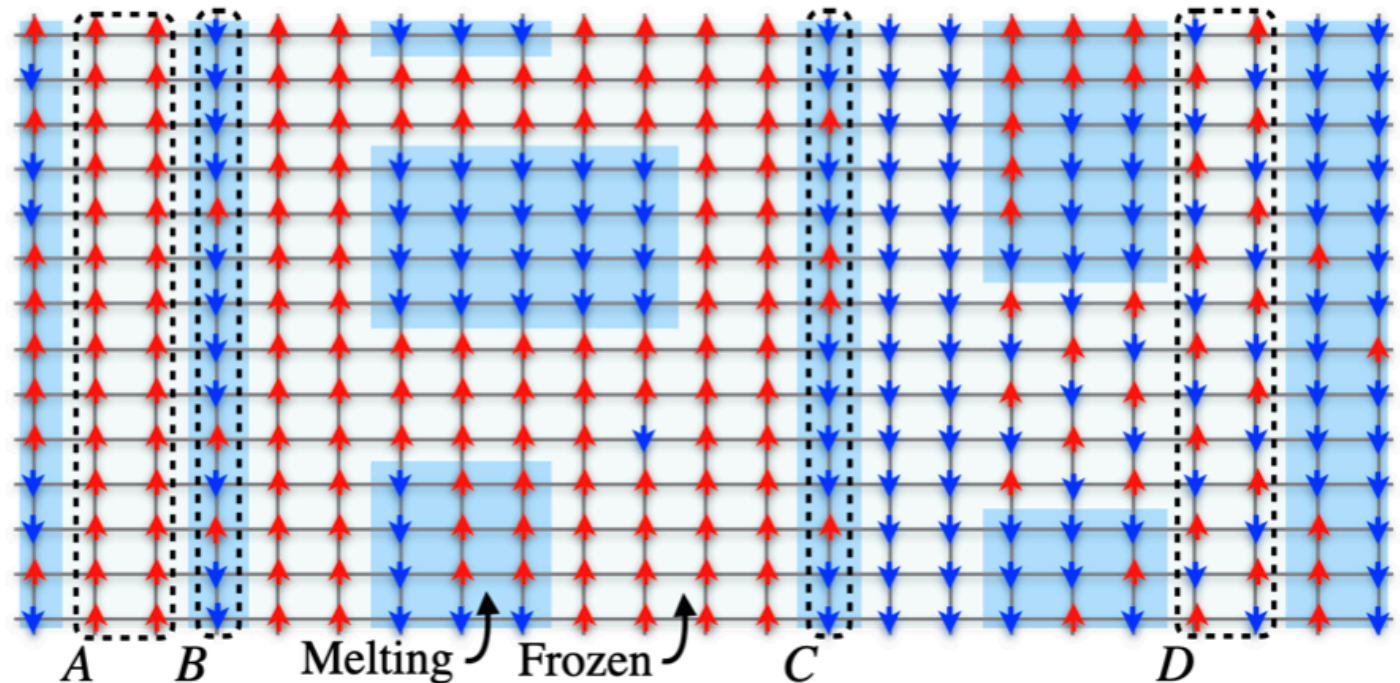
$$\hat{H}_1 = \hat{H}_{\text{DW}} + h_x \sum_i \hat{\sigma}_i^x \hat{Q}_i$$



ダイナミクスの制限により、ハミルトニアンによって
遷移が起こらない「凍った」領域が存在し、系を空間的に分断

二次元の場合の例

三次元以上でも
同様な議論が可能

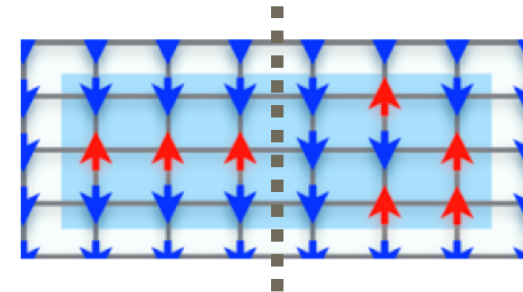
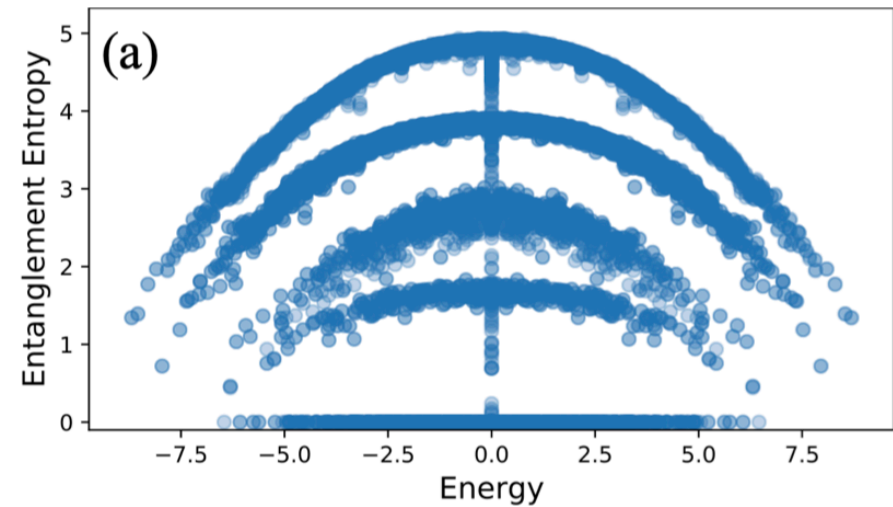
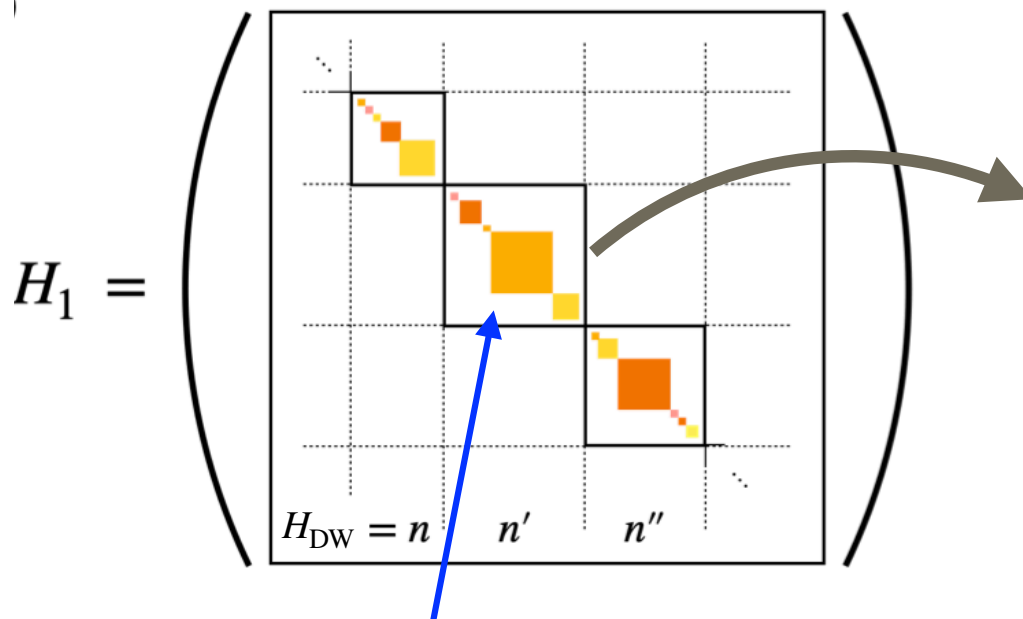


Hilbert空間分割 (HSF)とETHの破れ

凍った領域による空間の分断により、HSFが起こる

→ \hat{H}_{DW} の保存量を指定しても、ETHが破れる

↑
体積則を満たさない低エンタングルド固有状態



HSF : 局所保存量を指定した後の
セクターがさらに (指数的個数に) 分割

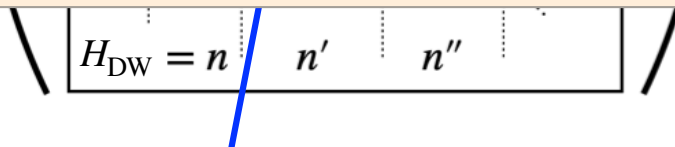
Hilbert空間分割 (HSF)とETHの破れ

凍った領域による空間の分断により、HSFが起こる

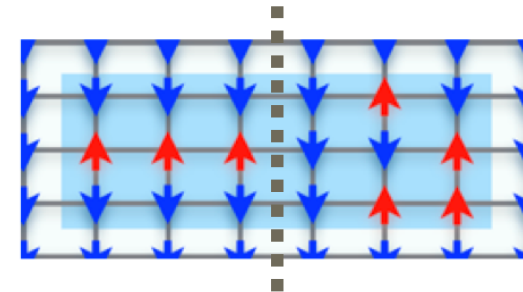
→ \hat{H}_{DW} の保存量を指定しても、ETHが破れる

Note :

- 先行研究の典型的なHSFは
局所保存量が全エネルギー以外に二つ以上必要
- 我々のモデルは局所保存量が全エネルギー以外に一つのみ
(ドメイン壁のエネルギー) でHSFが起こる

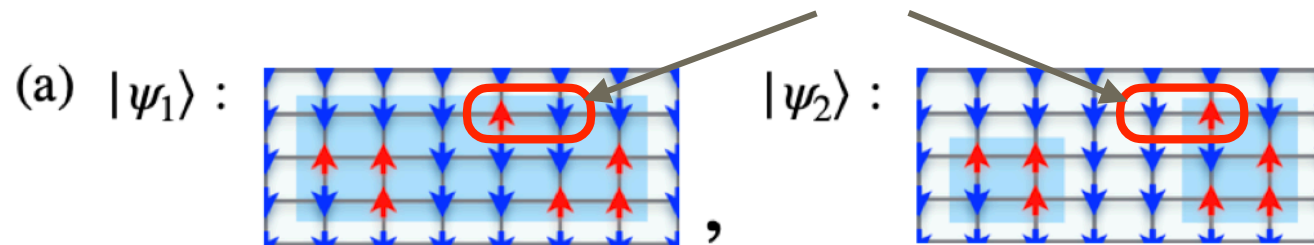


HSF : 局所保存量を指定した後の
セクターがさらに (指数的個数に) 分割



非熱的なダイナミクス

ドメイン壁のエネルギー、全エネルギーが同じ値となる
二つの初期状態の時間発展



Part IIのまとめ

弱磁場極限の高次元量子Ising模型において、
（全エネルギー以外に）局所保存量が一つのみで
ヒルベルト空間分割が起こることを示した

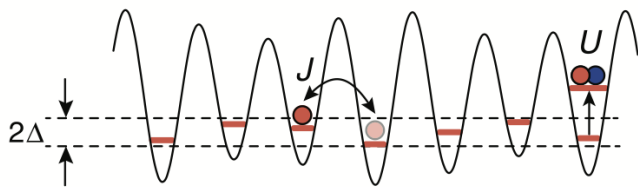
ヒルベルト空間分割が起こり、ETHが破れ、
初期状態に大きく依存したダイナミクスが現れる

非平衡多体現象

ETHを超えた非自明な非平衡物理を探索したい！

①熱平衡化しない系

*Many-body localization
(MBL)



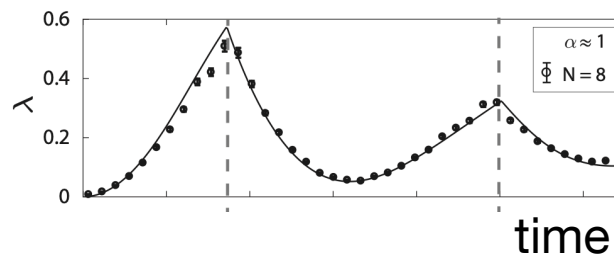
M. Schreiber et al.,
Science (2015)

*量子多体スカー

*ヒルベルト空間分割

②緩和過程の物理

*動的量子相転移



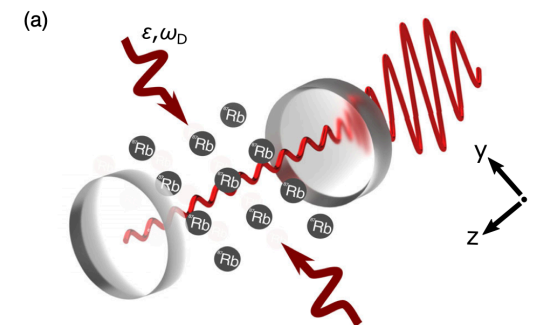
P. Jurcevic et al., PRL (2017)

*動的スケーリング則

*プレサーマル時間結晶

③散逸の加わった系

*散逸離散時間結晶



H. Keßler et al., PRL (2021)

*観測誘起相転移

*MBLの融解

「動的」自由エネルギー

非平衡状態と、ある状態の重なり $\langle \psi_f | \psi(t) \rangle = \langle \psi_f | e^{-iHt} | \psi_i \rangle$

動的自由エネルギー

[M. Heyl et al. Phys. Rev. Lett. 110, 135704 (2013)]

$$F = -\frac{1}{L} \log |\langle \psi_f | e^{-iHt} | \psi_i \rangle|$$

*平衡自由エネルギーに類似

$$F_{\text{eq}} = -\frac{1}{L} \log \text{Tr}[e^{-\beta H}]$$

*解析接続 $\beta \rightarrow it$

一般化期待値

[E. Canovi et al., Phys. Rev. Lett. 113, 265702 (2014)]

$$\langle A \rangle_{\text{gexp}} = \frac{\langle \psi_f | A e^{-iHt} | \psi_i \rangle}{\langle \psi_f | e^{-iHt} | \psi_i \rangle}$$

$$\text{cf) } \langle A \rangle = \frac{\text{Tr}[A e^{-\beta H}]}{\text{Tr}[e^{-\beta H}]}$$

通常 of 局所物理量の期待値ではないが
干渉実験などで原理的にアクセス可能な量

動的量子相転移(DQPT)

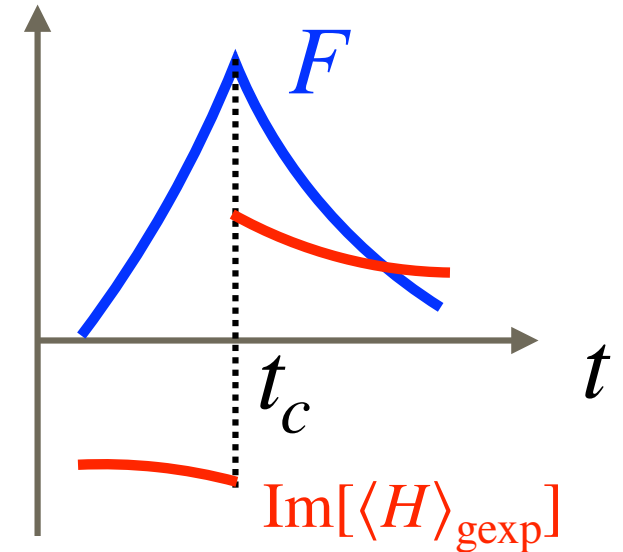
DQPT: 熱力学極限における動的自由エネルギー F の特異性

[M. Heyl et al. Phys. Rev. Lett. 110, 135704 (2013)]

典型的な例：

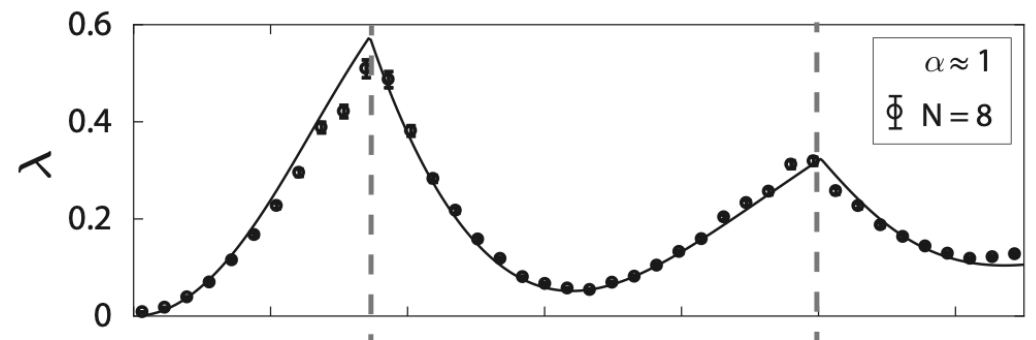
F が時間の関数としてカスプを持つ

cf) $\text{Im}[\langle H \rangle_{\text{gexp}}] = -\frac{dF}{dt}$ はジャンプ



実験的検証

*イオン系



[P. Jurcevic et al., Phys. Rev. Lett. 119, 080501 (2017)]

研究の目的

DQPTの有限時間での相転移とみなせるが、未知な点が多い
対称性の破れやそれに伴う普遍性は存在するか？

結果

Yes. ユニタリー周期駆動された量子Isingモデルにおいて、
非ユニタリー行列に特有の「対称性の破れ」により、
例外点に起因した普遍性を伴うDQPTが起こる

研究の目的

DQPTの有限時間での相転移とみなせるが、未知な点が多い
対称性の破れやそれに伴う普遍性は存在するか？

結果

Yes. ユニタリー周期駆動された量子Isingモデルにおいて、
非ユニタリー行列に特有の「対称性の破れ」により、
例外点に起因した普遍性を伴うDQPTが起こる
「時空間双対」に非ユニタリー性が潜む！

非ユニタリ行列の数理：反ユニタリ対称性と例外点

非ユニタリ行列 $X(g)$

X が反ユニタリ対称性を持つ：

あるユニタリ V と $\phi \in \mathbb{R}$ に対し、 $VX^*V^\dagger = e^{i\phi}X$ が成立

→ X の複素平面上のスペクトルは傾き ϕ の直線に関し対称

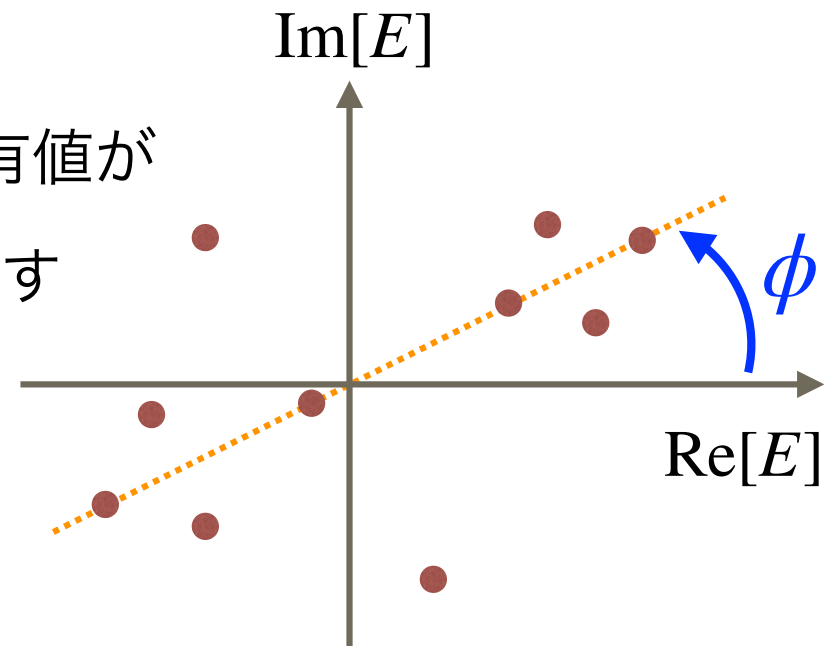
「反ユニタリ対称性の破れ」

パラメータ g の変化で、直線上の二つの固有値が

$g = g_c$ でぶつかり（=例外点）、ペアをなす

固有値間の差は典型的に

$\sim \sqrt{|g - g_c|}$ の特異性（普遍性）



モデルとセットアップ

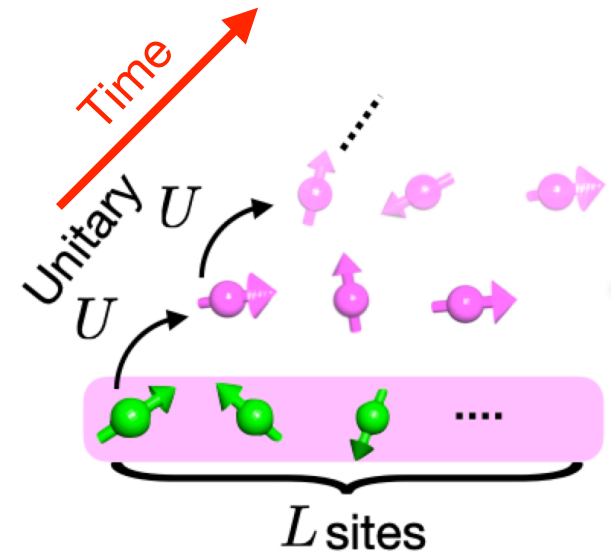
周期駆動された一次元系

$$|\psi(T)\rangle = U^T |\psi\rangle$$

$$U = e^{-i \sum_{j=1}^L b \sigma_j^x} e^{-i \sum_{j=1}^L J \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z} e^{-i \sum_{j=1}^L h \sigma_j^z}$$

スピン回転

イジング相互作用
+ 縦磁場



(周期駆動系に対する) ETHを満たす \rightarrow 定常状態は自明な無限温度 Space \rightarrow

動的自由エネルギー

$$F_{L,T}^{\downarrow\uparrow} = -\frac{1}{L} \log |\langle \downarrow \dots \downarrow | U^T | \uparrow \dots \uparrow \rangle|$$

一般化期待値

$$\langle A \rangle_{\text{gexp}} = \frac{\text{Tr}[AU^T]}{\text{Tr}[U^T]}$$

$$F_{L,T}^S = -\frac{1}{L} \log |\overline{\langle \psi | U^T | \psi \rangle}| = -\frac{1}{L} \log |\text{Tr}[U^T]| + \log 2 \quad (\text{初期状態平均})$$

[R. Hamazaki, Nature Communications 12, 5108 (2021).]

周期駆動Ising系におけるDQPT

熱力学極限において、 $J = -\frac{\pi}{4}$ に固定、 b を変化させる

$F_{\infty, T}^s$ に多くの特異性があるが、 $b = b_c \simeq 0.026\pi$ でのみ

微分 ($\propto \text{Im}[\langle \sigma_1^x \rangle_{\text{gexp}}]$) が発散

例外点的DQPT:

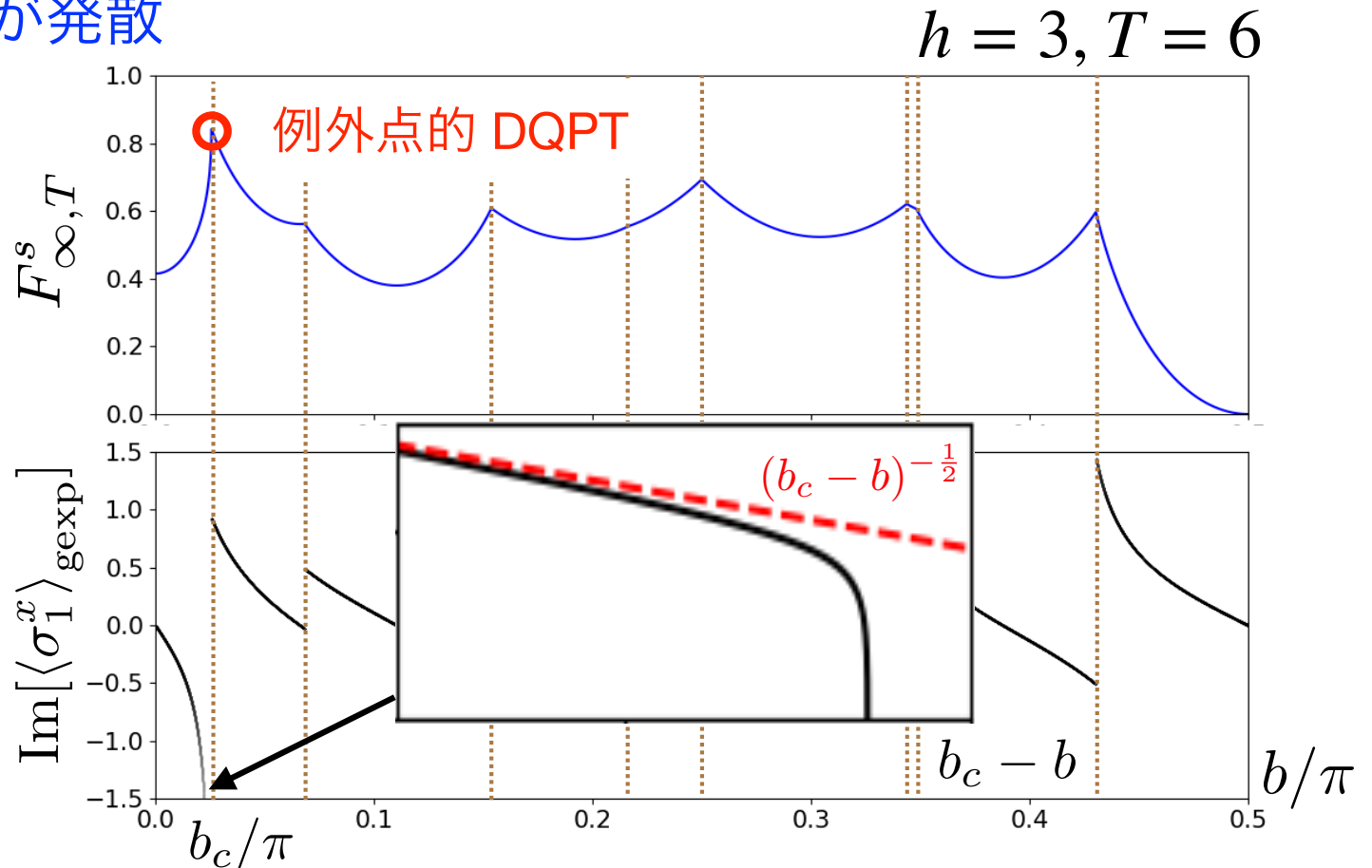
臨界点周りで

$$\frac{\partial F_{\infty, T}^s}{\partial b} \sim (b_c - b)^{-\frac{1}{2}}$$

$[b < b_c \text{ のみ}]$

通常のDQPTでは

$\frac{\partial F_{\infty, T}^s}{\partial b}$ はジャンプのみ示す

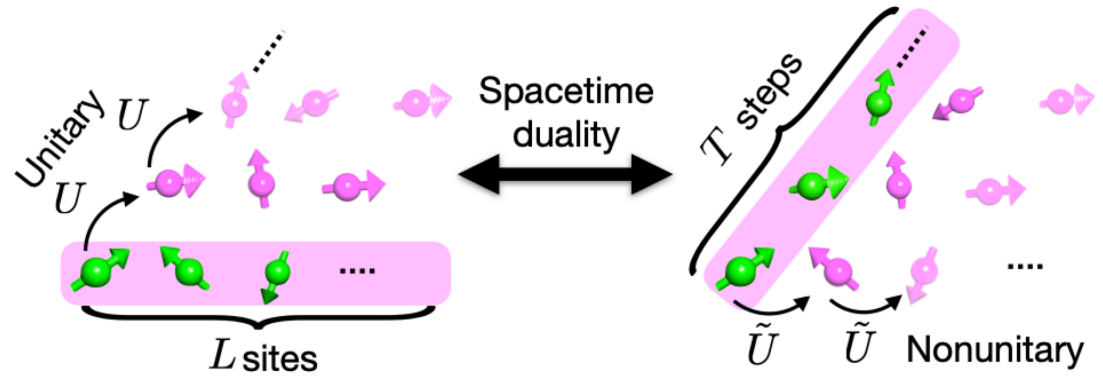


時空間双対性

多体の転送行列を用いた
厳密なマッピング

[M. Akila et al. J Phys. A (2016)]

[B. Bertini et al. PRL (2018)]



$$F_{L,T}^s = -\frac{1}{L} \log \left| \frac{\text{Tr}[U^T]}{2^L} \right| = -\frac{1}{L} \log |\text{Tr}[\tilde{U}^L]|$$

$$\tilde{U} = C e^{-i \sum_{\tau=1}^T \tilde{b} \sigma_{\tau}^x} e^{-i \sum_{\tau=1}^T \tilde{J} \sigma_{\tau}^z \sigma_{\tau+1}^z} e^{-i \sum_{\tau=1}^T h \sigma_{\tau}^z}$$

$$\tilde{b} = -\pi/4 - i \log(\tan J)/2,$$

$$\tilde{J} = -\pi/4 - i \log(\tan b)/2 \in \mathbb{C}$$

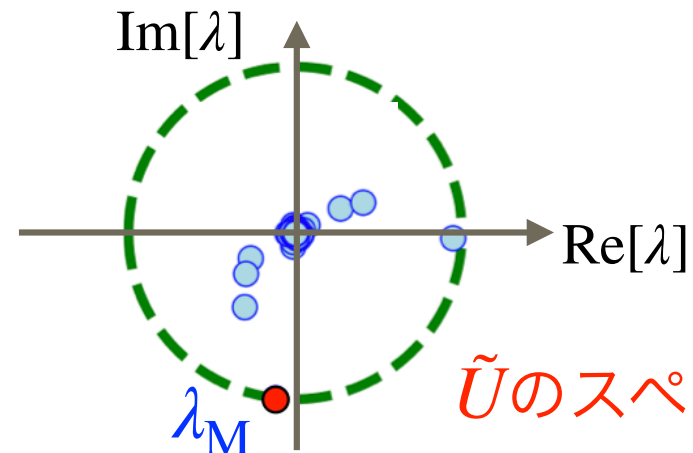
空間方向へ伝搬する非ユニタリーなTスピンの演算子

熱力学極限

$$F_{\infty,T}^s = -\log |\lambda_M|$$

λ_M : \tilde{U} の固有値のうち

絶対値が最大のもの

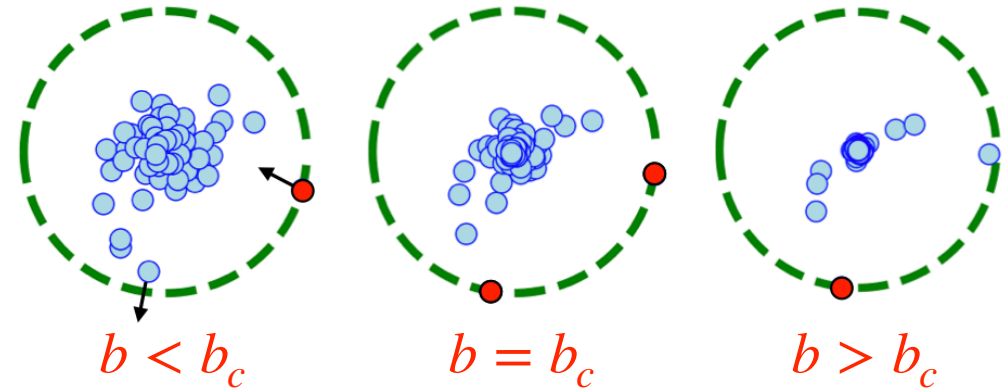


\tilde{U} のスペクトル

動的量子相転移のメカニズム

熱力学極限 $F_{\infty, T}^S = -\log |\lambda_M|$

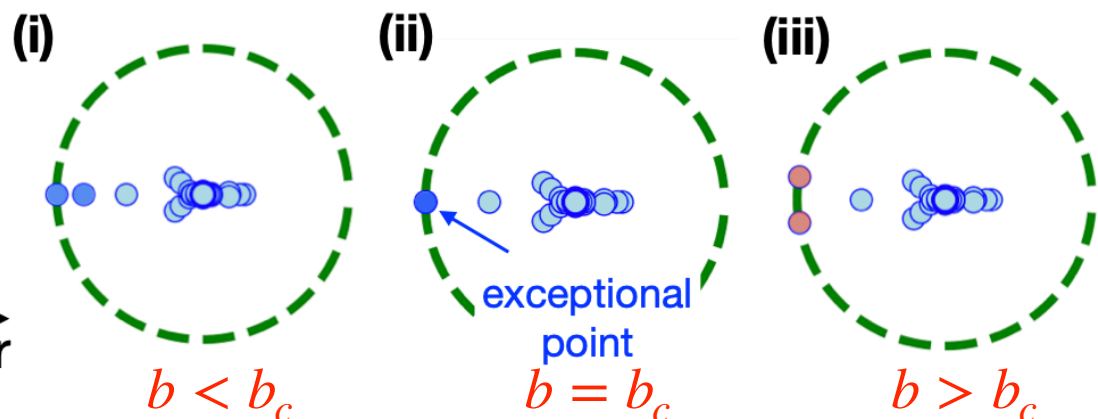
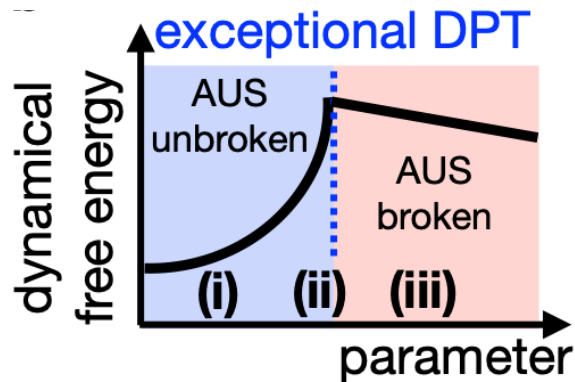
通常のDQPT: 絶対値最大の
固有値が入れ替わる



例外点的なDQPT: 最大固有値がぶつかり、例外点を通る

必要条件: \tilde{U} に反ユニタリ対称性(class AI)が隠れていること

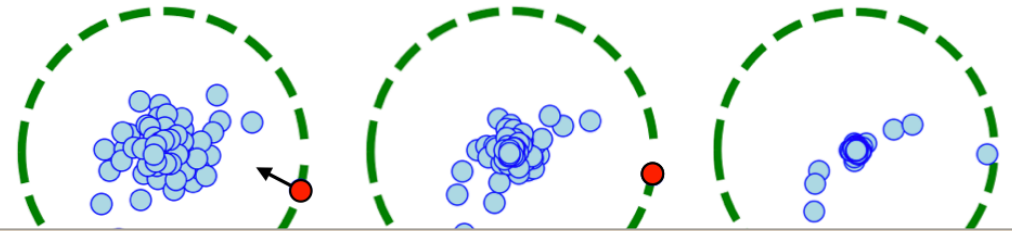
← $J = -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, T = 2m$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) が U について成立($F_{\infty, T}^S$ の場合)



動的量子相転移のメカニズム

熱力学極限 $F_{\infty, T}^S = -\log |\lambda_M|$

通常のDQPT: 絶対値最大の

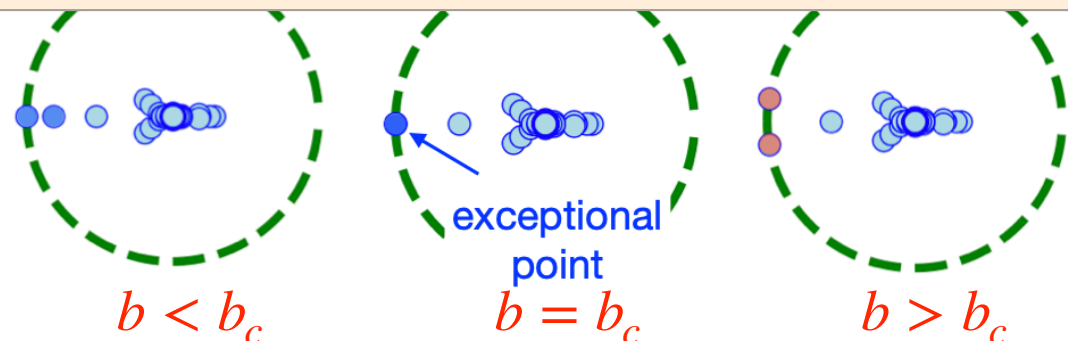
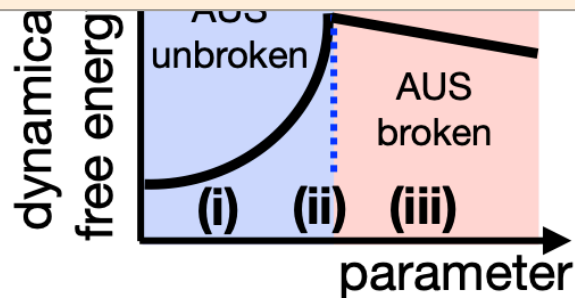


Note :

$$F_{L, T}^{\downarrow \uparrow} = -\frac{1}{L} \log |\langle \downarrow \dots \downarrow | U^T | \uparrow \dots \uparrow \rangle| \text{ が}$$

例外点的DQPTを持つ必要条件も同様に示せる

(実験的によりアクセスしやすい)

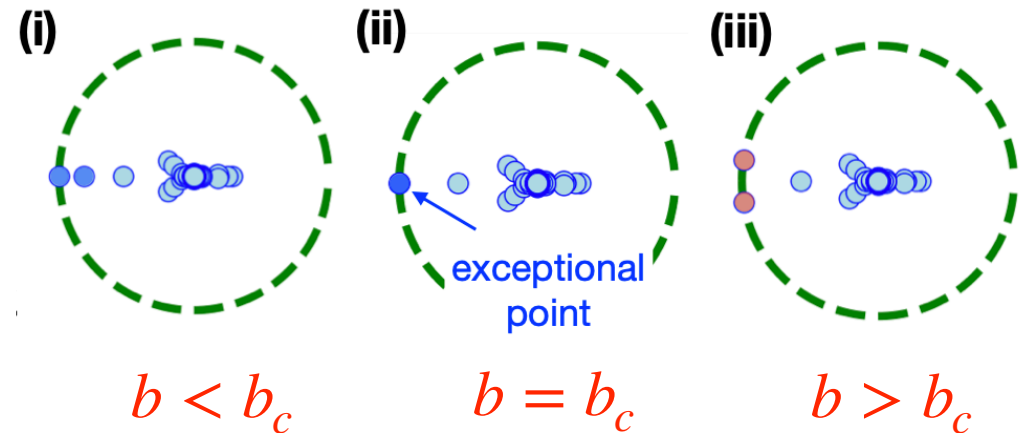


一般化期待値の発散

典型的には、二つの固有値の差は $|b - b_c|^{1/2}$

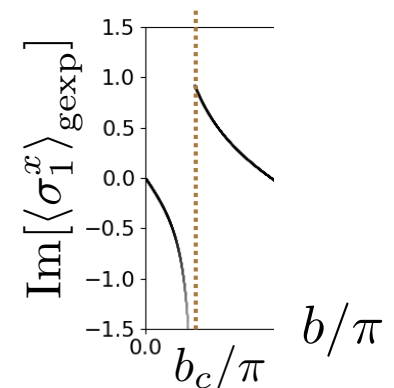
*一般化期待値

$$\begin{aligned} \text{Im}[\langle \sigma_1^x \rangle_{\text{gexp}}] &\propto \frac{dF_{\infty, T}^S}{db} \\ &= - \frac{d \log |\lambda_M|}{db} \end{aligned}$$



動径方向の変化：対称性が破れていない場合 ($b < b_c$) のみ急激に変化

$$\text{Im}[\langle \sigma_1^x \rangle_{\text{gexp}}] \sim \begin{cases} (b_c - b)^{-1/2} & (b < b_c) \\ \text{finite} & (b > b_c) \end{cases}$$



反ユニタリー対称性の破れていない相でのみ発散

Part IIIのまとめ

ユニタリーな周期駆動量子Ising模型において、
新しいタイプの普遍的な動的量子相転移を発見した

この動的量子相転移の特異性は、
元のダイナミクスの時空間双対の演算子に潜む
反ユニタリー対称性の破れ（例外点の普遍性）に起因

ヒルベルト空間分割 (HSF)

スピン1模型

$$\hat{H} = - \sum_n \left[S_n^+ (S_{n+1}^-)^2 S_{n+2}^+ + \text{H.c.} \right]$$

S. Pai et al., PRX (2019); P. Sala et al., PRX (2020)

許される遷移

$$|\dots 0 + 0 \dots\rangle \leftrightarrow |\dots + - + \dots\rangle$$

$$|\dots - + 0 \dots\rangle \leftrightarrow |\dots 0 - + \dots\rangle$$

$$|\dots 0 + - \dots\rangle \leftrightarrow |\dots + - 0 \dots\rangle$$

$$|\dots - + - \dots\rangle \leftrightarrow |\dots 0 - 0 \dots\rangle$$

局所保存量は \hat{H} 以外に二つのみ

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^L \hat{S}_i^z \quad \hat{P} = \sum_{i=1}^L (i - i_0) \hat{S}_i^z$$

“電荷” “双極子モーメント”

保存量である $\hat{H}, \hat{Q}, \hat{P}$ の値を指定すればETH・熱平衡化が成立するか？

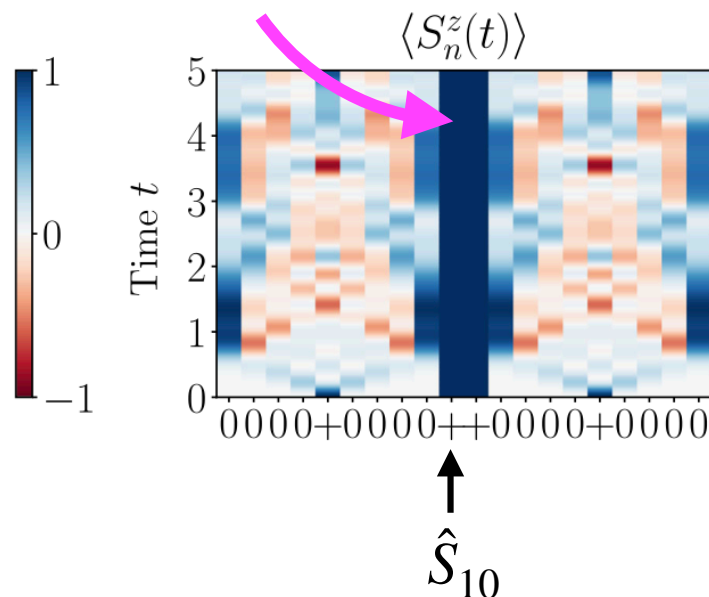
ヒルベルト空間分割 (HSF)

$\hat{H}, \hat{Q}, \hat{P}$ の値を指定すればETH・熱平衡化が成立するか？

No! 局所保存量を指定しても熱平衡化は起こるとは限らない

S. Pai et al., PRX (2019); P. Sala et al., PRX (2020)

系が空間的に分割される



$|\psi_A\rangle: |0000+0000++0000+0000\rangle$
→壁が時間発展でも不変 (凍る)

$|\psi_B\rangle: |0000++0-0++0-0++0000\rangle$
→壁が時間発展で溶ける

$\langle \hat{H} \rangle_A = \langle \hat{H} \rangle_B, \langle \hat{Q} \rangle_A = \langle \hat{Q} \rangle_B, \langle \hat{P} \rangle_A = \langle \hat{P} \rangle_B$ だが

$1 = \overline{\langle \hat{S}_{10} \rangle_A} \neq \overline{\langle \hat{S}_{10} \rangle_B}$ 初期状態依存性!

$\overline{\quad}$: 長時間平均

$|\psi_A\rangle$ と $|\psi_B\rangle$ が時間発展で張る部分空間は分離している

ヒルベルト空間分割 (HSF)

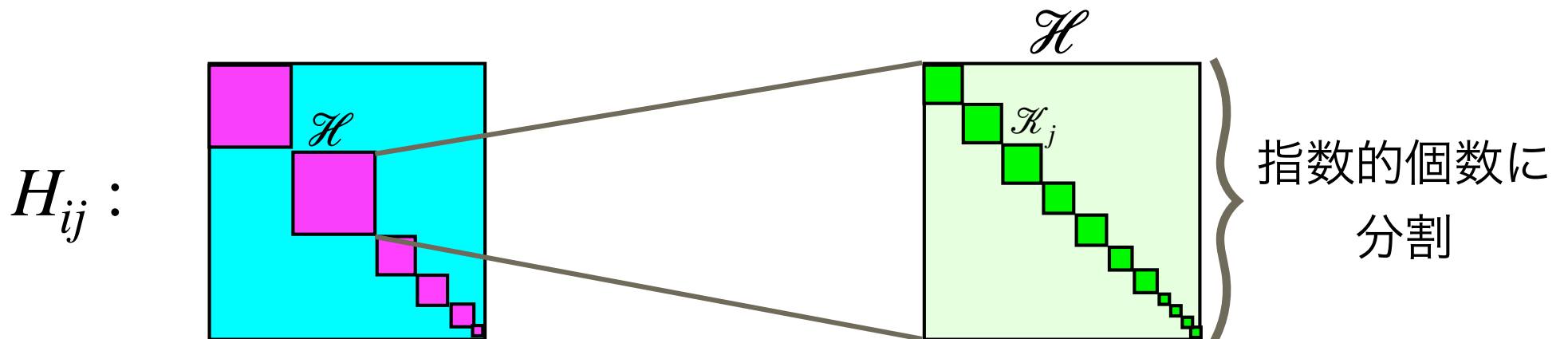
(局所保存量を指定した後の) ヒルベルト空間 \mathcal{H} が、
初期product stateの時間発展により張られる
指数的な個数の部分空間に分割

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{j=1}^K \mathcal{K}_j$$

$$\mathcal{K}_j = \text{span}_t \{ e^{-i\hat{H}t} |\psi_j\rangle \}$$

$|\psi_j\rangle$: product state

$K \sim \exp(\mathcal{O}(N)) \rightarrow$ Hilbert空間分割



局所保存量によるブロック対角化

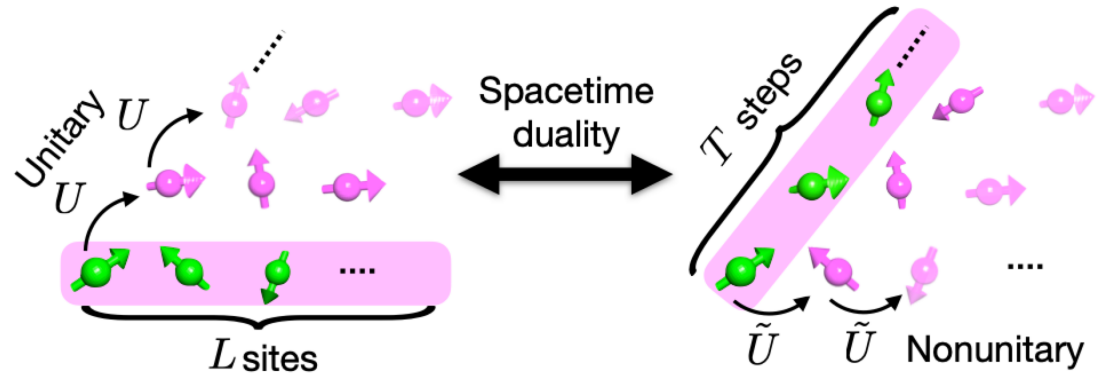
HSFによるブロック対角化

時空間双対性

多体の転送行列を用いた
厳密なマッピング

[M. Akila et al. J Phys. A (2016)]

[B. Bertini et al. PRL (2018)]



$$F_{L,T}^s = -\frac{1}{L} \log \left| \frac{\text{Tr}[U^T]}{2^L} \right|$$

$$\text{Tr}[U^T] = \left(\frac{\sin 2b}{2i} \right)^{LT/2} \sum_{\{s_{\tau,j}\}} e^{-i \sum_{\tau=1}^T \sum_{j=1}^L (J s_{\tau,j} s_{\tau,j+1} + J' s_{\tau,j} s_{\tau+1,j} + h s_{\tau,j})}$$

(二次元・古典分配関数)

$$= -\frac{1}{L} \log |\text{Tr}[\tilde{U}^L]|$$

$$\tilde{U} = C e^{-i \sum_{\tau=1}^T \tilde{b} \sigma_{\tau}^x} e^{-i \sum_{\tau=1}^T \tilde{J} \sigma_{\tau}^z \sigma_{\tau+1}^z} e^{-i \sum_{\tau=1}^T h \sigma_{\tau}^z}$$

$$\tilde{b} = -\pi/4 - i \log(\tan J)/2, \tilde{J} = -\pi/4 - i \log(\tan b)/2 \in \mathbb{C}$$

空間方向へ伝搬する非ユニタリーなTスピンの演算子

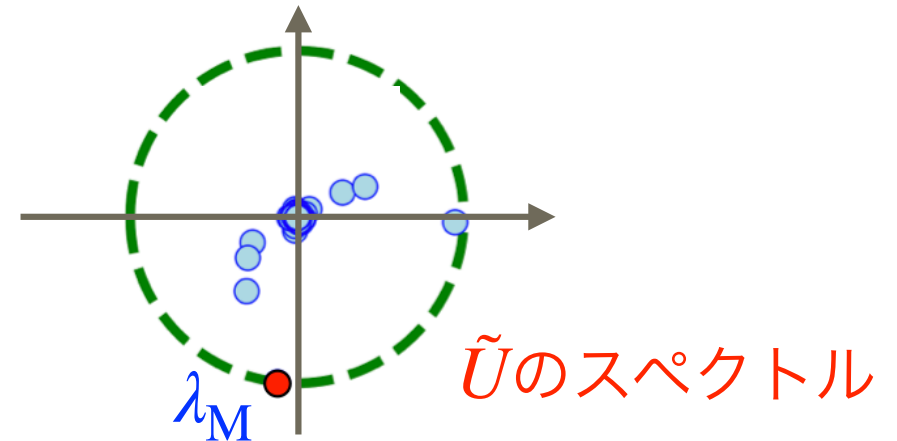
双対演算子と動的自由エネルギー

$$F_{L,T}^s = -\frac{1}{L} \log \left| \frac{\text{Tr}[U^T]}{2^L} \right| = -\frac{1}{L} \log |\text{Tr}[\tilde{U}^L]|$$

熱力学極限

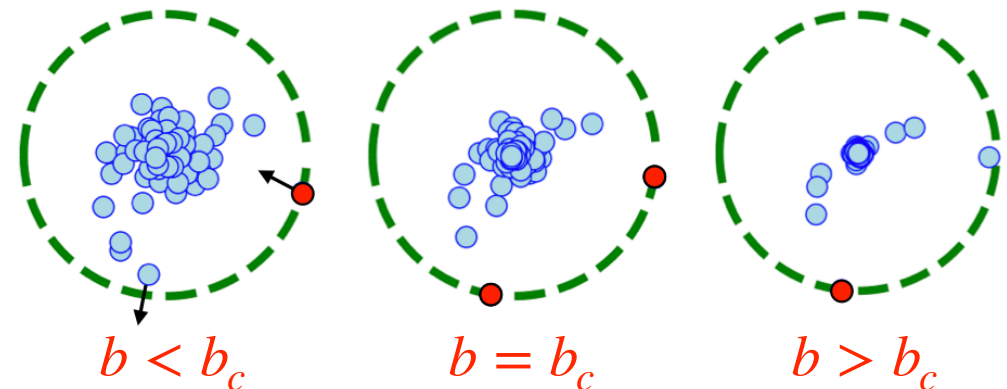
$$F_{\infty,T}^s = -\log |\lambda_M|$$

λ_M : \tilde{U} の固有値のうち
絶対値が最大のもの



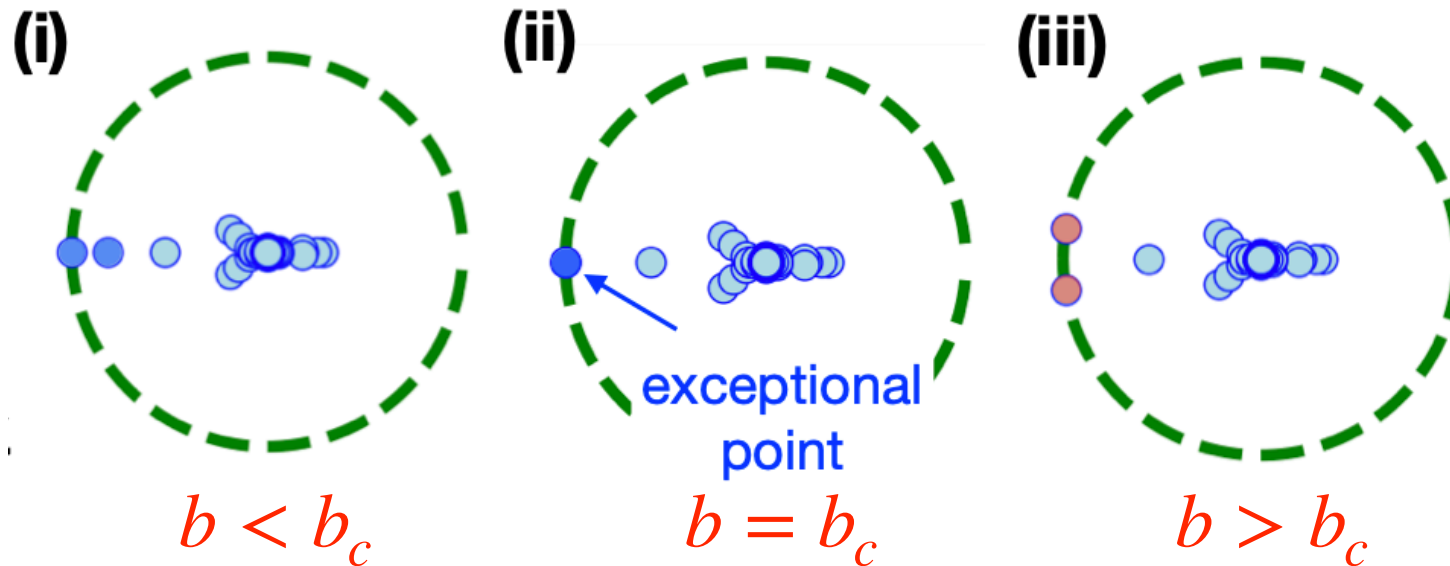
通常のDQPT:

絶対値最大の固有値が
入れ替わる



例外点的なDQPTのメカニズム

例外点的なDQPT: 最大固有値がぶつかる



このような固有値の衝突（例外点）は、
反ユニタリー対称性を持つ非ユニタリー行列の数理に起因

例外点的なDQPTのメカニズム

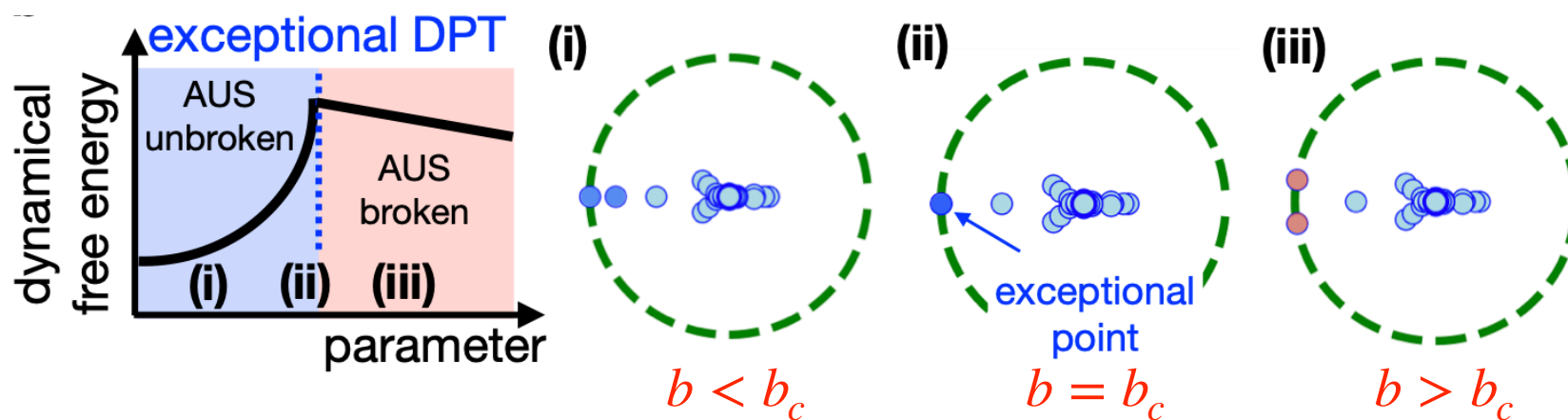
例外点的なDQPT: 最大固有値がぶつかり、例外点を通る

必要条件: \tilde{U} に反ユニタリー対称性(class AI)が隠れていること

← $J = -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$, $T = 2m$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$) が U について成立($F_{\infty, T}^S$ の場合)

$$\left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right) \tilde{U}^* \left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right)^{\dagger} = e^{i\phi} \tilde{U} \quad \left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right) \left(\prod_{\tau=1}^T e^{i\frac{\pi}{2}\sigma_{\tau}^y} \right)^* = \mathbb{1}$$

例外点的DQPTが $F_{\infty, T}^{\downarrow\uparrow}$ で起こる条件も示せる



局所物理量による例外点的DQPTのサイン

$$F_{L,T} = -\frac{1}{2L} \log |\langle \psi_f | U^T | \psi_i \rangle|^2 = -\frac{1}{2L} \log \langle \psi_i(T) | P_f | \psi_i(T) \rangle \quad P_f = |\psi_f\rangle\langle\psi_f|$$

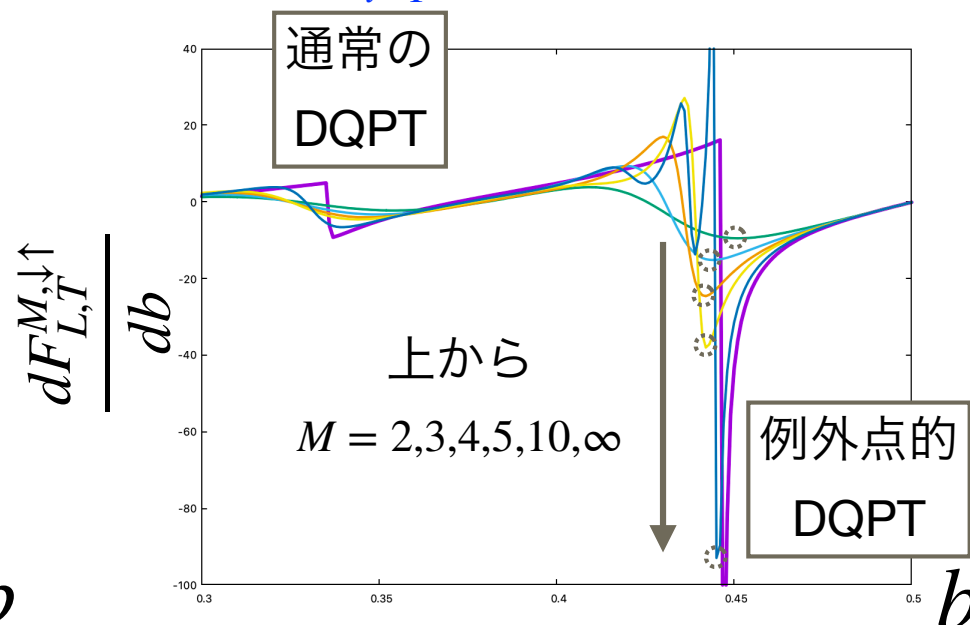
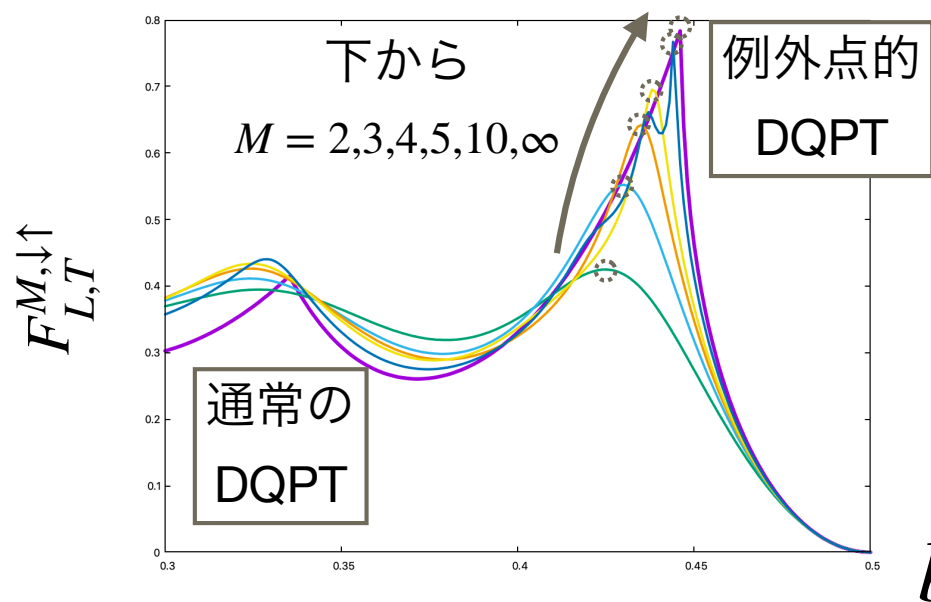
P_f は非局所な射影 \rightarrow 局所物理量における兆候はないか？

$$F_{L,T}^{\downarrow\uparrow} = -\frac{1}{2L} \log |\langle \downarrow \cdots \downarrow | U^T | \uparrow \cdots \uparrow \rangle|^2 = -\frac{1}{2L} \log \langle \uparrow \cdots \uparrow (T) | P_f | \uparrow \cdots \uparrow (T) \rangle$$

に関し、

$$F_{L,T}^{M,\downarrow\uparrow} = -\frac{1}{2M} \log |\langle \psi_i(T) | P_f^M | \psi_i(T) \rangle|$$

$$P_f^M = \prod_{i=1}^M |\downarrow_i\rangle\langle\downarrow_i| \quad M \ll L \quad (\text{局所物理量})$$



局所物理量による例外点的DQPTのサイン

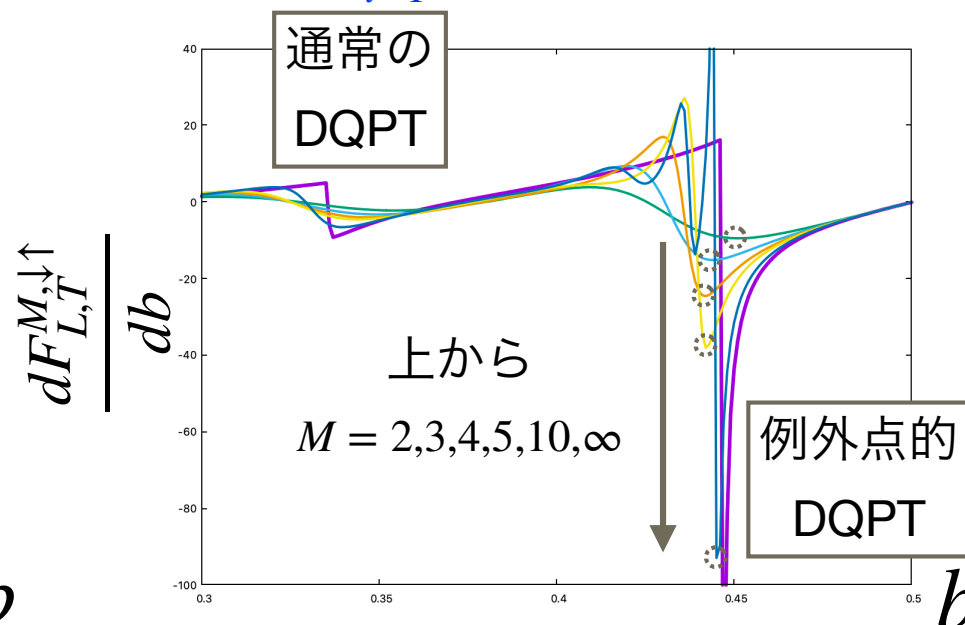
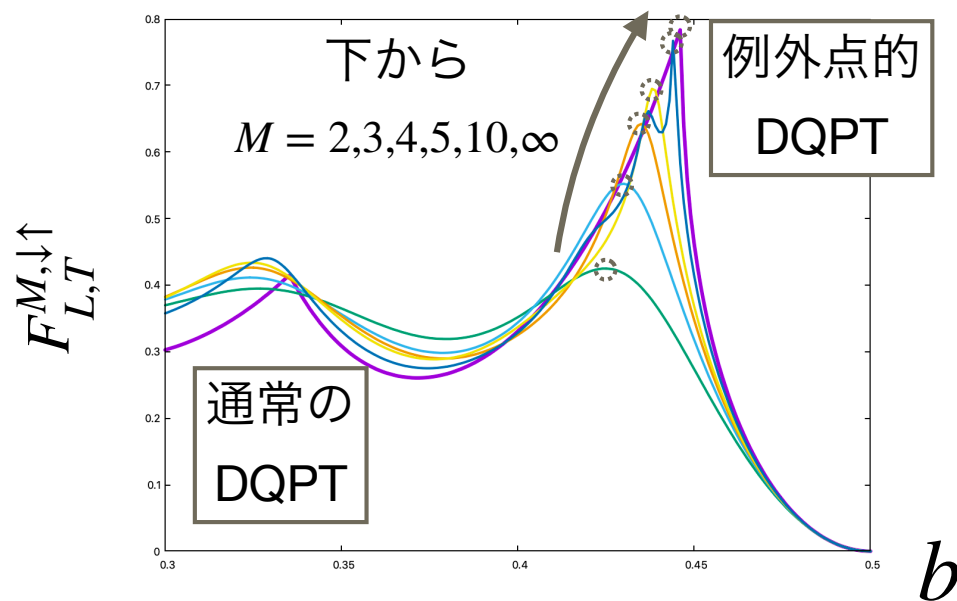
M を増やしていくとその微分に鋭いピーク
 例外点的DQPTのサイン (強い特異性に起因)

に関し、

$$F_{L,T}^{M,\downarrow\uparrow} = -\frac{1}{2M} \log |\langle \psi_i(T) | P_f^M | \psi_i(T) \rangle|$$

$$P_f^M = \prod_{i=1}^M |\downarrow_i\rangle\langle\downarrow_i|$$

$M \ll L$
 (局所物理量)



一般化相関関数と相関長の発散

*一般化相関関数 $C(r) = |\langle \sigma_1^z \sigma_{r+1}^z \rangle_{\text{gexp}} - \langle \sigma_1^z \rangle_{\text{gexp}} \langle \sigma_{r+1}^z \rangle_{\text{gexp}}|$

$$C(r) = \left| \frac{\text{Tr} [\tilde{U}^{L-r} \sigma_\tau^z \tilde{U}^r \sigma_\tau^z]}{\text{Tr} [\tilde{U}^L]} - \left(\frac{\text{Tr} [\tilde{U}^L \sigma_\tau^z]}{\text{Tr} [\tilde{U}^L]} \right)^2 \right|$$

\tilde{U} をスペクトル分解し、
例外点周りの特異性を解析

$$= \begin{cases} c_1 e^{-r/\xi_{\text{cor}}}, & \xi_{\text{cor}} \sim (b_c - b)^{-1/2} & (b < b_c) \text{ 反ユニタリ-対称性の破れ} \\ a + c_2 \cos\left(\frac{r}{\xi_{\text{osc}}} + \theta_0\right) & \xi_{\text{osc}} \sim (b - b_c)^{-1/2} & (b > b_c) \rightarrow \text{振動的な長距離秩序} \end{cases}$$

