

量子臨界相の対称性による保護

古谷 峻介

東京大学総合文化研究科 → 埼玉医科大学医学部教養教育

量子相の分類

- トポロジカル相の分類例
 - トポロジカル絶縁体・超伝導体の“tenfold classification”
(Ryu, Schnyder, Furusaki, and Ludwig, New J. Phys. 12, 065010 (2010))

Cartan label	T	C	S	Hamiltonian	G/H (ferm. NL σ M)
A (unitary)	0	0	0	$U(N)$	$U(2n)/U(n) \times U(n)$
AI (orthogonal)	+1	0	0	$U(N)/O(N)$	$Sp(2n)/Sp(n) \times Sp(n)$
AII (symplectic)	-1	0	0	$U(2N)/Sp(2N)$	$O(2n)/O(n) \times O(n)$
AIII (ch. unit.)	0	0	1	$U(N+M)/U(N) \times U(M)$	$U(n)$
BDI (ch. orth.)	+1	+1	1	$O(N+M)/O(N) \times O(M)$	$U(2n)/Sp(2n)$
CII (ch. sympl.)	-1	-1	1	$Sp(N+M)/Sp(N) \times Sp(M)$	$U(2n)/O(2n)$
D (BdG)	0	+1	0	$SO(2N)$	$O(2n)/U(n)$
C (BdG)	0	-1	0	$Sp(2N)$	$Sp(2n)/U(n)$
DIII (BdG)	-1	+1	1	$SO(2N)/U(N)$	$O(2n)$
CI (BdG)	+1	-1	1	$Sp(2N)/U(N)$	$Sp(2n)$

量子相の分類

- トポロジカル相の分類例

- トポロジカル絶縁体・超伝導体の“tenfold classification”

(Ryu, Schnyder, Furusaki, and Ludwig, New J. Phys. 12, 065010 (2010))

- 対称性に守られた量子相の分類

(Chen, Gu, Liu, and Wen, PRB 87, 155114 (2013), Pollmann, Turner, Berg, and Oshikawa, PRB 81, 064439 (2010).)

	weak interactions	strong interactions
gapped	TI, TSC, ...	SPT, top. order, ...
gapless	Dirac/Weyl semimetals, ...	gapless SPT, ...

AKLT状態

I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, PRL 59, 799 (1987)

gapless SPT相とは

- gapless SPT相の素朴な定義
 - gapless励起がバルク中に存在
 - 系の端（や境界）に对称性に守られたギャップレス状態が現れる。
 - バルクが1dの場合は端でのみ对称性が自発的に破れて縮退.
- 疑問
 - そもそも強相関係でなぜgapless相が安定なのか？
 - どのように低エネルギーの端状態（やentanglement）がバルク中のgapless励起と共存するか？
 - この素朴な定義の妥当性は？

cf. AKLT模型：
$$H = J \sum_j \left(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + \frac{1}{3} (\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})^2 \right)$$

I. Affleck, T. Kennedy, E. H. Lieb, and H. Tasaki, PRL 59, 799 (1987)

きれいな具体例を構成して理解したい

今回のトピック

PRL **118**, 021601 (2017)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
13 JANUARY 2017

Symmetry Protection of Critical Phases and a Global Anomaly in 1 + 1 Dimensions

Shunsuke C. Furuya¹ and Masaki Oshikawa²

¹*Condensed Matter Theory Laboratory, RIKEN, Wako, Saitama 351-0198, Japan*

²*Institute for Solid State Physics, University of Tokyo, Kashiwa 277-8581, Japan*

(Received 25 March 2015; revised manuscript received 24 November 2016; published 11 January 2017)

We derive a selection rule among the (1 + 1)-dimensional SU(2) Wess-Zumino-Witten theories, based on the global anomaly of the discrete \mathbb{Z}_2 symmetry found by Gepner and Witten. In the presence of both the SU(2) and \mathbb{Z}_2 symmetries, a renormalization-group flow is possible between level- k and level- k' Wess-Zumino-Witten theories only if $k \equiv k' \pmod{2}$. This classifies the Lorentz-invariant, SU(2)-symmetric critical behavior into two “symmetry-protected” categories corresponding to even and odd levels, restricting possible gapless critical behavior of translation-invariant quantum spin chains.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.021601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.021601)

対称性に守られた量子臨界相

[[SCF](#) and Oshikawa, PRL (2017)]

PHYSICAL REVIEW B **106**, 144436 (2022)

Gapless symmetry-protected topological phase of quantum antiferromagnets on anisotropic triangular strip


Yuichiro Hidaka,¹ Shunsuke C. Furuya^{2,3}, Atsushi Ueda^{2,1} and Yasuhiro Tada^{4,1}

¹*Institute for Solid State Physics, University of Tokyo, Kashiwa 277-8581, Japan*

²*Department of Physics, Ibaraki University, Mito, Ibaraki 310-8512, Japan*

³*Department of Basic Science, University of Tokyo, Meguro, Tokyo 153-8902, Japan*

⁴*Quantum Matter Program, Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University, Higashihiroshima, Hiroshima 739-8530, Japan*

 (Received 30 May 2022; revised 5 October 2022; accepted 14 October 2022; published 28 October 2022)

gapless SPT相

[Hidaka, [SCF](#), Ueda, and Tada, PRB (2022)]

1次元量子スピン系を例にとって考える

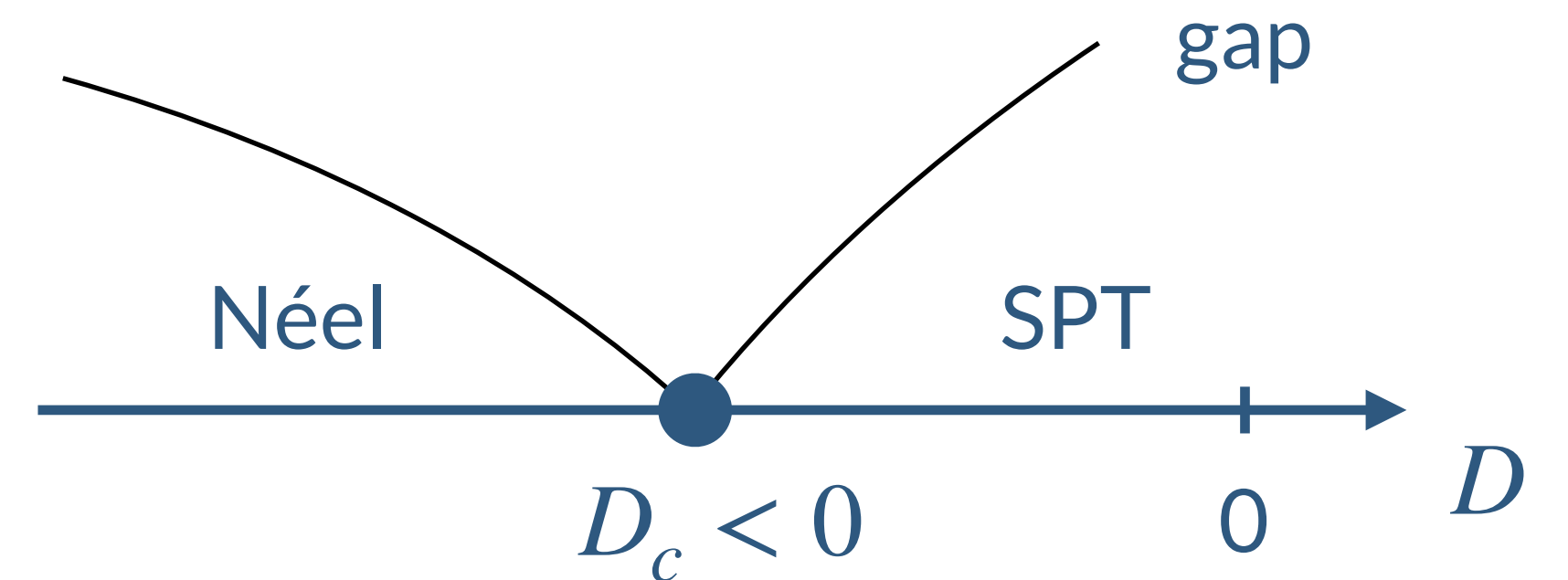
量子臨界相とは

- 量子臨界点

- 量子相の間の相転移点

- e.g., S=1 Heisenberg反強磁性鎖+磁気異方性

$$\mathcal{H} = J \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + D \sum_j (S_j^z)^2$$



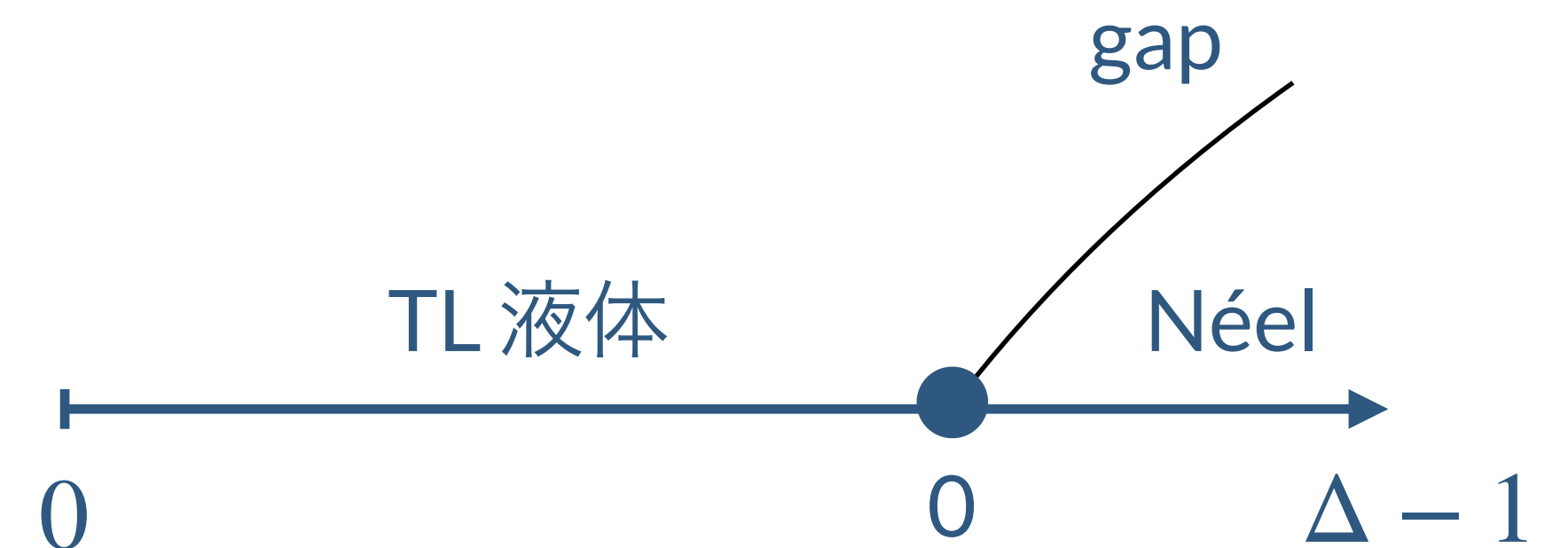
- 量子臨界相

- 臨界的な振る舞いをしながら量子相として安定的に存在する.

- 朝永・Luttinger液体 (TL液体) 相など.

- e.g., S=1/2 Heisenberg反強磁性鎖+磁気異方性

$$\mathcal{H} = J \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + J(\Delta - 1) \sum_j S_j^z S_{j+1}^z$$



$S=1/2$ vs $S=1$

- $S=1/2$ と $S=1$ の違いはよく知られている。
 - スピン S Heisenberg反強磁性鎖の基底状態についてのHaldane予想 (Haldane現象)
 - $S \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}$: 基底状態はgapless
 - $S \in \mathbb{Z}$: 基底状態はunique & gapped

F. D. M. Haldane, Phys. Lett. A 93, 464 (1983)

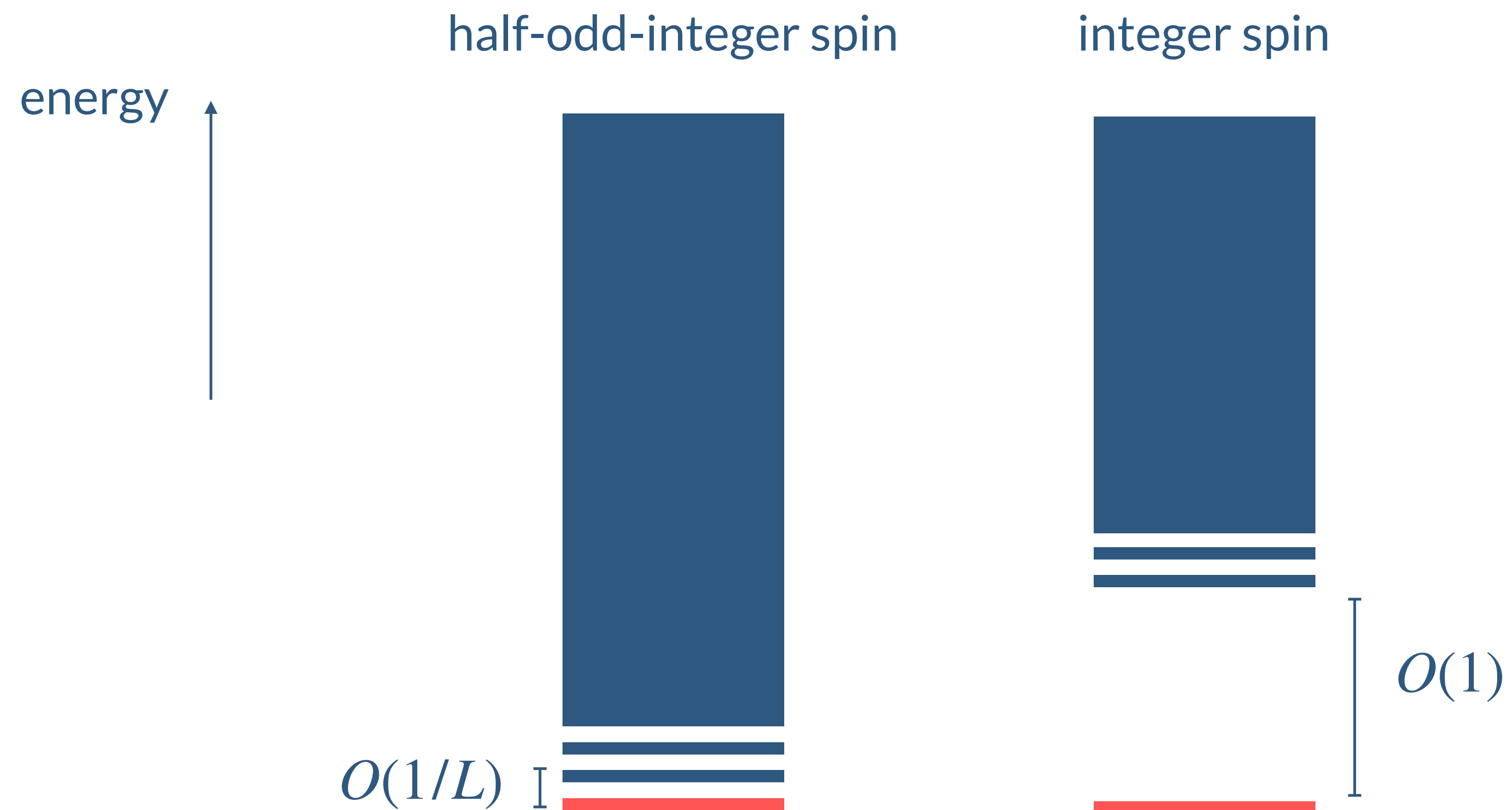
F. D. M. Haldane, Phys. Rev. Lett. 50, 1153 (1983)

- スピン $1/2$ Heisenberg鎖の基底状態についてのLieb-Schultz-Mattis (LSM)定理
 - 基底状態はunique & gapped にはなれない
 - ▶ gapless
 - ▶ gappedなら離散対称性が自発的に破れて基底状態が縮退する。

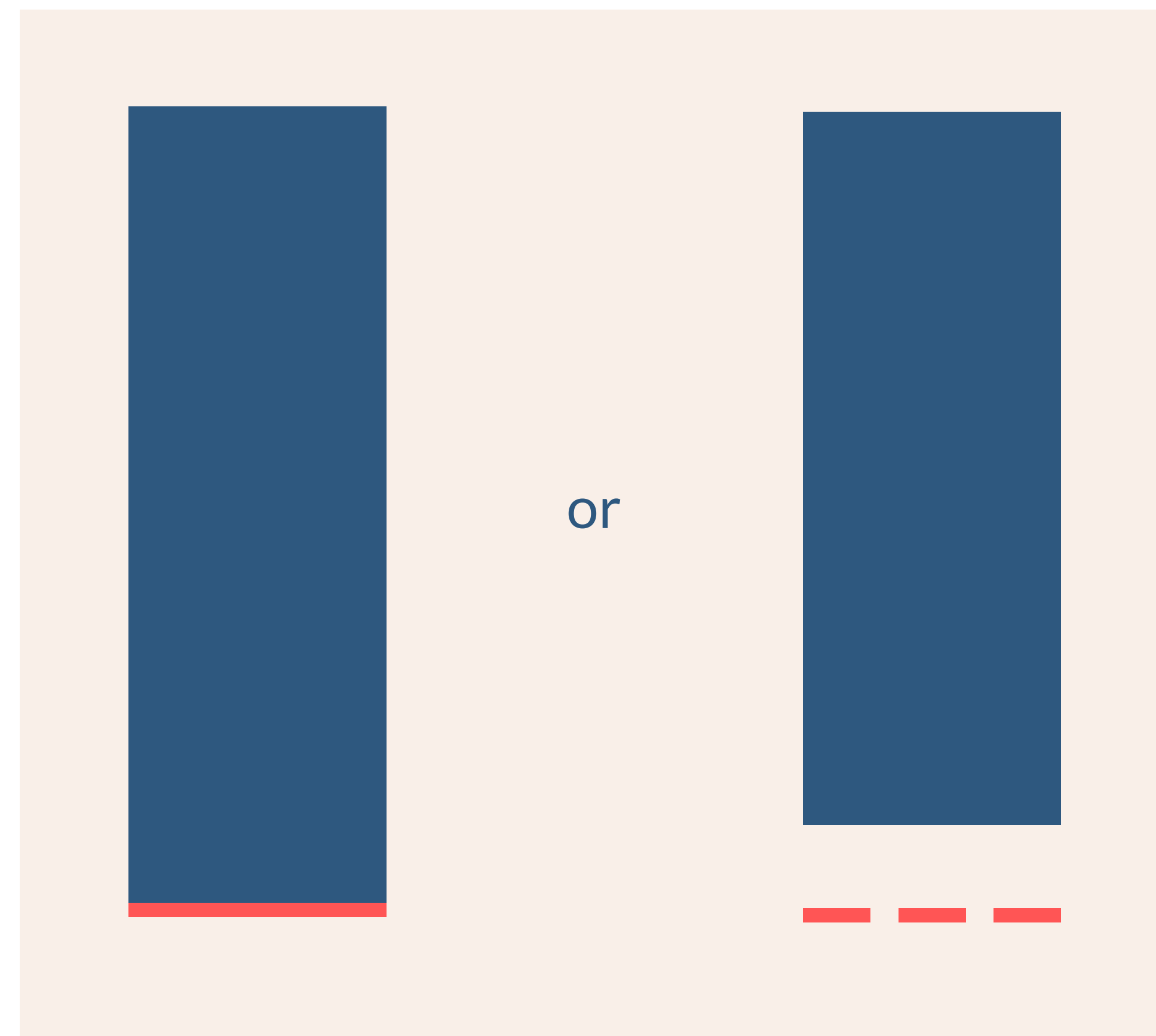
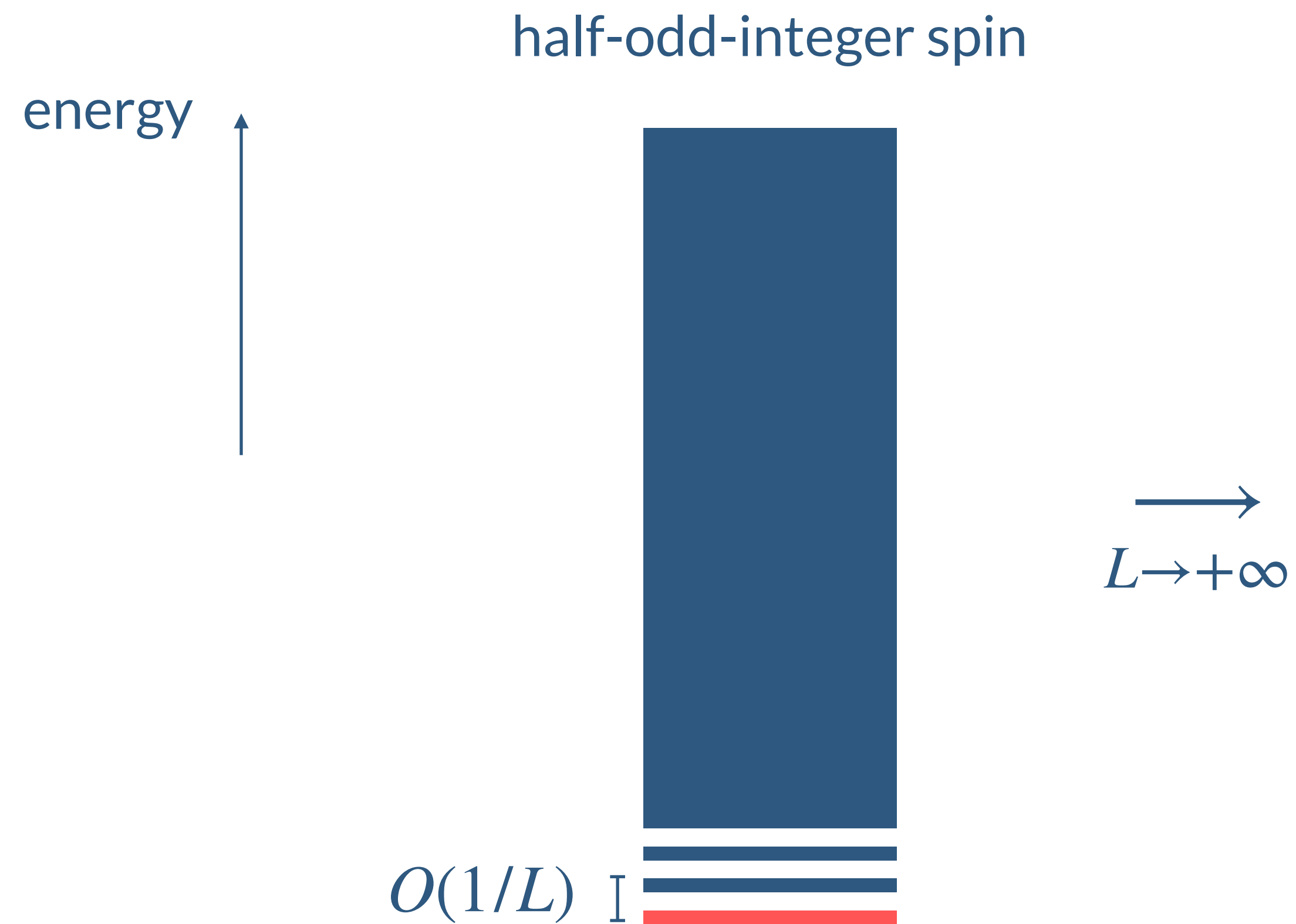
no-go theorem

Lieb, Schultz, and Matthis, Ann. Phys. 16, 407 (1961)

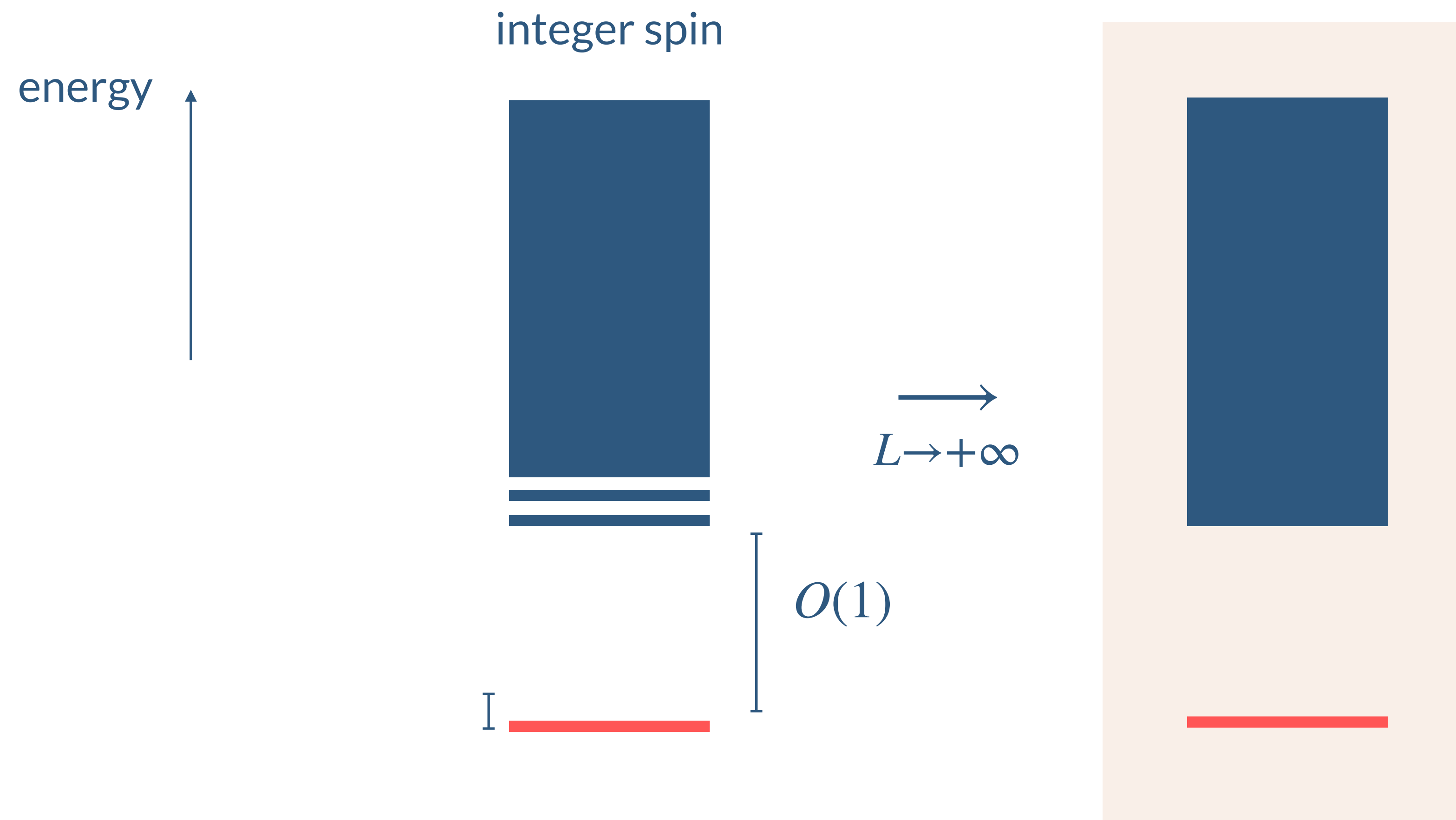
励起スペクトル (有限系)



励起スペクトル (無限系)



励起スペクトル (無限系)



我々の主張

- 前提：レベル k SU(2) Wezz-Zumino-Witten (WZW)理論に対応する量子臨界点・量子臨界相があるとする。
 - e.g., スピン S 反強磁性スピン鎖 e.g., Michaud, Manmana, and Mila, PRB 87, 140404(R) (2013)

- SU(2)対称性と格子並進対称性と共形対称性の下で、2つの量子臨界点あるいは量子臨界相 (レベル k, k') が実現するならば $k = k' \pmod{2}$ が成り立つ。

- 場の理論の分類.
- 量子スピン系に適用すると、Haldane現象やLSM定理 を特殊な場合として含む.
- 量子場理論のアノマリーを用いた量子臨界相の分類, 「対称性に守られた量子臨界相」の提案.

以下, スピン鎖の言葉と関連付けて解説

量子臨界相の対称性による保護とは

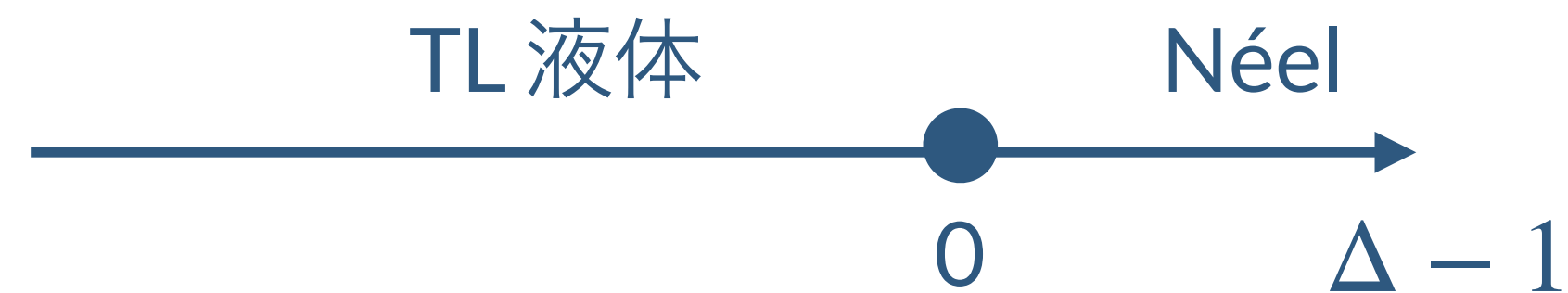
- 量子臨界相の対称性による保護：

周期境界条件下で自明な基底状態に相転移なしにつながらない。

- 自明な基底状態：周期境界条件下でunique & gappedな基底状態。

SPT状態もtrivial

e.g., $S=1/2$ XXZ鎖



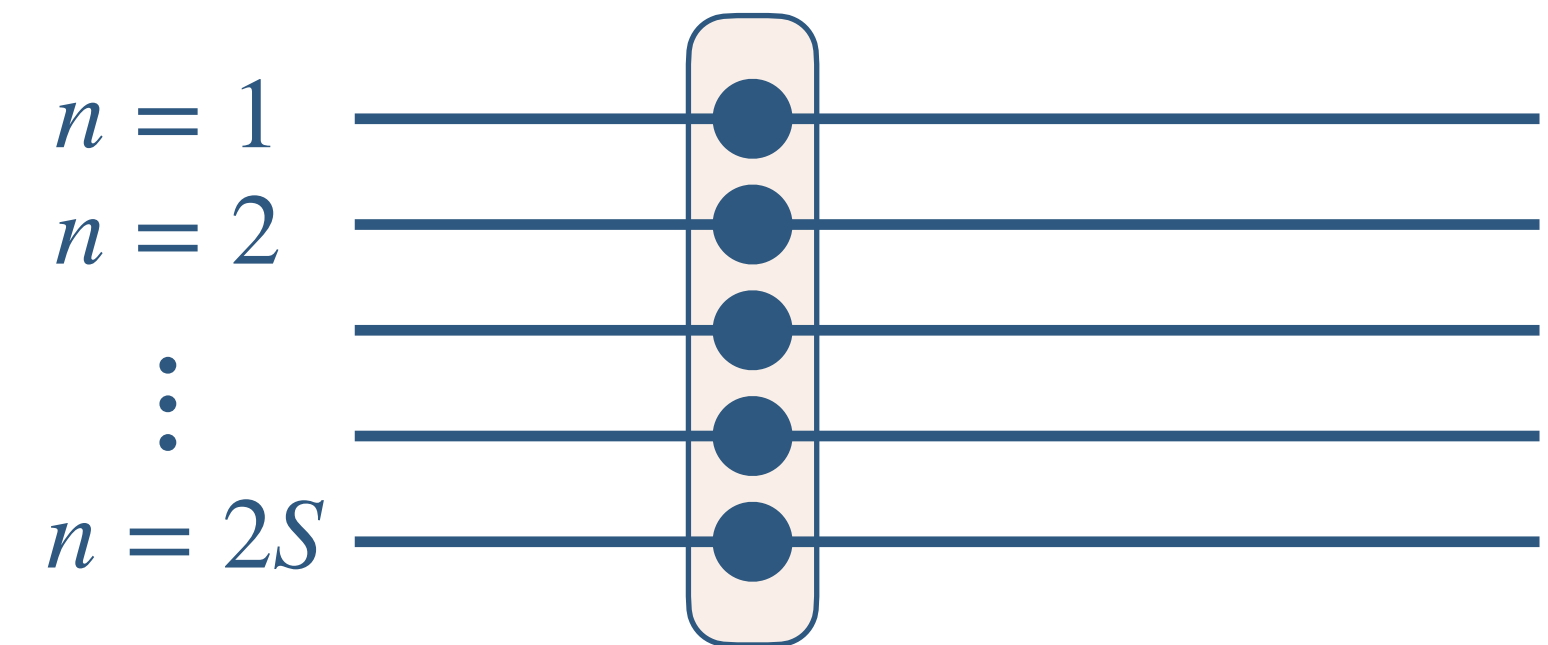
- Heisenberg反強磁性スピン鎖を場の理論に翻訳（非可換ボソン化）
 - レベル k $SU(2)$ WZW理論

スピン鎖の非可換ボソン化

- スピン S Heisenberg反強磁性鎖 = $2S$ 本のスピン $1/2$ Heisenberg反強磁性鎖から成る梯子

- 非可換ボソン化法

- $2S$ 本のHubbard鎖から出発して、クーロン相互作用と鎖間強磁性相互作用を摂動的に導入.



cf. Affleck and Haldane, PRB 36, 5291 (1987)

- 対称性 $SU(2) \times SU(2S) \times U(1)$ のうち

電荷 ($U(1)$)とバンド自由度 ($SU(2S)$)をgap outしてスピン鎖の場の理論を得る.

Mott gap

Hund's coupling

- 残りのスピン自由度は $SU(2)$ の自由度を持つが、 $2S$ 本のバンド自由度を反映して、レベルが $k = 2S$ になる。しかし実際には鎖内のスピン間相互作用によってレベルが下がる。

通常、レベル $k \leq$ (バンドの本数)

SU(2)場 g の導入

- スピンの非可換ボソン化

$$\vec{S}_j \sim \vec{J}_R + \vec{J}_L + (-1)^j \text{tr}(g\vec{\sigma})$$

- $\vec{J}_{R/L}$: 場のSU(2)カレントの右向き (R), 左向き (L) 成分
- $g \in \text{SU}(2)$: SU(2) WZW理論の基本的な量子場
- $\sigma = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$: パウリ行列
- Néel秩序変数 : $(-1)^j S_j^x \sim \text{tr}(g\sigma^x)$.
- ダイマー秩序変数 : $(-1)^j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} \sim \text{tr } g$.

cf. Affleck and Haldane, PRB 36, 5291 (1987)

レベル k SU(2) WZW理論は

central charge $c = \frac{3k}{2+k}$ の2D CFT

SU(2) WZW in spin chains?

- 本当にSU(2) WZWはスピン鎖で実現するのか？

VOLUME 59, NUMBER 1

PHYSICAL REVIEW LETTERS

6 JULY 1987

Are Antiferromagnetic Spin Chains Representations of the Higher Wess-Zumino-Witten Models?

Timothy Ziman

Department of Physics and Astronomy, Rutgers University, Piscataway, New Jersey 08855

and

H. J. Schulz

Laboratoire de Physique des Solides, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay, France

(Received 2 April 1987)

SU(2) WZW in spin chains?

- spin-3/2 AFM 鎖 : $H = (1 - \mu)H_b + \mu H_1$

[T. Ziman and H. J. Schulz, PRL 59, 140 (1987)]

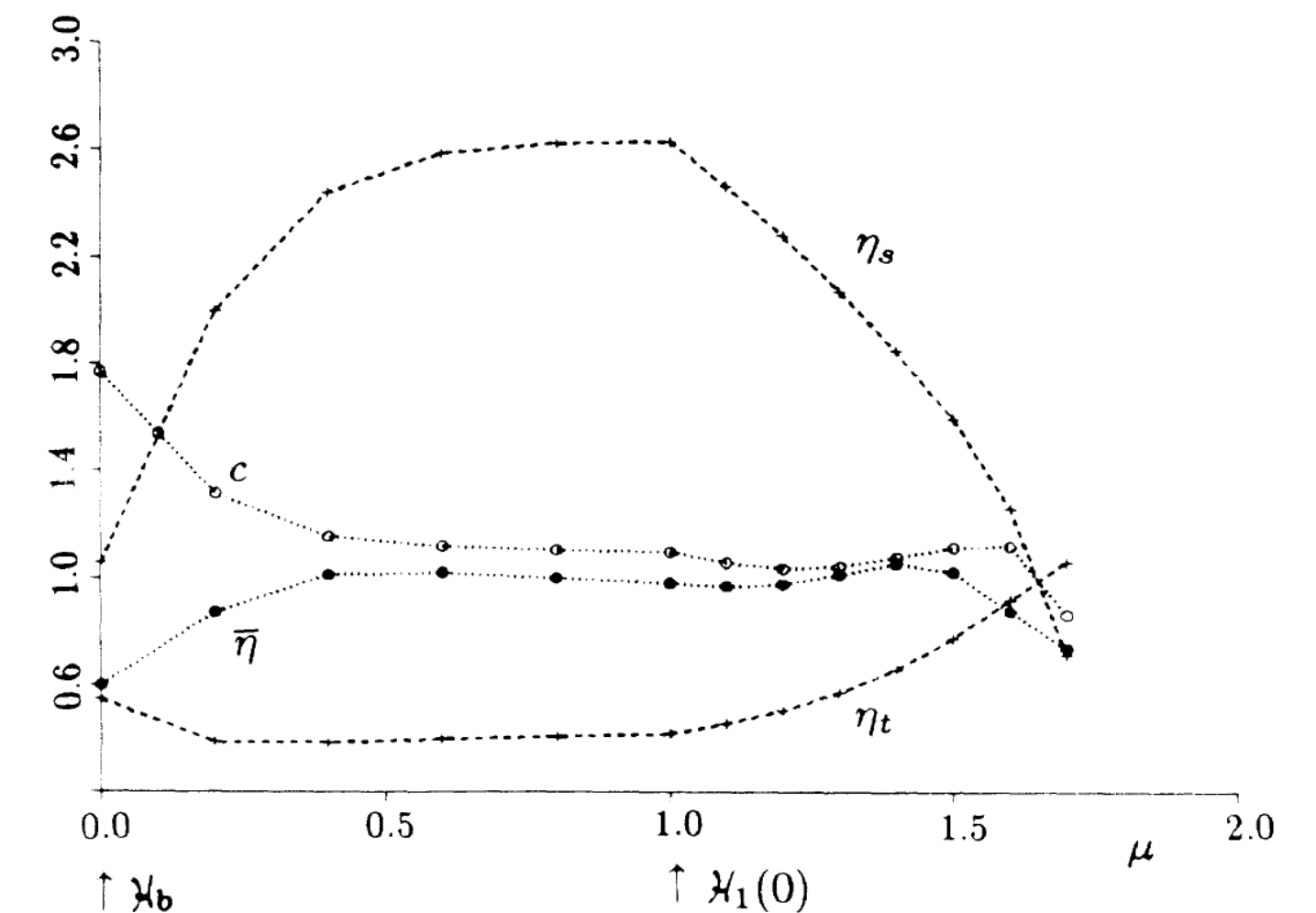
- $H_1 = J \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1}$

可解模型

- $H_b = J \sum_j \left(-\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + \frac{8}{27}(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})^2 + \frac{16}{27}(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})^3 \right)$

- $c = 9/5$ (i.e., $k = 3$) が $\mu = 0$ で実現する.

- スピン S が大きくなると H_b はより複雑になる



- 高いレベルのSU(2) WZW理論は不安定 (relevant 相互作用を含む) .
- SU(2) Heisenberg鎖は高いレベルのSU(2) WZWにあまり近くないように見える.

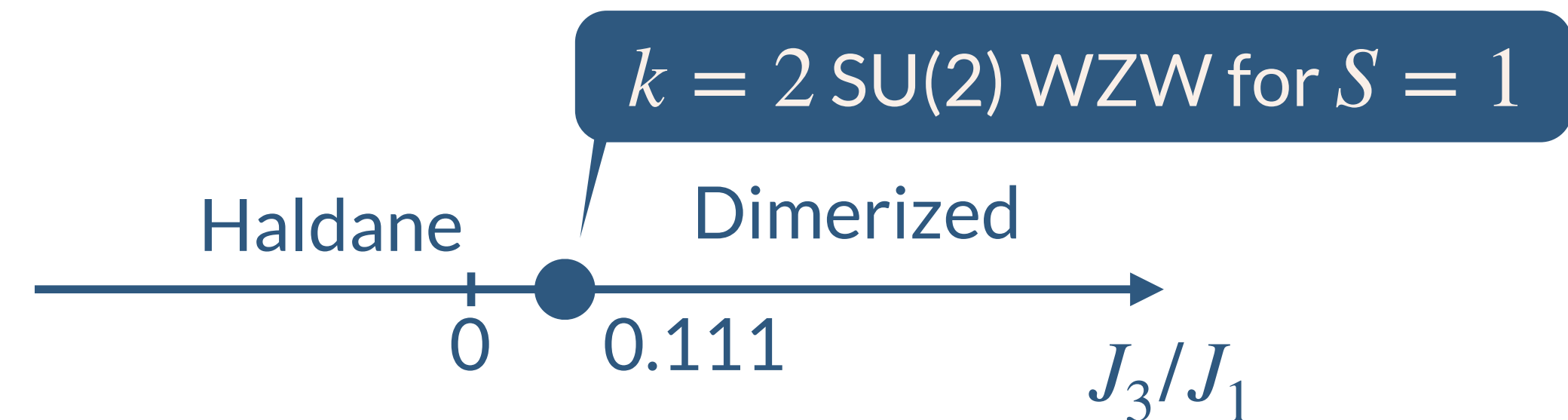
(比較的) 最近見つかった具体例

- level-2S SU(2) WZWに対応する量子臨界点はspin-S Heisenberg AFM鎖のすぐ近くにある。

- スピンS $J_1 - J_3$ 鎖

$$H = J_1 \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + 2J_3 \sum_j (\vec{S}_{j-1} \cdot \vec{S}_j)(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})$$

- central chargeは有限サイズ系の entanglement entropyから外挿。



Michaud, Vernay, Manmana, and Mila, PRL 108, 127202 (2012)

	$S = 1$	$S = 3/2$	$S = 2$	$2S = k$
J_{3c}/J_1 (DMRG)	0.111	0.063	0.0403	
J_{3c}/J_1 (ED)		0.064	0.0406	
J_c/J_1 (MG point)	1/6	1/13	1/22	$1/[4S(S+1) - 2]$
c (WZW)	3/2	9/5	2	$3k/(2+k)$
c (DMRG)	1.502	1.807	2.01	
η (WZW)	3/4	3/5	1/2	$3/(2+k)$
η (DMRG)	0.72	0.62	0.52	

Michaud, Manmana, and Mila, PRB 87, 140404(R) (2013)

(比較的) 最近見つかった具体例

- level-2S SU(2) WZWに対応する量子臨界点はspin-S Heisenberg AFM鎖のすぐ近くにある。

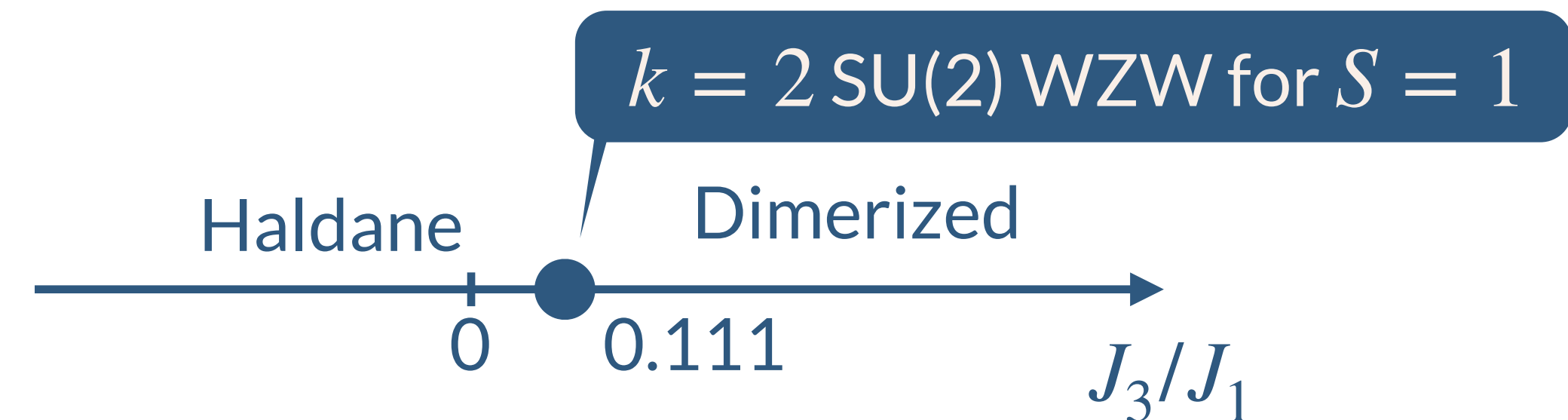
- スピンS $J_1 - J_3$ 鎖

$$H = J_1 \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + 2J_3 \sum_j (\vec{S}_{j-1} \cdot \vec{S}_j)(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})$$

- central chargeは有限サイズ系の entanglement entropyから外挿。

$$J_{3c} = 0 \text{ for } S = 1/2$$

Michaud, Manmana, and Mila, PRB 87, 140404(R) (2013)



Michaud, Vernay, Manmana, and Mila, PRL 108, 127202 (2012)

	$S = 1$	$S = 3/2$	$S = 2$	$2S = k$
J_{3c}/J_1 (DMRG)	0.111	0.063	0.0403	
J_{3c}/J_1 (ED)		0.064	0.0406	
J_3/J_1 (MG point)	1/6	1/13	1/22	$1/[4S(S+1)-2]$
c (WZW)	3/2	9/5	2	$3k/(2+k)$
c (DMRG)	1.502	1.807	2.01	
η (WZW)	3/4	3/5	1/2	$3/(2+k)$
η (DMRG)	0.72	0.62	0.52	

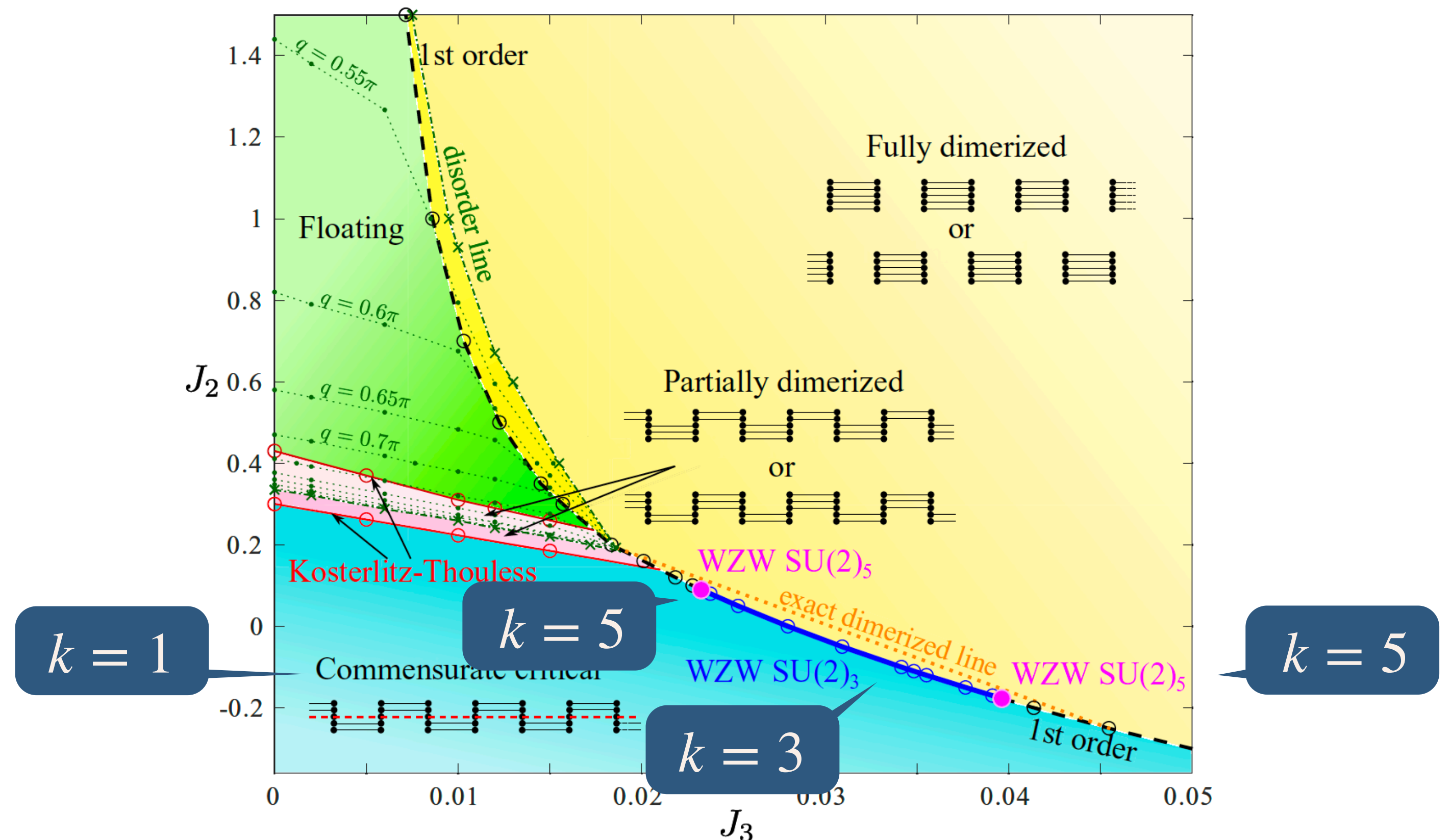
より最近見つかった具体例

- level-2S SU(2) WZWに対応する量子臨界点はspin-S Heisenberg AFM鎖のすぐ近くにある。

- 類似のS=5/2 鎖

$$H = J_1 \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + J_2 \sum_j \vec{S}_{j-1} \cdot \vec{S}_{j+1} + 2J_3 \sum_j (\vec{S}_{j-1} \cdot \vec{S}_j)(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})$$

- $k = 5$ と $k = 3$ が隣接している。



Chepiga, Affleck, and Mila, Phys. Rev. B 105, 174402 (2022)

元のLSM定理の場の理論版

- $S=1/2$ Heisenberg AFM鎖 = レベル1 SU(2) WZW + 摂動

- レベル1 SU(2) WZWのrelevant相互作用:

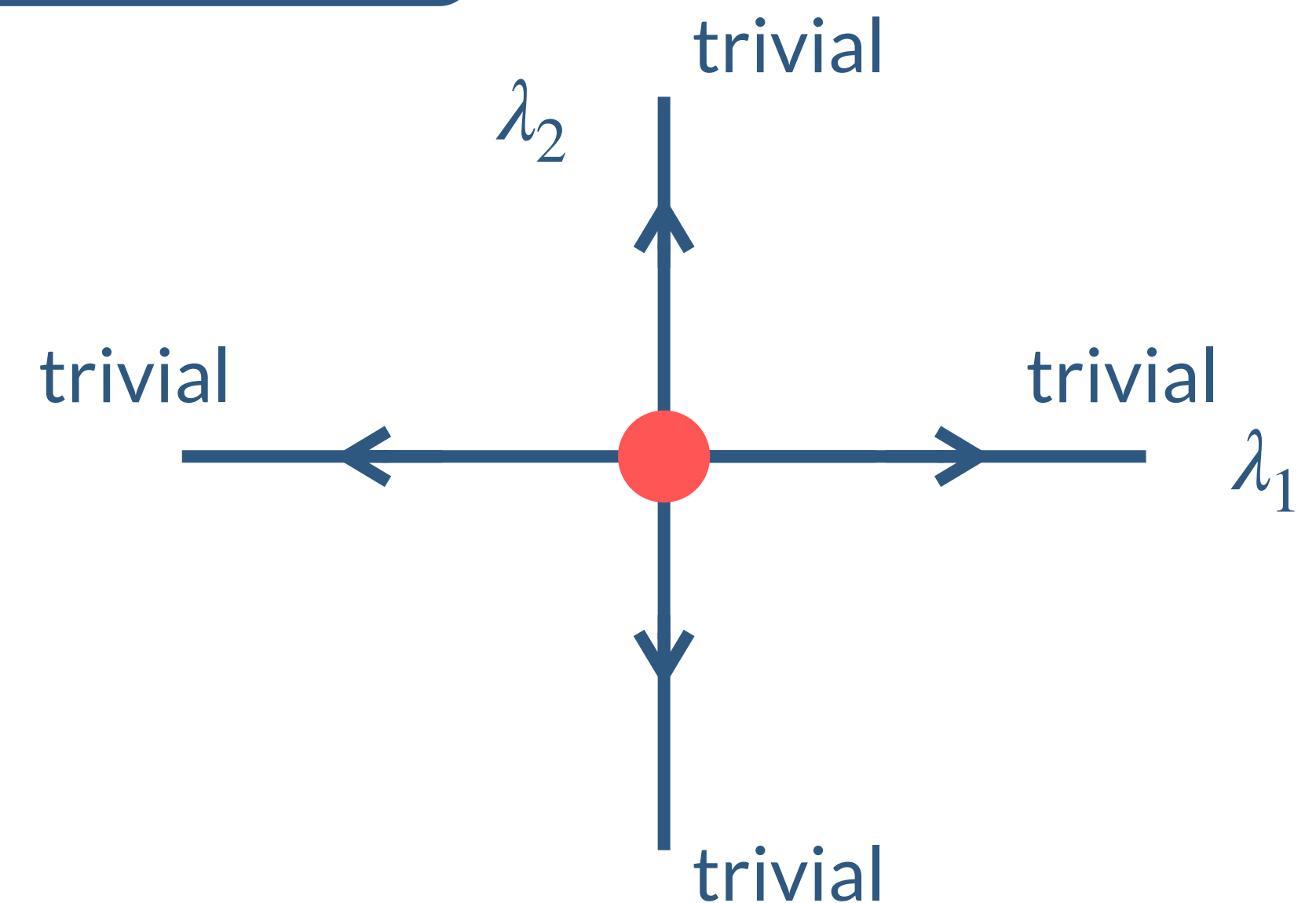
$$\lambda_1 \text{tr}(g\sigma^x) + \lambda_2 \text{tr} g$$

- $\text{tr}(g\sigma^a) \sim (-1)^j S_j^a$ w/ $a = x, y, z$:

Néel秩序変数. 格子並進対称性 $\vec{S}_j \rightarrow \vec{S}_{j+1}$ と
SU(2)スピン回転対称性を破る.

- $\text{tr} g \sim (-1)^j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1}$:

ダイマー秩序変数. 並進対称性を破る.



SU(2)と並進対称性でこれらを禁止可能

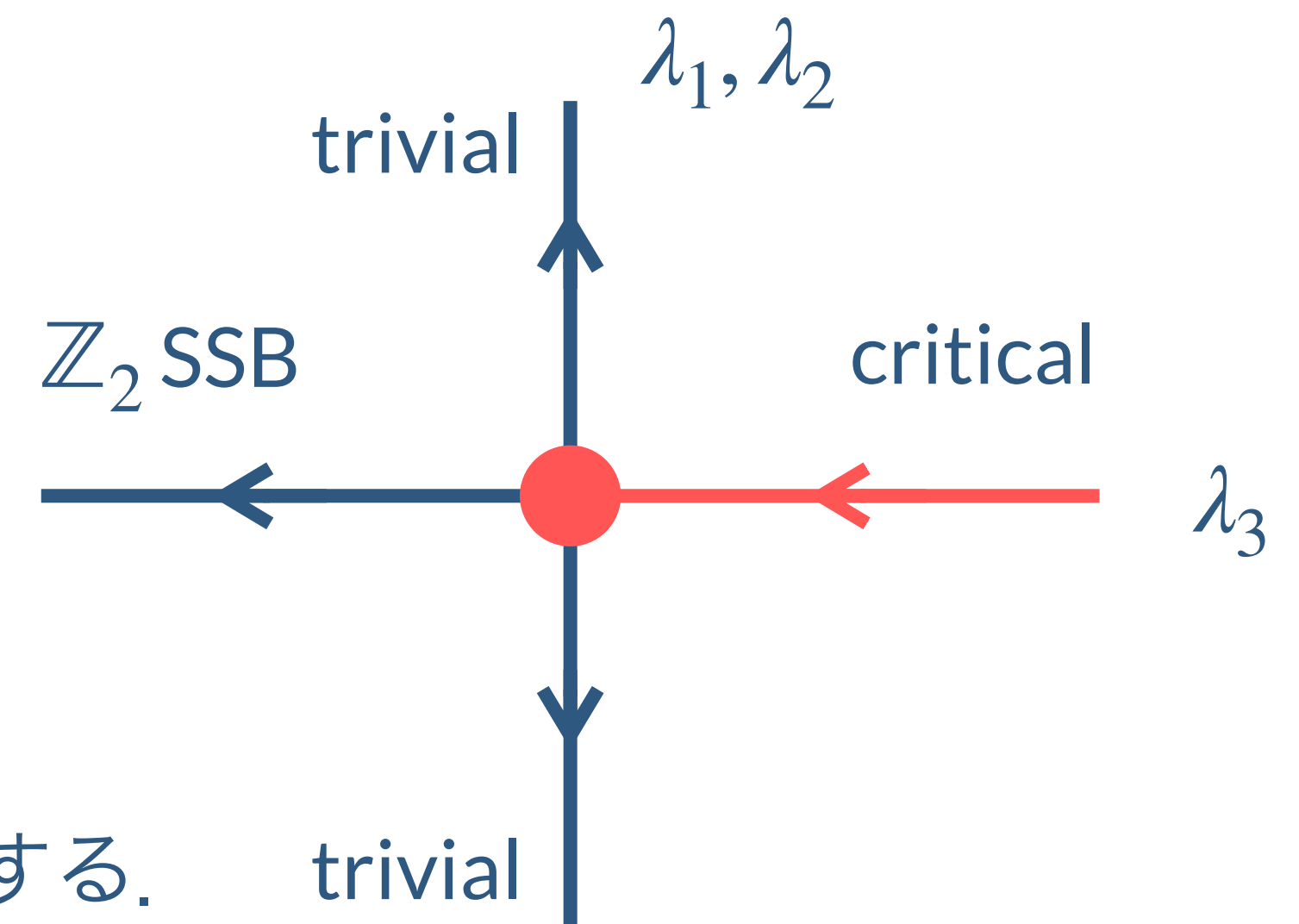
元のLSM定理の場の理論版

- marginally relevant interaction : $\vec{J}_R \cdot \vec{J}_L \sim \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1}$ の一部
 - 結合定数 λ_3 の符号によってはgapを生じる.
 - $\vec{J}_R \cdot \vec{J}_L$ がgapを生じるとき, $(\text{tr } g)^2$ の結合定数が負に増大する
 $g \sim \pm 1$ (\mathbb{Z}_2 対称性の自発的破れ)

Affleck and Haldane, PRB 36, 5291 (1987)

- $\vec{S}_j \sim \vec{J}_R + \vec{J}_L + (-1)^j \text{tr}(g\vec{\sigma})$ より
 - 並進対称性 $\vec{S}_j \rightarrow \vec{S}_{j+1}$ は on-site \mathbb{Z}_2 対称性 $g(x) \rightarrow -g(x)$ に対応する.

- いずれにせよ, $SU(2)$ と並進対称性の下 ($\lambda_1 = \lambda_2 = 0$) で自明な基底状態は不可能 (元のLSM定理) .



Haldane現象は？

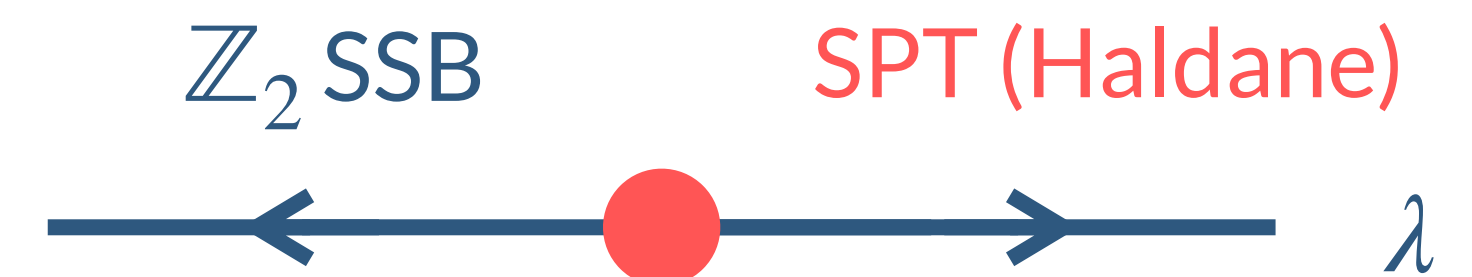
Haldane現象

- S=1 Heisenberg AFM鎖 = レベル2 SU(2) WZW + 摂動

$$\lambda(\text{tr } g)^2$$

- relevant相互作用のリスト

- $\text{tr}(g\sigma^a)$, $\text{tr } g$: 並進対称性 ($g \rightarrow -g$)を破るので禁止
- $(\text{tr } g)^2$: 並進対称性, SU(2)対称性とものに保つ.
 - $(\text{tr } g)^2$ の係数が負 : $g \sim \pm 1$ (対称性の自発的破れ)
 - $(\text{tr } g)^2$ の係数が正 : $g \sim 0$ (symmetric GS)



- レベル2 SU(2) WZW理論は何ら対称性に抵触することなくgapを生じる.

我々の主張

- 前提：レベル k SU(2) Wezz-Zumino-Witten (WZW)理論に対応する量子臨界点・量子臨界相があるとする。
 - e.g., スピン S 反強磁性スピン鎖 e.g., Michaud, Manmana, and Mila, PRB 87, 140404(R) (2013)

- SU(2)対称性と格子並進対称性と共形対称性の下で、2つの量子臨界点あるいは量子臨界相 (レベル k, k') が実現するならば $k = k' \pmod{2}$ が成り立つ.

- 場の理論の分類.
- 量子スピン系に適用すると、Haldane現象やLSM定理 を特殊な場合として含む.
- 量子場理論のアノマリーを用いた量子臨界相の分類, 「対称性に守られた量子臨界相」の提案.

どのように分類されるか？

場の理論のアノマリー

- LSM定理は複数の対称性の間の“非整合”が原因.
- 場の理論では異常 (anomaly) として認識されている.
 - 量子異常：古典場理論を量子化すると、古典場理論にあった対称性が量子場理論では破れる現象 (カイラル対称性など) .
 - 't Hooft異常：ある量子場理論の対称性 G_1 をゲージ対称性とみなして (ゲージ化して) 別の量子場理論を構成するとき、別の対称性 G_2 と G_1 ゲージ対称性が非整合を示す.
- 単純にanomalyと呼ぶことが多い.

SU(2) WZWの大域的アノマリー

- レベル k SU(2) WZW理論の \mathbb{Z}_2 対称性 ($g \rightarrow -g$) をゲージ化することで新しい共形場理論を構成できる.

- $g \in \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2 \cong \text{SO}(3)$ より, 新しい場の理論はSO(3) WZW理論.

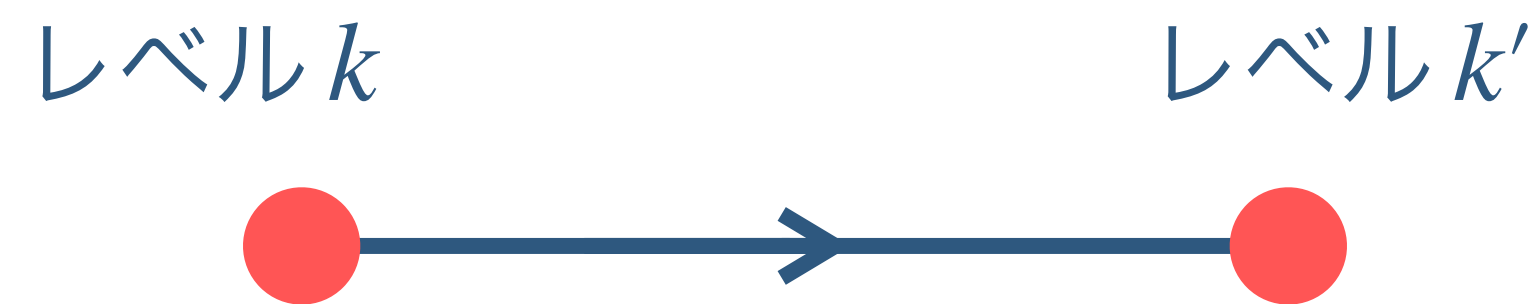
Gepner and Witten, Nucl. Phys. B278, 493 (1986)

- SO(3) WZW理論は $k = 0 \pmod{2}$ のときのみwell defined.
- $k = 1 \pmod{2}$ のとき, 共形対称性と \mathbb{Z}_2 対称性の間にアノマリーがある.
- $k = 1 \pmod{2}$ のとき, 共形対称性と \mathbb{Z}_2 ゲージ対称性が両立しない.
- $k = 1 \pmod{2}$ のとき, SO(3) WZW理論が**modular不変性**を破る.

modular 不変性 : 2D CFTが満たすべき時空の大域的整合性

アノマリーマッチング

- アノマリーマッチング
 - ある2D CFTから別の2D CFTへのくりこみ群の流れにおいて、始点 (UV, ultraviolet) のCFTと終点 (IR, infrared) のアノマリーが一致すること.



- くりこみ群変換によってアノマリーが解消しないので, $k = k' \pmod{2}$.
- アノマリーによってSU(2) WZWに対応する量子臨界点・量子臨界相が分類できることを示した.

より最近見つかった具体例

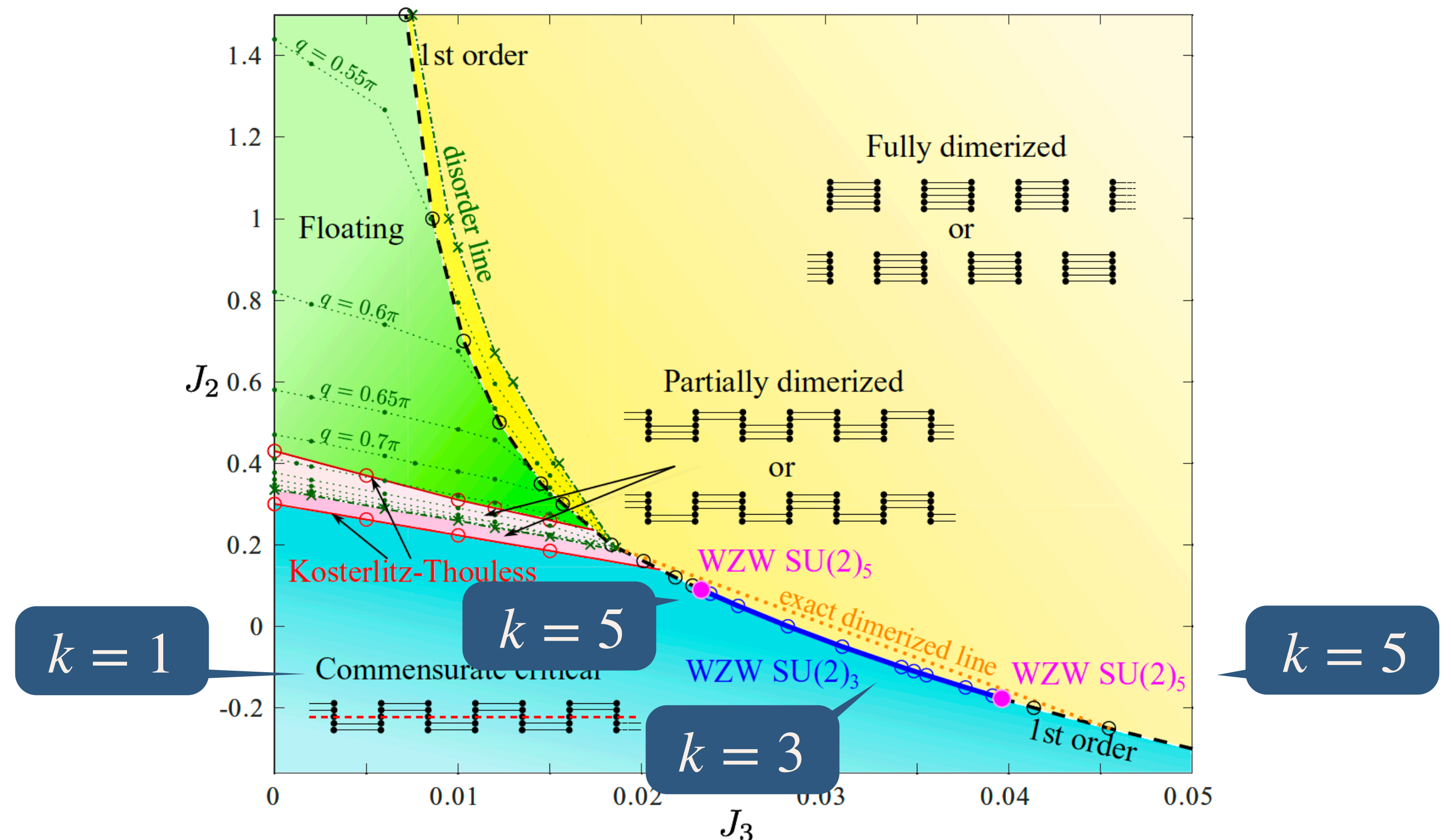
- level-2S SU(2) WZWに対応する量子臨界点はspin-S Heisenberg AFM鎖のすぐ近くにある。

- 類似のS=5/2 鎖

$$H = J_1 \sum_j \vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + J_2 \sum_j \vec{S}_{j-1} \cdot \vec{S}_{j+1} + 2J_3 \sum_j (\vec{S}_{j-1} \cdot \vec{S}_j)(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})$$

- $k = 5$ と $k = 3$ が隣接している。

- $k = 3$ の量子臨界相がある。



Chepiga, Affleck, and Mila, Phys. Rev. B 105, 174402 (2022)

その後の発展や関連研究

- $SU(N)$ WZW模型への拡張（種々の格子模型への応用）：
Yao and Oshikawa, PRL 123, 180201 (2019).
- $U(N)/[U(1)]^N$ 非線形 σ 模型と $SU(N)$ WZW模型の間のアノマリーマッチング：
Ohmori, Seiberg, and Shao, SciPost Phys. 6, 017 (2019).
- LSM定理とhigher-form symmetry：
Kobayashi, Shiozaki, Kikuchi, and Ryu, PRB 99, 014402 (2019).
- deconfined quantum critical pointsとの関連：
Metlitski and Thorngren, PRB 98, 085140 (2018)
- gapless SPT関連：Hidaka, SCF, Ueda, and Tada, PRB 106, 144436 (2022).

我々の主張

- 前提：レベル k SU(2) Wezz-Zumino-Witten (WZW)理論に対応する量子臨界点・量子臨界相があるとする。
 - e.g., スピン S 反強磁性スピン鎖 e.g., Michaud, Manmana, and Mila, PRB 87, 140404(R) (2013)

- SU(2)対称性と格子並進対称性と共形対称性の下で, 2つの量子臨界点・量子臨界相 (レベル k, k') が実現するならば $k = k' \pmod{2}$ が成り立つ.

- 場の理論の分類.
- 量子スピン系に適用すると, Haldane現象やLSM定理 を特殊な場合として含む.
- 量子場理論のアノマリーを用いた量子臨界相の分類, 「対称性に守られた量子臨界相」の提案.

今回のトピック

PRL **118**, 021601 (2017)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
13 JANUARY 2017

Symmetry Protection of Critical Phases and a Global Anomaly in 1 + 1 Dimensions

Shunsuke C. Furuya¹ and Masaki Oshikawa²

¹*Condensed Matter Theory Laboratory, RIKEN, Wako, Saitama 351-0198, Japan*

²*Institute for Solid State Physics, University of Tokyo, Kashiwa 277-8581, Japan*

(Received 25 March 2015; revised manuscript received 24 November 2016; published 11 January 2017)

We derive a selection rule among the (1 + 1)-dimensional SU(2) Wess-Zumino-Witten theories, based on the global anomaly of the discrete \mathbb{Z}_2 symmetry found by Gepner and Witten. In the presence of both the SU(2) and \mathbb{Z}_2 symmetries, a renormalization-group flow is possible between level- k and level- k' Wess-Zumino-Witten theories only if $k \equiv k' \pmod{2}$. This classifies the Lorentz-invariant, SU(2)-symmetric critical behavior into two “symmetry-protected” categories corresponding to even and odd levels, restricting possible gapless critical behavior of translation-invariant quantum spin chains.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.021601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.021601)

対称性に守られた量子臨界相

[[SCF](#) and Oshikawa, PRL (2017)]

PHYSICAL REVIEW B **106**, 144436 (2022)

Gapless symmetry-protected topological phase of quantum antiferromagnets on anisotropic triangular strip


Yuichiro Hidaka,¹ Shunsuke C. Furuya^{2,3}, Atsushi Ueda^{2,1} and Yasuhiro Tada^{4,1}

¹*Institute for Solid State Physics, University of Tokyo, Kashiwa 277-8581, Japan*

²*Department of Physics, Ibaraki University, Mito, Ibaraki 310-8512, Japan*

³*Department of Basic Science, University of Tokyo, Meguro, Tokyo 153-8902, Japan*

⁴*Quantum Matter Program, Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University, Higashihiroshima, Hiroshima 739-8530, Japan*

 (Received 30 May 2022; revised 5 October 2022; accepted 14 October 2022; published 28 October 2022)

gapless SPT相

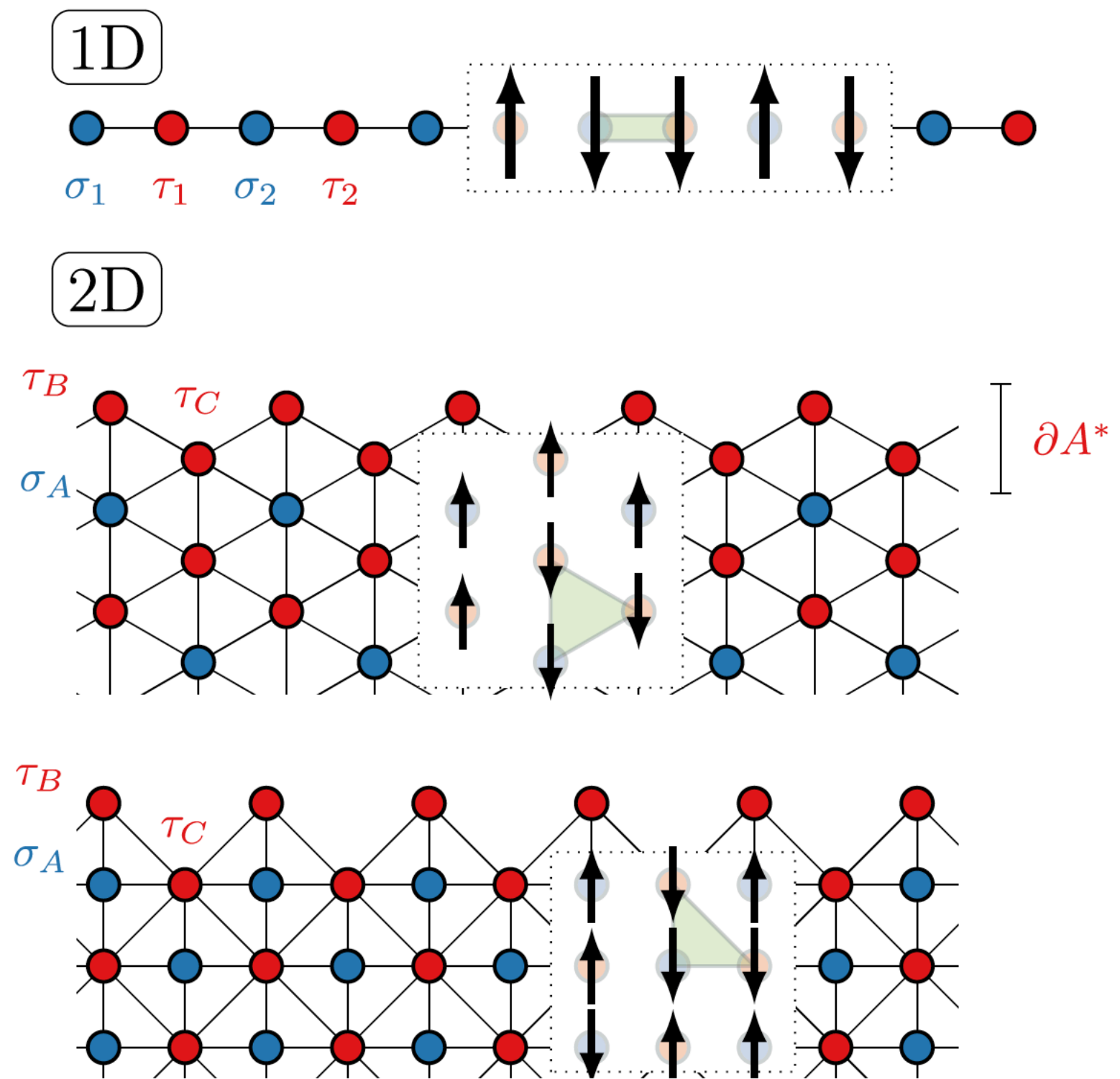
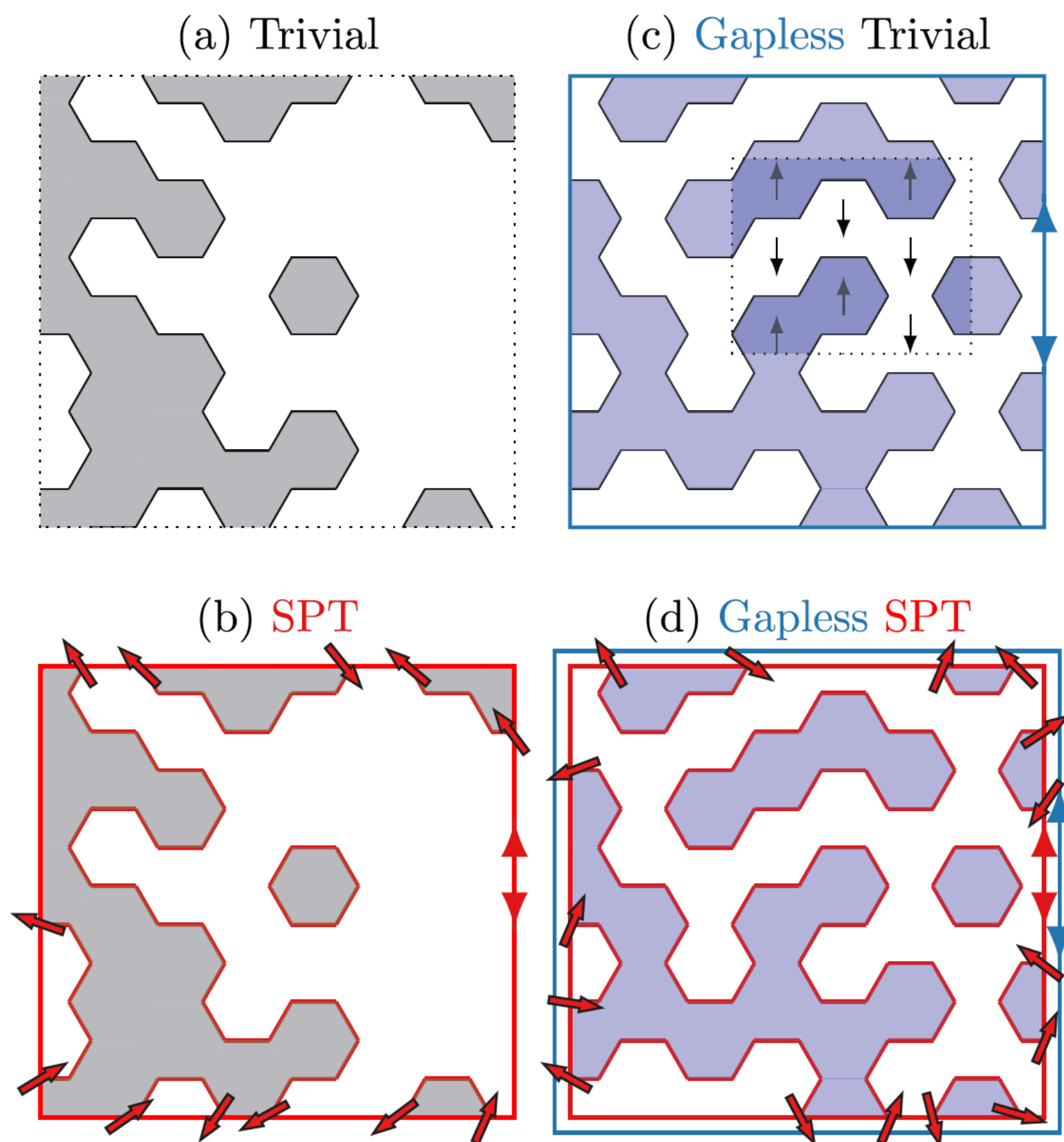
[Hidaka, [SCF](#), Ueda, and Tada, PRB (2022)]

gapless SPT相をSPC相としてとらえる

先行研究

- decorated domain wallによるgapless SPTの構成

Scaffidi, Parker, and Vasseur, PRX 7, 041048 (2017)



先行研究

- decorated domain wallによるgapless SPTの構成

Scaffidi, Parker, and Vasseur, PRX 7, 041048 (2017)

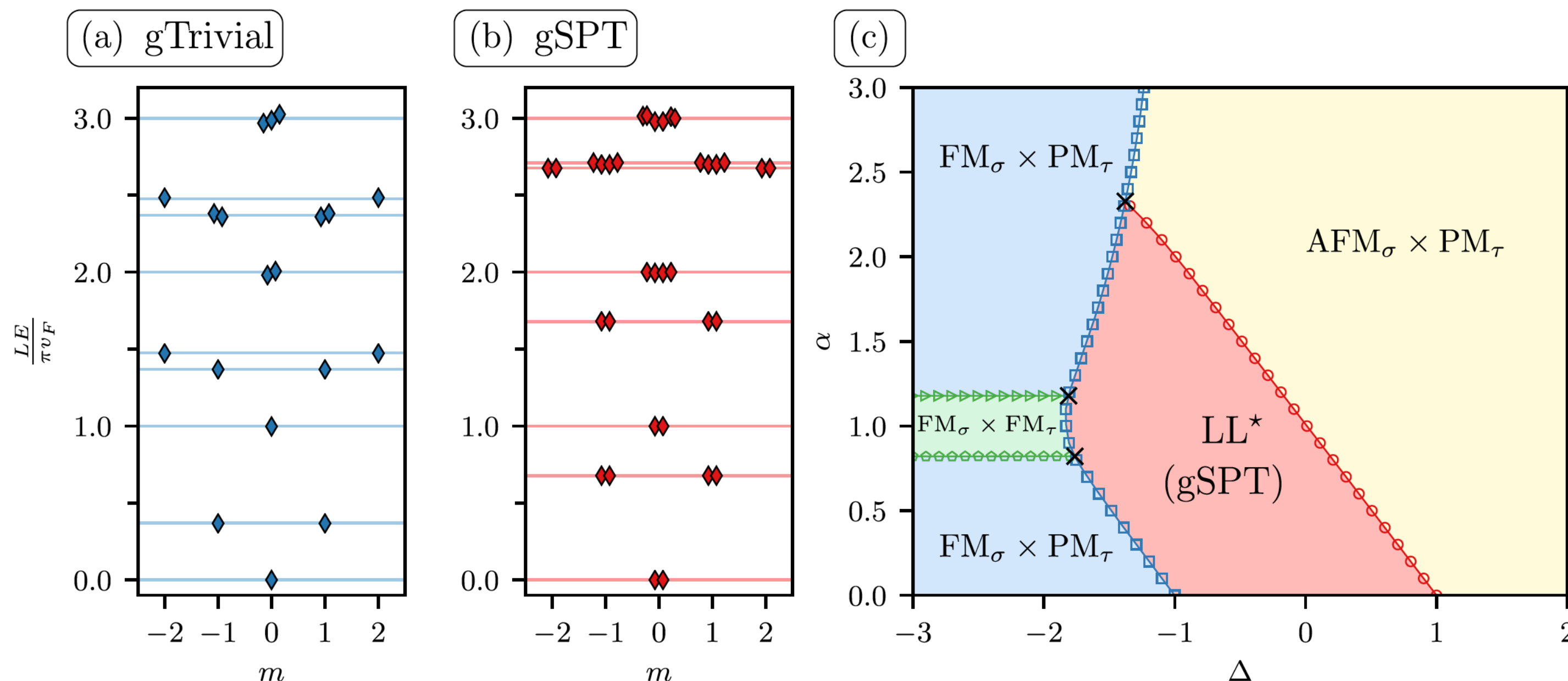
$$H_{\text{gTrivial}}^{\text{LL}} = \sum_j (\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z + \Delta \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y) - \sum_j (\tau_{j-\frac{1}{2}}^x + g_\tau \tau_{j-\frac{1}{2}}^z \tau_{j+\frac{1}{2}}^z + u_\tau \tau_{j-\frac{1}{2}}^x \tau_{j+\frac{1}{2}}^x) + \alpha \sum_j \sigma_j^y \tau_{j+\frac{1}{2}}^x \sigma_{j+1}^y$$

$$H_{\text{gSPT}}^{\text{LL}^*} = U_{1d} H_{\text{gTrivial}}^{\text{LL}} U_{1d}$$

$$U_{1d} = \prod_j \text{CZ}_{j-1, j-\frac{1}{2}} \text{CZ}_{j, j-\frac{1}{2}}$$

control-Z 変換

$$\text{CZ}_{ij} = (-1)^{\frac{1}{4}(1-\sigma_i^z)(1-\tau_j^z)}$$




- Spin-charge separation + spin-orbit coupling
 - gapless “charge” excitation.
 - SPT in “spin” sector.

PHYSICAL REVIEW B **102**, 165147 (2020)

Editors' Suggestion

Majorana end states in an interacting quantum wire

Ren-Bo Wang ¹, Akira Furusaki,^{2,3} and Oleg A. Starykh¹

¹*Department of Physics and Astronomy, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112, USA*

²*Condensed Matter Theory Laboratory, RIKEN, Wako, Saitama 351-0198, Japan*

³*RIKEN Center for Emergent Matter Science, Wako, Saitama 351-0198, Japan*



(Received 24 July 2020; accepted 5 October 2020; published 26 October 2020)

アイデアとモチベーション

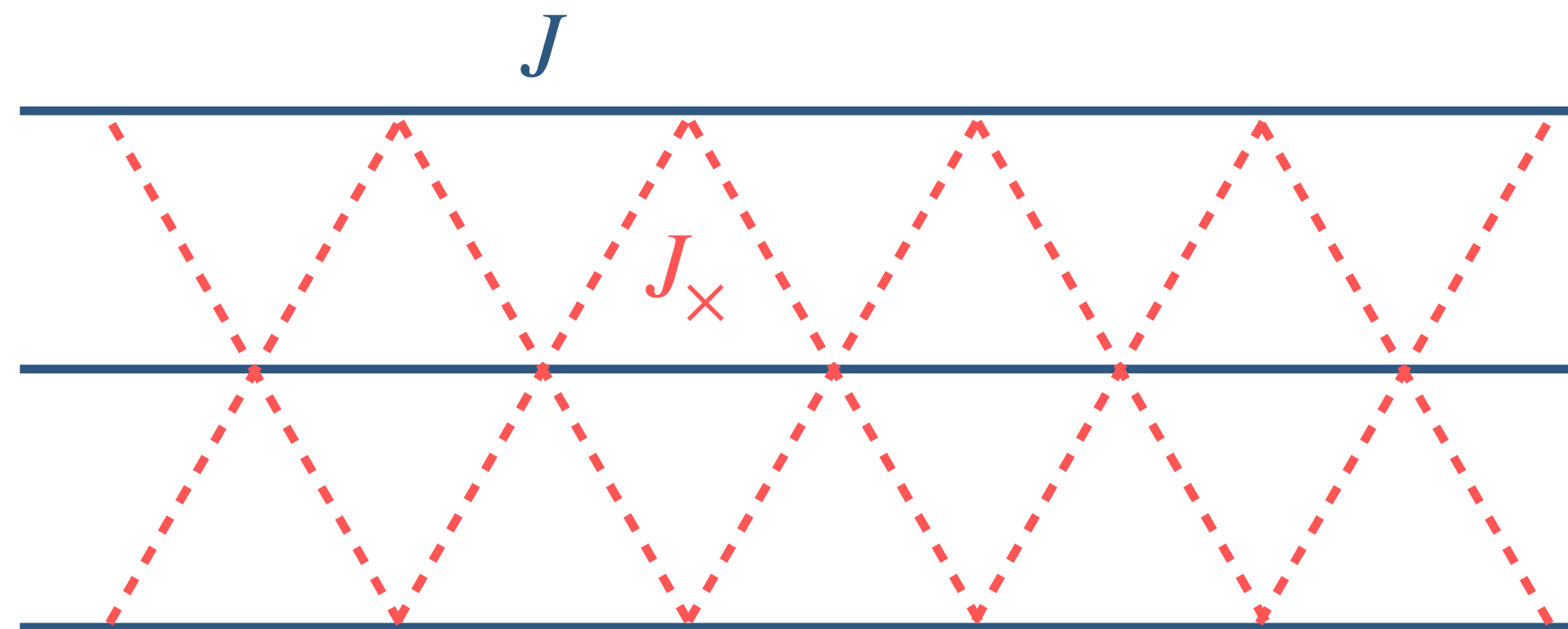
- アイデア：
基底状態が $|SPC\rangle \otimes |gapped\ SPT\rangle$ の形をしていれば, gapless SPT相が実現する.
 - SPC = level-1 SU(2) WZWならこの相はgapless相として安定.
 - gapped SPTセクターのために, 端状態が実現する.
 - gapless/gapped SPTセクターがよく分離していれば, 端状態は安定.
- スピンハミルトニアン内では2つのセクターは結合してほしい.
- できるだけ現実的な相互作用と格子からなる模型が望ましい.

cf. AKLT模型：
$$H = J \sum_j \left(\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1} + \frac{1}{3} (\vec{S}_j \cdot \vec{S}_{j+1})^2 \right)$$

模型

- $S=1/2$ 異方的三角格子strip Heisenberg反強磁性模型

$$H = J \sum_{j=1}^L \sum_{n=1}^3 \vec{S}_{j,n} \cdot \vec{S}_{j+1,n} + J_{\times} \sum_{j=1}^L [\vec{S}_{j,1} \cdot (\vec{S}_{j,2} + \vec{S}_{j+1,2}) + (\vec{S}_{j,2} + \vec{S}_{j+1,2}) \cdot \vec{S}_{j,3}]$$



関連物質

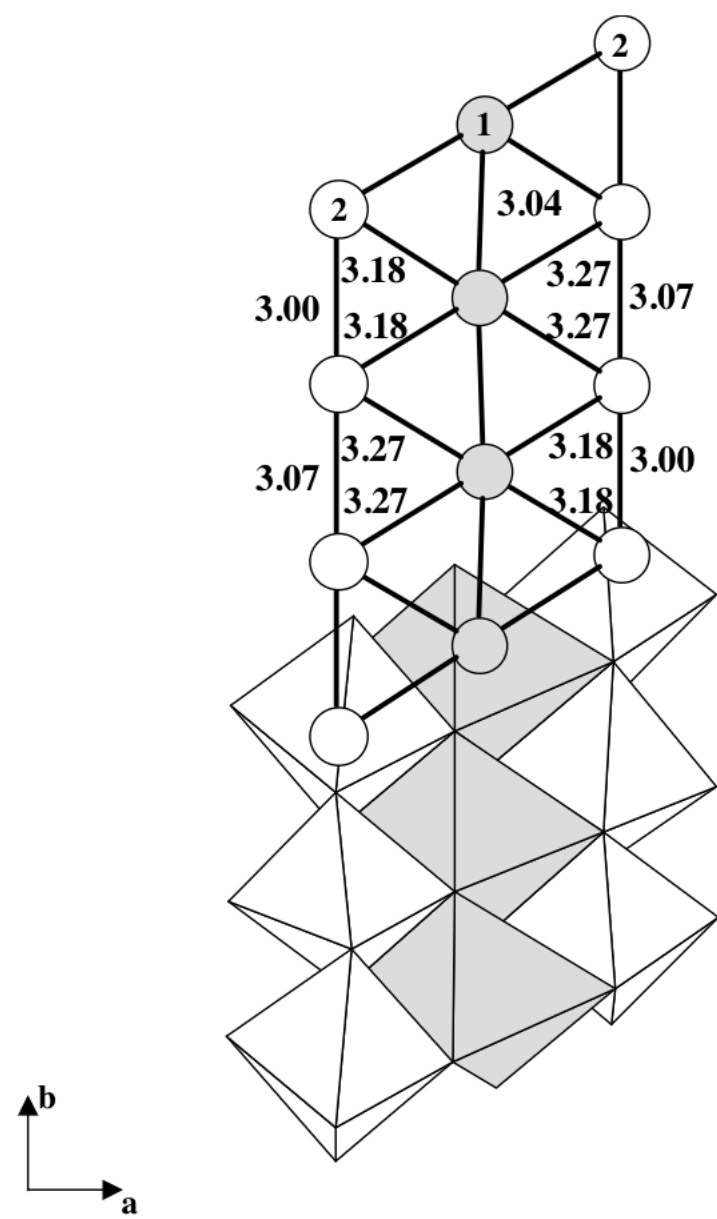
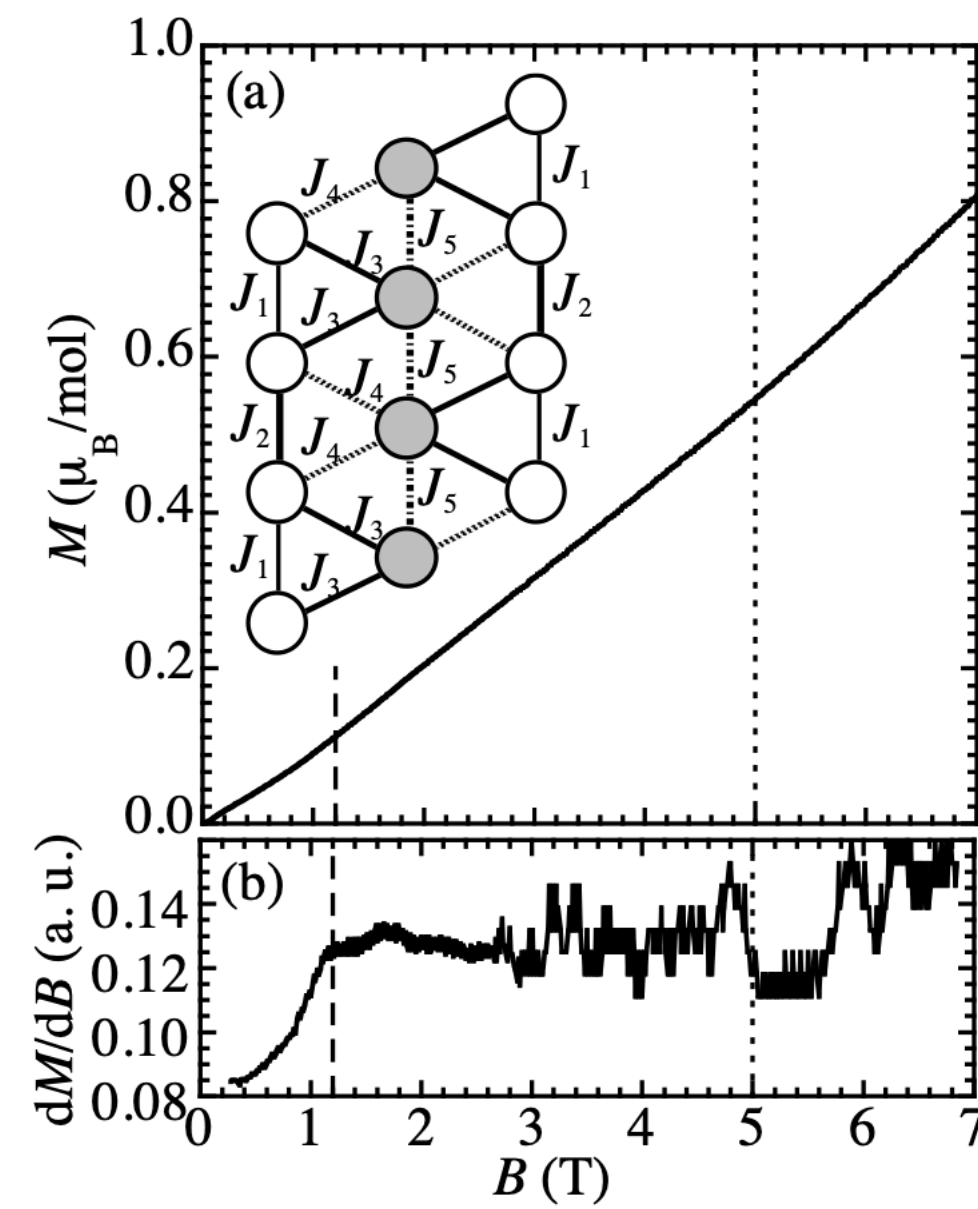


Fig. 3. View of a triple chain of copper octahedra (lower part) running in the b -axis direction. Bond lengths inside the triple chain (upper part). Cu1 atoms and octahedra are shaded.

S. Viminot *et al.*, J. Solid State Chem. 170, 255 (2003).



S. Okubo *et al.*, J. Phys. Conf. Ser. 150, 042156 (2009).

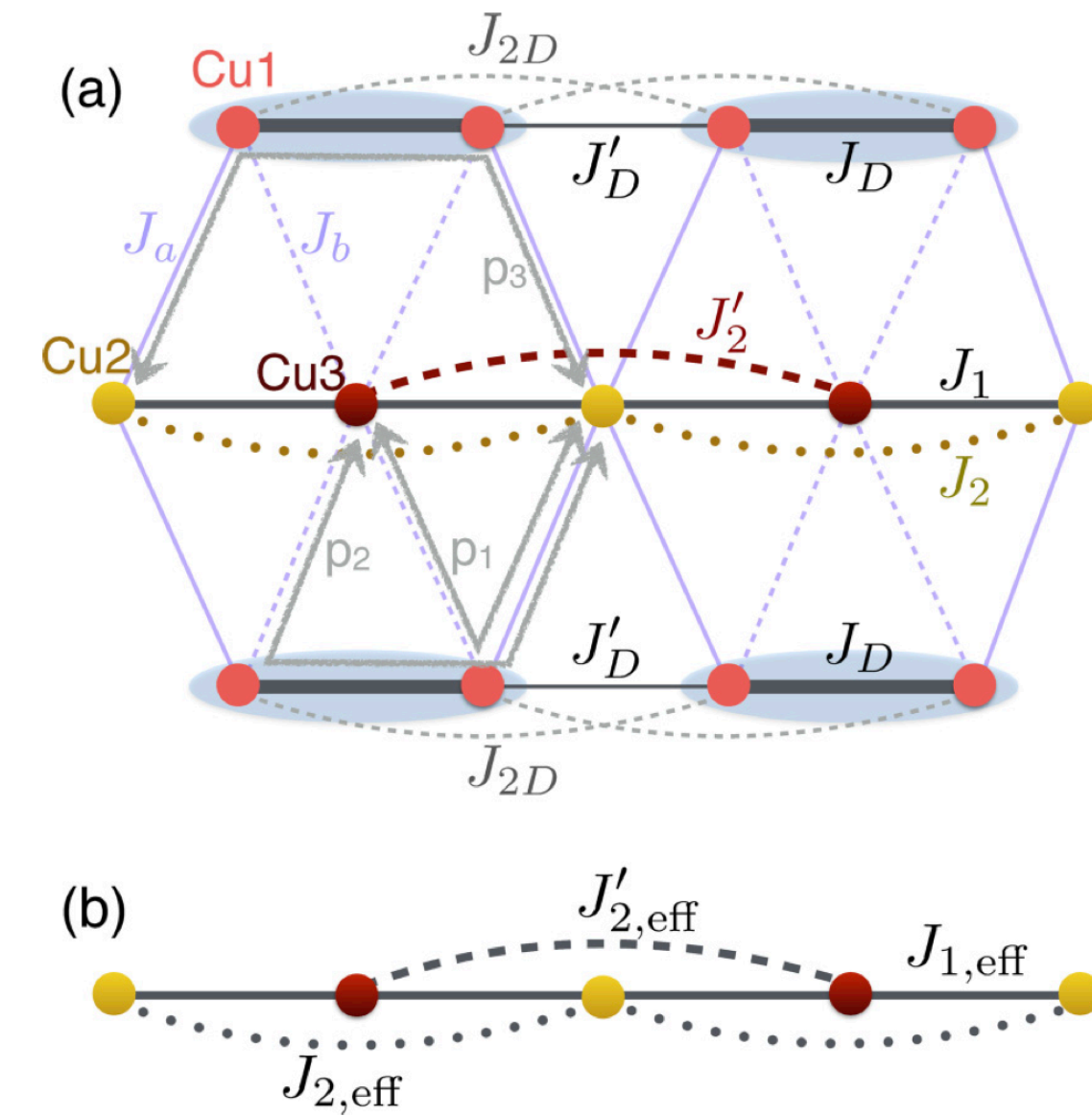
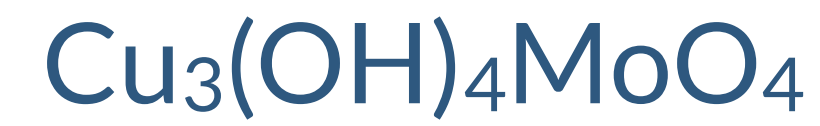


FIG. 5. (a) Exchange pathways and second-order virtual processes, p_1 – p_3 (see main text), within the **triple** chain of szenicsite. (b) The effective spin model of the central Cu2-Cu3 chain.

S, Lebernegg *et al.*, Phys. Rev. B 95, 035145 (2017).

異方の三角格子

PRL 98, 077205 (2007)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
16 FEBRUARY 2007

Ordering in Spatially Anisotropic Triangular Antiferromagnets

Oleg A. Starykh¹ and Leon Balents²

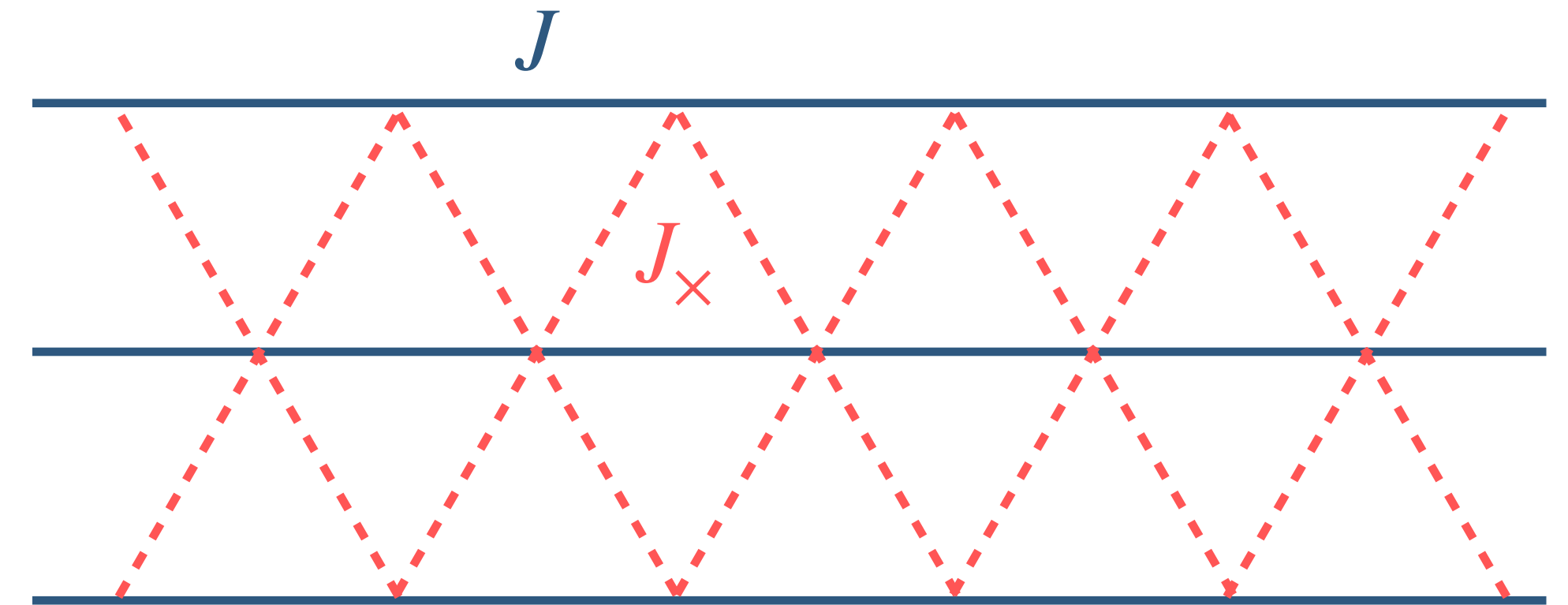
¹Department of Physics, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112, USA

²Department of Physics, University of California, Santa Barbara, California 93106-4030, USA
(Received 9 August 2006; published 14 February 2007)

We investigate the phase diagram of the anisotropic spin-1/2 triangular lattice antiferromagnet, with interchain diagonal exchange J' much weaker than the intrachain exchange J . We find that fluctuations lead to a competition between (commensurate) collinear antiferromagnetic and (zigzag) dimer orders. Both states differ in symmetry from the spiral order known to occur for larger J' , and are therefore separated by quantum phase transitions from it. The zero-field collinear antiferromagnet is succeeded in a magnetic field by magnetically ordered spin-density-wave and cone phases, before reaching the fully polarized state. Implications for the anisotropic triangular magnet Cs_2CuCl_4 are discussed.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.98.077205](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.98.077205)

PACS numbers: 75.10.Jm, 75.50.Ee



ARTICLES

Spinons and triplons in spatially anisotropic frustrated antiferromagnets

MASANORI KOHNO^{1,2}, OLEG A. STARYKH³ AND LEON BALENTS^{1*}

¹Department of Physics, University of California, Santa Barbara, California 93106, USA

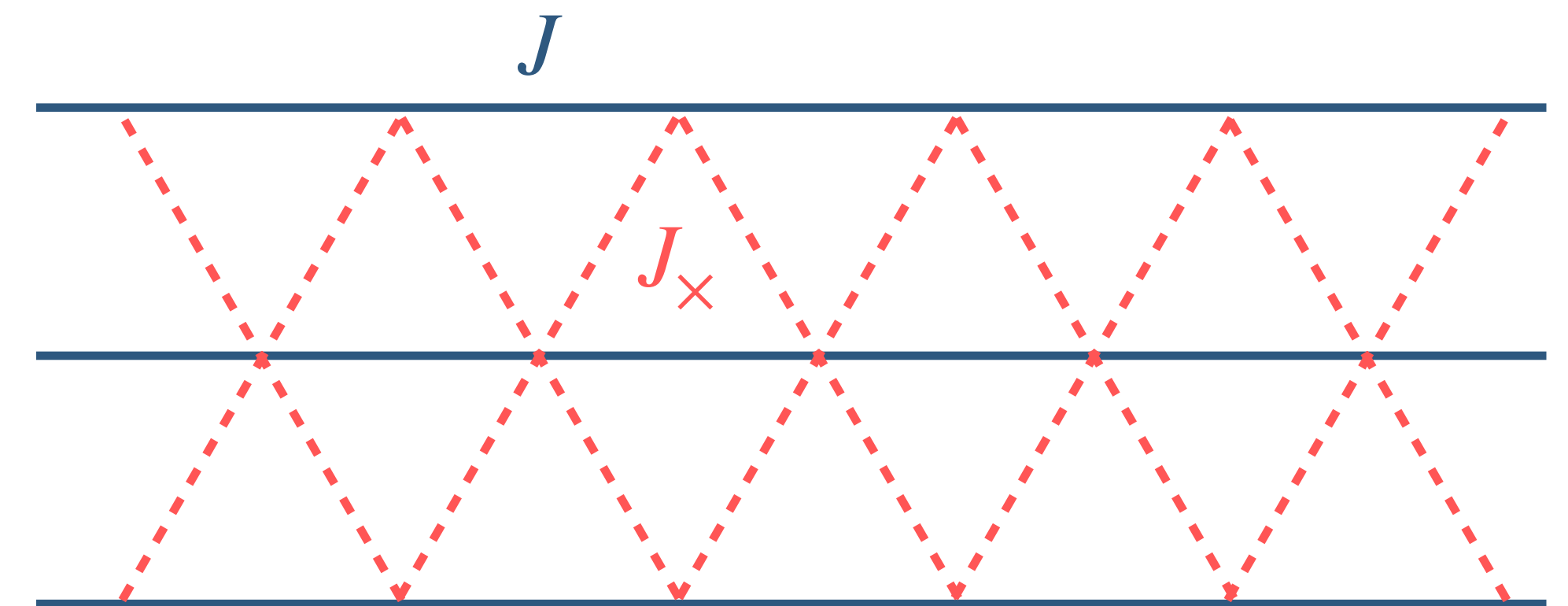
²Computational Materials Science Center, National Institute for Materials Science, Tsukuba 305-0047, Japan

³Department of Physics, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112, USA

*e-mail: balents@physics.ucsb.edu

基底状態についてのいくつかの考察

- 3本鎖なのでSU(2), 並進対称性があるときは基底状態はgaplessになることが期待される.
- 隣接するスピン鎖の間の相関は幾何学的フラストレーションのために弱い.



- 次近接のスピン鎖の間には強磁性相関が働くことが期待される.

Starykh and Balents, PRL 98, 077205 (2007)

- 低エネルギー極限で
 - 2本目のスピン鎖が1,3番目のスピン鎖と実効的に分離し, 朝永-Luttinger (TL) 液体状態を形成.
 - 1,3番目のスピン鎖が実効的にS=1 反強磁性鎖的に振る舞い, SPT状態を形成.

作用と摂動論

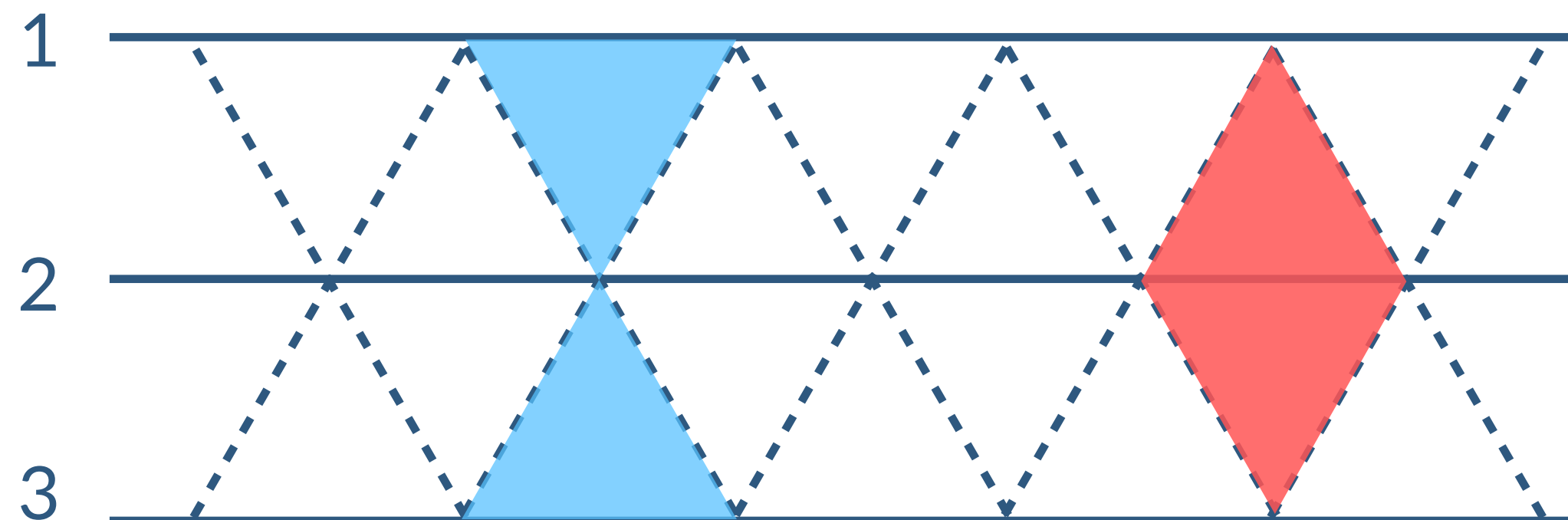
- 出発点となる場の理論の作用 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \mathcal{S}_\times$

ボソン化公式： $\vec{S}_{j,n} = \vec{J}_{R,n} + \vec{J}_{L,n} + (-1)^{j+n} \vec{N}_n$

- $$\mathcal{S}_\times = \frac{2\pi\nu}{3} \int d\tau dx \sum_{n=1}^3 (\vec{J}_{R,n} \cdot \vec{J}_{R,n} + \vec{J}_{L,n} \cdot \vec{J}_{L,n}) + \dots$$

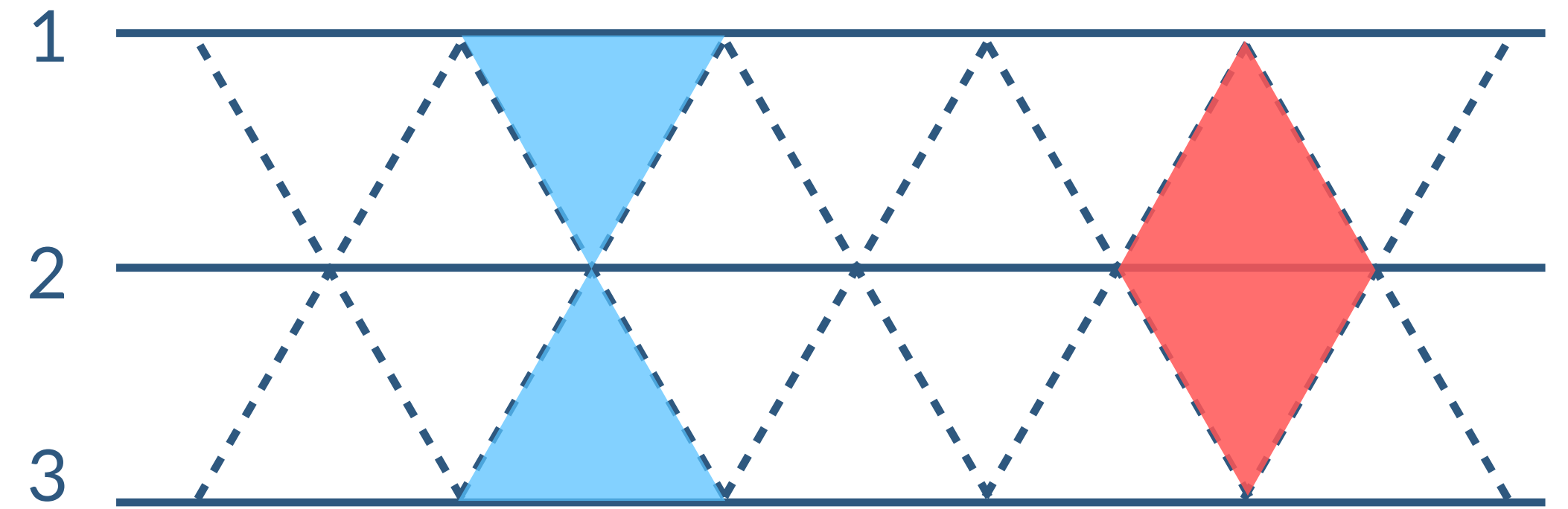
は $J_\times = 0$ のときの3本の独立したスピン鎖の作用

- $$\mathcal{S}_\times = \int d\tau dx \left(\gamma_J \vec{J}_2 \cdot (\vec{J}_1 + \vec{J}_3) + \frac{\gamma_{tw}}{2} \vec{N}_2 \cdot (\partial_x \vec{N}_1 + \partial_x \vec{N}_3) + \frac{\gamma_{tw}}{2} (\partial_x \vec{N}_2) \cdot (\vec{N}_1 + \vec{N}_3) \right) + \dots$$



摂動展開と演算子積展開

- $\exp(-\mathcal{S}_x) \approx 1 - \mathcal{S}_x + \frac{1}{2}(\mathcal{S}_x)^2 + \dots$
- $(\mathcal{S}_x)^2$ は $[\vec{J}_1(x, \tau) \cdot \vec{J}_2(x, \tau)][\vec{J}_2(x', \tau') \cdot \vec{J}_3(x', \tau')]$ などの長距離・長時間にわたる積を含む。



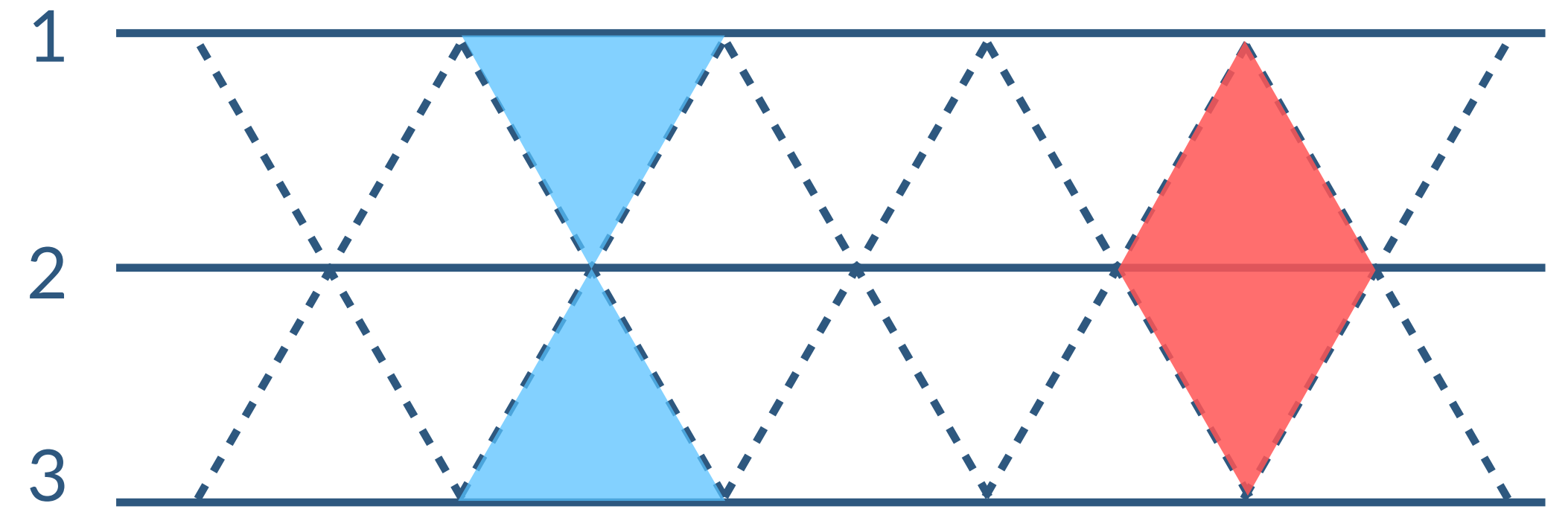
- $x \approx x'$ のとき, 演算子の積を異なる演算子の重ね合わせで表すことができる (演算子積展開) .

- e.g.,

$$J_R^a(x, \tau) J_R^b(x, \tau') = \frac{\delta^{ab}}{8\pi^2[v(\tau - \tau') + a_0 \operatorname{sgn}(\tau - \tau')]^2} + \frac{i\epsilon^{abc}}{2\pi v(\tau - \tau') + a_0 \operatorname{sgn}(\tau - \tau')} J_R^c(x, \tau') + \dots$$

摂動展開と演算子積展開

- $\exp(-\mathcal{S}_x) \approx 1 - \mathcal{S}_x + \frac{1}{2}(\mathcal{S}_x)^2 + \dots$
- 重要な積は右図の \blacklozenge 2つの積.
- $$[\vec{N}_1(x, \tau) \cdot \partial_x \vec{N}_2(x, \tau)][\partial_x \vec{N}_2(x, \tau') \cdot \vec{N}_3(x, \tau')] = \frac{1}{4\pi^2[v(\tau - \tau') + a_0 \operatorname{sgn}(\tau - \tau')]^2} \vec{N}_1(x, \tau') \cdot \vec{N}_3(x, \tau') + \dots$$
- 1,3本目の間の相互作用が2次摂動によって生成された.



- $$\frac{1}{2}(\mathcal{S}_x)^2 = \int d\tau dx \left(\frac{\gamma_J^2}{4\pi^2 v a_0} \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_3 + \frac{\gamma_{tw}^2}{8\pi^2 v a_0^2} \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3 \right)$$

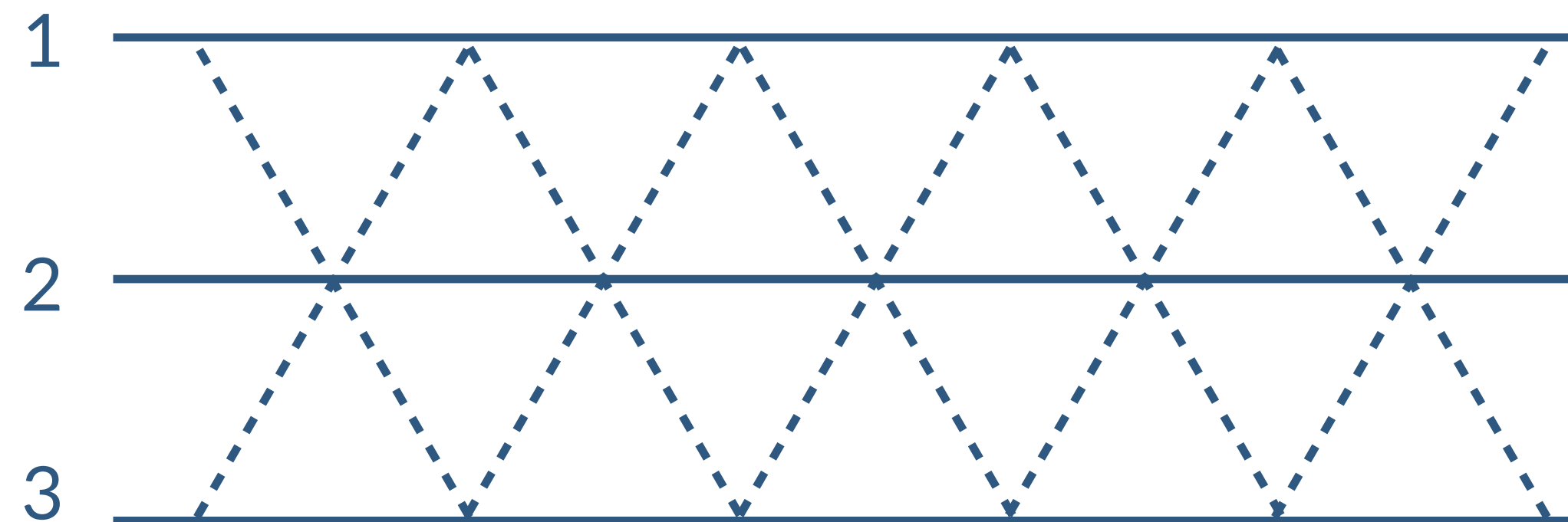
くりこみ群変換

- $$\mathcal{S}_x^{\text{eff}} = \int d\tau dx \left(\gamma_J \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 + \frac{\gamma_{\text{tw}}}{2} \vec{N}_2 \cdot (\partial_x \vec{N}_1 + \partial_x \vec{N}_3) + \frac{\gamma_{\text{tw}}}{2} (\partial_x \vec{N}_2) \cdot (\vec{N}_1 + \vec{N}_3) \right. \\ \left. - \frac{\gamma_J^2}{4\pi^2 v a_0} \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_3 - \frac{\gamma_{\text{tw}}^2}{8\pi^2 v a_0} \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3 \right)$$

1,3番目のスピン鎖間の有効強磁性相互作用

- くりこみ群変換をして低エネルギー極限をとると

$$\mathcal{S}_x^{\text{eff}} \approx g_{\text{eff}} \int d\tau dx \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3, \quad \text{with } g_{\text{eff}} < 0.$$



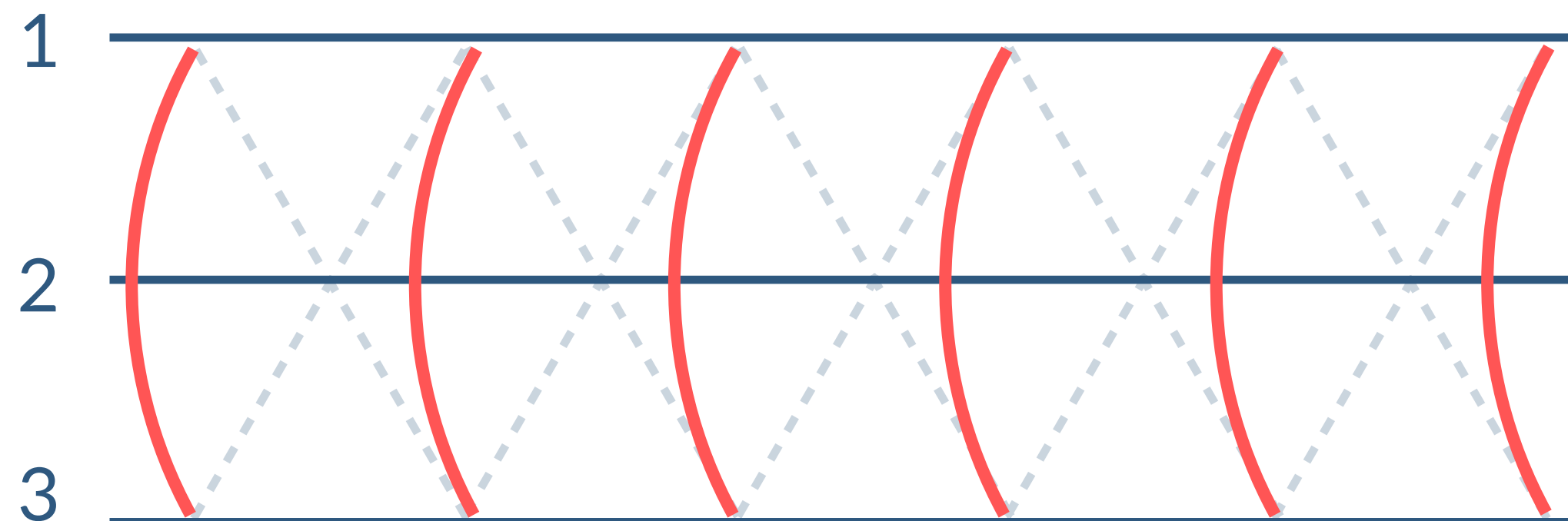
くりこみ群変換

- $$\mathcal{S}_x^{\text{eff}} = \int d\tau dx \left(\gamma_J \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 + \frac{\gamma_{\text{tw}}}{2} \vec{N}_2 \cdot (\partial_x \vec{N}_1 + \partial_x \vec{N}_3) + \frac{\gamma_{\text{tw}}}{2} (\partial_x \vec{N}_2) \cdot (\vec{N}_1 + \vec{N}_3) \right. \\ \left. - \frac{\gamma_J^2}{4\pi^2 v a_0} \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_3 - \frac{\gamma_{\text{tw}}^2}{8\pi^2 v a_0} \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3 \right)$$

1,3番目のスピン鎖間の有効強磁性相互作用

- くりこみ群変換をして低エネルギー極限をとると

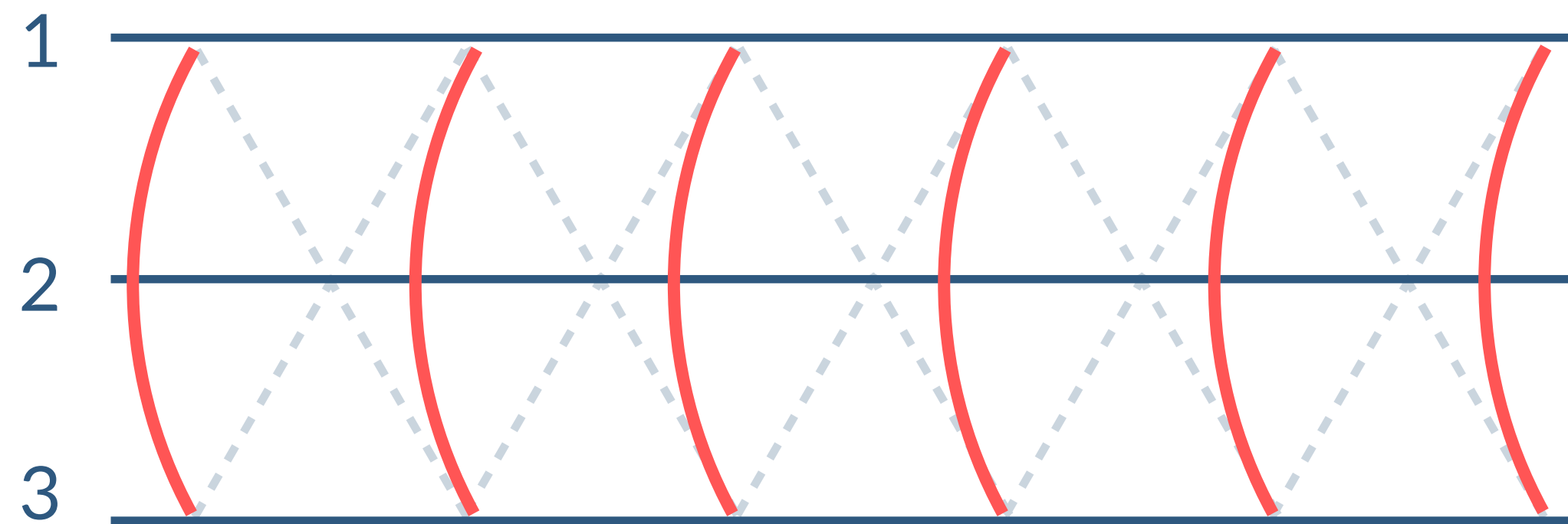
$$\mathcal{S}_x^{\text{eff}} \approx g_{\text{eff}} \int d\tau dx \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_3, \quad \text{with } g_{\text{eff}} < 0.$$



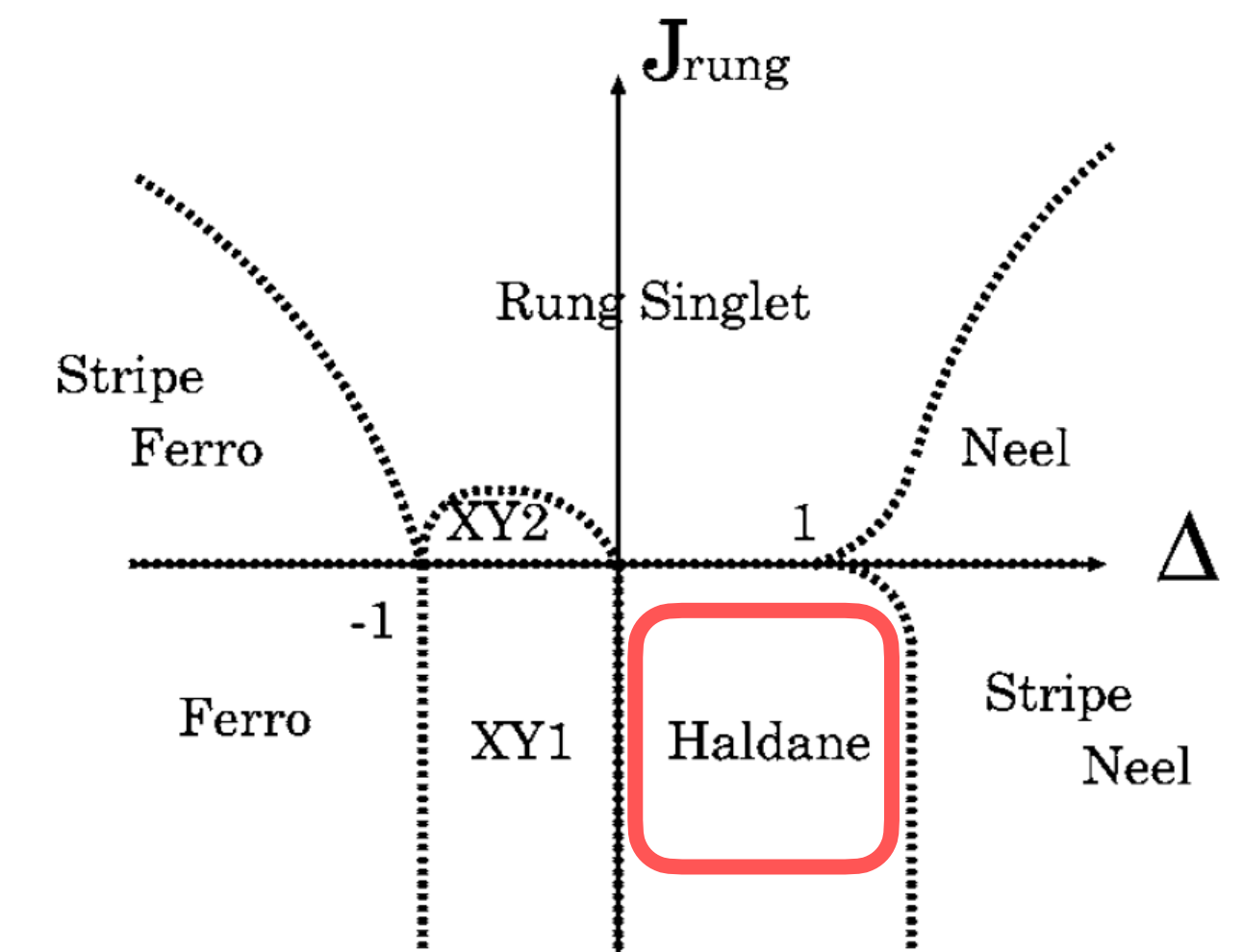
強磁性 $g_{\text{eff}} < 0$

基底状態

- 基底状態は積状態になる. $|GS\rangle = |TLL\rangle \otimes |SPT\rangle$



強磁性 $g_{\text{eff}} < 0$



Hijii, Kitazawa, and Nomura, PRB 72, 014449 (2005)

Entanglement spectrum

- 有限サイズDMRG (OBC)

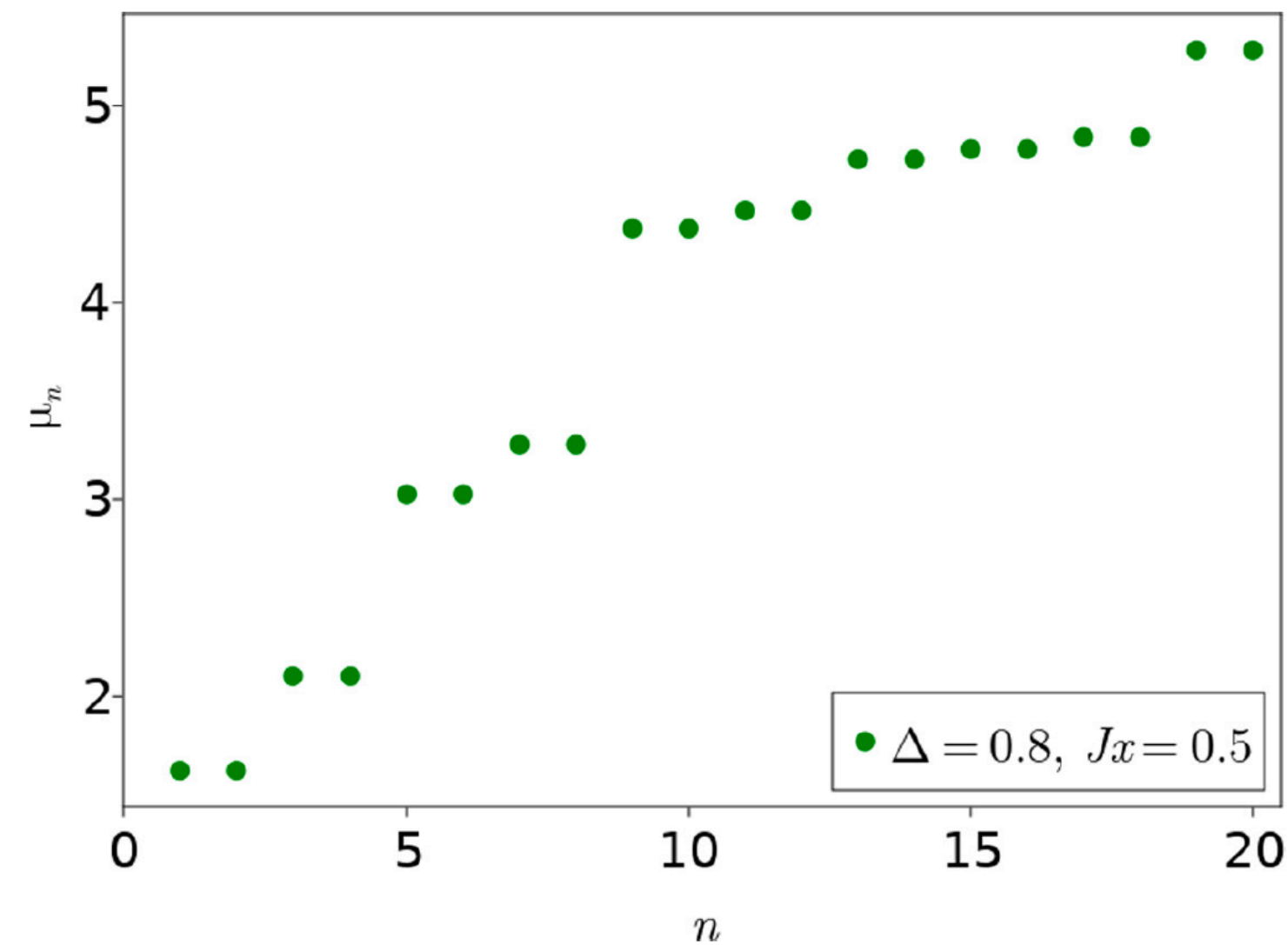


FIG. 5. Entanglement spectrum of ATS XXZ model for $\Delta = 0.8$, $J_x = 0.5$, $L = 100$ at center bond. This result is calculated with the finite DMRG method, and we took the lowest-energy state in the sector where the total magnetization is 1.

- iDMRG

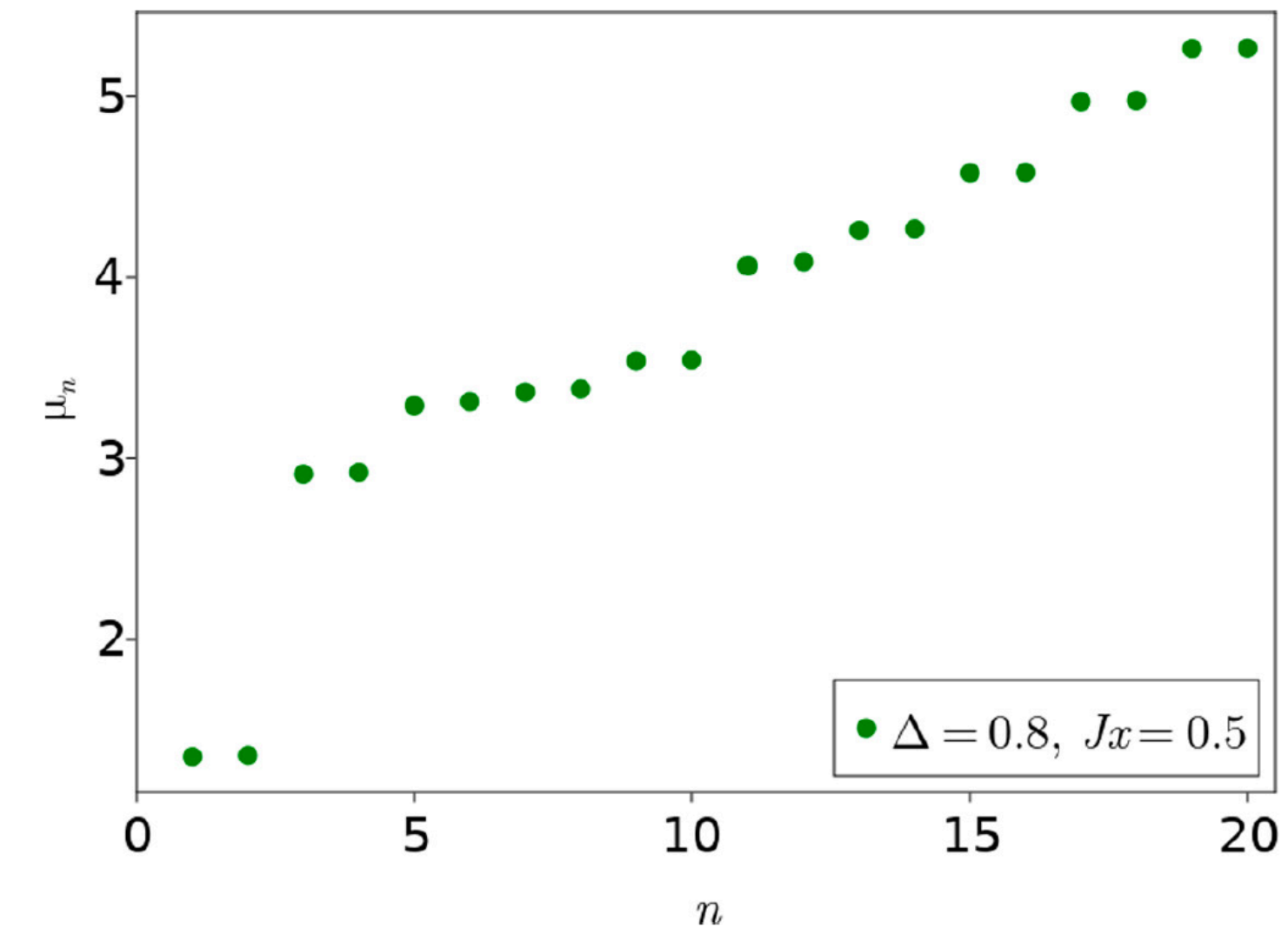


FIG. 7. The entanglement spectrum of ATS XXZ model for $\Delta = 0.8$, $J_x = 0.5$ with V-shaped cutting. The horizontal axis is the numbering of the entanglement spectrum, and the vertical axis represents their values.

次はgaplessであることの確認

Entanglement entropy

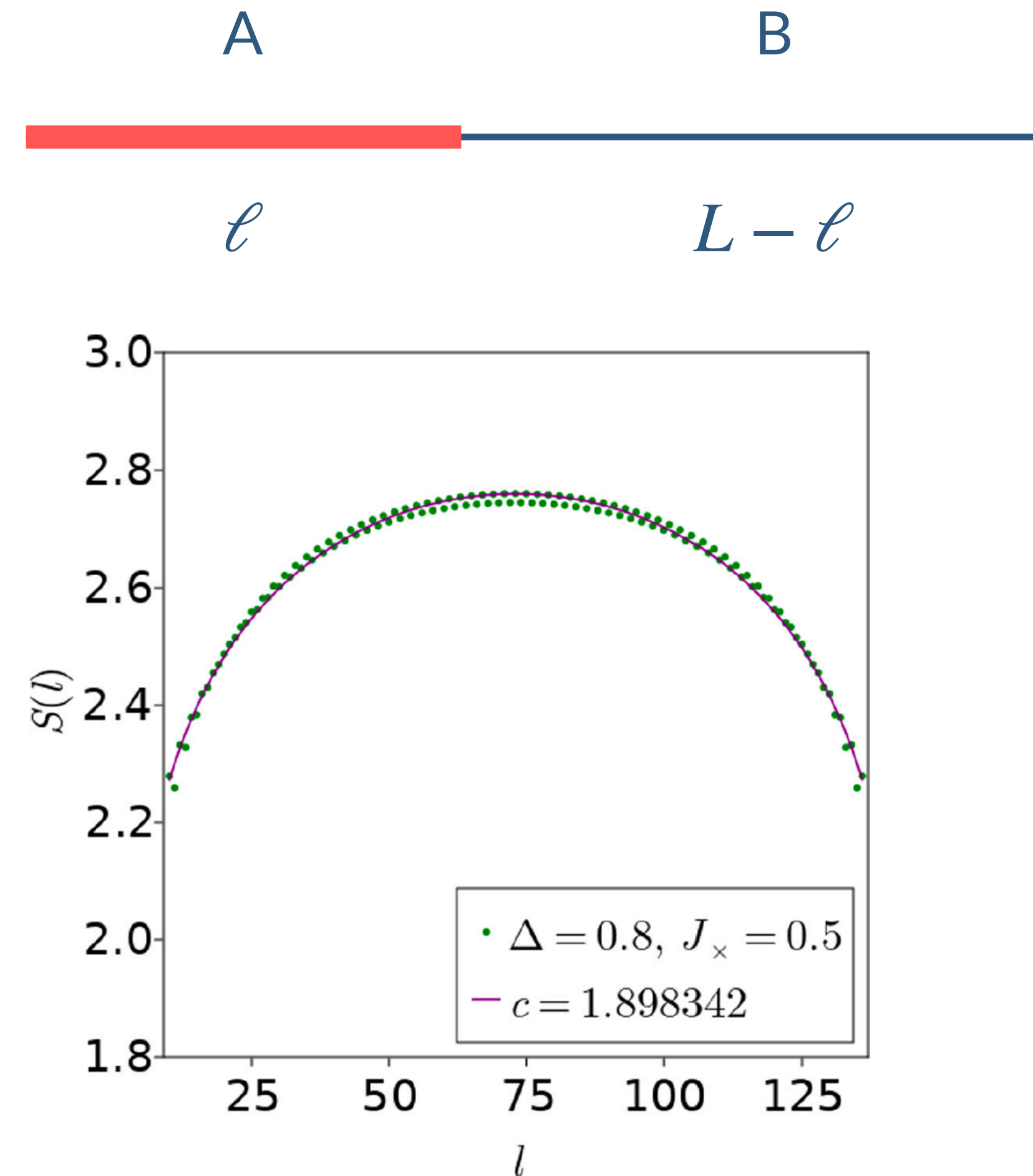
- $\rho_A = \text{tr}_B |\text{GS}\rangle\langle\text{GS}|$

- $S(\ell) = -\text{tr}_A(\rho_A \ln \rho_A)$

$$= \frac{c}{6} \ln \left[\frac{2L}{\pi} \sin \left(\frac{\pi \ell}{L} \right) \right] + c_1 + \ln g$$

boundary entropy

- central charge c が見積もれる。
ただし、無限サイズへ外挿する必要がある。

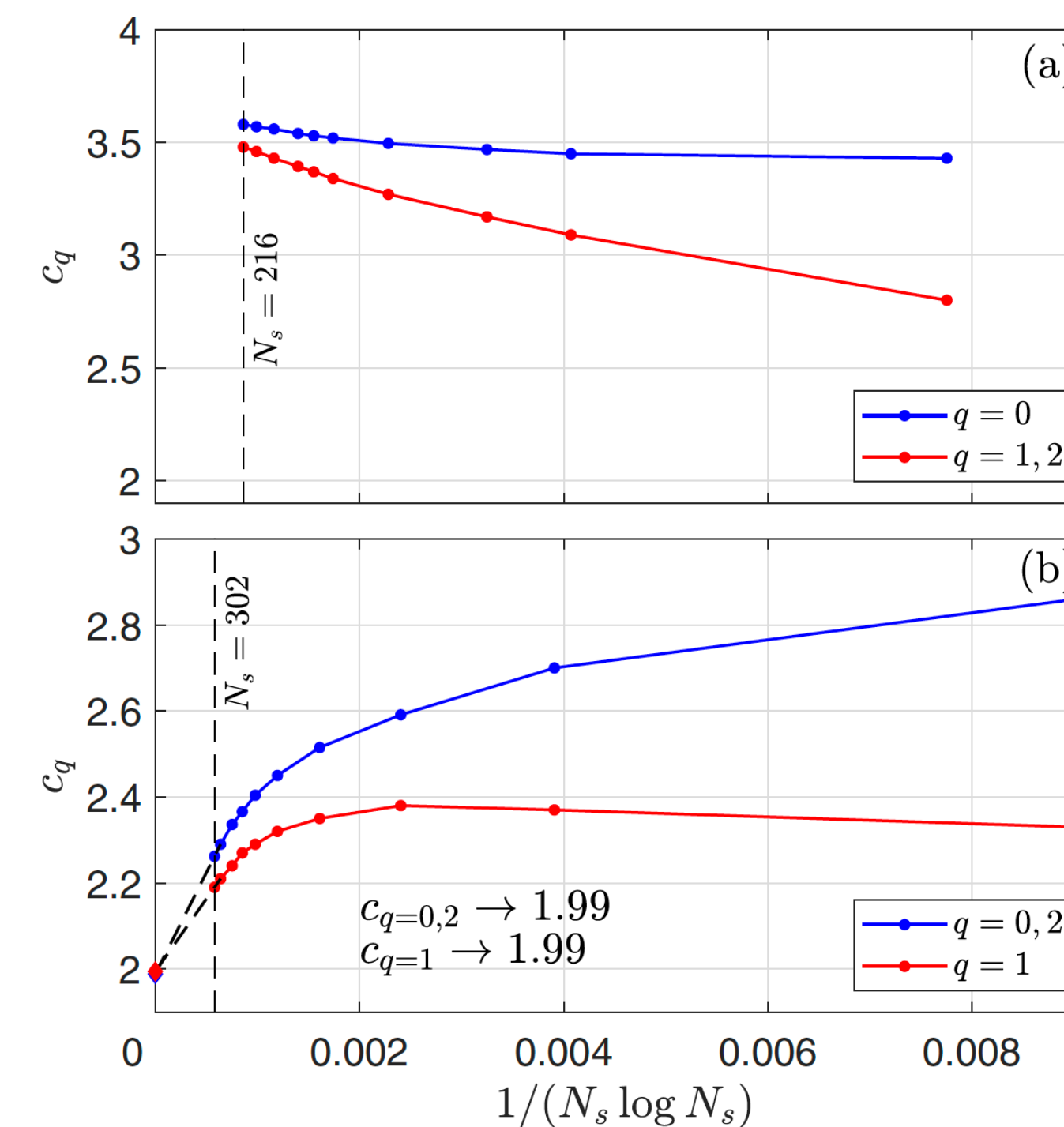
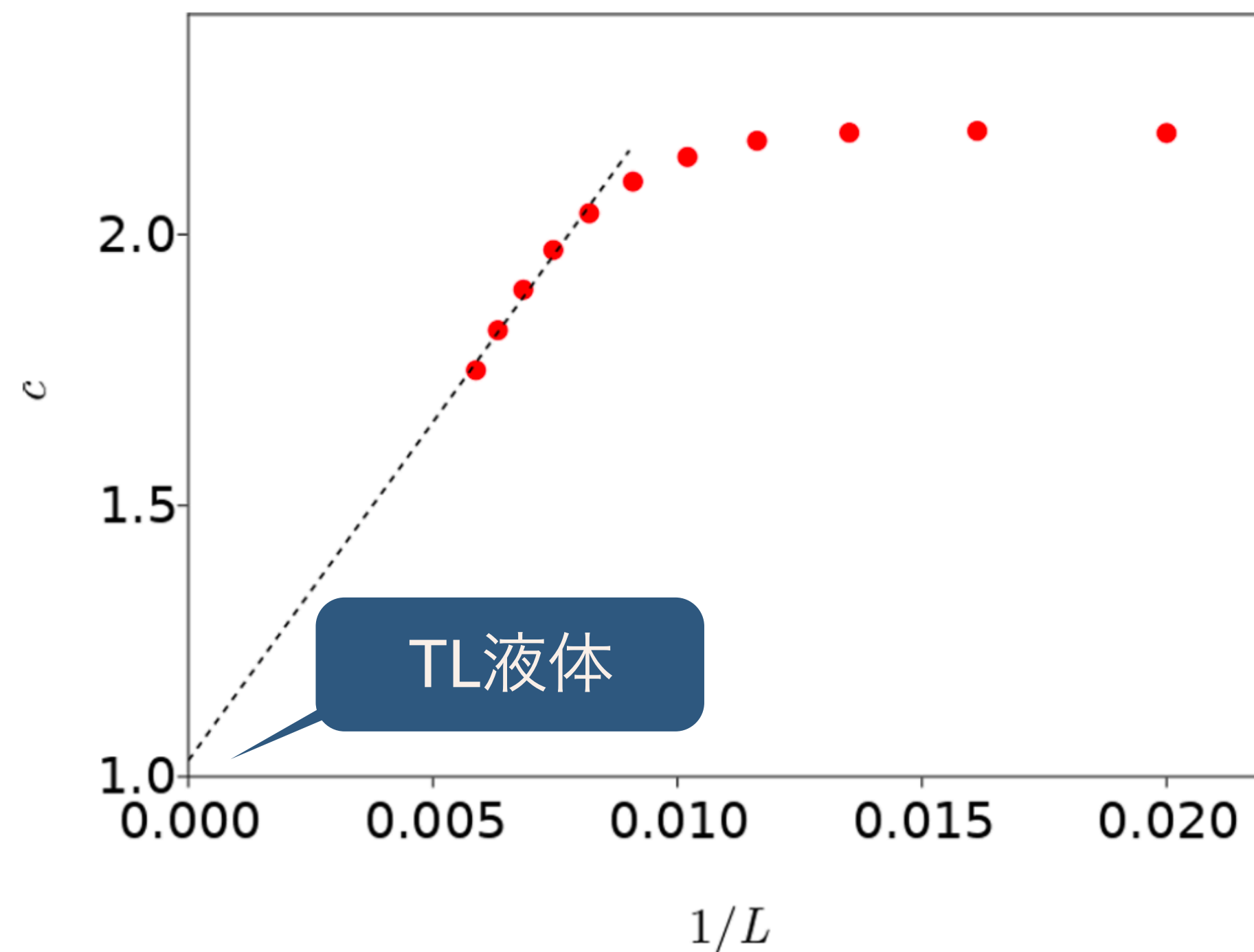


central charge の外挿

- サイズを十分大きくすれば $1/L$ に比例し, $c \approx 1$ へ近づく.
- 小さいサイズでは c が overestimate される (おそらく端自由度のせい).



cf. two-box SU(3) chain



Nataf, Gozel, and Mila, PRB 104, L180401 (2021).

対称性による保護

- “gaplessness”はFuruya-Oshikawaの議論により, $SU(2)$ と並進対称性があれば守られる.

- SPTとしてのトポロジカルな性質の保護は...?

- 対応するgapped SPT ($S=1$ Haldane)を保護する対称性は以下の3つのうち1つ.

(ESの偶数重縮退の保護)

- $D_2 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ スピン 回転対称性
- ボンド中心反転対称性 $\vec{S}_j \rightarrow \vec{S}_{L+1-j}$
- 時間反転対称性

Pollmann, Turner, Berg, and Oshikawa, PRB 81, 064439 (2010).

Pollmann, Berg, Turner, and Oshikawa, PRB 85, 075125 (2012).

- 実はSPTを保護する対称性はgapless セクターの存在のために変わる.

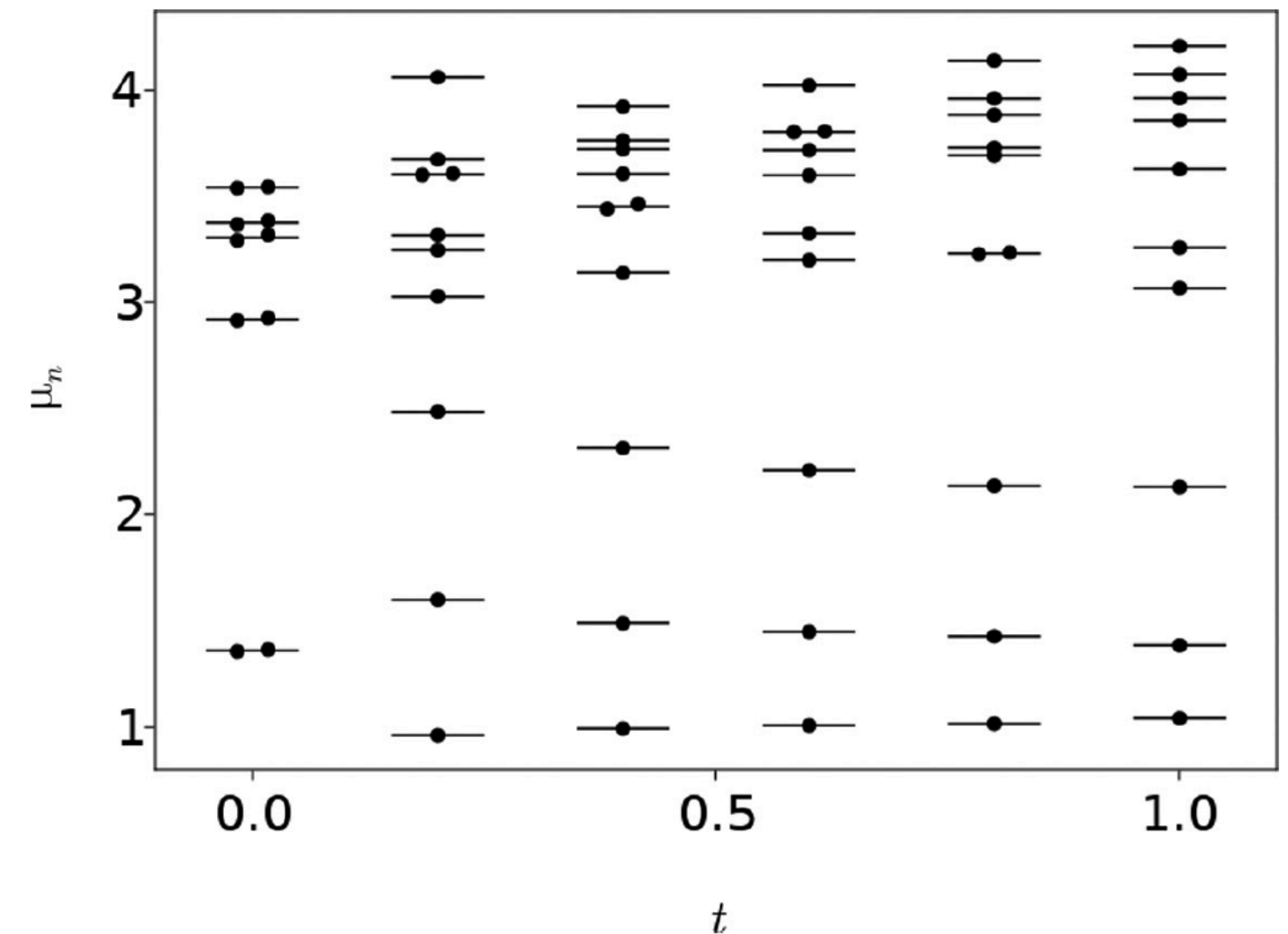
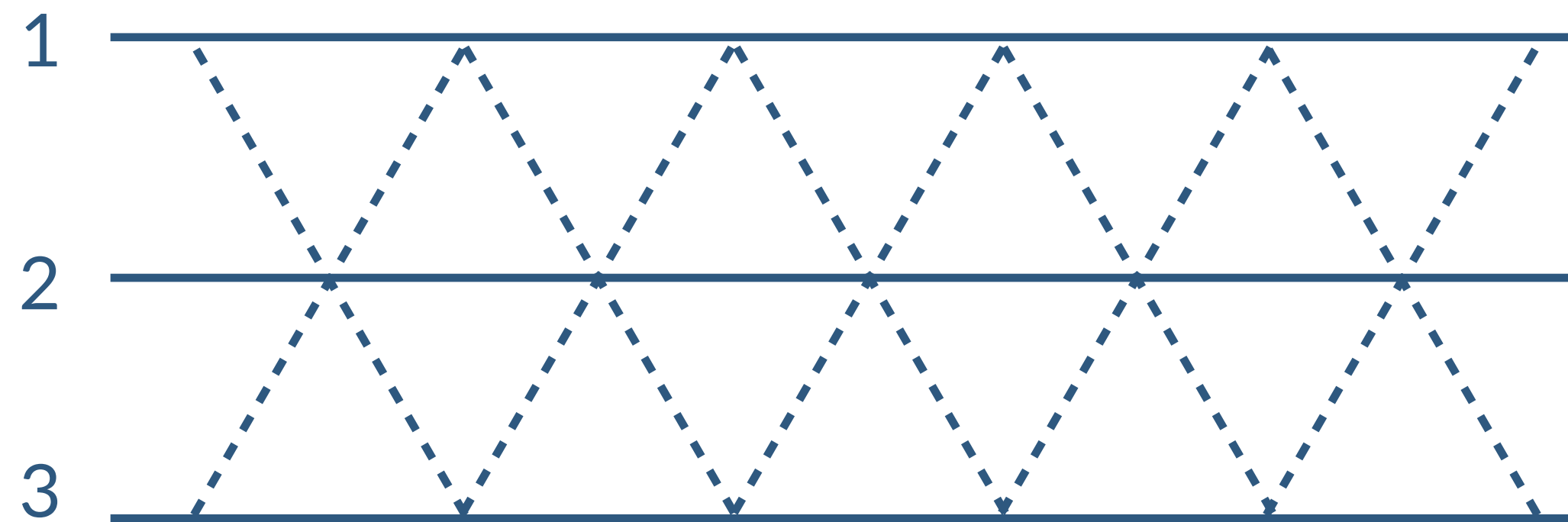
模型を少し変形してみる

- D_2 対称性と時間反転対称性を保ちつつ、幾何学的フラストレーションを解消する。

- $H(t) = H + tH'$

- $H' = -J_{\times} \sum_j \vec{S}_{j,2} \cdot (\vec{S}_{j+1,1} + \vec{S}_{j+1,3})$

$t \neq 0$ になった途端にESの縮退が解ける



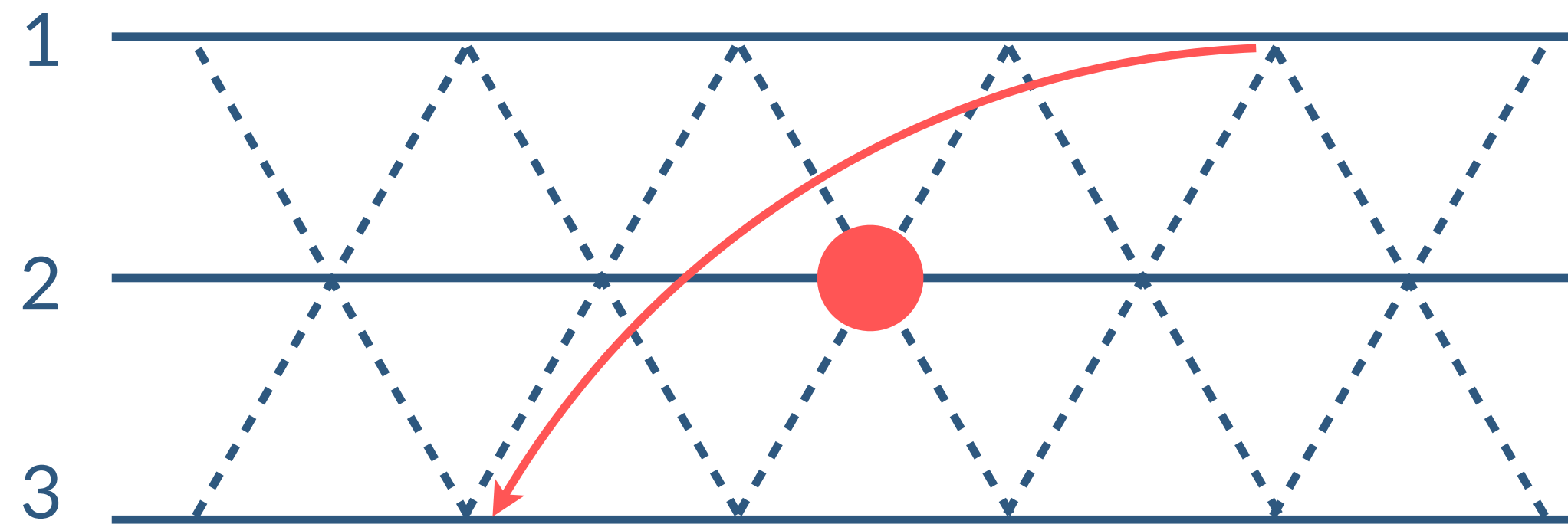
反転対称性による保護

- 右図の反転中心についての反転：

$$\begin{pmatrix} \vec{S}_{j,1} \\ \vec{S}_{j,2} \\ \vec{S}_{j,3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \vec{S}_{L+1-j,3} \\ \vec{S}_{L-j,2} \\ \vec{S}_{L+1-j,1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \vec{N}_1(x) \\ \vec{N}_2(x) \\ \vec{N}_3(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\vec{N}_3(L-x) \\ \vec{N}_2(L-x) \\ -\vec{N}_1(L-x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1(x) \\ \varepsilon_2(x) \\ \varepsilon_3(x) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varepsilon_3(L-x) \\ -\varepsilon_2(L-x) \\ \varepsilon_1(L-x) \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} \text{ボソン化公式：} \quad \vec{S}_{j,n} &= \vec{J}_{R,n} + \vec{J}_{L,n} + (-1)^{j+n} \vec{N}_n \\ (-1)^{j+n} \vec{S}_{j,n} \cdot \vec{S}_{j+1,n} &\sim \varepsilon_n \end{aligned}$$

$N_n^a N_2^b, \varepsilon_n \varepsilon_2, N_n^a \varepsilon_2, \varepsilon_n N_2^a$ ($n = 1, 3$) はすべて SU(2)回転と反転対称性の下で禁止.

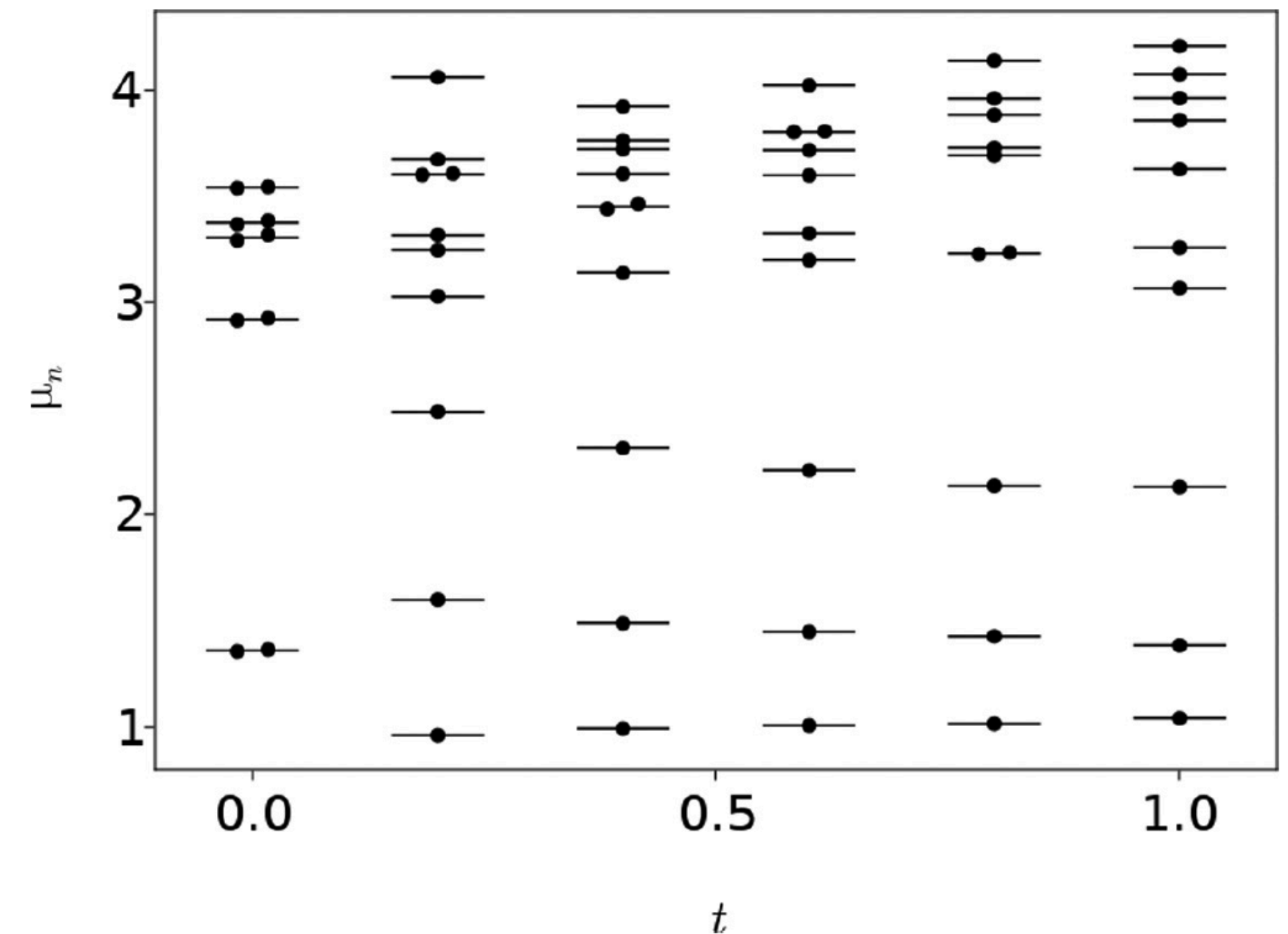
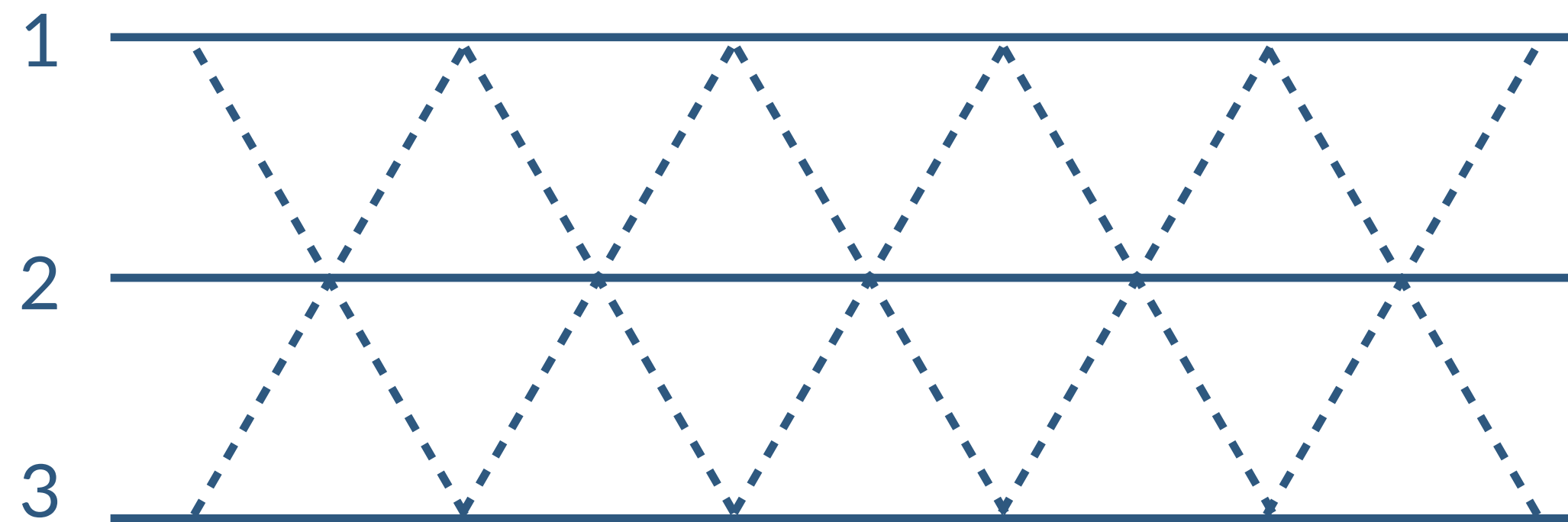
模型を少し変形してみる

- D_2 対称性と時間反転対称性を保ちつつ、幾何学的フラストレーションを解消する。

- $H(t) = H + tH'$

- $H' = -J_{\times} \sum_j \vec{S}_{j,2} \cdot (\vec{S}_{j+1,1} + \vec{S}_{j+1,3})$

$t \neq 0$ になった途端にESの縮退が解ける



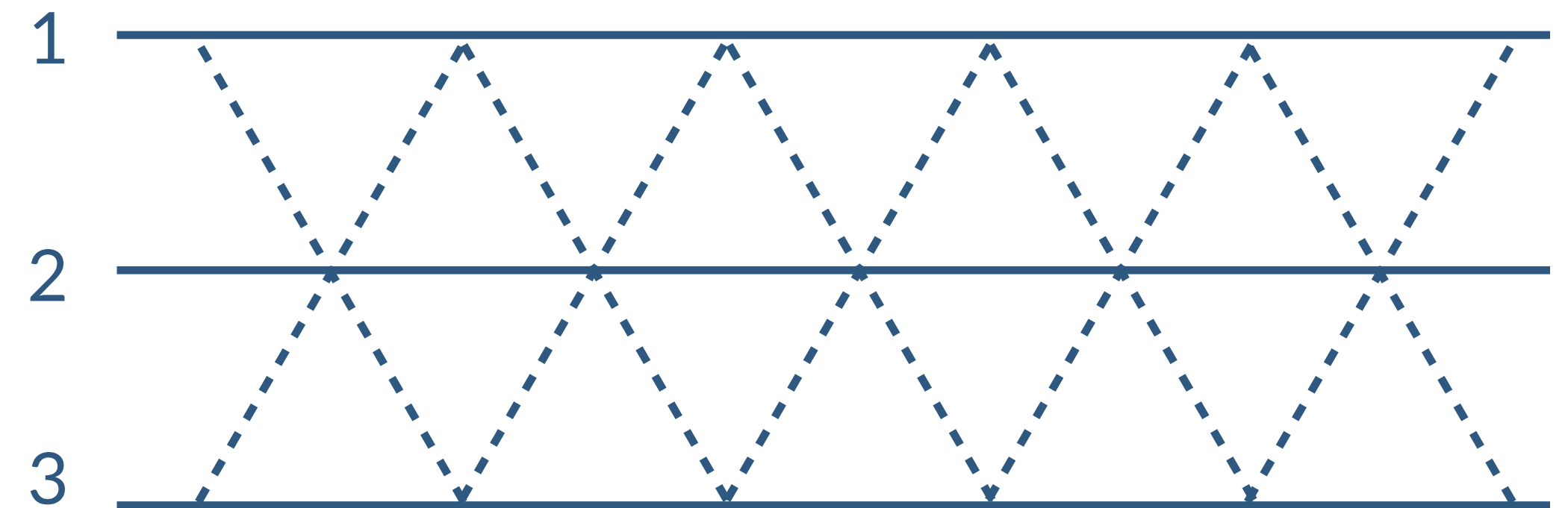
反転対称性がなくなり、 $\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2$ や $\vec{N}_3 \cdot \vec{N}_2$ が現れ、TL液体とSPTが結合し、トポロジカルに自明になる。

まとめと議論

- 異方的三角格子strip Heisenberg (XXZ)模型の基底状態が

$$|GS\rangle = |SPC\rangle \otimes |SPT\rangle$$

であり, gapless SPT相に属することを確認.



- gapless相としての安定性はglobal anomalyに起因する.
- トポロジカルな性質 (ESの縮退) を保護する対称性はgapped SPTのものと部分的に一致する.
 - gapped SPT (Haldane) : D_2 , ボンド中心反転, 時間反転
 - gapless SPT : 反転
- 端状態はスピンギャップがなく, 鎖間相互作用が小さいため非常に見えにくい.

今回のトピック

PRL **118**, 021601 (2017)

PHYSICAL REVIEW LETTERS

week ending
13 JANUARY 2017

Symmetry Protection of Critical Phases and a Global Anomaly in 1 + 1 Dimensions

Shunsuke C. Furuya¹ and Masaki Oshikawa²

¹*Condensed Matter Theory Laboratory, RIKEN, Wako, Saitama 351-0198, Japan*

²*Institute for Solid State Physics, University of Tokyo, Kashiwa 277-8581, Japan*

(Received 25 March 2015; revised manuscript received 24 November 2016; published 11 January 2017)

We derive a selection rule among the (1 + 1)-dimensional SU(2) Wess-Zumino-Witten theories, based on the global anomaly of the discrete \mathbb{Z}_2 symmetry found by Gepner and Witten. In the presence of both the SU(2) and \mathbb{Z}_2 symmetries, a renormalization-group flow is possible between level- k and level- k' Wess-Zumino-Witten theories only if $k \equiv k' \pmod{2}$. This classifies the Lorentz-invariant, SU(2)-symmetric critical behavior into two “symmetry-protected” categories corresponding to even and odd levels, restricting possible gapless critical behavior of translation-invariant quantum spin chains.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.118.021601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.021601)

対称性に守られた量子臨界相

[[SCF](#) and Oshikawa, PRL (2017)]

PHYSICAL REVIEW B **106**, 144436 (2022)

Gapless symmetry-protected topological phase of quantum antiferromagnets on anisotropic triangular strip


Yuichiro Hidaka,¹ Shunsuke C. Furuya^{2,3}, Atsushi Ueda^{2,1} and Yasuhiro Tada^{4,1}

¹*Institute for Solid State Physics, University of Tokyo, Kashiwa 277-8581, Japan*

²*Department of Physics, Ibaraki University, Mito, Ibaraki 310-8512, Japan*

³*Department of Basic Science, University of Tokyo, Meguro, Tokyo 153-8902, Japan*

⁴*Quantum Matter Program, Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University, Higashihiroshima, Hiroshima 739-8530, Japan*

 (Received 30 May 2022; revised 5 October 2022; accepted 14 October 2022; published 28 October 2022)

gapless SPT相

[Hidaka, [SCF](#), Ueda, and Tada, PRB (2022)]

1次元量子スピン系ではうまくいく

gapless SPT相の端状態の観測

- gaplessセクターをnon-magneticな自由度, SPT (Haldane)をmagneticな自由度に担わせれば端状態がはっきり見える.

SCF and Morita, arXiv:2207.02485

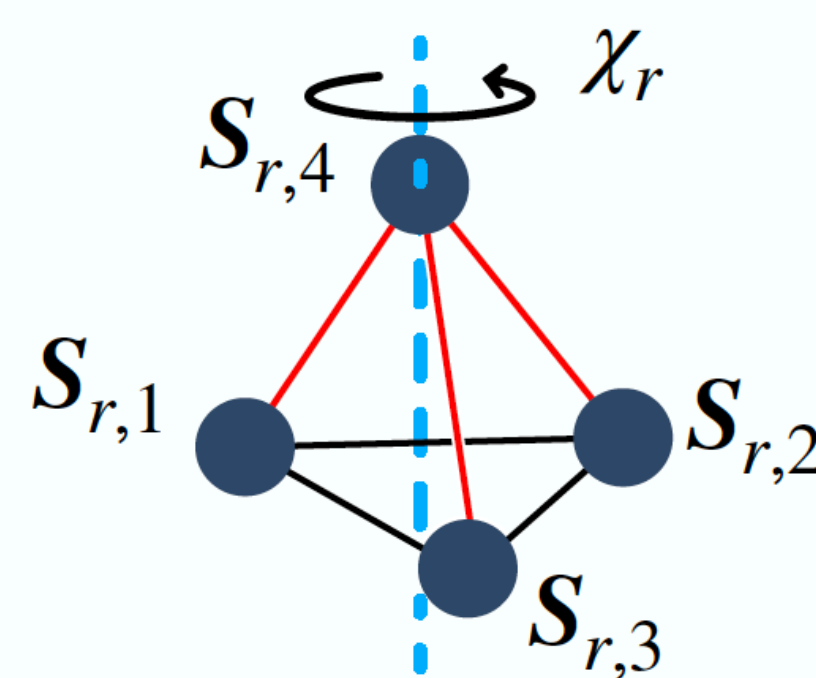
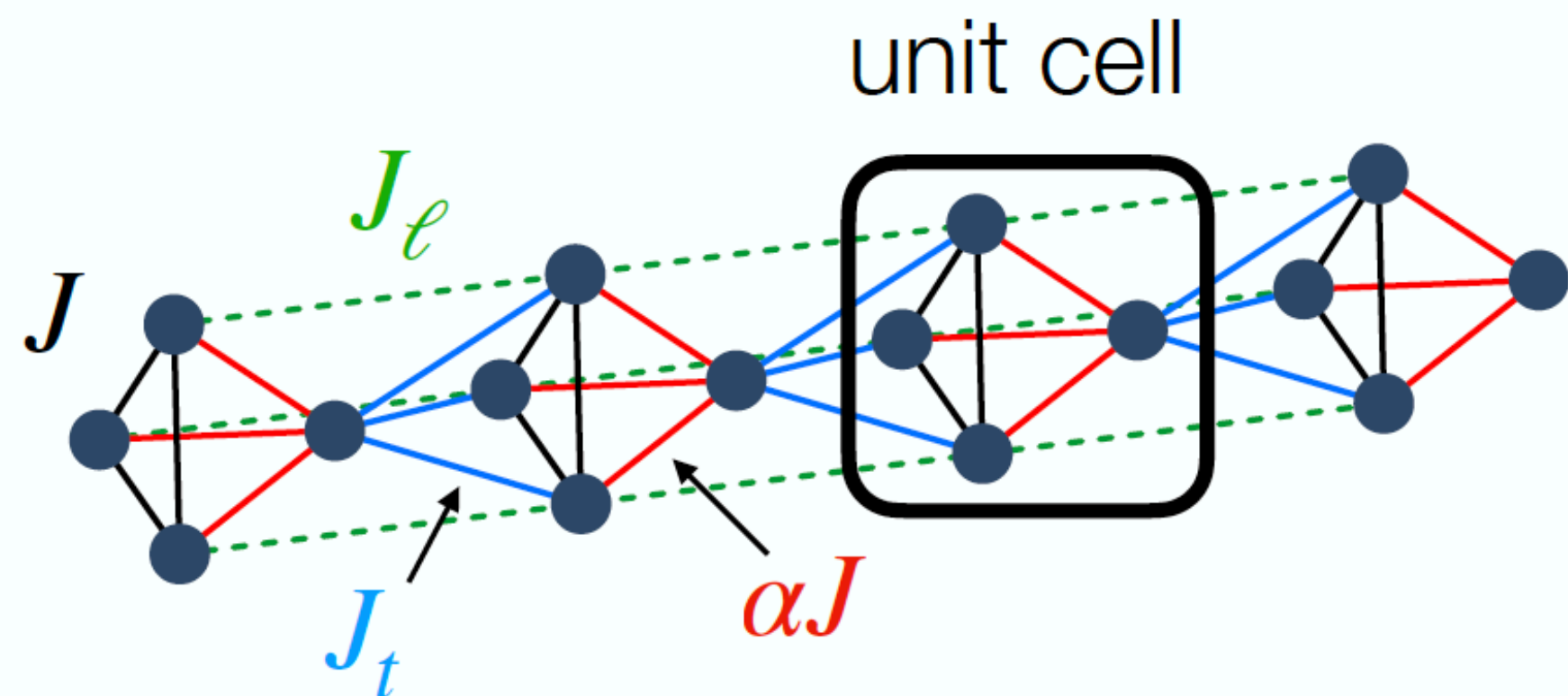
Gapless chirality liquid with symmetry-protected edge spins

Shunsuke C. Furuya¹ and Katsuhiko Morita²

¹*Department of Basic Science, University of Tokyo, Meguro, Tokyo 153-8902, Japan*

²*Department of Physics, Faculty of Science and Technology,
Tokyo University of Science, Chiba 278-8510, Japan*

(Dated: July 7, 2022)



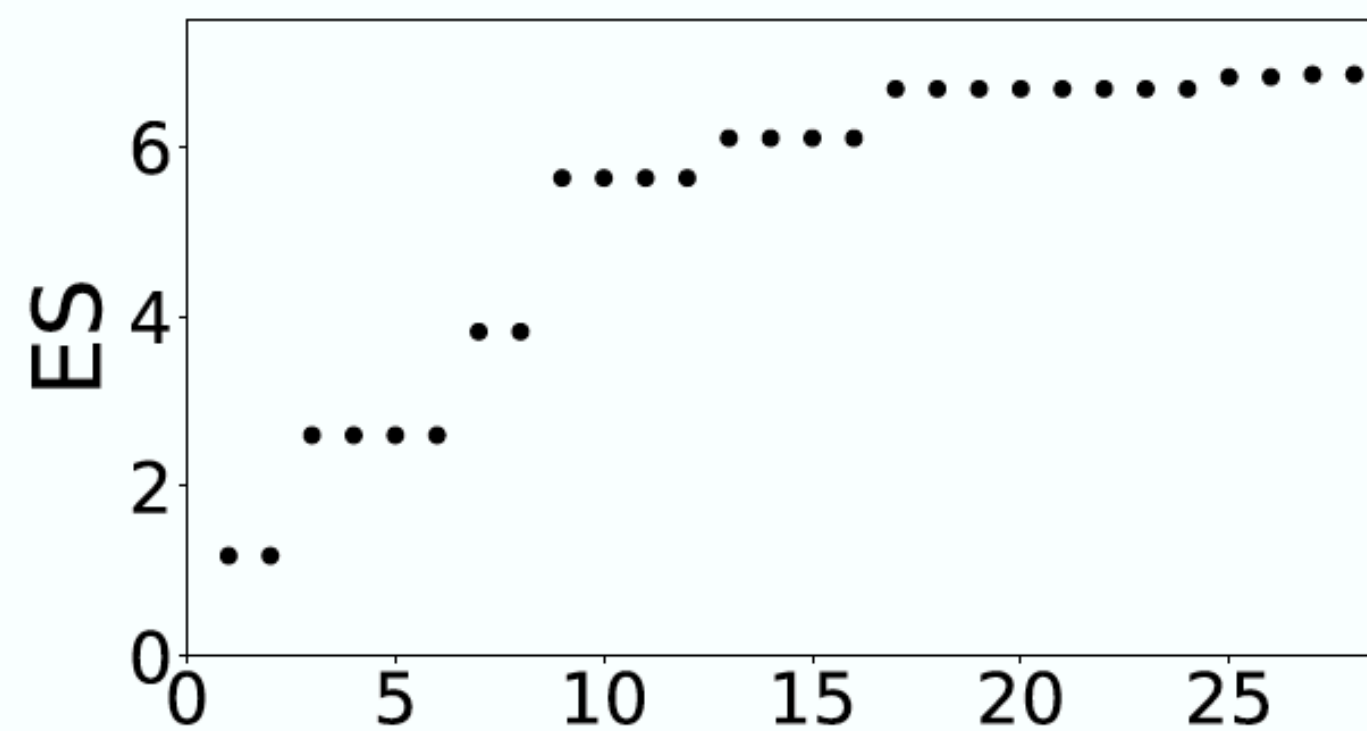
$$|\text{GS}\rangle = |\text{TLL}\rangle \otimes |\text{SPT}\rangle$$

chirality d.o.f.

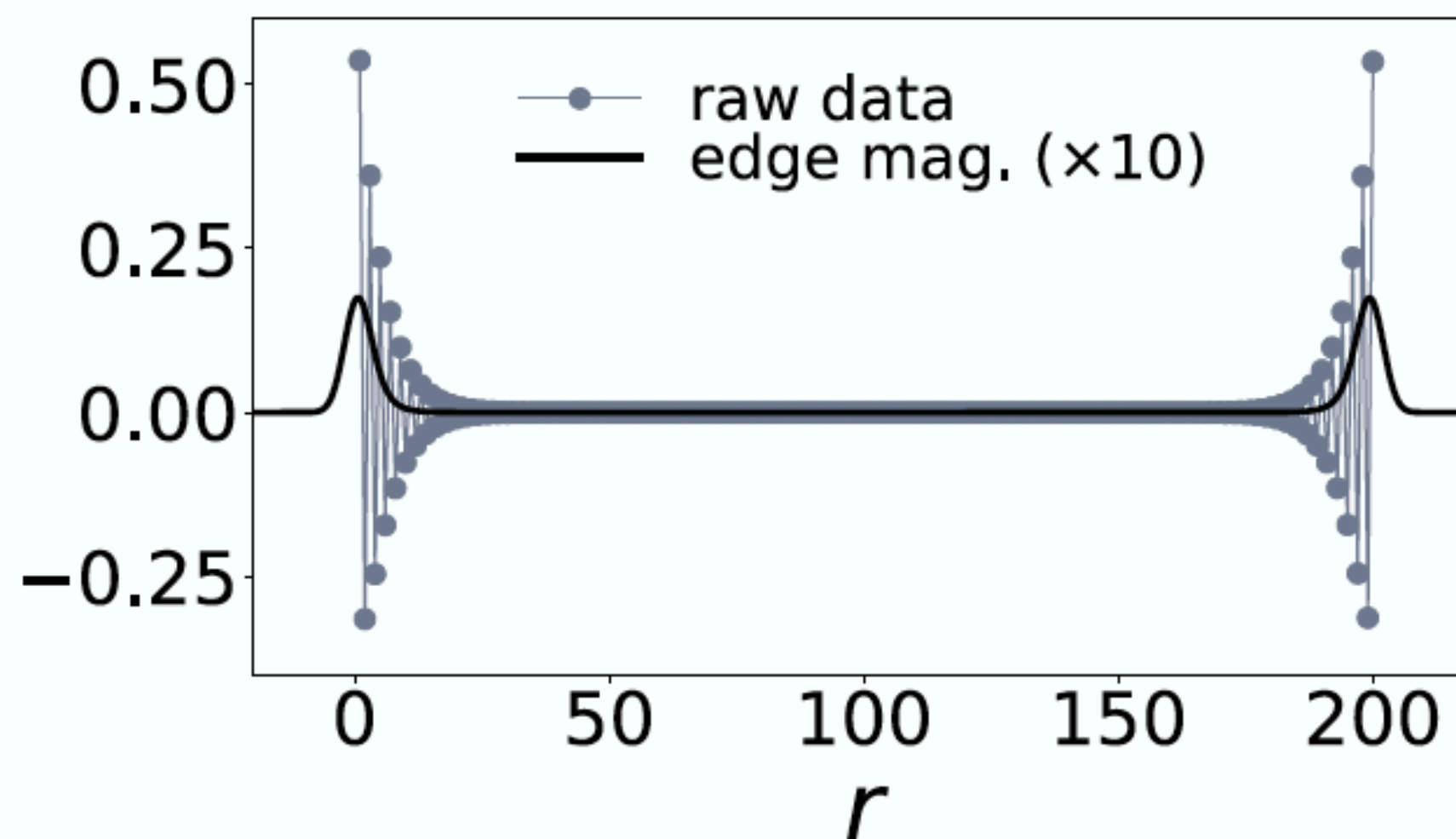
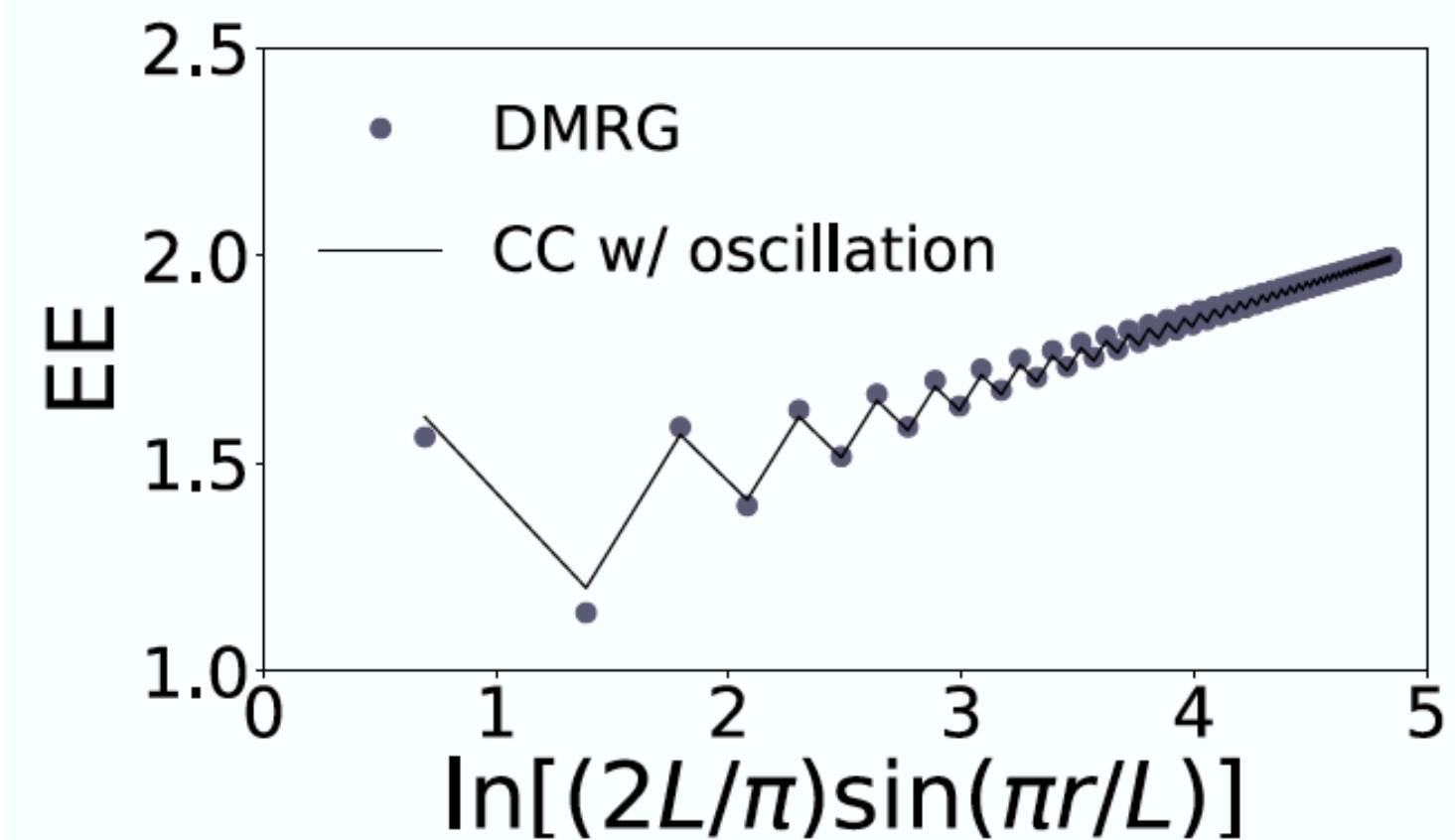
cf. Okunishi *et al.*, PRB 85, 054416(R) (2012).

端状態がきれいに見える

- 偶数重縮退したES



- 臨界的なEE ($c \approx 1$)



- SPTに起因する端状態と端磁化

cf. SCF and Sato, PRB 104, 184401 (2021)

まとめ

- 対称性に守られた量子臨界相という強相関量子多体系のgapless相の分類の新しい枠組み.
 - その主張の一部にLSM定理的な「gapless相の安定性」が含まれる.
- 量子臨界相の分類に対称性のゲージ化と場の理論のアノマリーが重要である.
 - 相関長が十分長ければ量子相と量子場理論の対応が期待されるので、2次元以上でも同様と期待.
- gapless SPT相を「SPTセクターを伴うSPC相」として、（おそらく）最も単純な模型を議論.
 - トポロジカルな性質を保護する対称性が、対応するgapped SPT相のそれと異なる.

対称性に守られた量子臨界 (SPC)相 [SCF and Oshikawa, PRL (2017)]

SPC相としてのgapless SPT相 [Hidaka, SCF, Ueda, and Tada, PRB (2022)]

gapless SPTとしてのカイラリティ液体 [SCF and Morita, arXiv:2207.02485]