

アクティブ乱流の気持ち： 如何にして秩序化し、如何にして乱れるか？

西口大貴

東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻

Collaborators

A. Sokolov (Argonne, US), I.S. Aranson (Penn State, US),

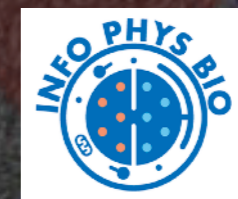
S. Heidenreich, M. Bär (PTB, Berlin)

H. Reinken, S.H.L. Klapp (TU Berlin)

Y. Takaha, S. Shiratani, K.A. Takeuchi (UTokyo)

Funding

科研費
KAKENHI



アクティブマター：動きまわる要素の集団



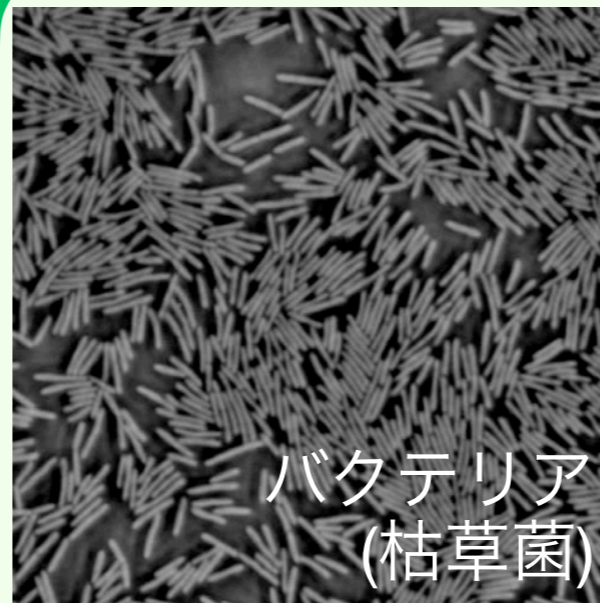
カツオ

<https://youtu.be/D6HdolsLMFg>



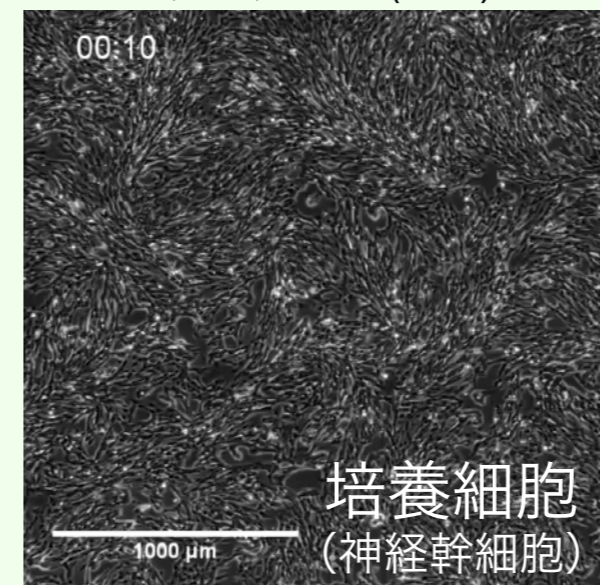
鳥

https://youtu.be/_tEFRAI9WSE



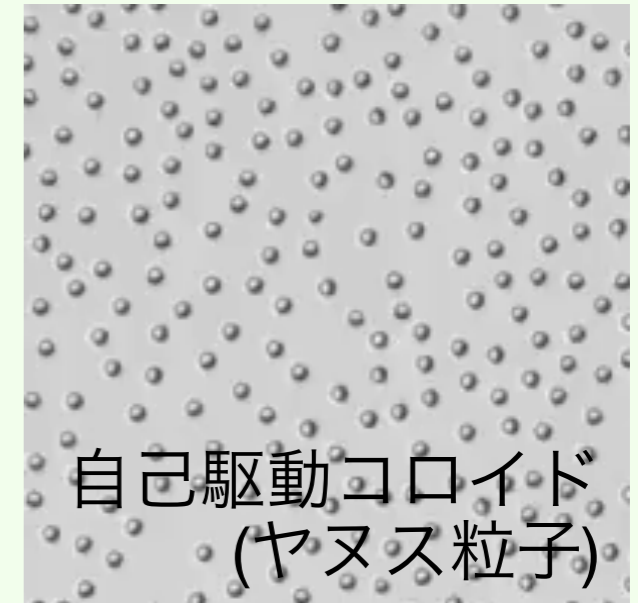
バクテリア
(枯草菌)

Zhang, et al.,
PNAS, 107, 13626 (2010)



培養細胞
(神経幹細胞)

Kawaguchi, et al.,
Nature, 545, 327 (2017)



自己駆動コロイド
(ヤヌス粒子)

Iwasawa, Nishiguchi, Sano
Phys.Rev.Res., 3, 043104 (2021)

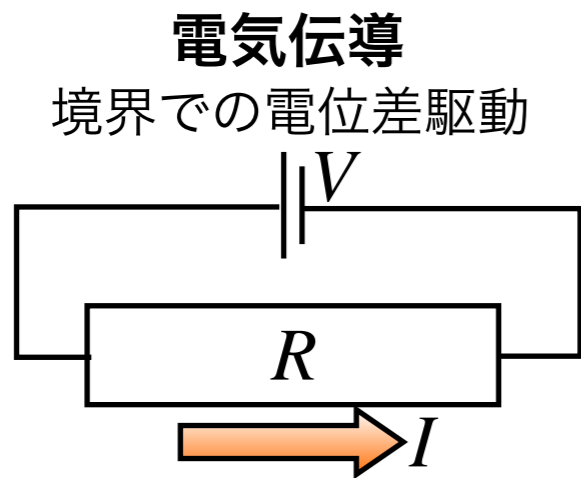
微小系：大粒子数＋制御可能
→統計物理実験に適している

統計物理学の発想：これらに普遍法則や支配方程式は存在するか？
非平衡“分子”からなる物質に発現する物性は？
→生命科学にも貢献できるとの期待感

非平衡系におけるアクティブマターの位置づけ

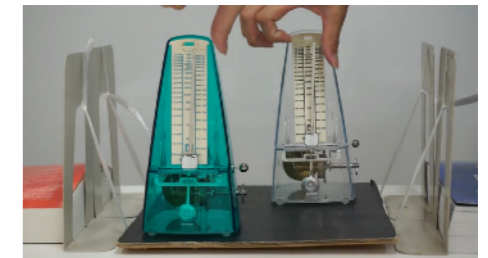
■どのように系を非平衡にするか？

- 1) 外場, 境界条件による駆動 2) 平衡への緩和が非常に長い 3) 構成要素が非平衡



- 要素スケールで
エネルギーの注入と散逸

結合振動子系



<https://www.youtube.com/@daikinishiguchi>

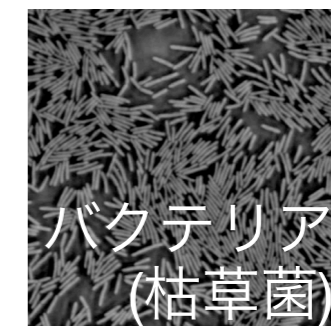
Navier-Stokes乱流



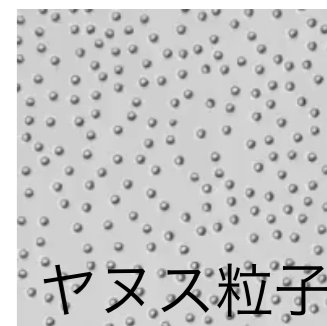
Sano & Tamai,
Nat. Phys., 12, 249 (2016)



アクティブマター



Zhang et al.,
PNAS (2010)



Iwasawa et al.,
Phys.Rev.Res. (2021)

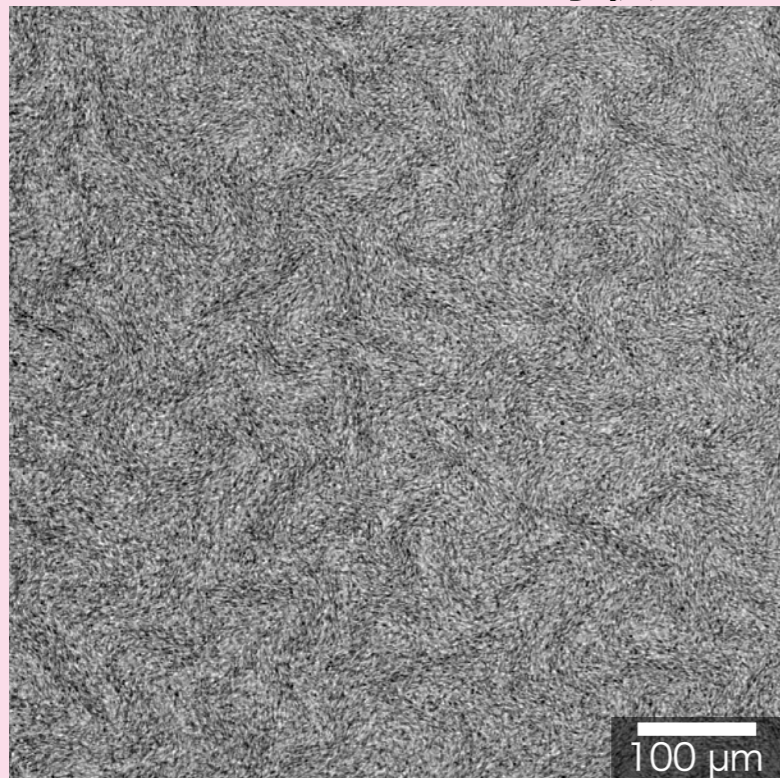
- エネルギーを変換し動き回る
- 運動の向きは
内部自由度で決まる



- アクティブマターは“非平衡度”が高く challengingだが、その分だけ他の系に無い新奇な現象が現れる魅力がある。
- 生物の挙動などの実験から統計物理の理論的Questionを提示できる面白さ。

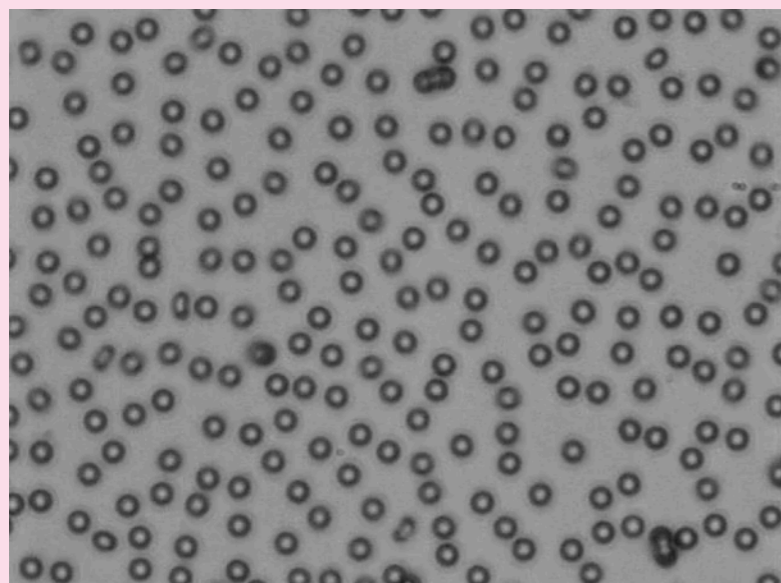
乱れた集団運動はあちこちで見られる

バクテリア懸濁液



Nishiguchi et al.
Nat. Comm., 9, 4486 (2018)

電場駆動の非対称コロイド

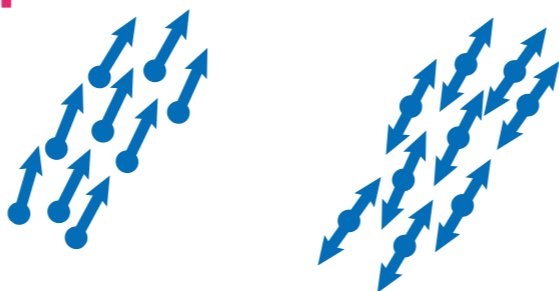


Nishiguchi & Sano,
Phys. Rev. E, 92, 052309 (2015)

アクティブ乱流

相互作用の対称性

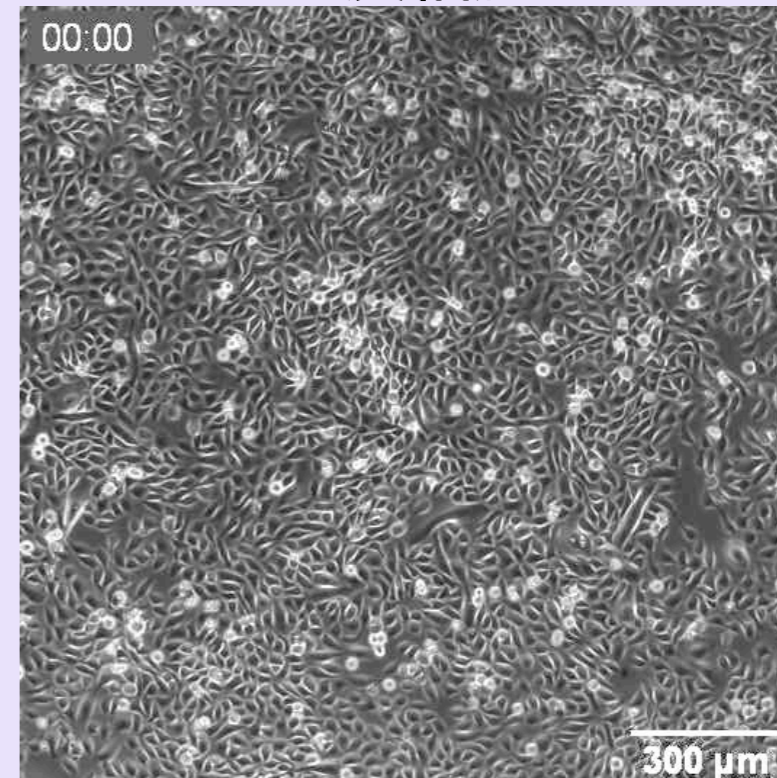
polar nematic



共通する性質?

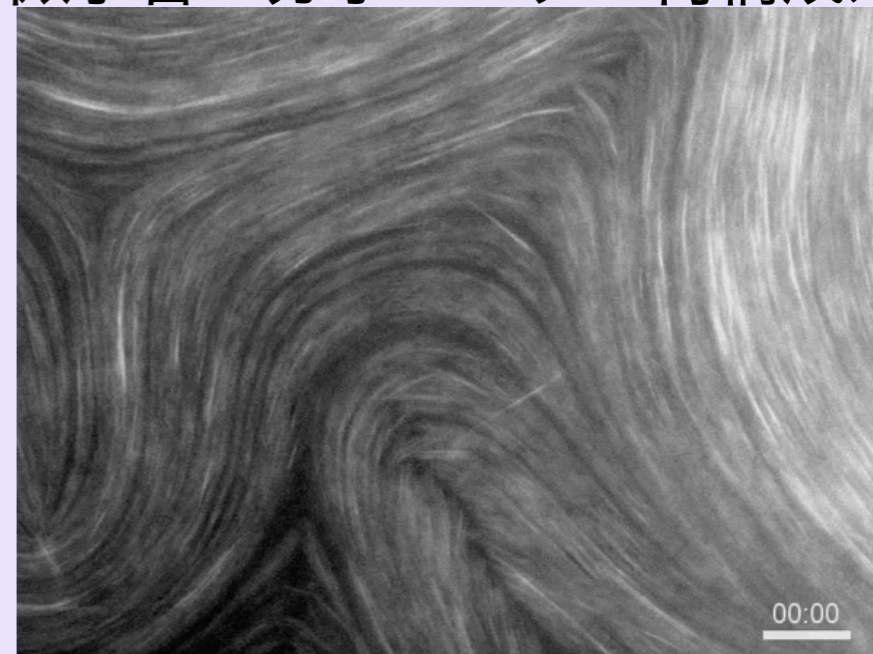
異なる法則?

上皮細胞



Blanch-Mercader, et al.
PRL, 120, 208101 (2018)

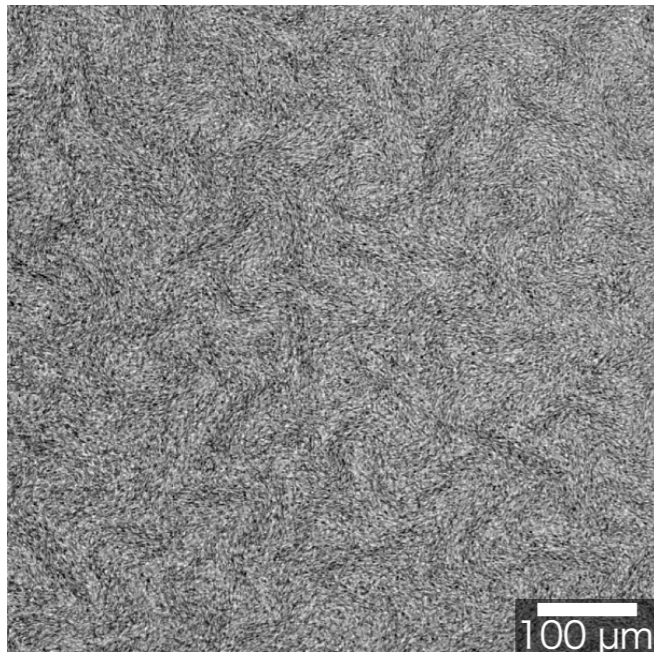
微小管+分子モーター再構成系



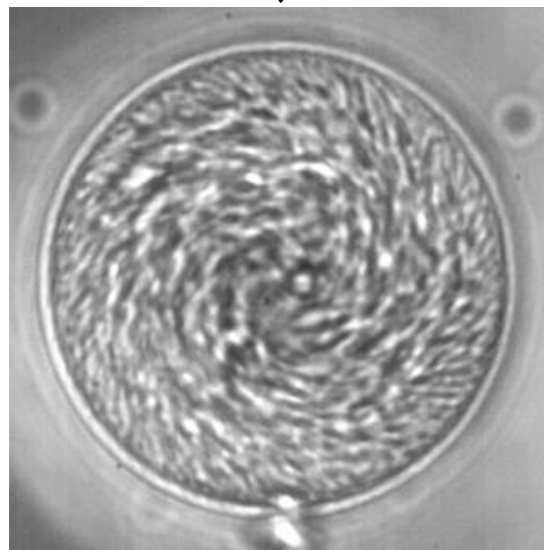
Sanchez, et al. *Nature*, 491, 431 (2012)

共通: 閉じ込めると渦が安定化する

バクテリア懸濁液

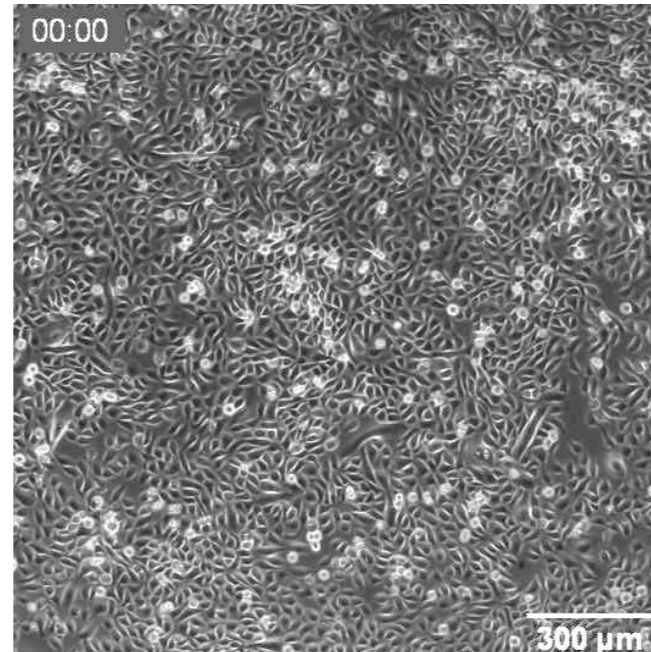


Nishiguchi, et al.
Nat. Comm, 9, 4486 (2018)

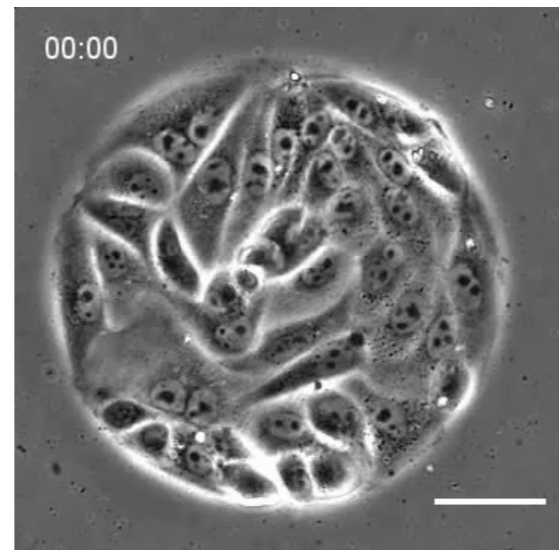


H. Wioland, et al.
PRL 110, 268102 (2013)

上皮細胞

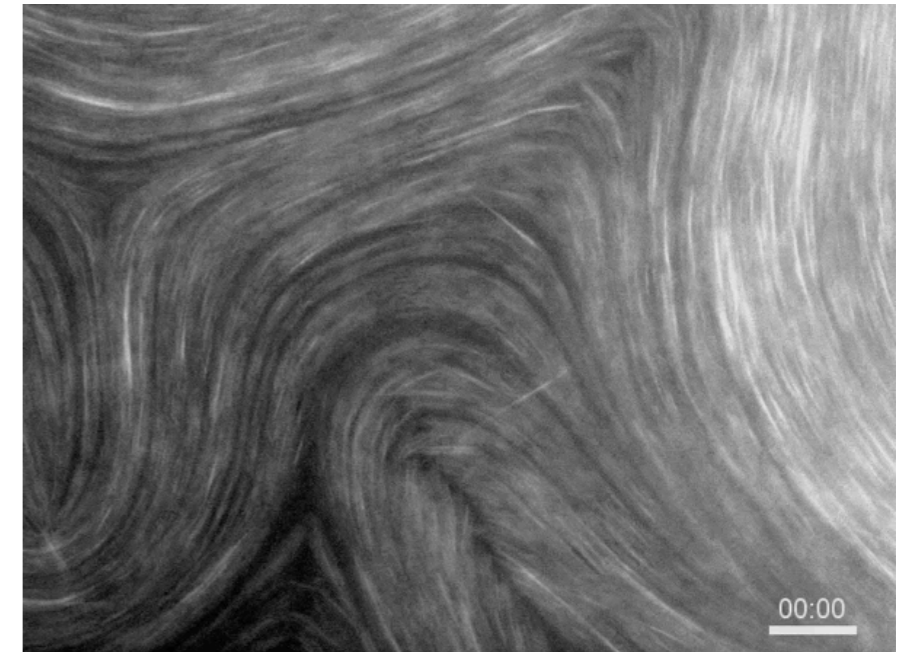


Blanch-Mercader, et al.
PRL, 120, 208101 (2018)

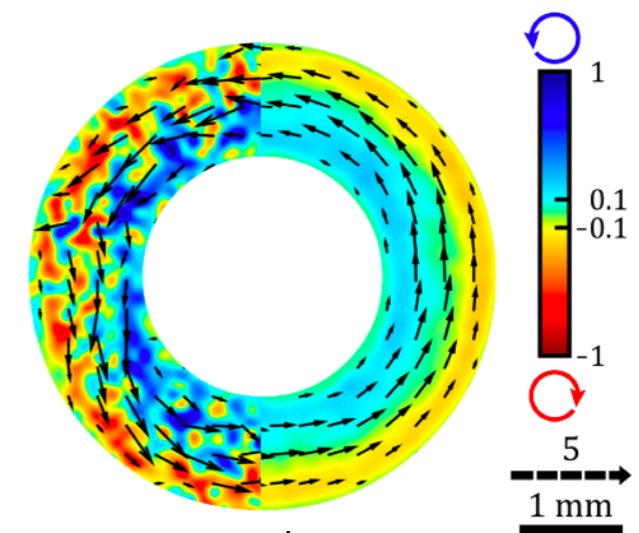


K. Doxzen et al.
Integr. Biol. 5, 1026 (2013)

微小管+分子モーター



Sanchez, et al.
Nature, 491, 431 (2012)

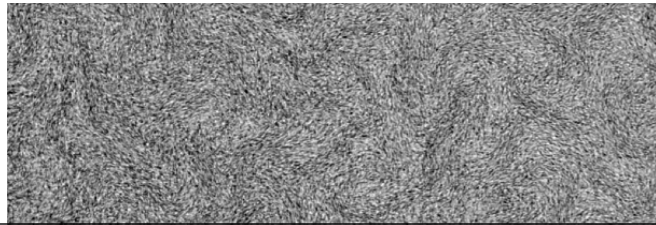


K.-T. Wu, et al.
Science 355, eaal1979 (2017)

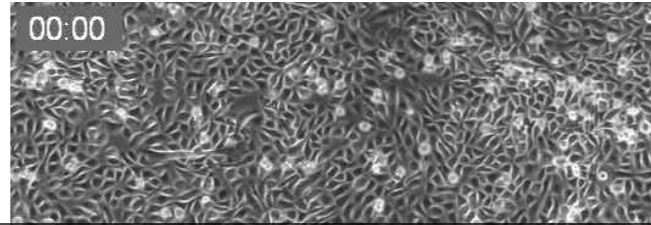
**バルクの流体記述は提案されて、バルクの性質はよく再現できた。
しかし閉じ込め系の再現は、境界条件が不明でうまくできていなかった。**

共通: 閉じ込めると渦が安定化する

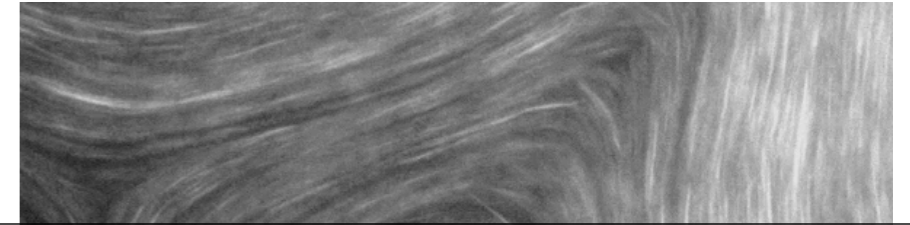
バクテリア懸濁液



上皮細胞



微小管+分子モーター



今日話すこと: polarな系の代表例のバクテリア乱流を詳細に調べる

- アクティブ乱流の原理や流体記述の概説
- 実験からの境界条件の推定

Nishiguchi et al. *Nat. Commun.* (2018), Reinken, Nishiguchi et al. *Commun. Phys.* (2020)

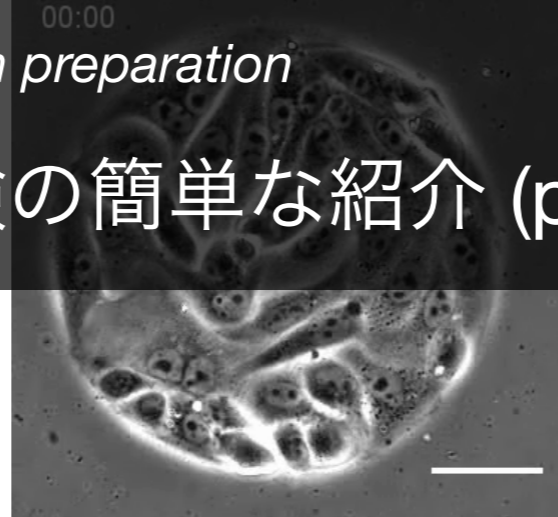
- 閉じ込め半径を大きくしていったときに乱流へ至る道筋は? (数値計算)
- 振動解とカオス解を行き来するreentrantな転移が見えた

Shiratani, Takeuchi, Nishiguchi, *in preparation*

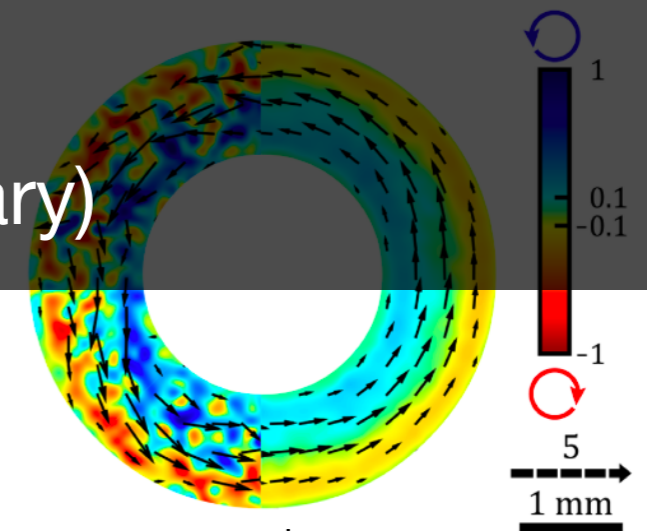
- ごく最近やっている実験の簡単な紹介 (preliminary)



H. Wioland, et al. *PRL* 110, 268102 (2013)



K. Doxzen et al. *Integr. Biol.* 5, 1026 (2013)

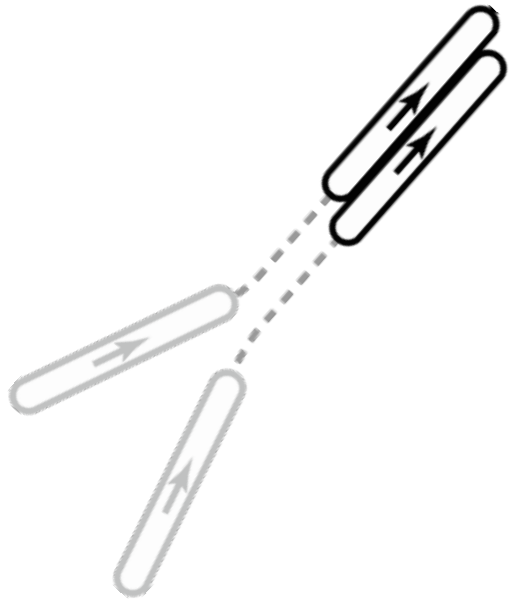


K.-T. Wu, et al. *Science* 355, eaal1979 (2017)

バルクの流体記述は提案されて、バルクの性質はよく再現できた。
しかし閉じ込め系の再現は、境界条件が不明でうまくできていなかった。

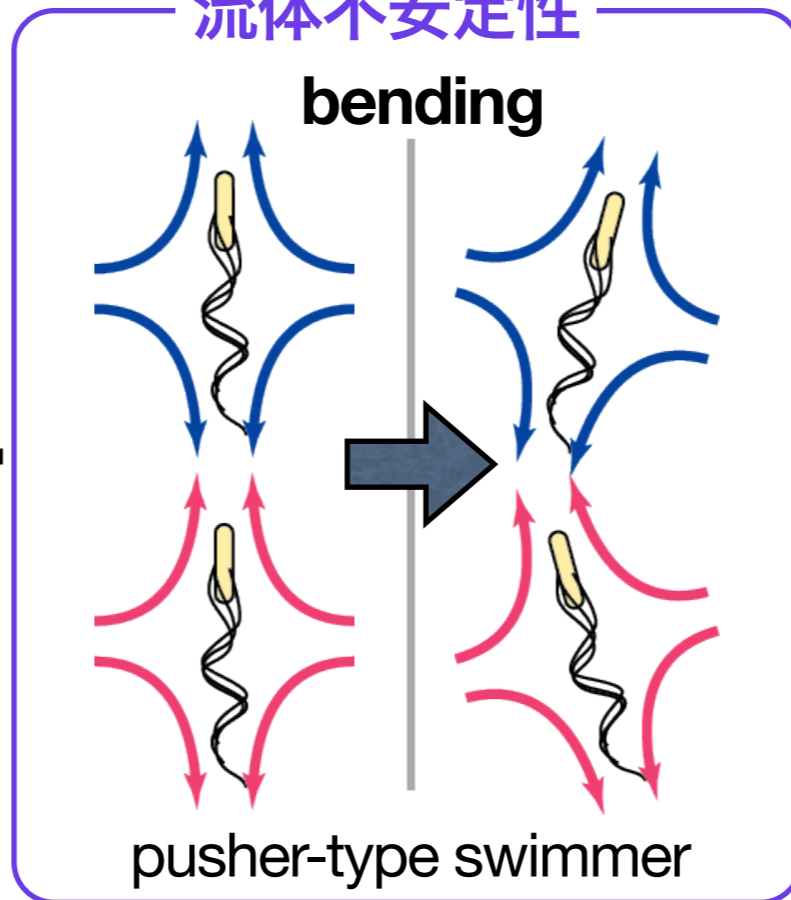
アクティブ乱流の発生原理

排除体積による配向効果



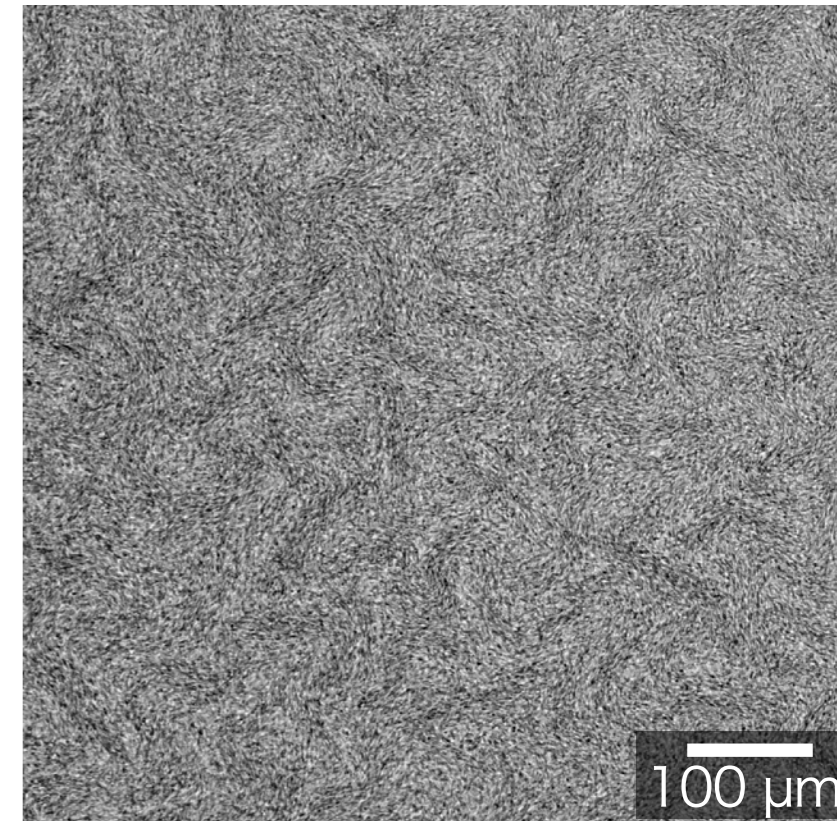
+

流体不安定性



=

active turbulence



at low Reynolds number ×1 speed

■流体記述 Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式 (TTSH eq.)

実際に見えるバクテリアの速度場 \vec{v} を考える (周囲の流体は見えない)

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{v} = 0 & (\text{簡単化のため非圧縮を仮定}) \\ \partial_t \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla q + a\vec{v} - b|\vec{v}|^2 \vec{v} - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v} & (\text{無次元化済み}) \end{cases}$$

→“バルク”の性質はうまく再現できた (例：速度場のパワースペクトル)

H. Wensink, et al. PNAS, 109, 36, 14308 (2012)

J. Dunkel, et al, New J. Phys. 15, 045016 (2013)

バクテリア乱流は連続場理論で記述できる

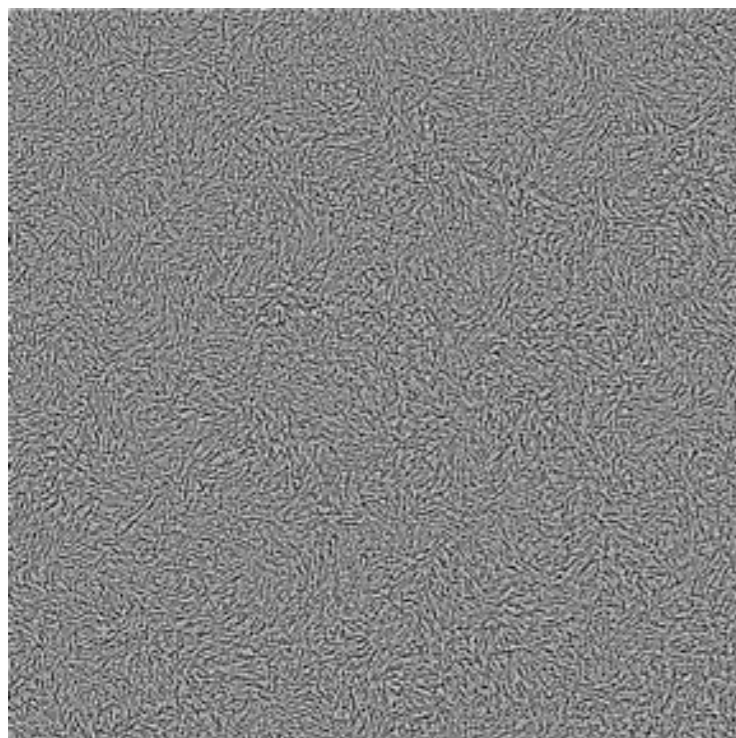
■速度場のパワースペクトル

$$E(k) = 2\pi k \int \frac{d^2 \vec{R}}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{R}} \langle \vec{v}(t, \vec{r}) \cdot \vec{v}(t, \vec{r} + \vec{R}) \rangle$$
$$= 2\pi k \left| \int \frac{d^2 \vec{r}}{(2\pi)^2} e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{v}(t, \vec{r}) \right|^2$$

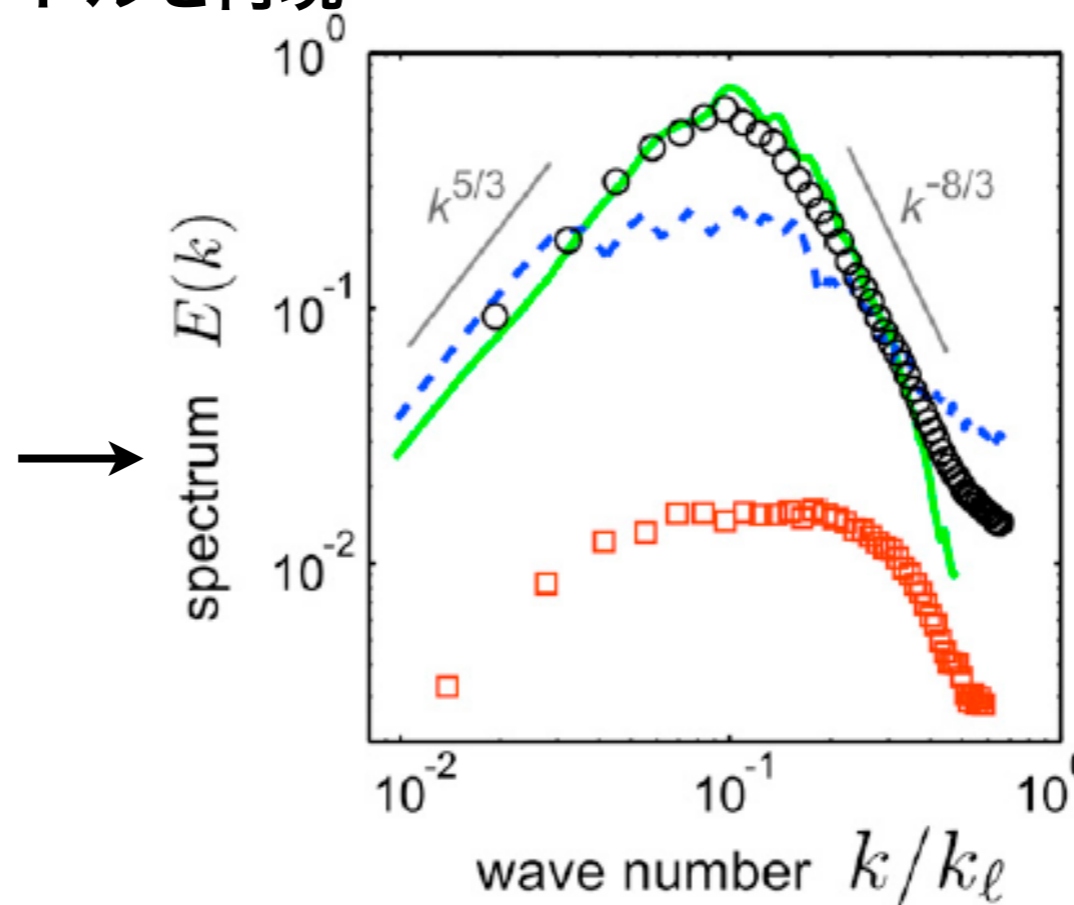
↑
等方性を仮定して全ての角度方向を足し合わせる

↖ Wiener-Khinchinの定理

■例：速度場のパワースペクトルを再現



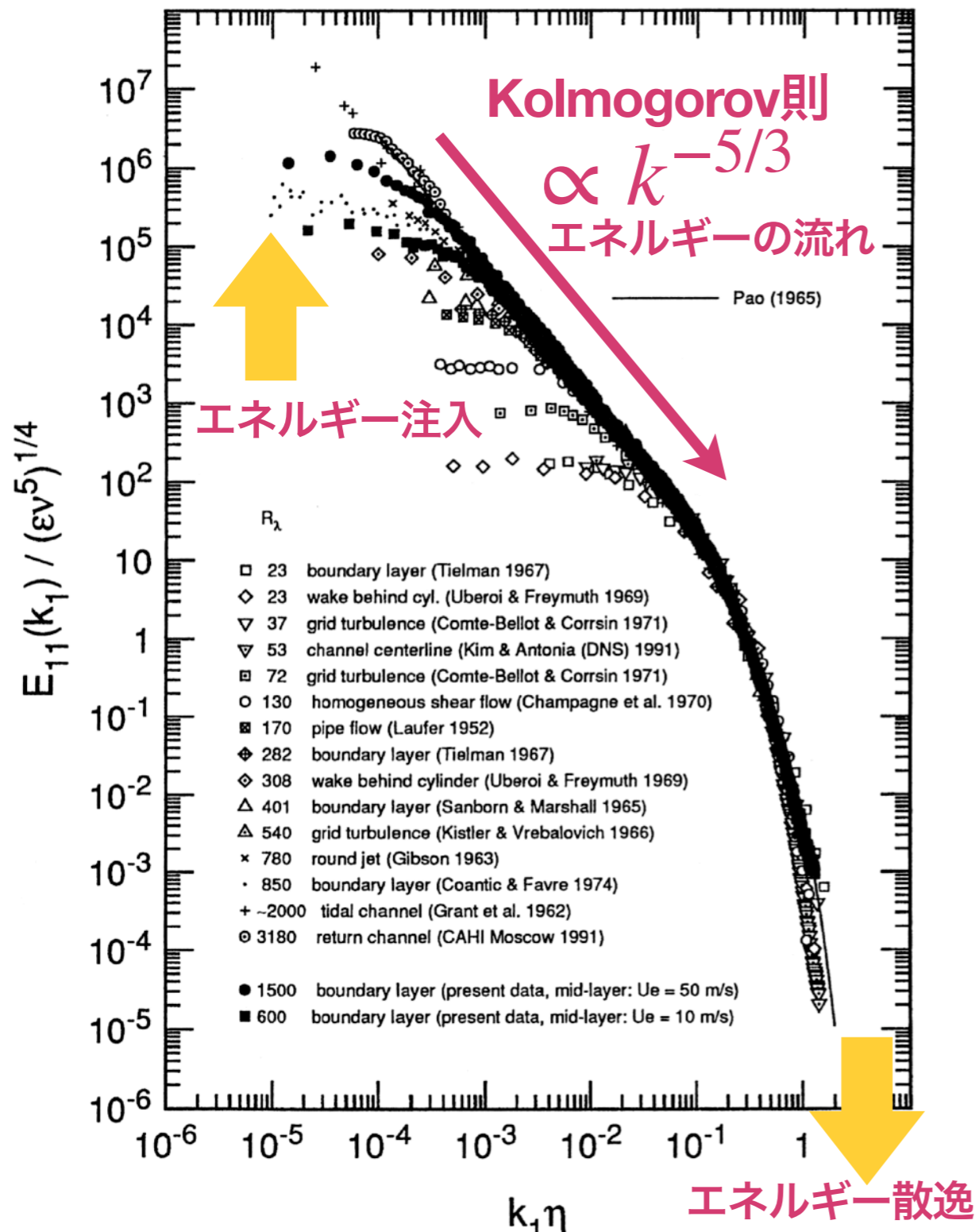
Bacteria
(*Bacillus subtilis*)



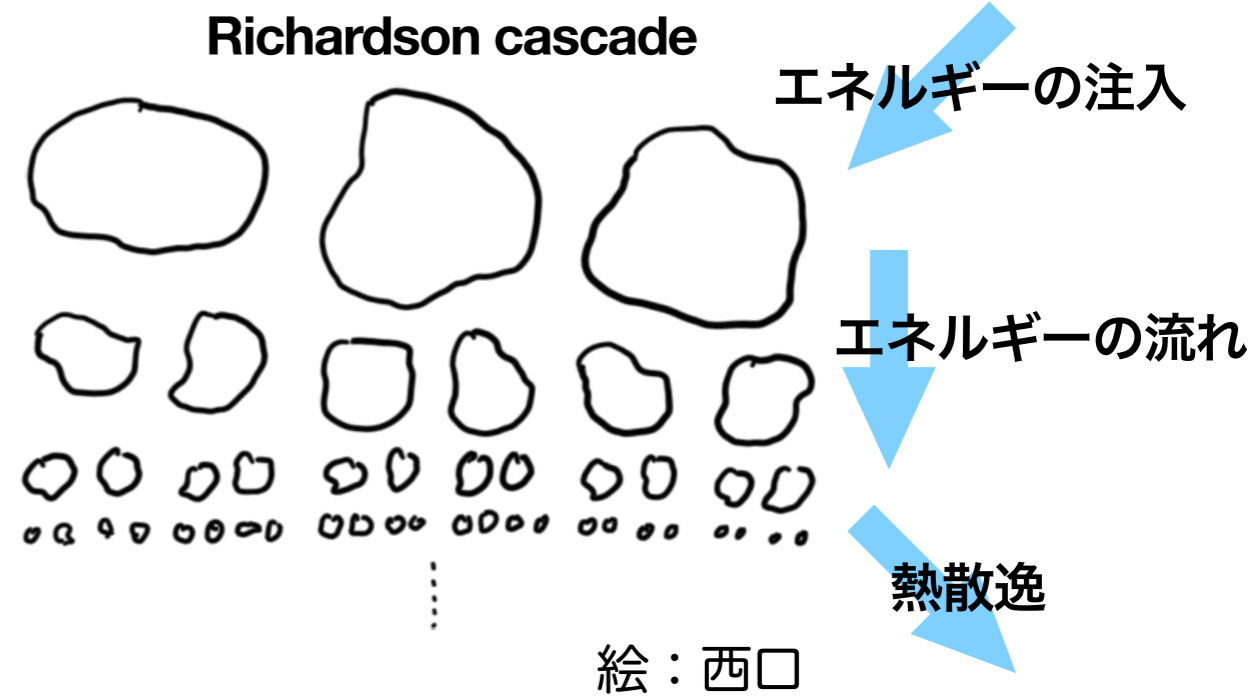
- ← Blue : Rod simulation
- ← Black : 実験 (厚み: 4 μm)
- ← Green : 連続場理論
- ← Red : 実験 (厚み: 80 μm)

スペクトルの解釈

■通常の流体での発達乱流：Kolmogorov則



システムサイズスケールで作られた大きな渦が次第にちぎれて行って小さな渦になっていき、最終的に粘性で散逸して熱になる。



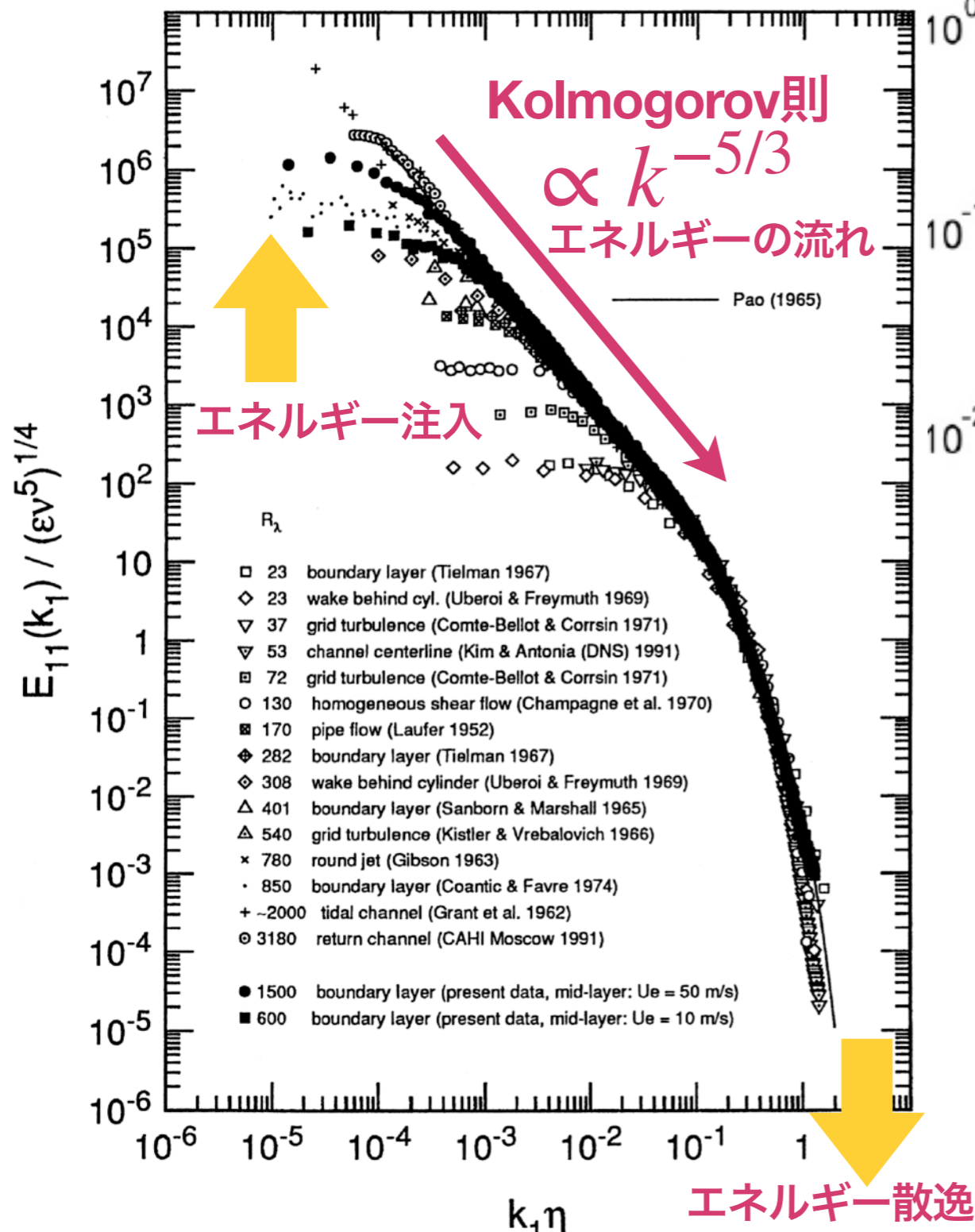
べき乗則

→scale freeで、渦に典型的な大きさは無い

Saddoughi & Veeravalli J. Fluid. Mech. 268, 333 (1994)
 を改変した図を後藤俊幸『乱流理論の基礎』から抜粋

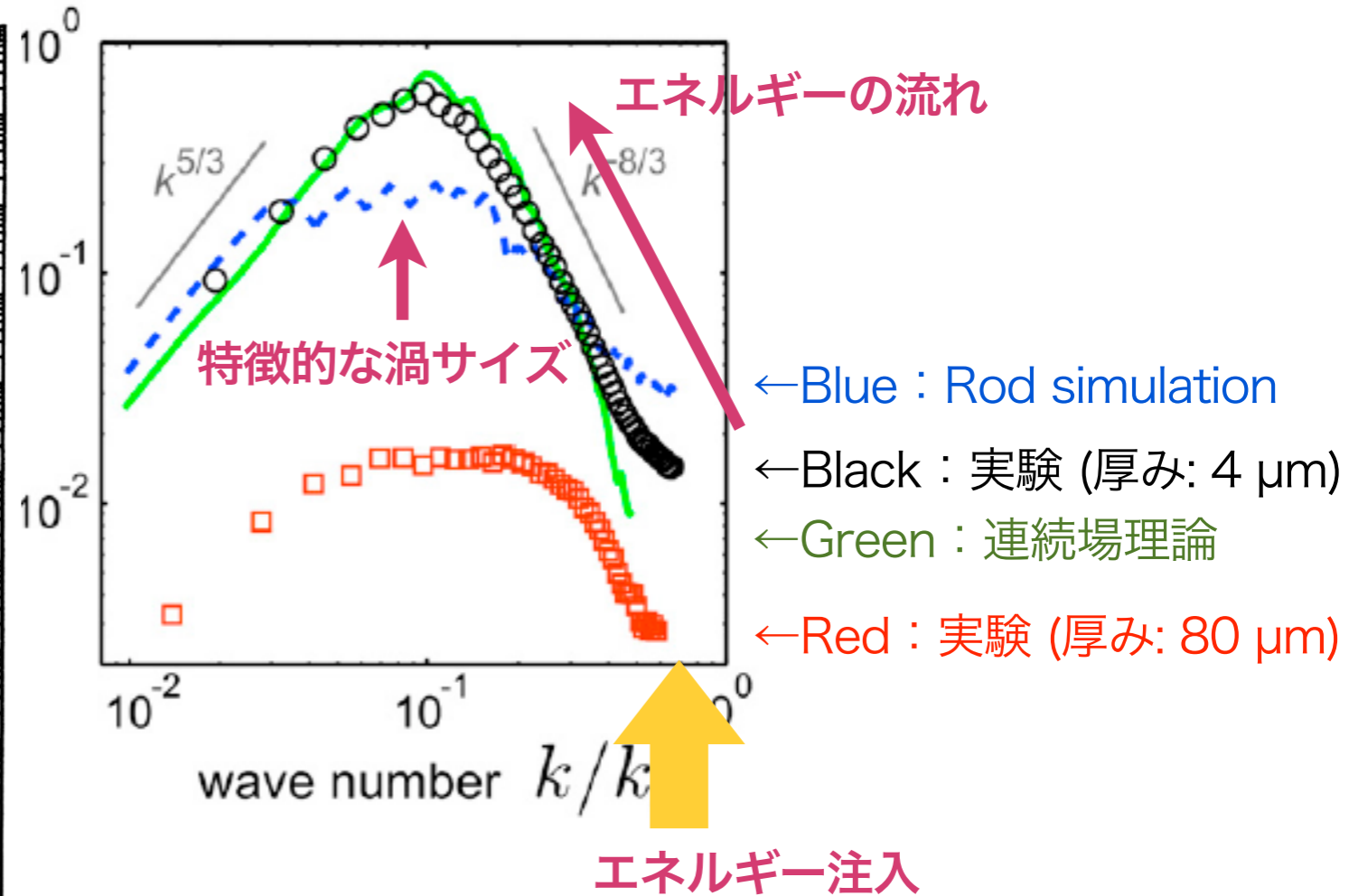
スペクトルの解釈

■通常の流体での発達乱流



Saddoughi & Veeravalli J. Fluid. Mech. 268, 333 (1994)
 を改変した図を後藤俊幸『乱流理論の基礎』から抜粋

■バクテリア乱流



- ・系の最小スケール（構成要素スケール）でエネルギーの注入がある。
- ・常にエネルギーは散逸しまくり。
- ・polarなアクティブ乱流のスペクトルのべきの指数は普遍的ではない。
 (パラメーターとシステムサイズに依存)

R. Alert et al. *Annu. Rev. Cond. Matt. Phys.* 13, 143 (2022)

H. Wensink et al. *PNAS*, 109, 14308 (2012)

V. Bratanov et al, *PNAS*, 112, 15048 (2015)

アクティブ乱流の方程式の構成

■ 実験的と比較可能な方程式を作りたい

- ・ 素朴なモデルはたくさんの変数を含む (密度, 配向場, 流体の速度場, バクテリアの速度場 etc.)
→ 少ない変数・少ないパラメーターの方程式を作る。
- ・ 実験室系に対するバクテリアの速度場だけの方程式を考える：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i = 0 \quad (\text{簡単化のための近似。密度に興味が出たら後から考える。})$$

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \underbrace{(A + C|\mathbf{v}|^2)}_{\text{ワインボトルポテンシャルで自発速度}\sqrt{-A/C}\text{を生む}} \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{E}$$

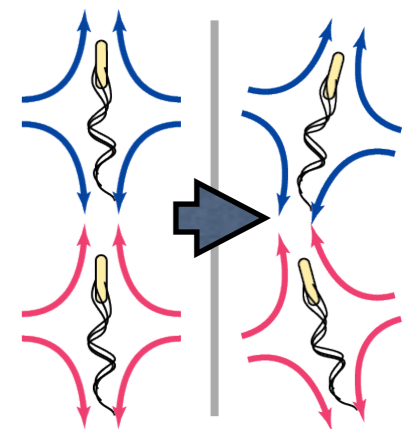
→ ワインボトルポテンシャルで自発速度 $\sqrt{-A/C}$ を生む

$$U(\mathbf{v}) = \frac{A}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{C}{4} |\mathbf{v}|^4 \quad \text{アクティブ応力 (active stress)}$$

$$\text{歪速度テンソル (strain-rate tensor)} \quad E_{ij} = \frac{\Gamma_0}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \frac{\Gamma_2 \Delta}{2} (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \boxed{S q_{ij}}$$

→ 粘性は負にもなりうる → Eの展開をここまで考える

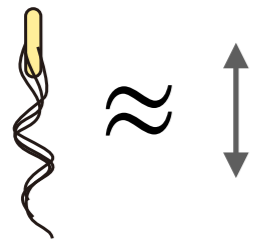
$$\text{向きを表すQテンソルの平均場近似} \quad q_{ij} = v_i v_j - \frac{\delta_{ij}}{d} |\mathbf{v}|^2$$



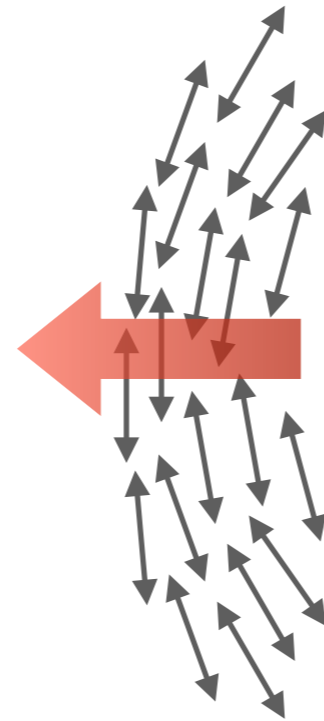
アクティブ応力による欠陥対生成

■ 配向場が曲がっているとアクティビティ由来の応力が生じる (=追加の移流)

force dipole



と置き換えると



アクティブ応力
 $\propto -\nabla \cdot \mathbf{Q}$

直線配置が不安定化

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n}\mathbf{n} - \frac{1}{d}\mathbf{I}$$

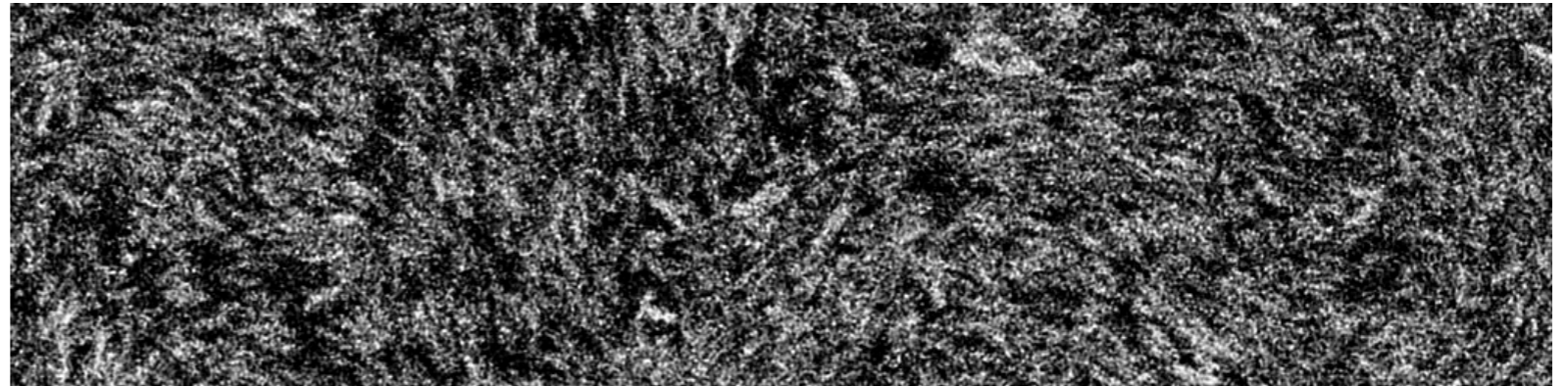
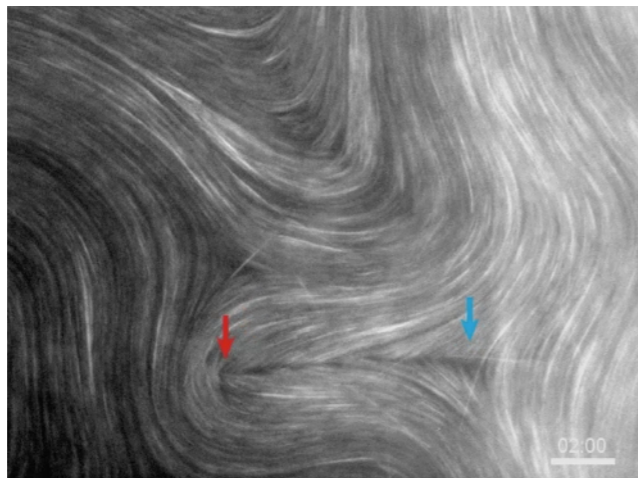
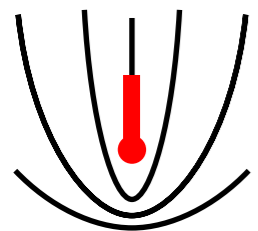
\mathbf{n} : 配向ベクトル

■ 配向場が押し曲げられてトポロジカル欠陥が追生成する

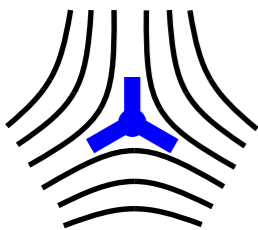
+1/2欠陥

細胞骨格再構成系

バクテリア (西口撮影)



+1/2欠陥



+1/2欠陥: 非対称性によりアクティブ応力が生じて、自己駆動する。

-1/2欠陥: 対称性が高く、あまり動かない。

アクティブ乱流の方程式の構成

■実験的と比較可能な方程式を作りたい

- ・素朴なモデルはたくさんの変数を含む (密度, 配向場, 流体の速度場, バクテリアの速度場 etc.)
→少ない変数・少ないパラメーターの方程式を作る。
- ・実験室系に対するバクテリアの速度場だけの方程式を考える：

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \partial_i v_i = 0 \quad (\text{簡単化のための近似。密度に興味が出たら後から考える。})$$

$$(\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p - \underbrace{(A + C|\mathbf{v}|^2)}_{\text{ワインボトルポテンシャルで自発速度}\sqrt{-A/C}\text{を生む}} \mathbf{v} + \nabla \cdot \mathbf{E}$$

→ワインボトルポテンシャルで自発速度 $\sqrt{-A/C}$ を生む

$$U(\mathbf{v}) = \frac{A}{2} |\mathbf{v}|^2 + \frac{C}{4} |\mathbf{v}|^4 \quad \text{アクティブ応力 (active stress)}$$

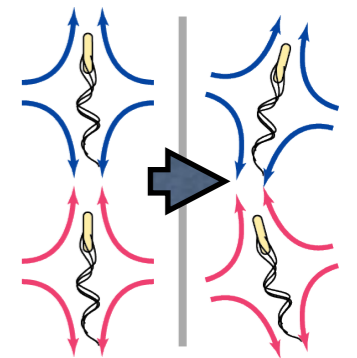
$$\text{歪速度テンソル (strain-rate tensor)} \quad E_{ij} = \Gamma_0 (\partial_i v_j + \partial_j v_i) - \Gamma_2 \Delta (\partial_i v_j + \partial_j v_i) + \boxed{S q_{ij}}$$

→粘性は負にもなりうる →Eの展開をここまで考える

$$\text{向きを表すQテンソルの平均場近似} \quad q_{ij} = v_i v_j - \frac{\delta_{ij}}{d} |\mathbf{v}|^2$$

$$S < 0 \quad \text{for pusher}$$

$$S > 0 \quad \text{for puller}$$



■最終的な形

$$(\partial_t + \lambda_0 \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \lambda_1 \nabla \mathbf{v}^2 - (A + C|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + \Gamma_0 \Delta \mathbf{v} - \Gamma_2 \Delta^2 \mathbf{v}$$

$$\lambda_0 := 1 - S \quad \lambda_1 := -S/d$$

補足：バクテリアの向きと運動, 流体の流れを考えた Langevin方程式から導出することもできる。

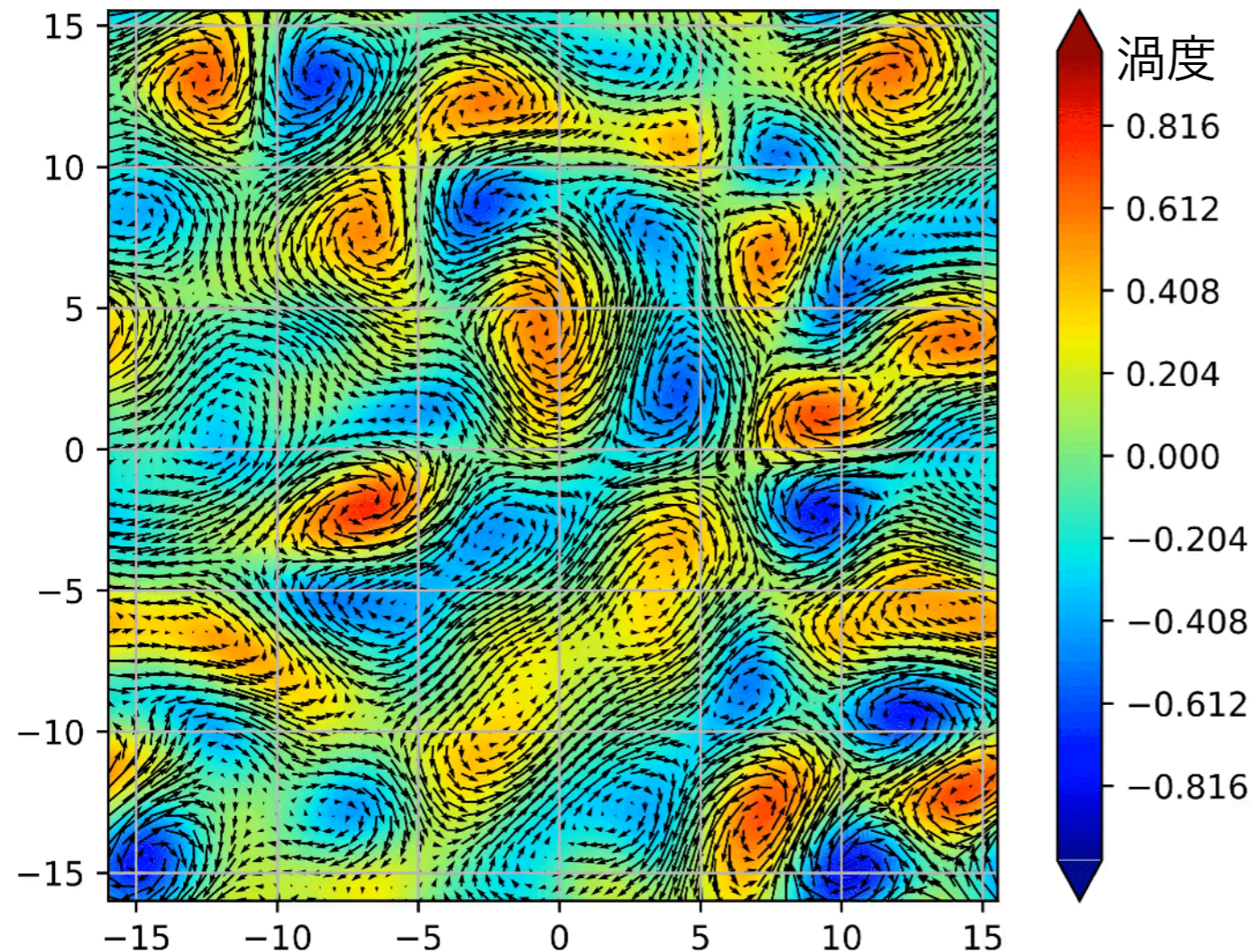
この方程式の気持ちを理解しよう

■方程式の解釈 (Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式とも呼ばれる)

$$(\partial_t + \lambda_0 \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \lambda_1 \nabla v^2 - (A + C|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + \Gamma_0 \Delta \mathbf{v} - \Gamma_2 \Delta^2 \mathbf{v}$$

↳ 自発速度を与える ↓

数値計算するとちゃんとアクティブ乱流を再現できる



動画：白谷くん (M1@藤堂研究室) 作成

Swift-Hohenberg方程式型の項

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ru - (1 + \nabla^2)^2 u + N(u)$$

非線形項

→格子パターンを好む

→この方程式から乱流状の解が出てくる仕組みは？

この方程式が乱流を生み出す仕組み

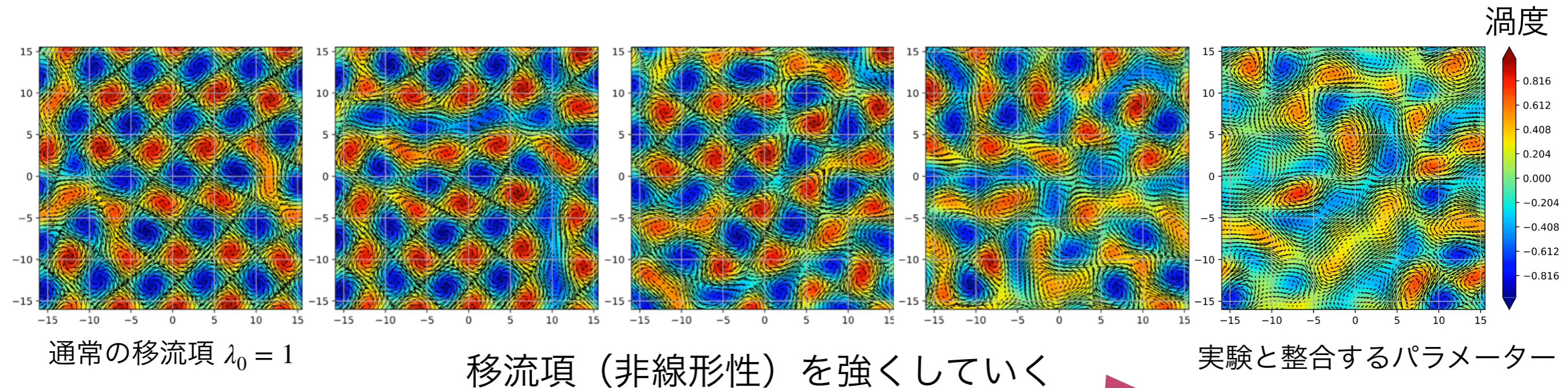
■方程式の解釈 (Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式とも呼ばれる)

$$(\partial_t + \lambda_0 \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \lambda_1 \nabla v^2 - (A + C|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + \Gamma_0 \Delta \mathbf{v} - \Gamma_2 \Delta^2 \mathbf{v}$$

↳ 強い移流がパターンをかき乱す

↳ 自発速度を与える

↳ Swift-Hohenberg方程式型の項
→ 格子パターンを好む



λ_0 : 小

λ_0 : 大

強い移流項によって、“格子を作りたがる渦”が流されて乱れている。
→そもそも格子を作りたがる仕組みは？

動画：白谷くん (M1@藤堂研究室) 作成

相図：Reinken et al.

Phys. Rev. Fluids 7, 084501 (2022) 17

渦格子の原理：線形安定性解析を試みよう

■方程式の解釈 (Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式とも呼ばれる)

$$(\partial_t + \lambda_0 \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \lambda_1 \nabla v^2 - (A + C|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + \Gamma_0 \Delta \mathbf{v} - \Gamma_2 \Delta^2 \mathbf{v}$$

自明な解：一様な定常解 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ と $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ($|\mathbf{v}_0| = \sqrt{-A/C}$) + 一様な定常圧力 $p = p_0$

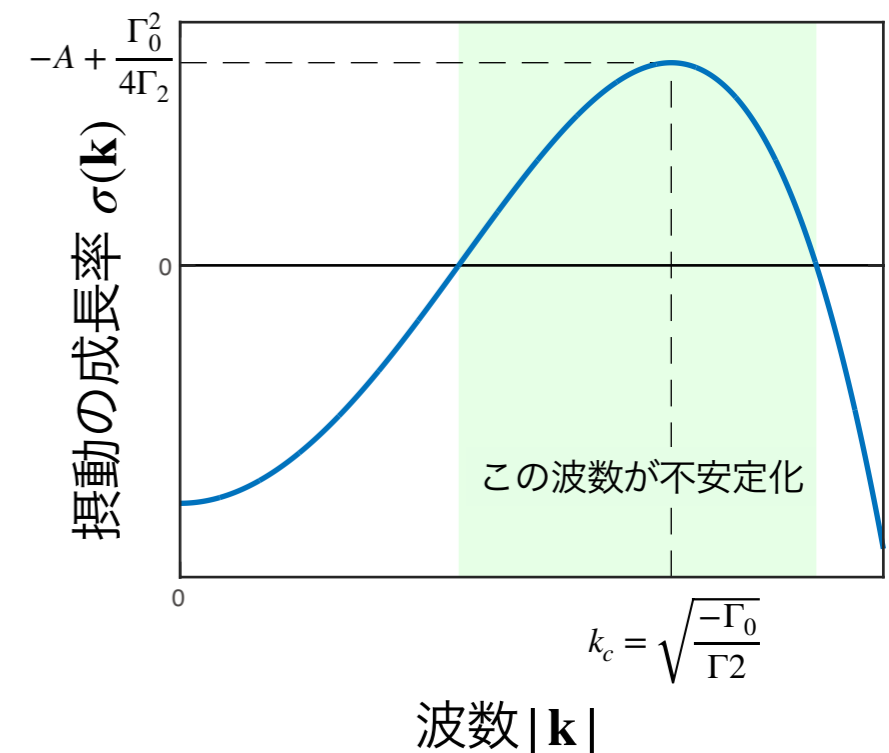
→これらの安定性は？

1) 定常解 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の周りで線形安定性解析 $\mathbf{v} = \delta \hat{\mathbf{v}} e^{\sigma t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$

$$\rightarrow \sigma(\mathbf{k}) = -A - \Gamma_0 |\mathbf{k}|^2 - \Gamma_2 |\mathbf{k}|^4$$

→ $k_c = \sqrt{\frac{-\Gamma_0}{2\Gamma_2}}$ で不安定性の成長率がピークを持つ

→ $\Lambda = 2\pi/k_c$ 程度の典型的な周期的変動ができる



渦格子の原理：線形安定性解析を試みよう

■方程式の解釈 (Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式とも呼ばれる)

$$(\partial_t + \lambda_0 \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \lambda_1 \nabla v^2 - (A + C|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + \Gamma_0 \Delta \mathbf{v} - \Gamma_2 \Delta^2 \mathbf{v}$$

自明な解：一様な定常解 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ と $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ($|\mathbf{v}_0| = \sqrt{-A/C}$) + 一様な定常圧力 $p = p_0$

→これらの安定性は？

2) 定常解 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ の周りで線形安定性解析 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta \hat{\mathbf{v}} e^{\sigma t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$

計算をちょっと頑張ると...

→ 波数 $\mathbf{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix}$ の摂動に対して、

直行する方向 $\begin{pmatrix} -k_y \\ k_x \end{pmatrix}$ に成長するモードが存在する。

→ 周期的な変動があると直行する方向に同じ周期の変動が生じる

渦格子の原理：線形安定性解析をしてみよう

■方程式の解釈（Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式とも呼ばれる）

$$(\partial_t + \lambda_0 \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \lambda_1 \nabla v^2 - (A + C|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + \Gamma_0 \Delta \mathbf{v} - \Gamma_2 \Delta^2 \mathbf{v}$$

自明な解：一様な定常解 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ と $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ ($|\mathbf{v}_0| = \sqrt{-A/C}$) + 一様な定常圧力 $p = p_0$

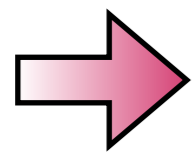
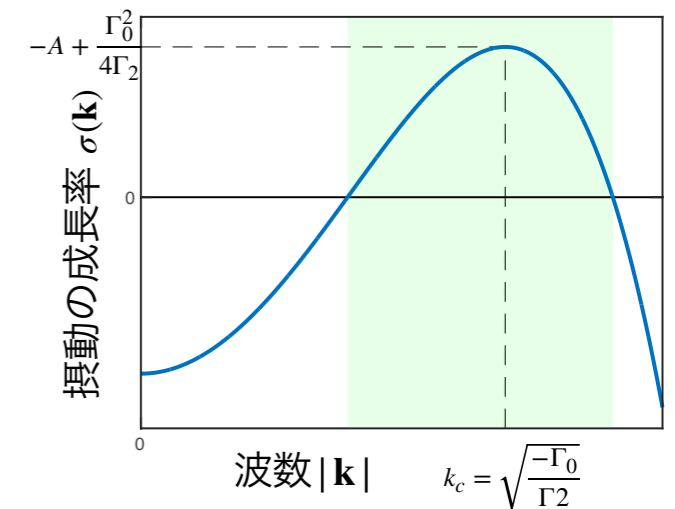
→これらの安定性は？

1) 定常解 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ の周りで線形安定性解析 $\mathbf{v} = \delta \hat{\mathbf{v}} e^{\sigma t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$

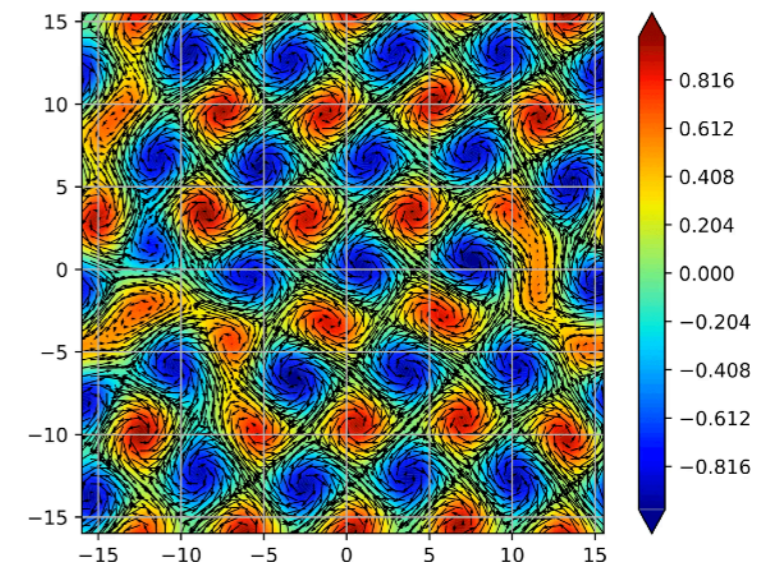
→ $\Lambda = 2\pi \sqrt{\frac{\Gamma_2}{-\Gamma_0}}$ 程度の典型的な周期的変動ができる

2) 定常解 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ の周りで線形安定性解析 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \delta \hat{\mathbf{v}} e^{\sigma t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$

→ 周期的な変動があると直行する方向に同じ周期の変動が生じる



波長 Λ 程度の周期的な変動が格子状に並ぶ
= 渦格子を作ろうとする



TTSH方程式の無次元化

■元々の式のパラメーターは5個

$$(\partial_t + \lambda_0 \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \lambda_1 \nabla v^2 - (A + C|\mathbf{v}|^2) \mathbf{v} + \Gamma_0 \Delta \mathbf{v} - \Gamma_2 \Delta^2 \mathbf{v}$$

↳ 実効圧力

$q = p - \lambda_1 v^2$ として消せる

↳ 自発速度を与える

↳ Swift-Hohenberg方程式型の項

→ 格子パターンを好む

■特徴的長さスケール・時間スケールが2つつある

	長さスケール	時間スケール
Toner-Tu的な自発速度の項	$\frac{1}{\sqrt{ A C}}$	$\frac{1}{ A }$
Swift-Hohenberg的な渦の項	$\sqrt{\frac{2\Gamma_2}{\Gamma_0}}$	$\frac{4\Gamma_2}{\Gamma_0^2}$

→ これで無次元化

■無次元化されたTTSH方程式

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla q + a \mathbf{v} - b |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} - (1 + \nabla^2)^2 \mathbf{v}$$

→ 3パラメーターだけになる！ シンプル！ 以下はこれを使って議論。

アクティブ乱流＋境界は面白い

■復習：流体記述 Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式 (TTSH eq.)

実際に見えるバクテリアの速度場 \vec{v} を考える（周囲の流体は見えない）

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{簡単化のため非圧縮を仮定}) \end{array} \right.$$

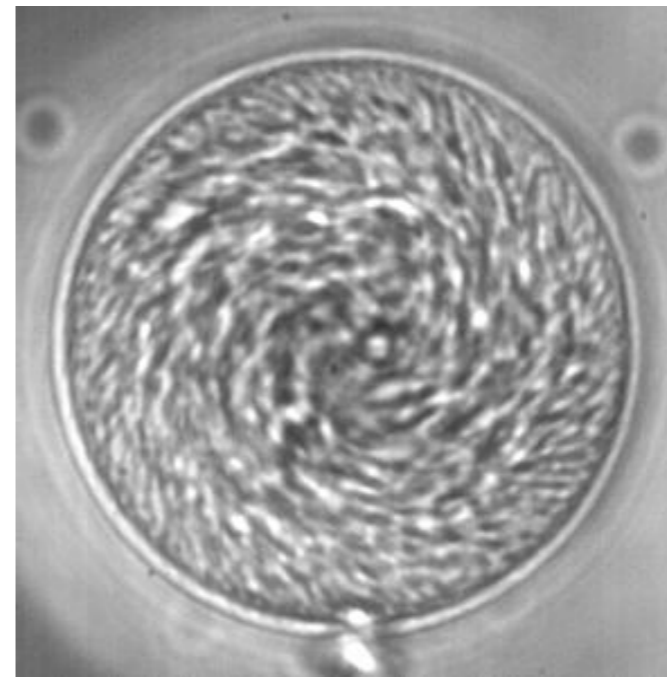
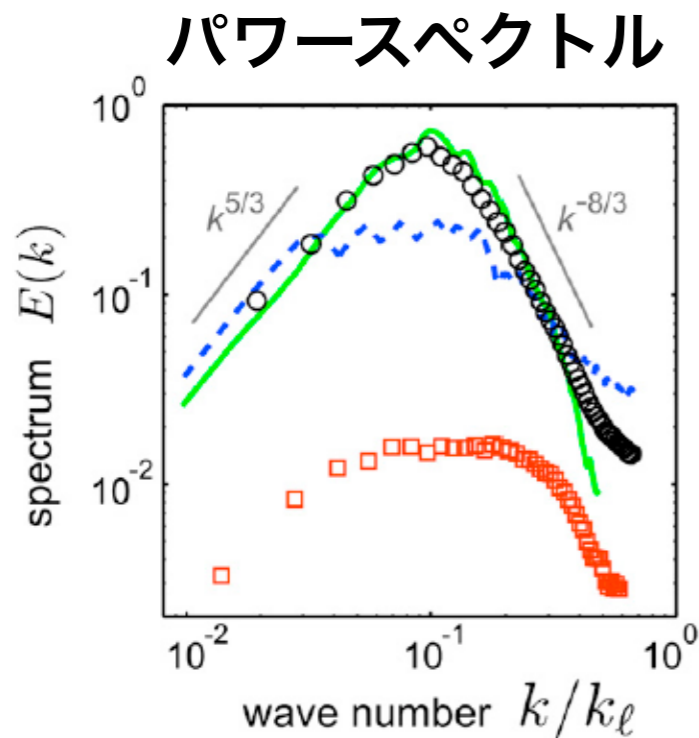
$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla q + a\vec{v} - b|\vec{v}|^2 \vec{v} - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{H. Wensink, et al. PNAS, 109, 36, 14308 (2012)} \\ \text{J. Dunkel, et al, New J. Phys. 15, 045016 (2013)} \end{array}$$

→“バルク”の性質はうまく再現できた（例：速度場のパワースペクトル）

■実験的には？

- ・スペクトルに特徴的長さスケール
→境界の長さスケールとで何か起きるはず

- ・実際、円形に閉じ込めると渦秩序が生じる



H. Wioland, et al.
PRL 110, 268102 (2013)

アクティブ乱流＋境界は面白い

■復習：流体記述 Toner-Tu-Swift-Hohenberg方程式 (TTSH eq.)

実際に見えるバクテリアの速度場 \vec{v} を考える（周囲の流体は見えない）

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (\text{簡単化のため非圧縮を仮定}) \\ \partial_t \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla q + a\vec{v} - b|\vec{v}|^2 \vec{v} - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v} \end{array} \right.$$

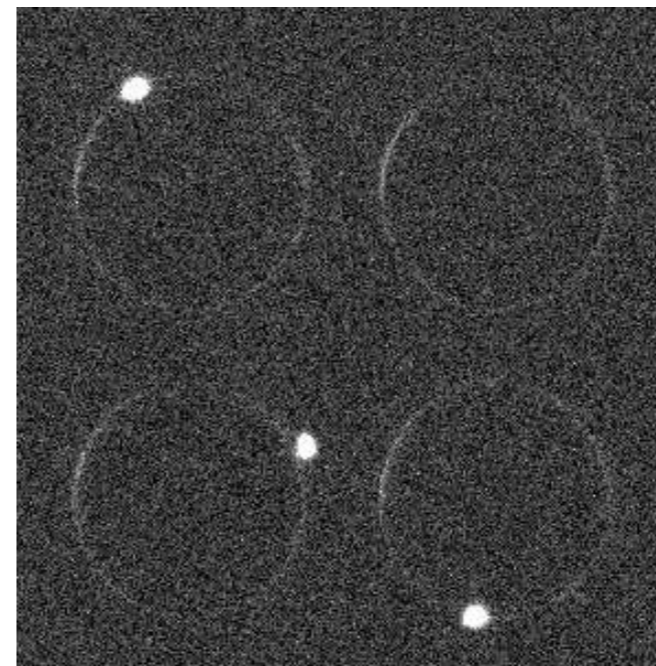
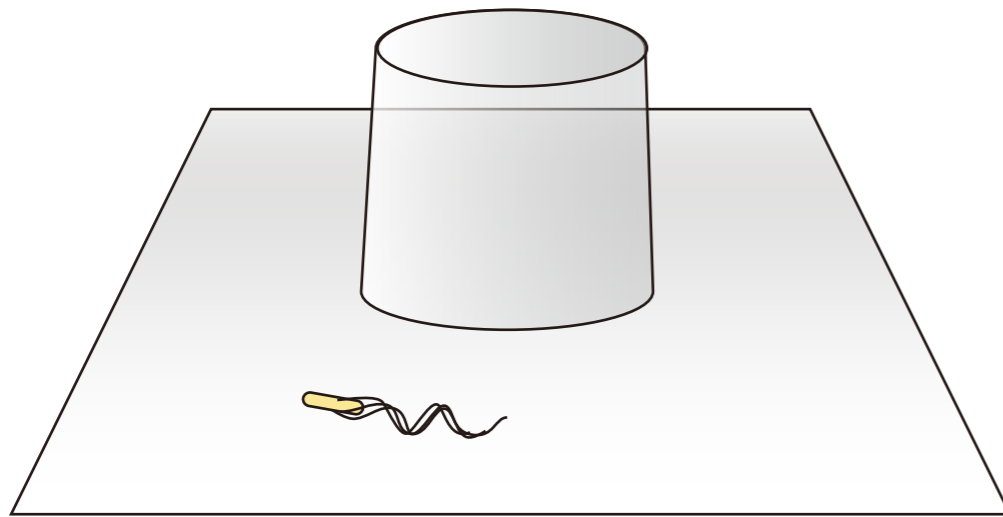
H. Wensink, et al. PNAS, 109, 36, 14308 (2012)
J. Dunkel, et al, New J. Phys. 15, 045016 (2013)

→“バルク”の性質はうまく再現できた（例：速度場のパワースペクトル）

■理論的な扱いは？

- Navier-Stokes方程式のように「no-slip条件」は適切ではないかもしれない。（バクテリアは壁に沿って泳げる）

例：壁際でのバクテリアの泳ぎ



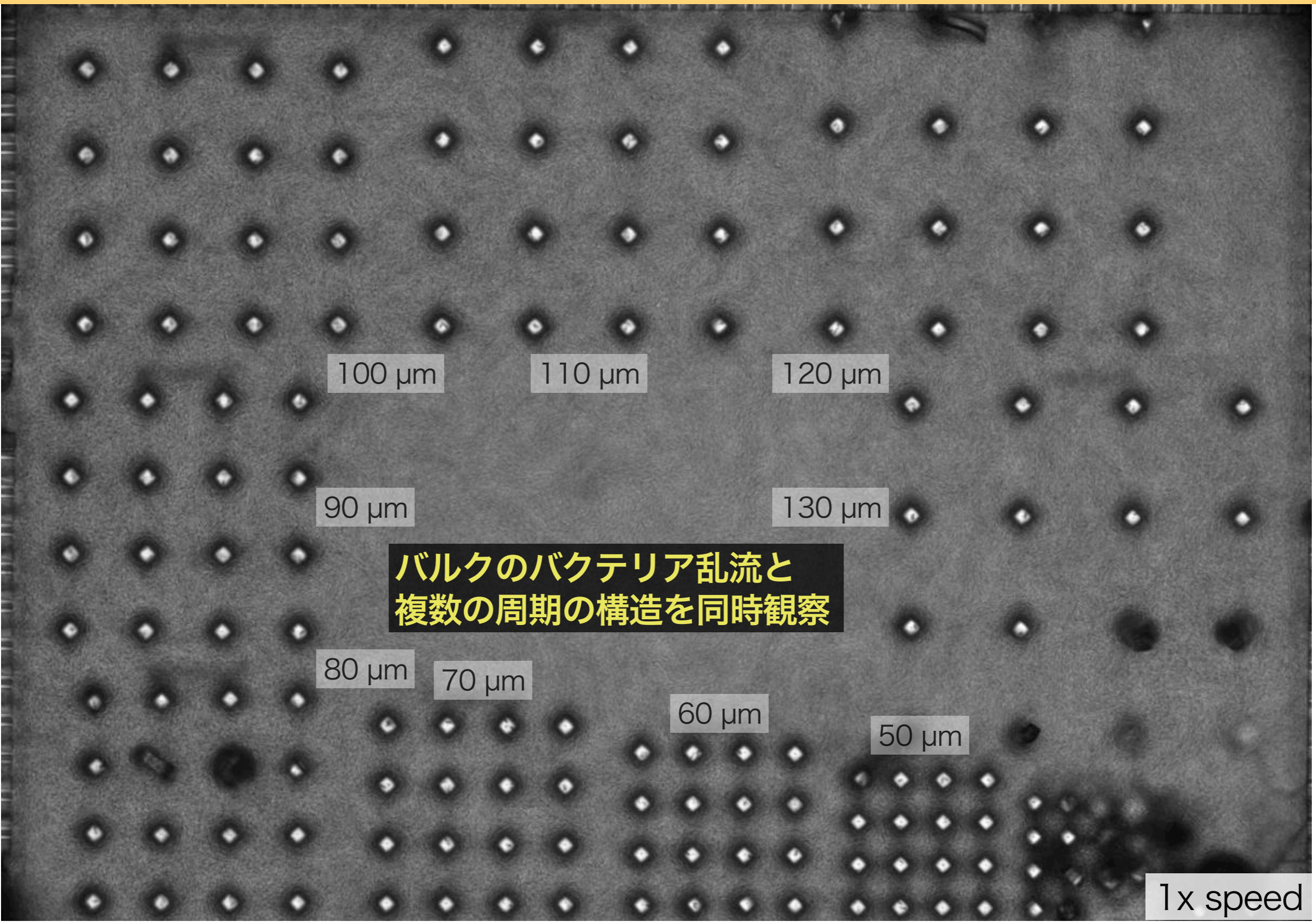
3倍速再生

20 μm

Takaha & Nishiguchi, *Phys. Rev. E* 107, 014602 (2023)

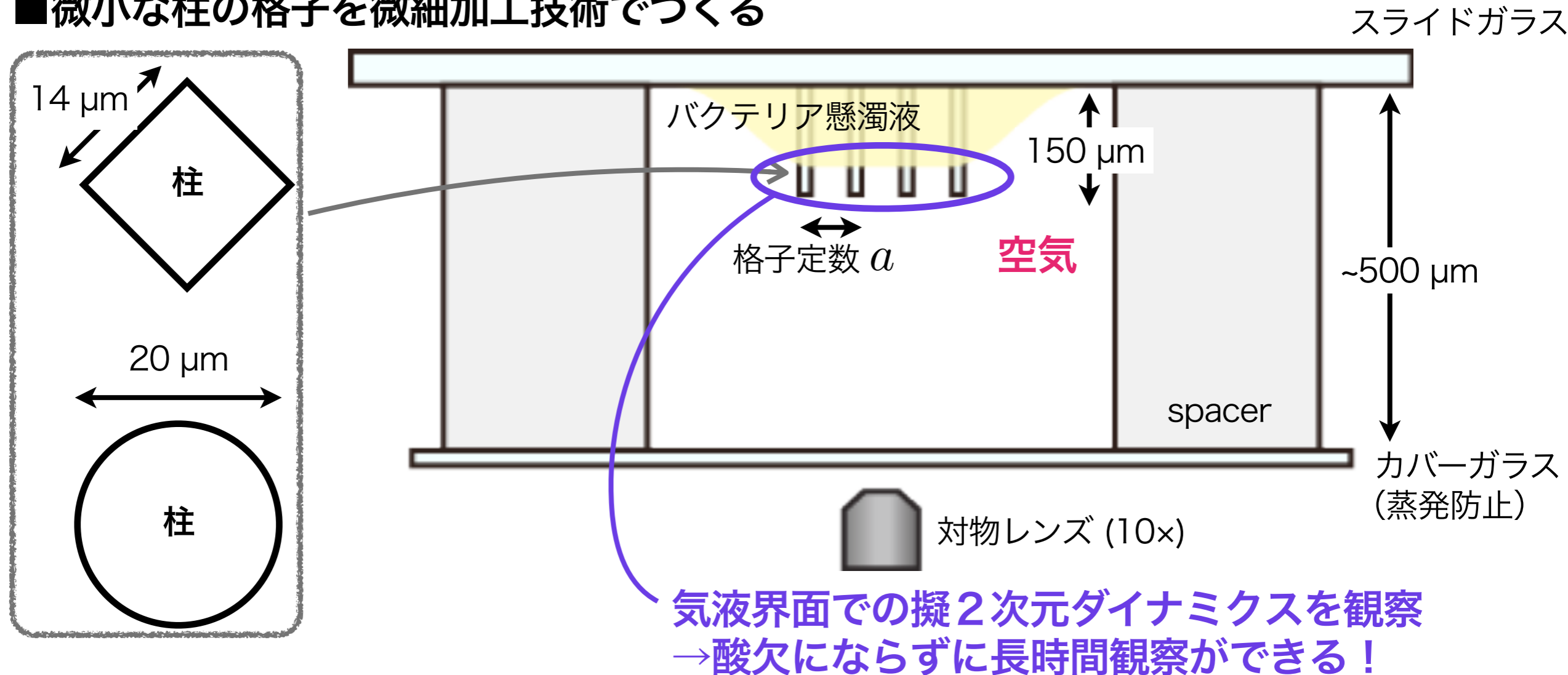
→境界があるときのバクテリア乱流の振る舞いを実験的に調べよう！

バクテリア乱流を周期構造に出会わせる



実験セットアップ

■微小な柱の格子を微細加工技術でつくる

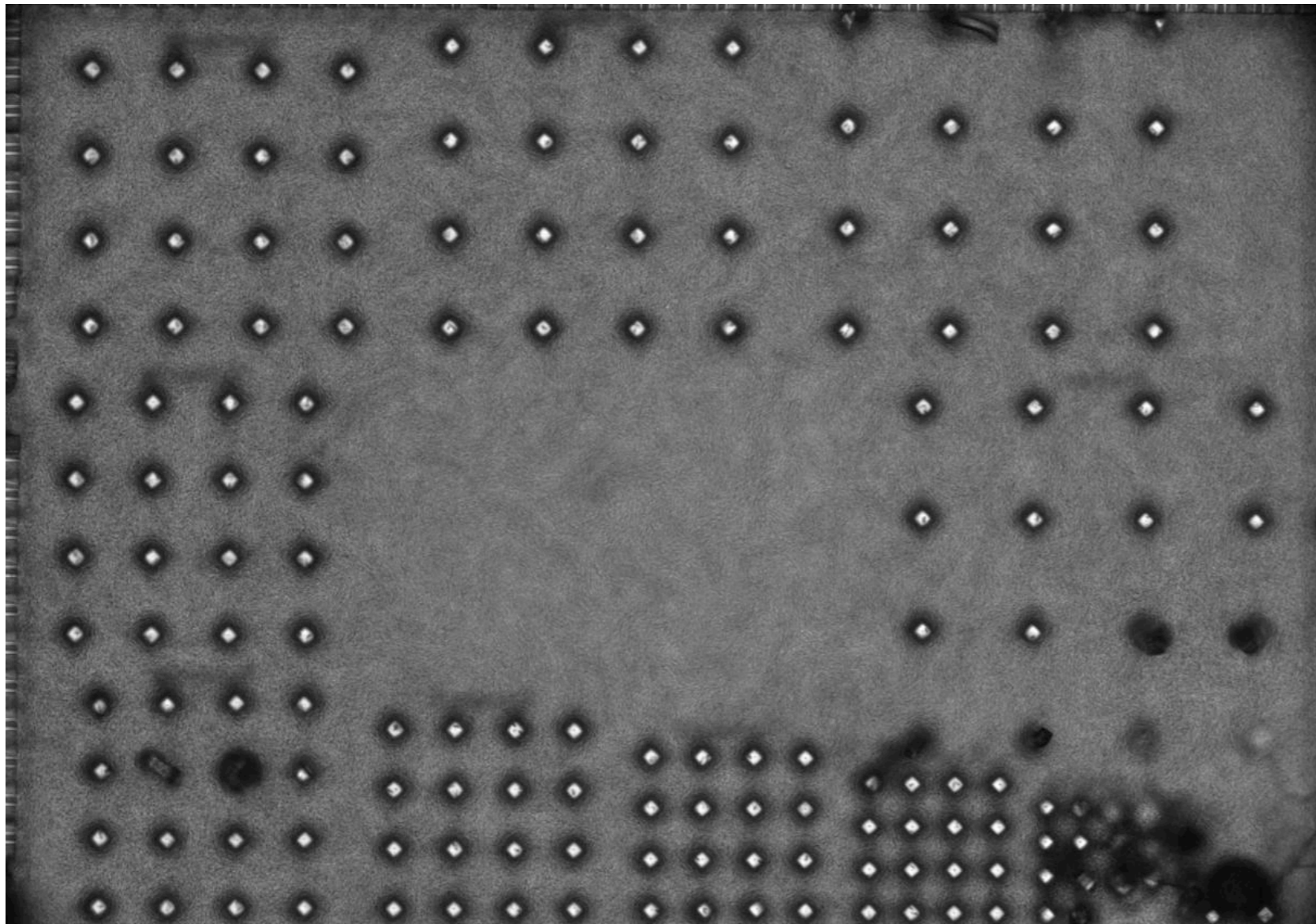


Remarks

- ・使った枯草菌は好気性→気液界面にあつまり、そこでのactivityが高い.
- ・顕微鏡観察で見えるのは細菌の速度場だけで、水の流れは観測していない.

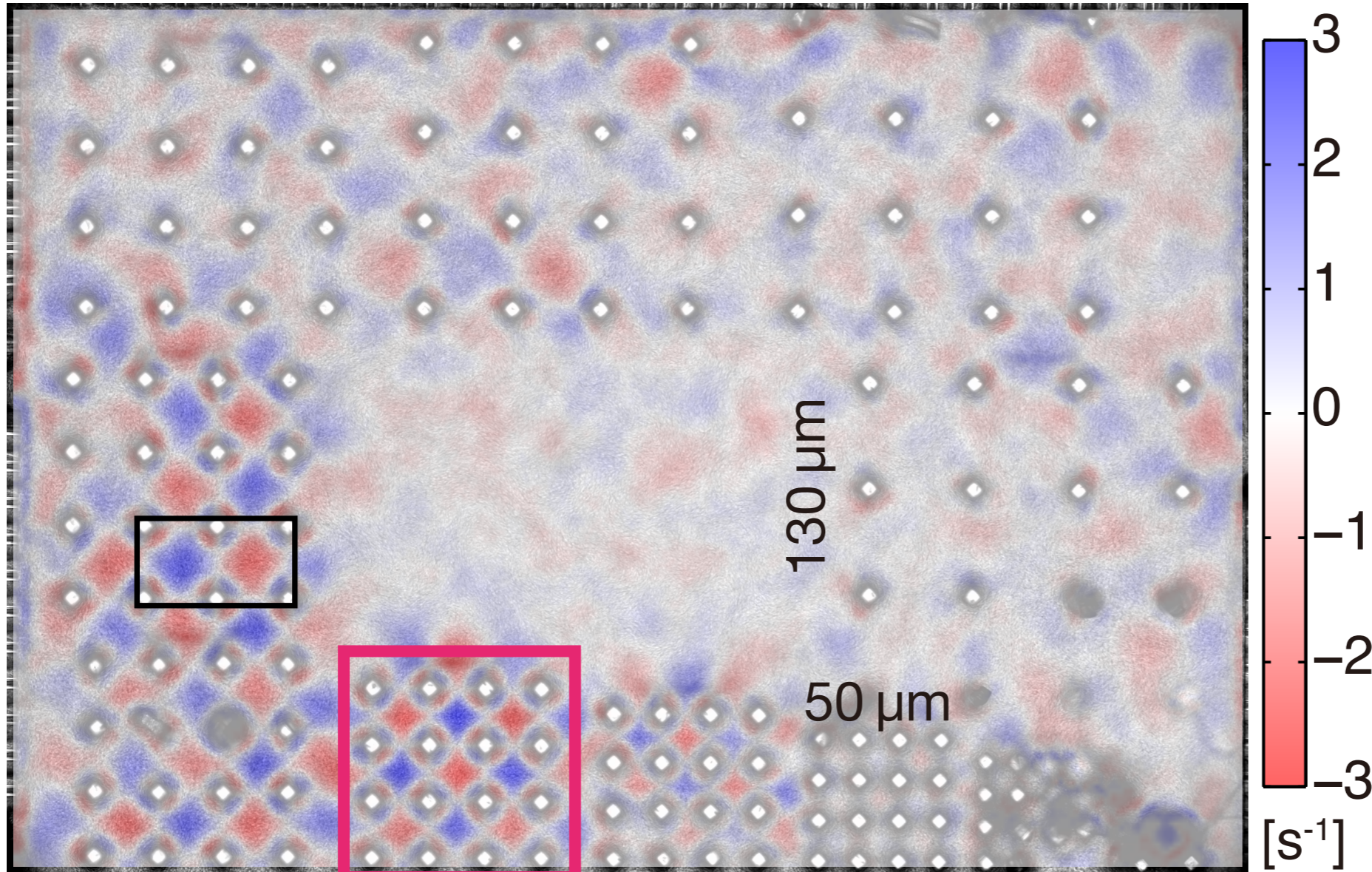
どんな流れ場ができているか？

■渦度の時間平均は？



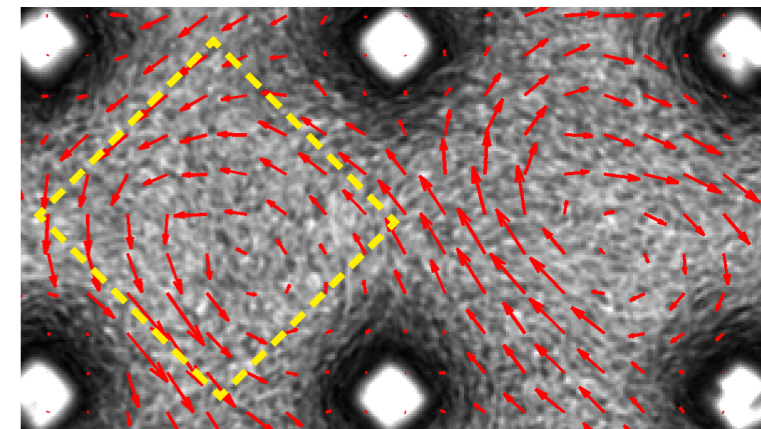
どんな流れ場ができているか？

■渦度の時間平均は？



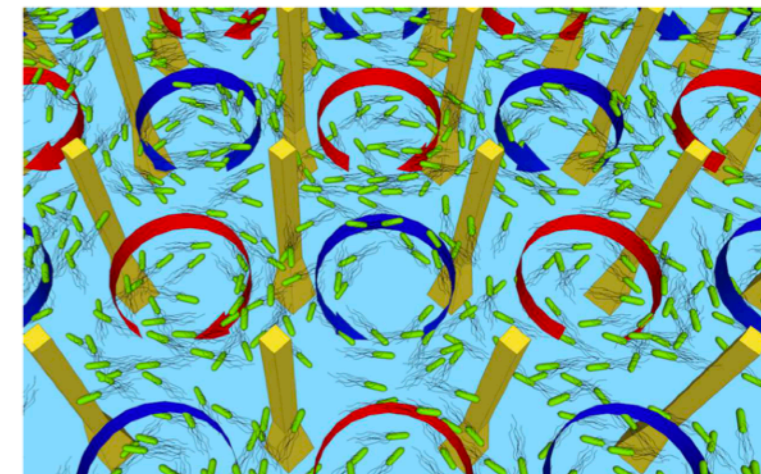
↑ 格子定数70 μm で秩序が最安定
(バルクの相関長に対応)

■流れ場のsnapshot



scale bars: 50 μm
黄色：ROIの例

■イメージ図



→ 反強磁性渦格子秩序
への自己組織化

適切な柱間隔は？：連続場での解釈

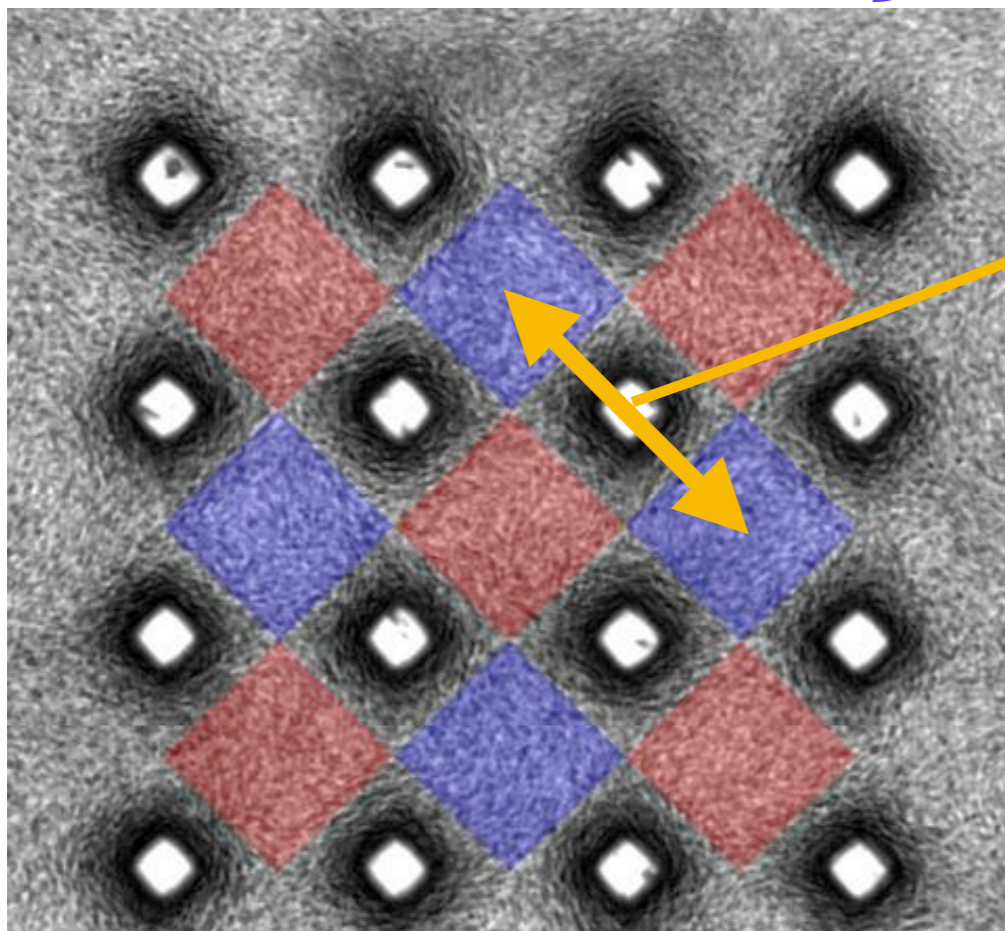
■不安定性のスペクトル

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla q + a \mathbf{v} - b |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} - (1 + \nabla^2)^2 \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ の周りで線形安定性解析 } \mathbf{v} = \delta \hat{\mathbf{v}} e^{\sigma t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

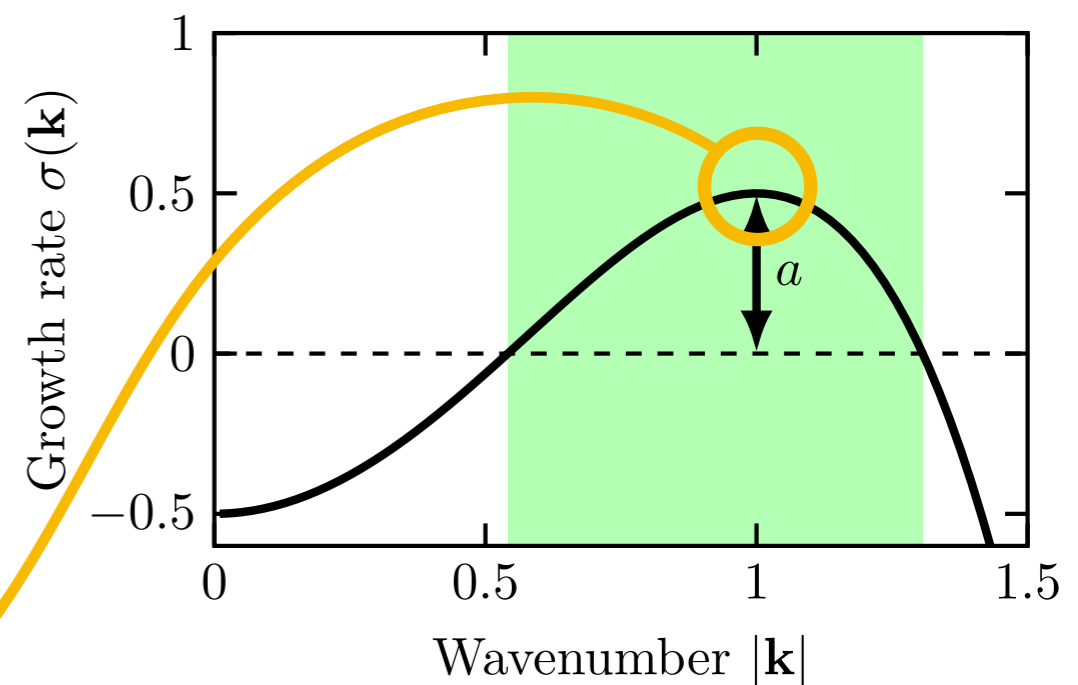
$$\rightarrow \sigma(\mathbf{k}) = a - 1 + 2|\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{k}|^4$$

■回転方向



格子定数 $70 \mu\text{m}$

0.5倍速



不安定性の波長 = 渦格子の波長
 (\approx バルクの相関長) ($\approx \sqrt{2}$ 格子定数)

↓
 渦秩序を自発形成

適切な柱間隔は？：連続場での解釈

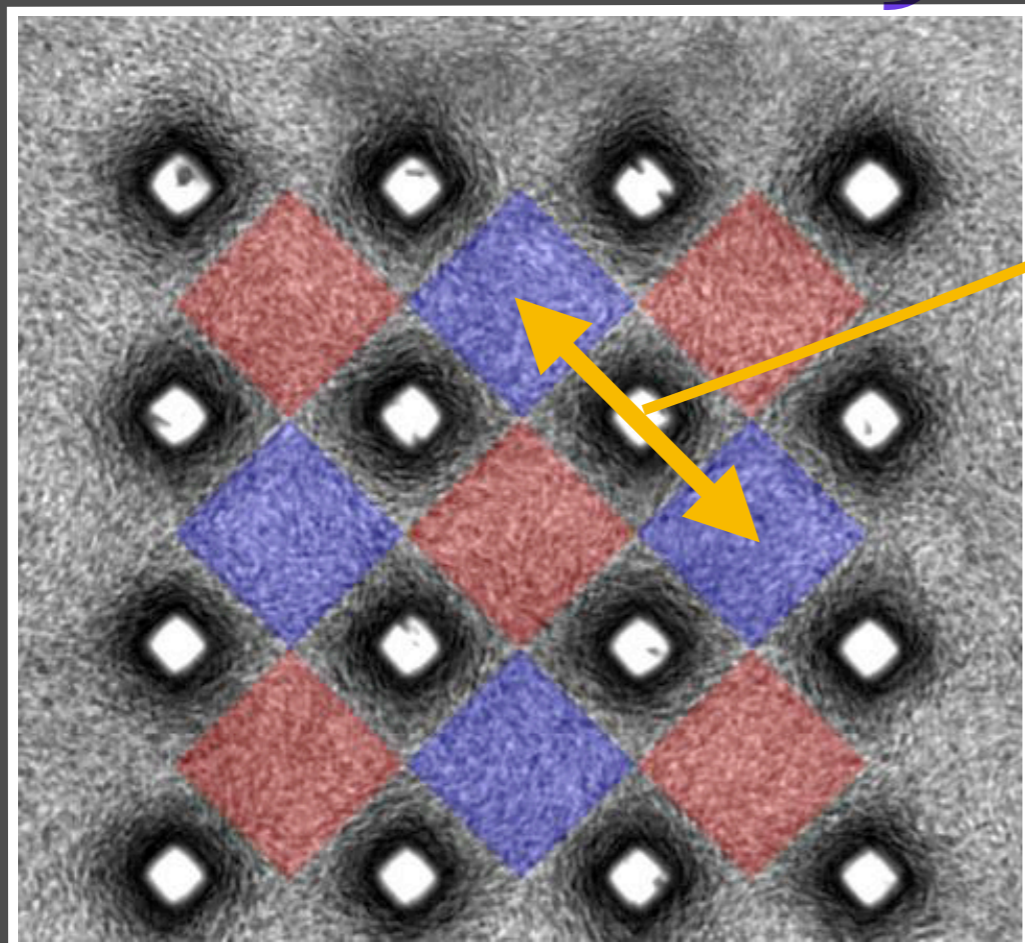
■不安定性のスペクトル

$$\partial_t \mathbf{v} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla q + a \mathbf{v} - b |\mathbf{v}|^2 \mathbf{v} - (1 + \nabla^2)^2 \mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ の周りで線形安定性解析 } \mathbf{v} = \delta \hat{\mathbf{v}} e^{\sigma t + i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$$

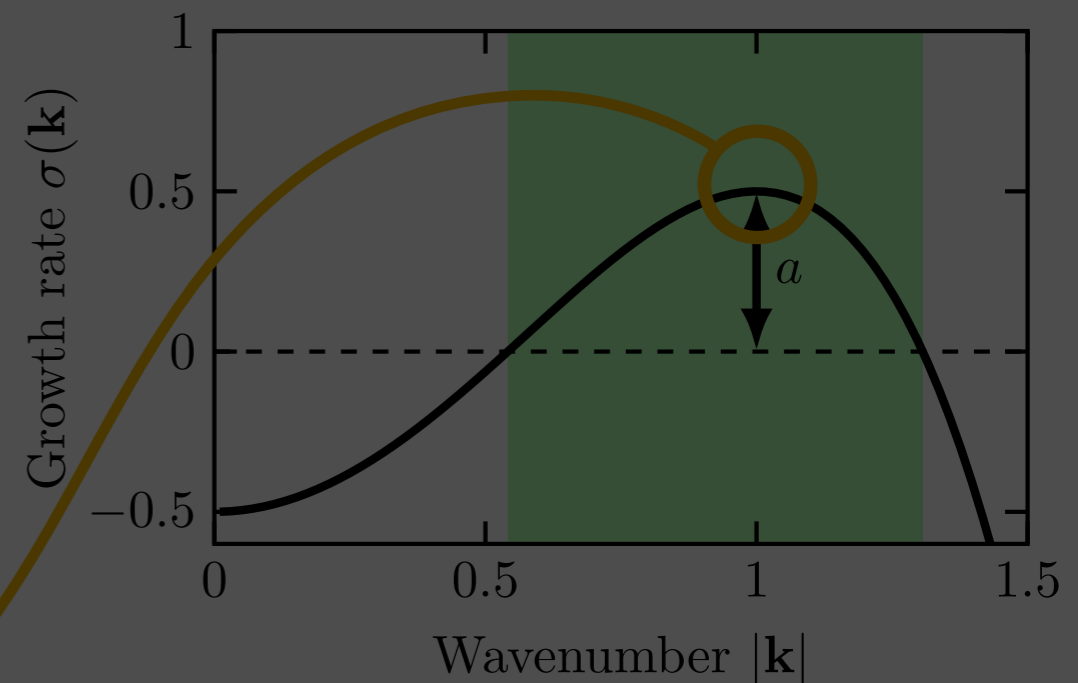
$$\rightarrow \sigma(\mathbf{k}) = a - 1 + 2 |\mathbf{k}|^2 - |\mathbf{k}|^4$$

■回転方向



格子定数 $70 \mu\text{m}$

0.5倍速



不安定性の波長 = 渦格子の波長
 (\approx バルクの相関長) ($\approx \sqrt{2}$ 格子定数)

↓
 渦秩序を自発形成

← 統計物理としては系が小さすぎる

格子全体に渡る安定な反強磁性渦格子の形成

渦秩序が長距離秩序とみなせることを有限サイズスケーリング解析で確認できた。



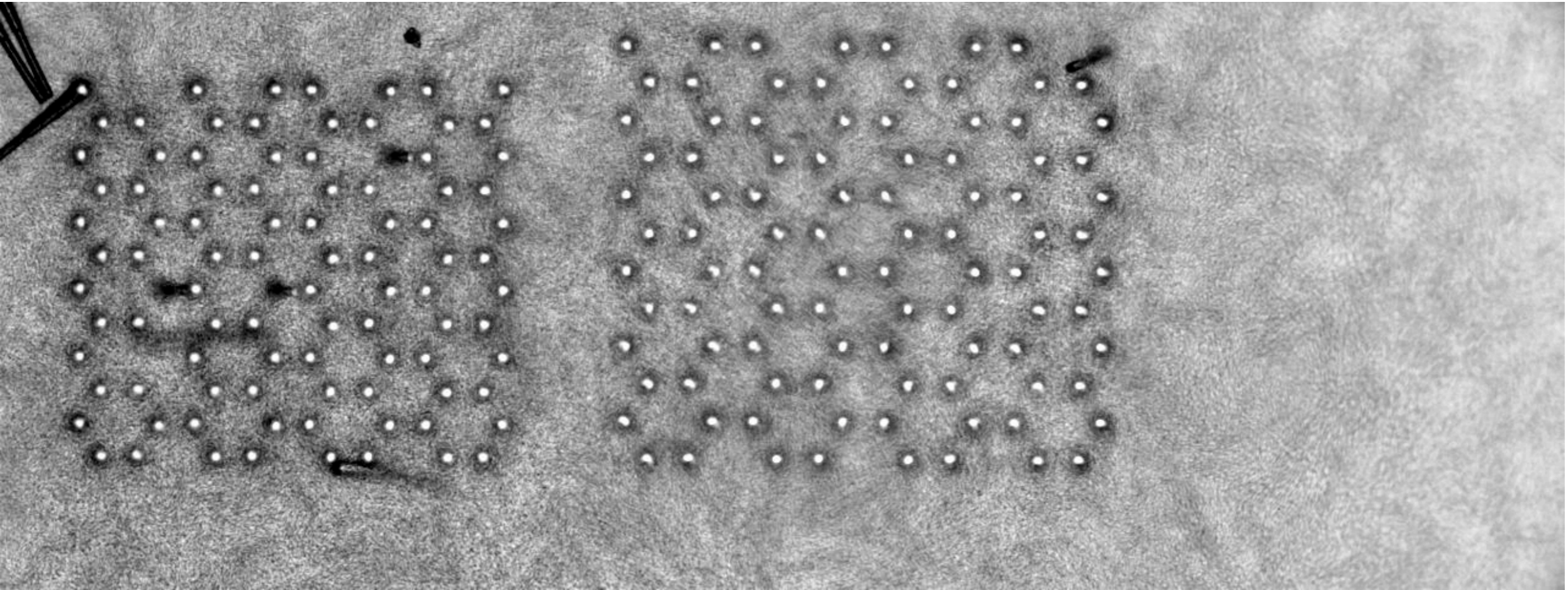
→ どんな格子なら
渦秩序が安定化する？

Nishiguchi, et al.
Nature Communications,
9:4486 (2018)

格子定数 $70 \mu\text{m}$
0.5倍速

どのような格子構造で渦が安定化する？

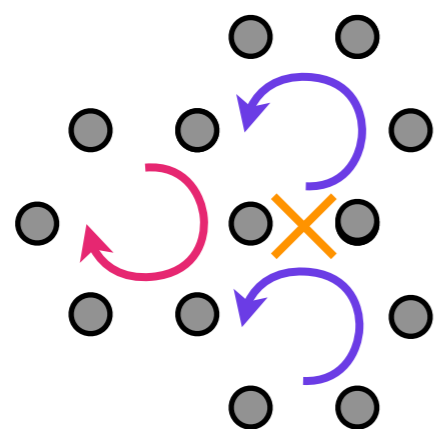
■ハニカム格子はダメ：フラストレーションがある



$a = 40 \mu\text{m}$
↑ inter-pillar distance

$a = 45 \mu\text{m}$

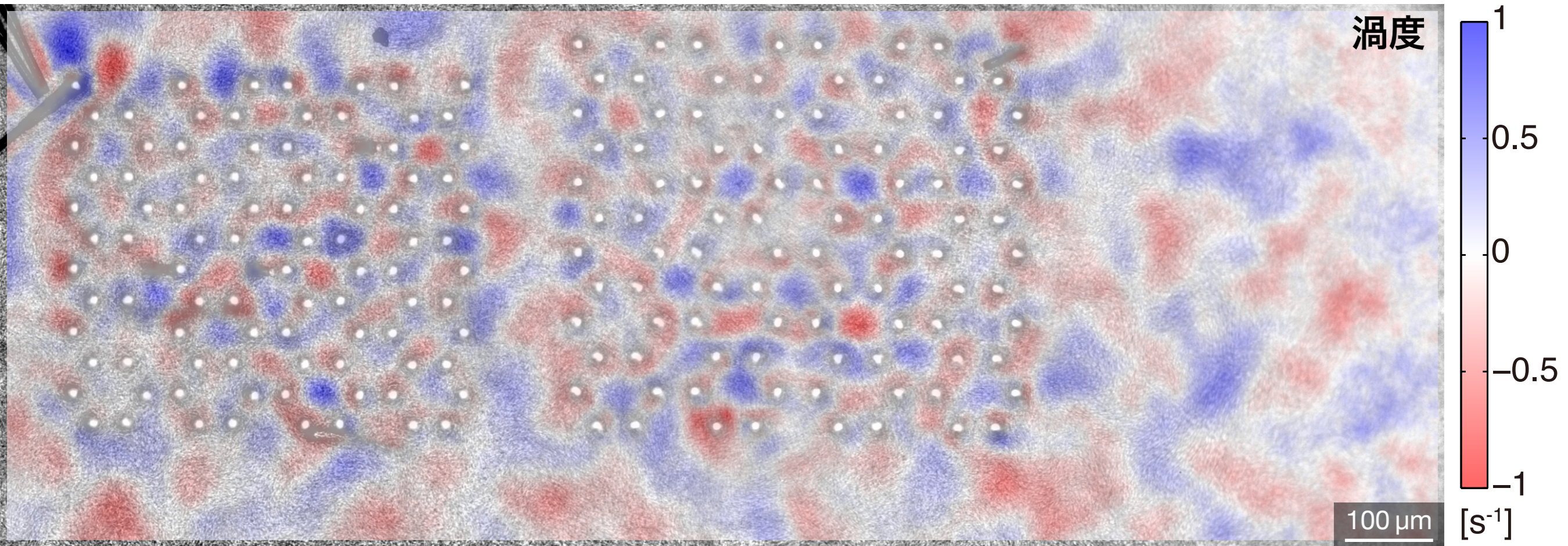
1x speed



⇒ 大域的な反強磁性秩序は実現できない

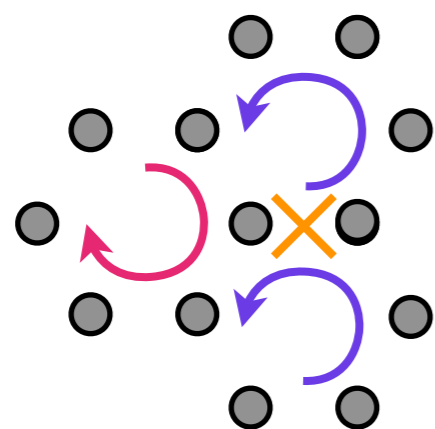
どのような格子構造で渦が安定化する？

■ハニカム格子はダメ：フラストレーションがある



$a = 40 \mu\text{m}$
↑ inter-pillar distance

$a = 45 \mu\text{m}$

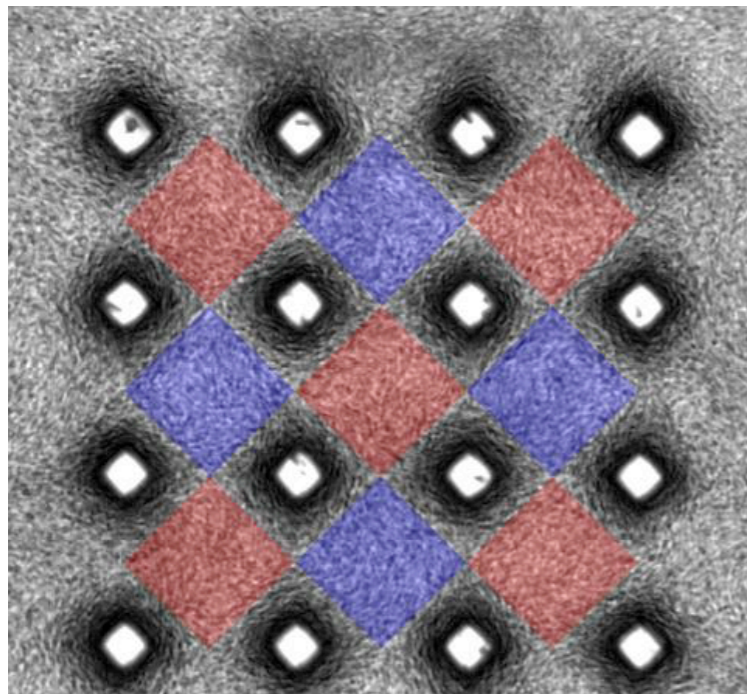


→ 大域的な反強磁性秩序は実現できない

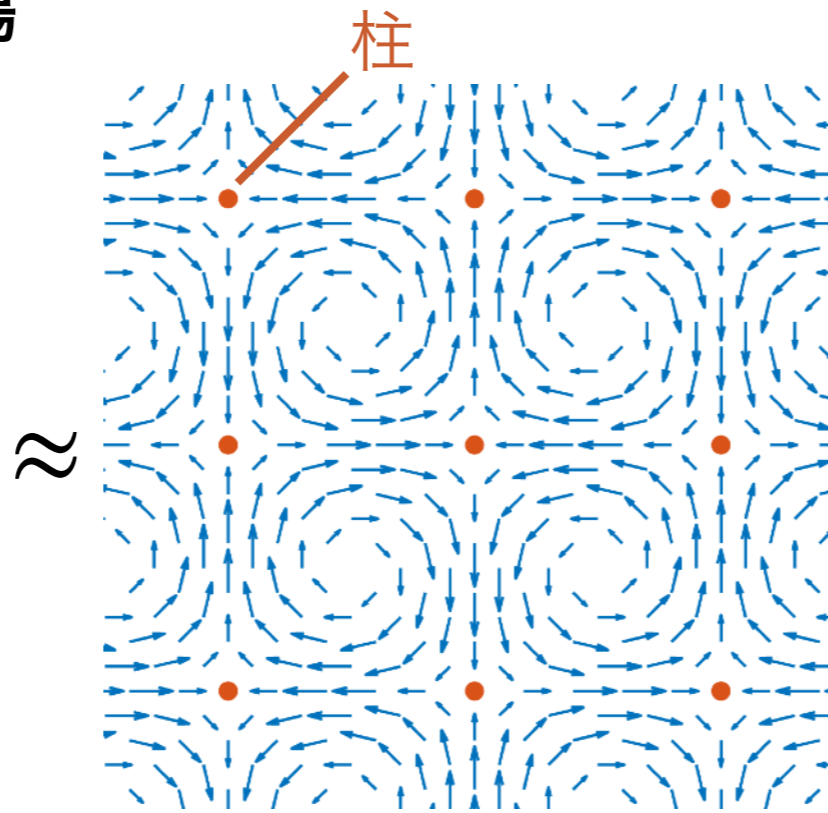
t

流れ場を実空間トポロジーの目線で見してみる

■反強磁性渦格子の流れ場



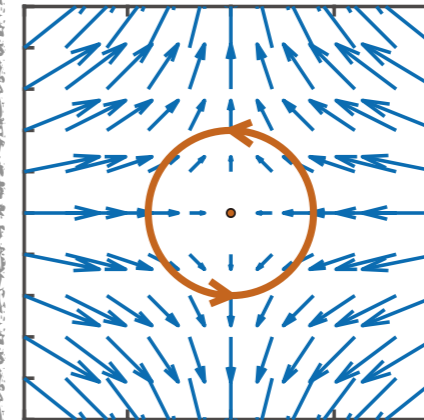
x0.5 speed



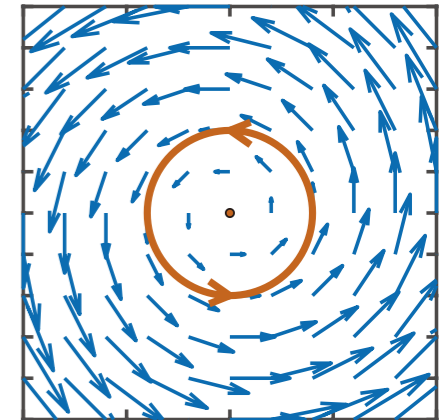
topological charge: $c = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta$
(winding number, 巻き数)

$c = -1$

$c = +1$



柱

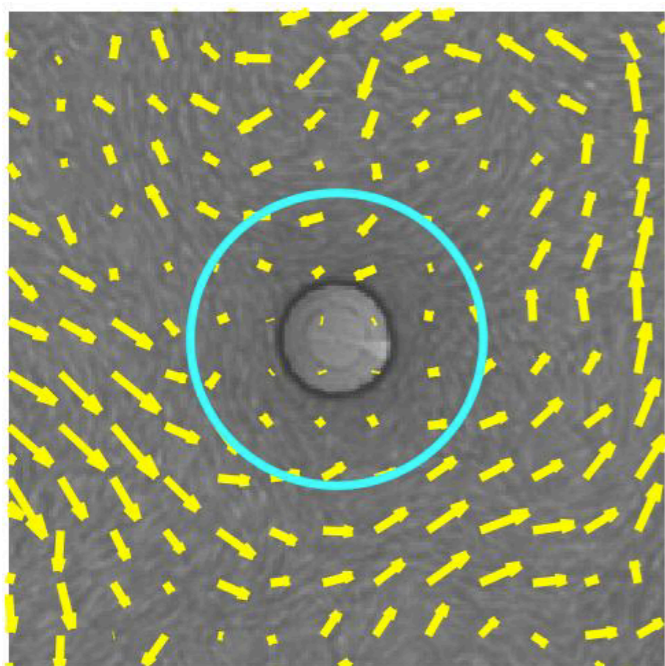


vortex core

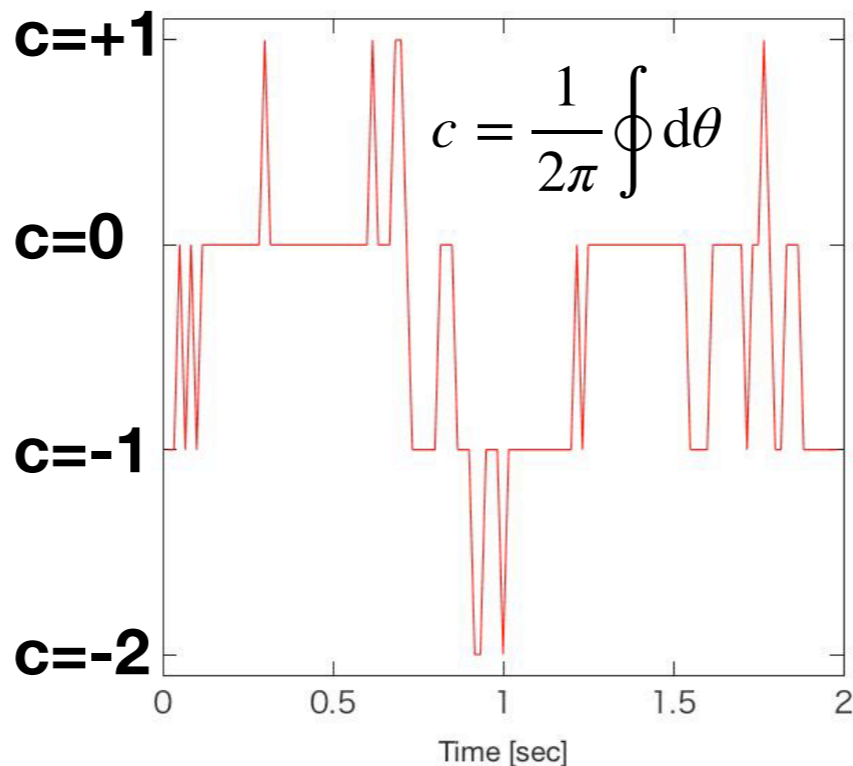
→柱は、巻き数-1のトポジカル欠陥になっているとみなせる。

孤立した1本の柱はどう振る舞うか？

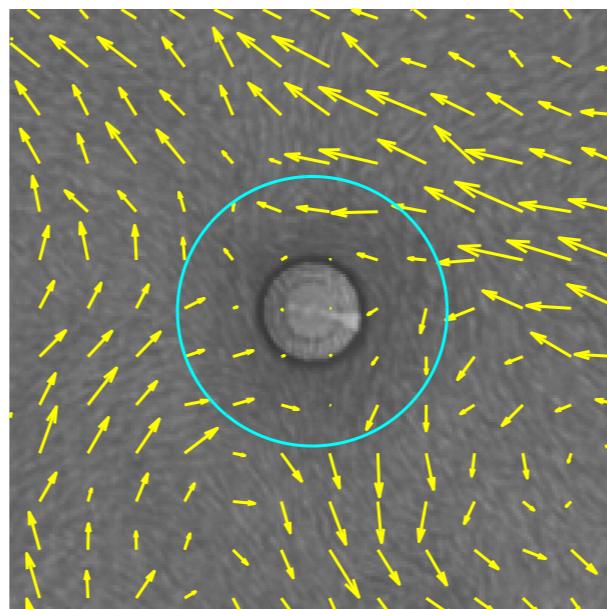
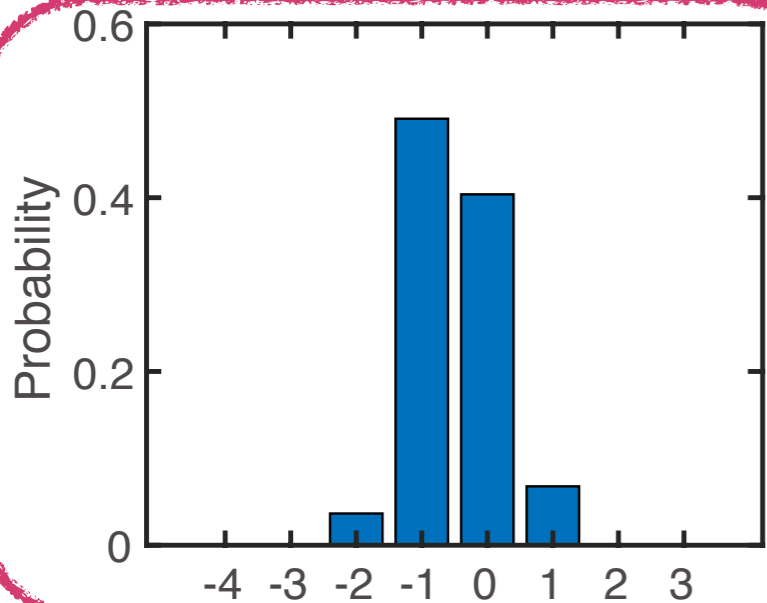
■孤立した柱の巻き数を測って、その時系列から確率分布を見てみる。



Pillar diameter=20 μm



■孤立した柱でも負の巻き数の欠陥として振る舞う傾向



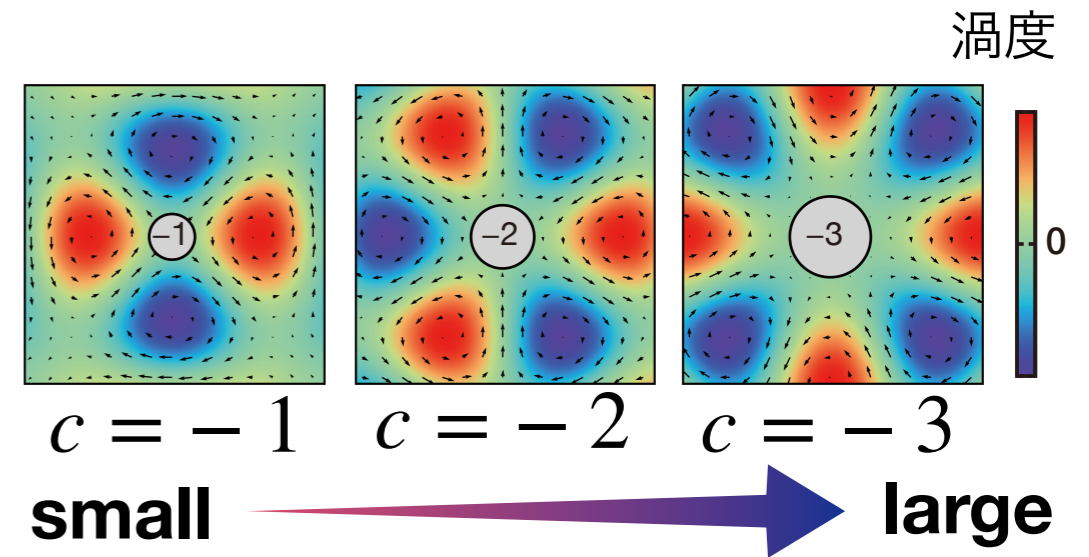
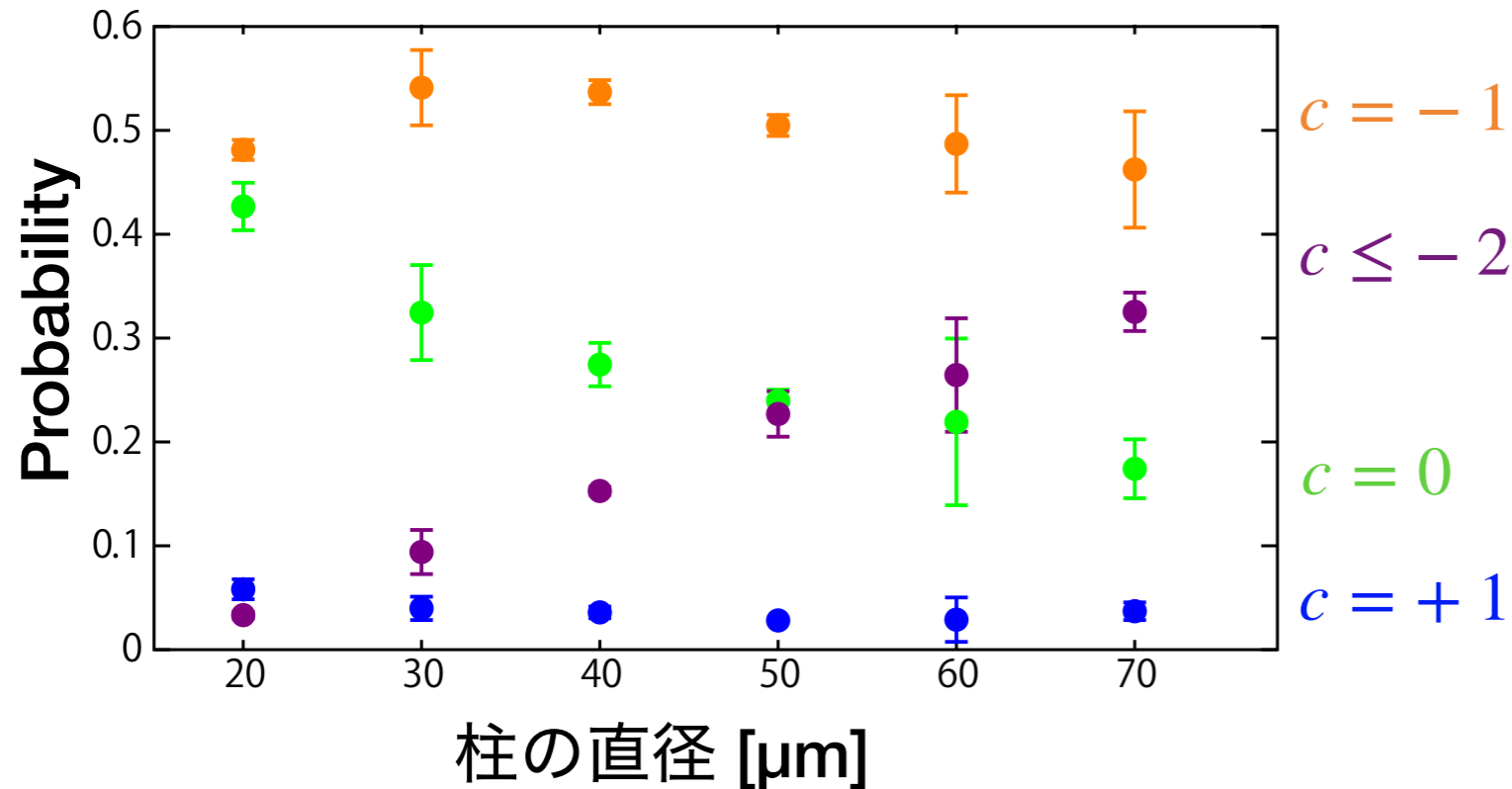
←典型的な $c = -1$ の流れ場

巻き数 c

柱の直径を変えると分布はどう変わる？

柱の直径を変えたらどうなる？

■柱の直径を変えたときの巻き数分布の変化



→ **大きな柱ほど、より大きな負の巻き数を持ち、周囲に多くの渦を伴う。**
解釈：バルクをただよう欠陥を、柱がピン留めする。

Question: これらを再現する境界条件は？

バルクのバクテリア乱流を記述する方程式：

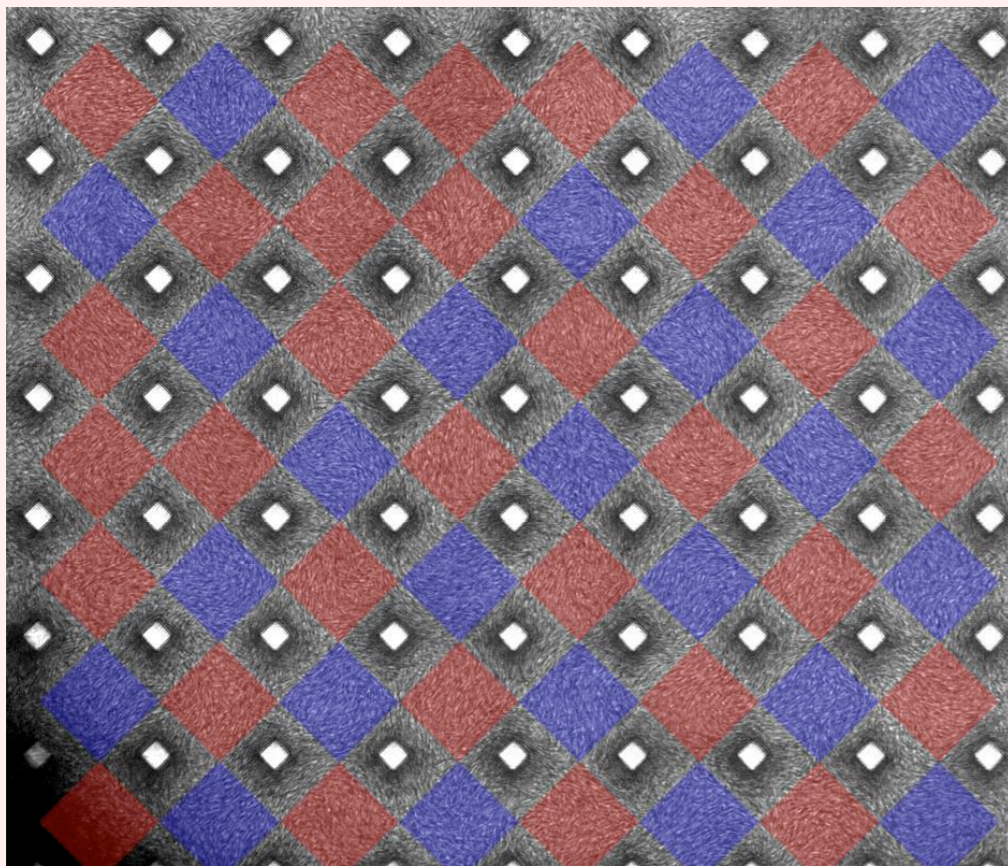
$$\partial_t \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla q + a \vec{v} - b |\vec{v}|^2 \vec{v} - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v}$$

+

境界条件：??????

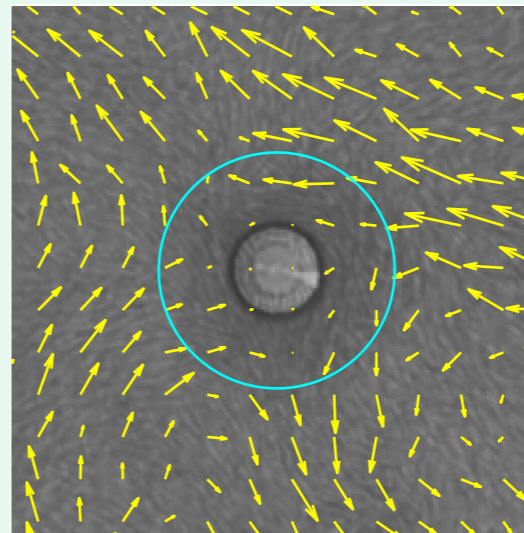


渦格子秩序の自発形成



孤立した柱 = トポロジカル欠陥

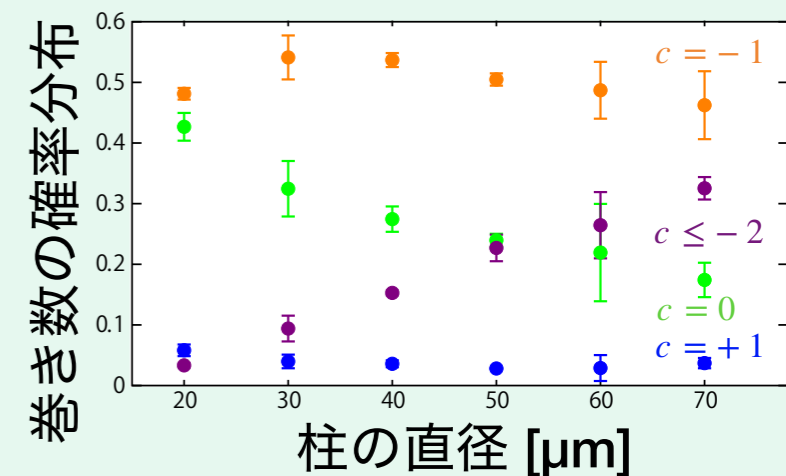
典型的な流れ場



巻き数： $c = -1$

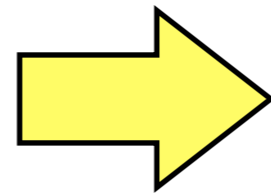
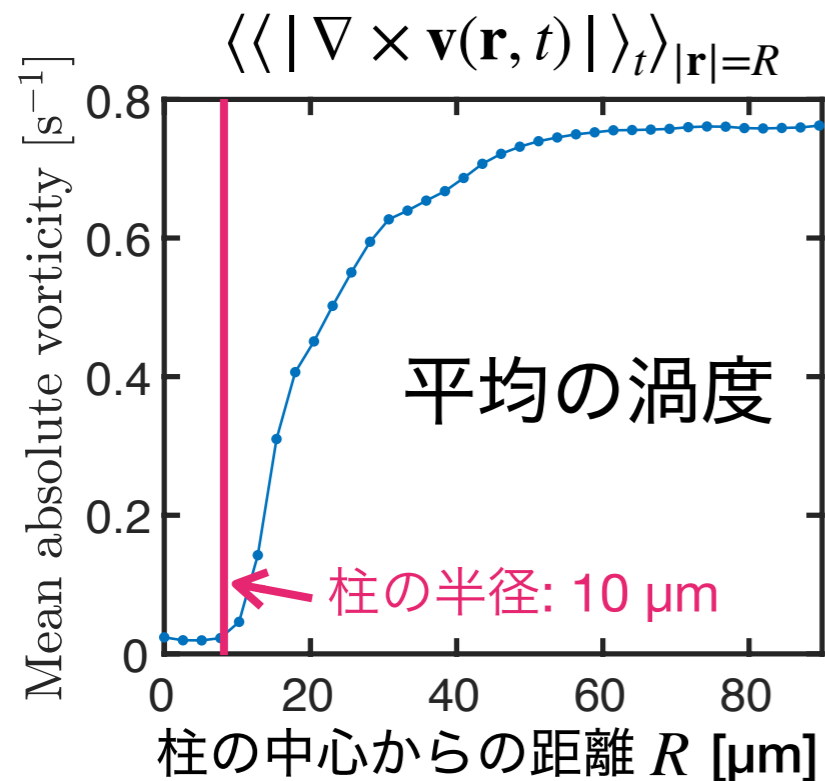
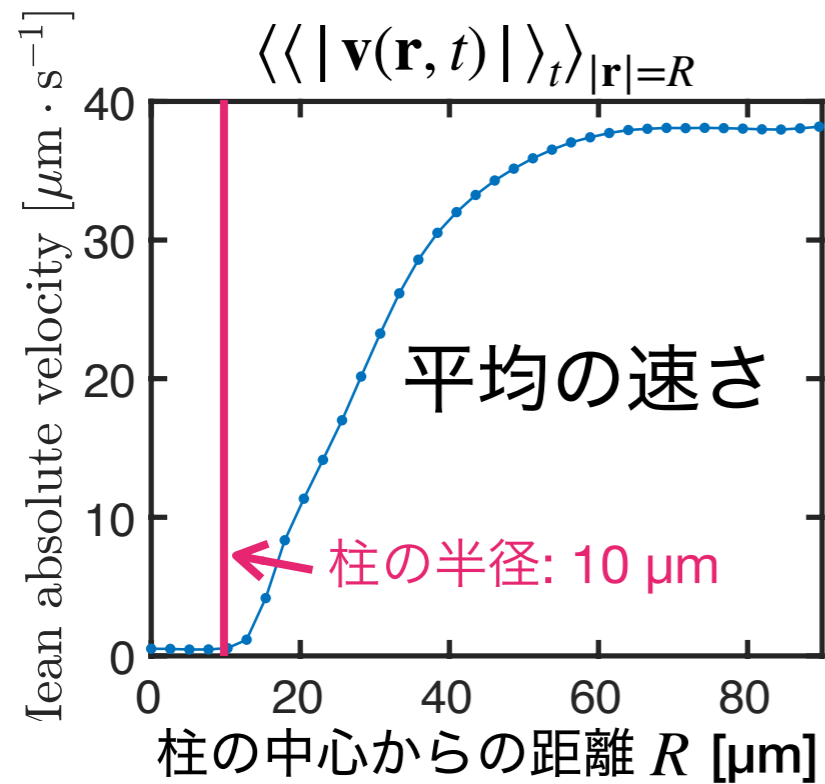
$$c = \frac{1}{2\pi} \oint d\theta$$

巻き数の直径依存性



実験的に境界条件を探ってみる

■ 孤立した柱の周りの流れ場



柱の表面で:

$$\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$\omega = (\nabla \times \mathbf{v})_z = 0$$

となっていそう

新たな境界条件でマクロとミクロの両方の振る舞いが再現

バルクのバクテリア乱流を記述する方程式：

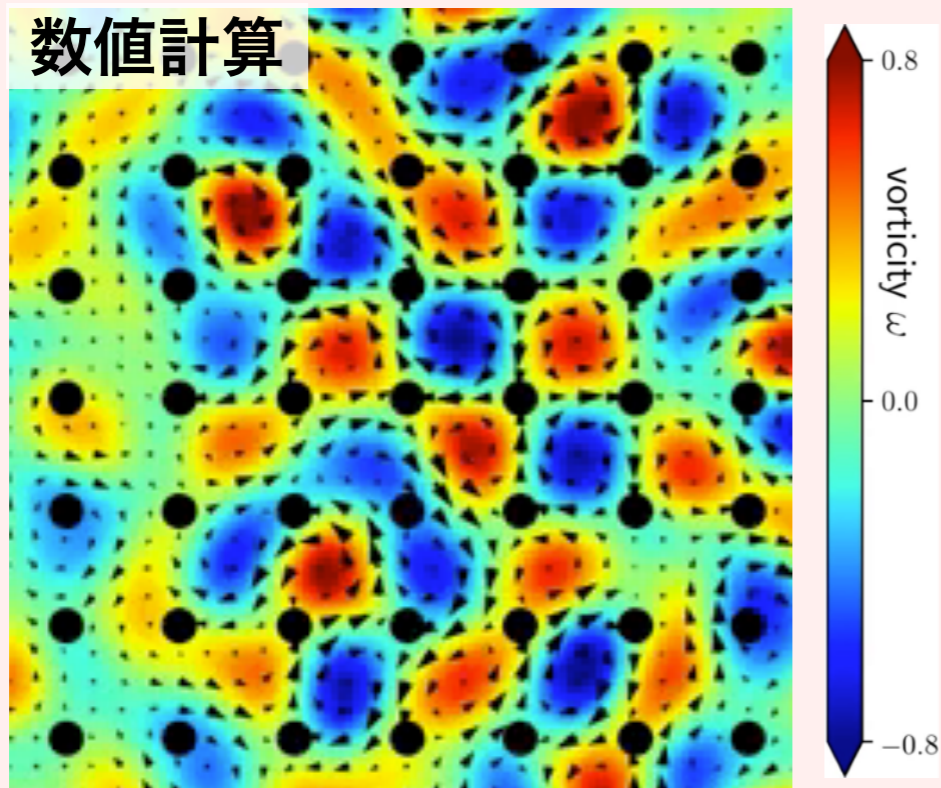
$$\partial_t \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla q + a \vec{v} - b |\vec{v}|^2 \vec{v} - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v}$$

+

実験で推定した境界条件: $\vec{v} = \vec{0}$, $\omega = (\nabla \times \vec{v})_z = 0$

渦格子秩序の自発形成

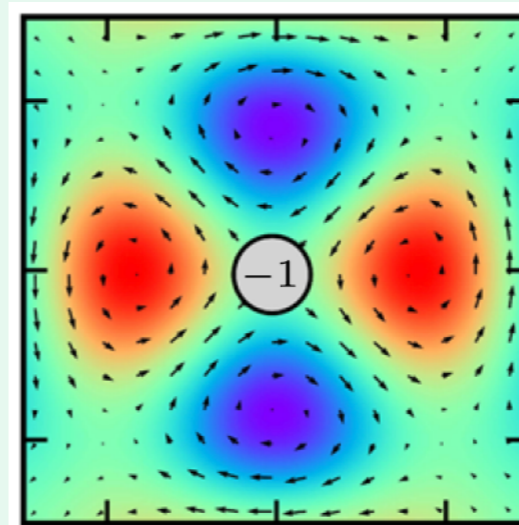
数値計算



柱格子によって、渦格子を好むことを“思い出させて”あげられる

孤立した柱＝トポロジカル欠陥

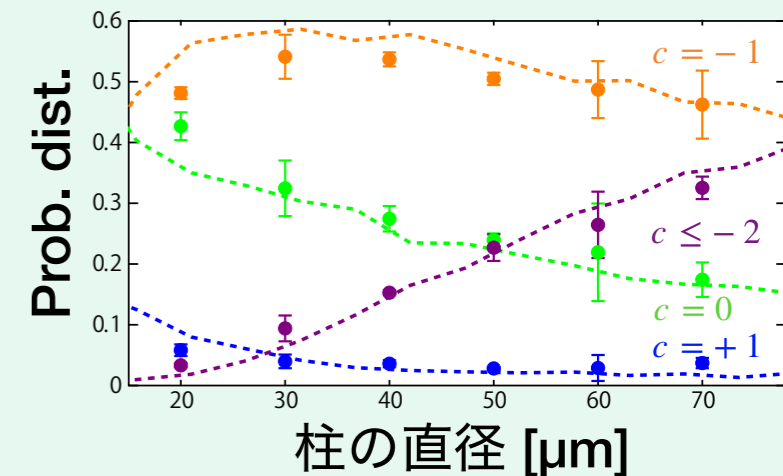
解析解



巻き数: $c = -1$

各種測定量の定量的再現も成功！

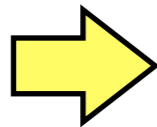
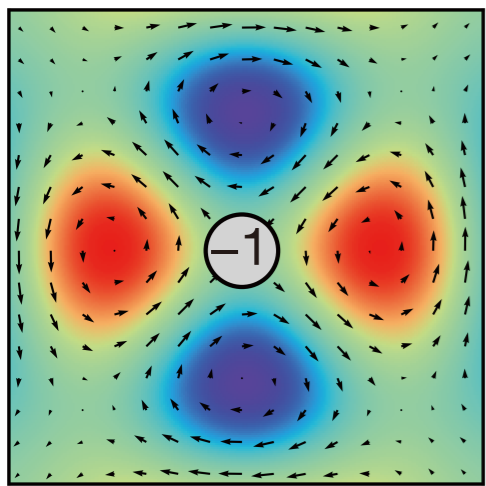
数値計算(点線)と実験(●)



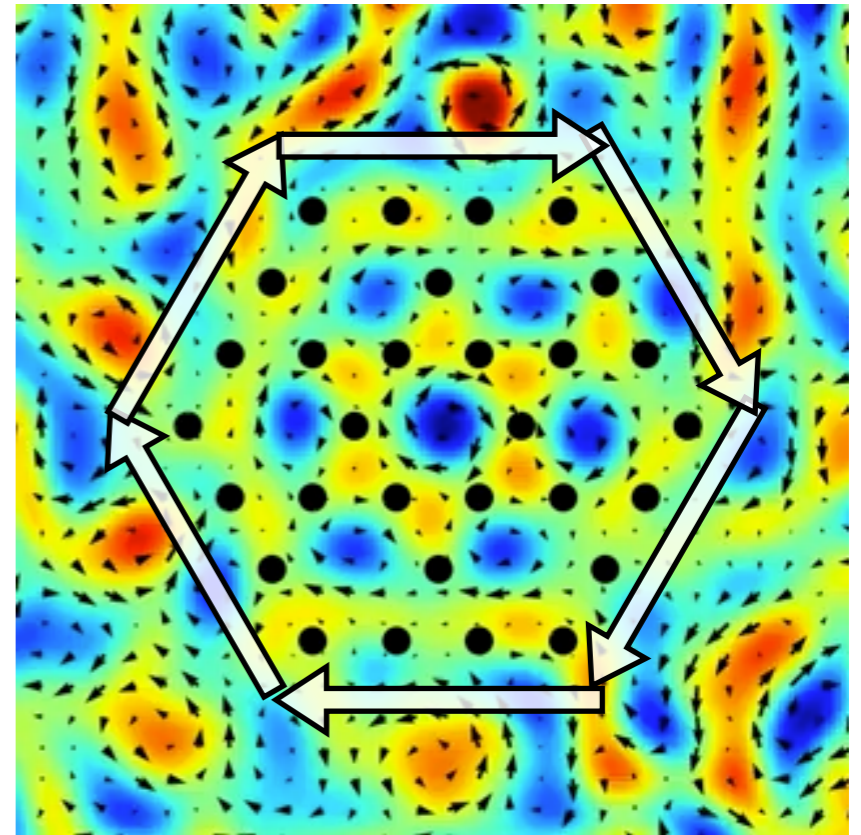
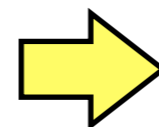
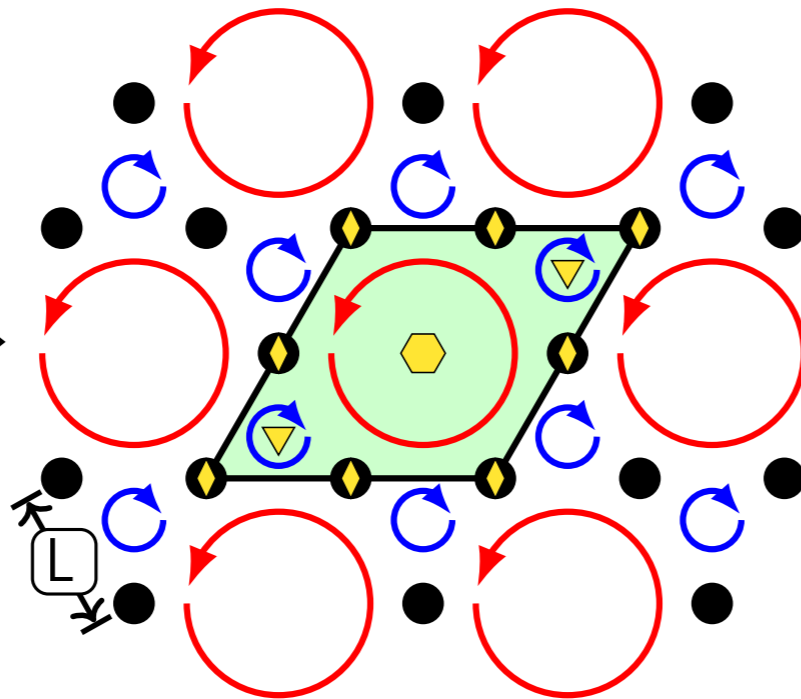
渦格子秩序をトポロジカルに設計できる

柱＝トポロジカル欠陥を適切に配置することで、渦格子秩序をデザインできる！

$$c = -1$$



カゴメ格子

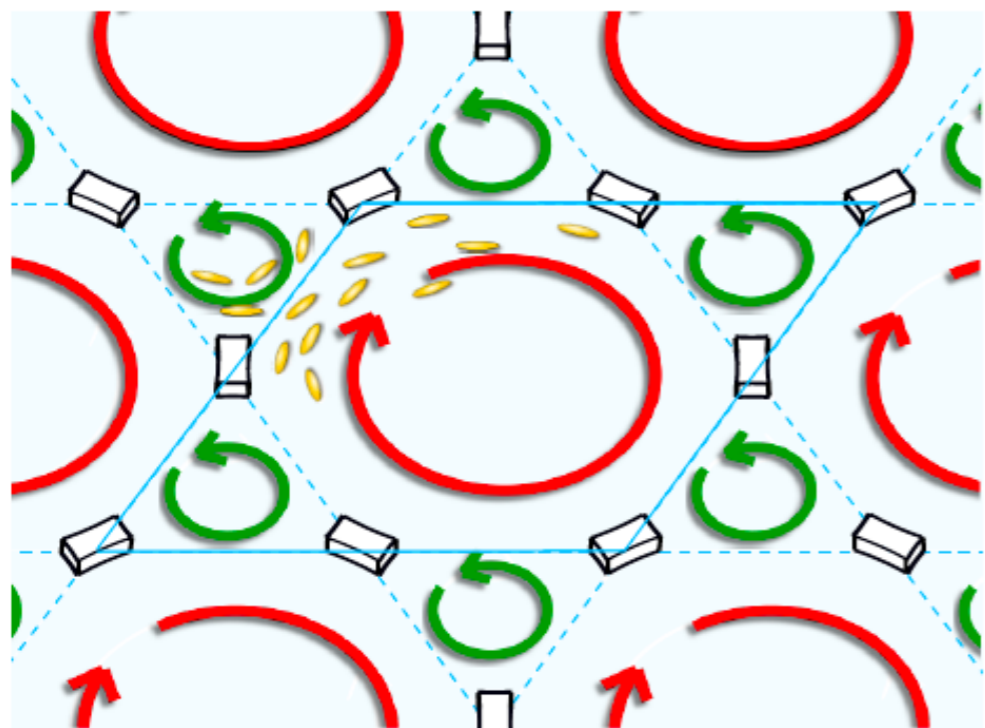


鏡映対称性の自発的破れ
→非ゼロ循環流を誘起できる
(アクティブ流体デバイス?)

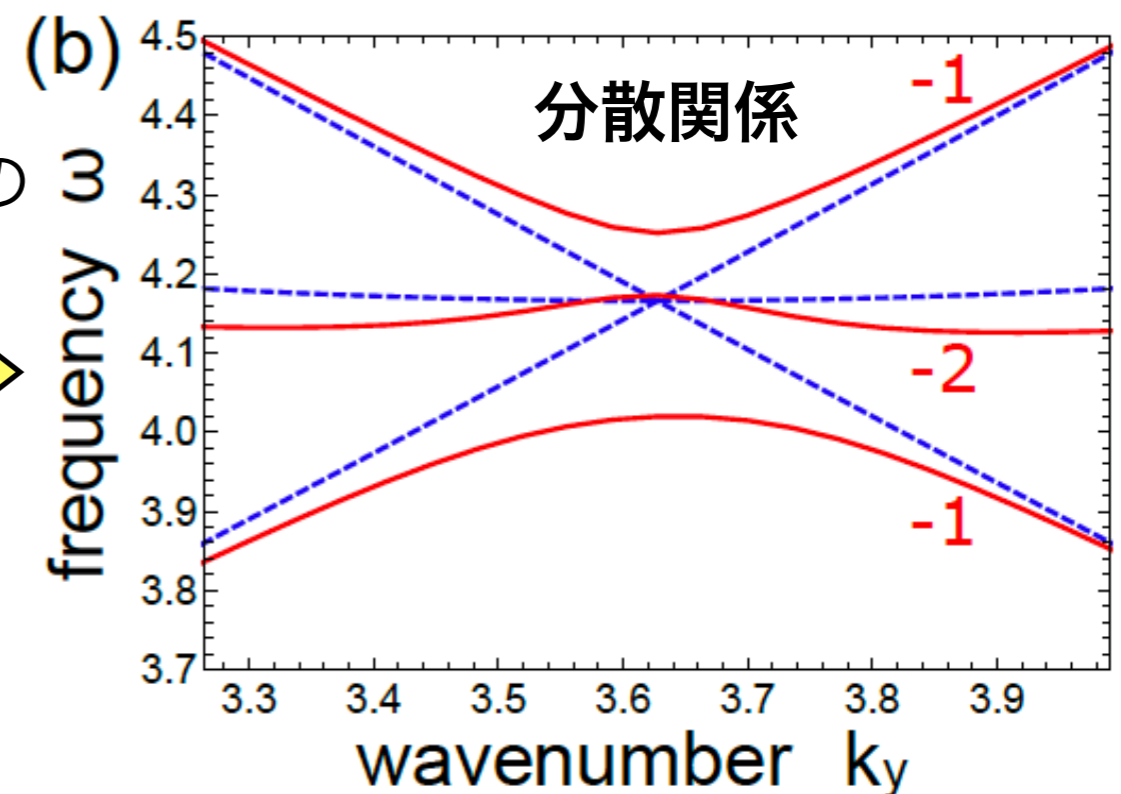
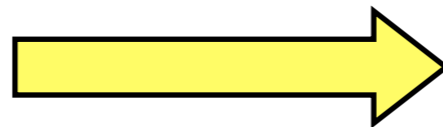
トポロジカル・アクティブマターの実現可能性？

Sone & Ashida理論 K. Sone & Y. Ashida, Phys. Rev. Lett. 123, 205502 (2019)

異常量子Hall効果に対応するトポロジカル現象が
我々の実験のカゴメ格子系で見られるという理論予想



定常解まわりの
ゆらぎを解析



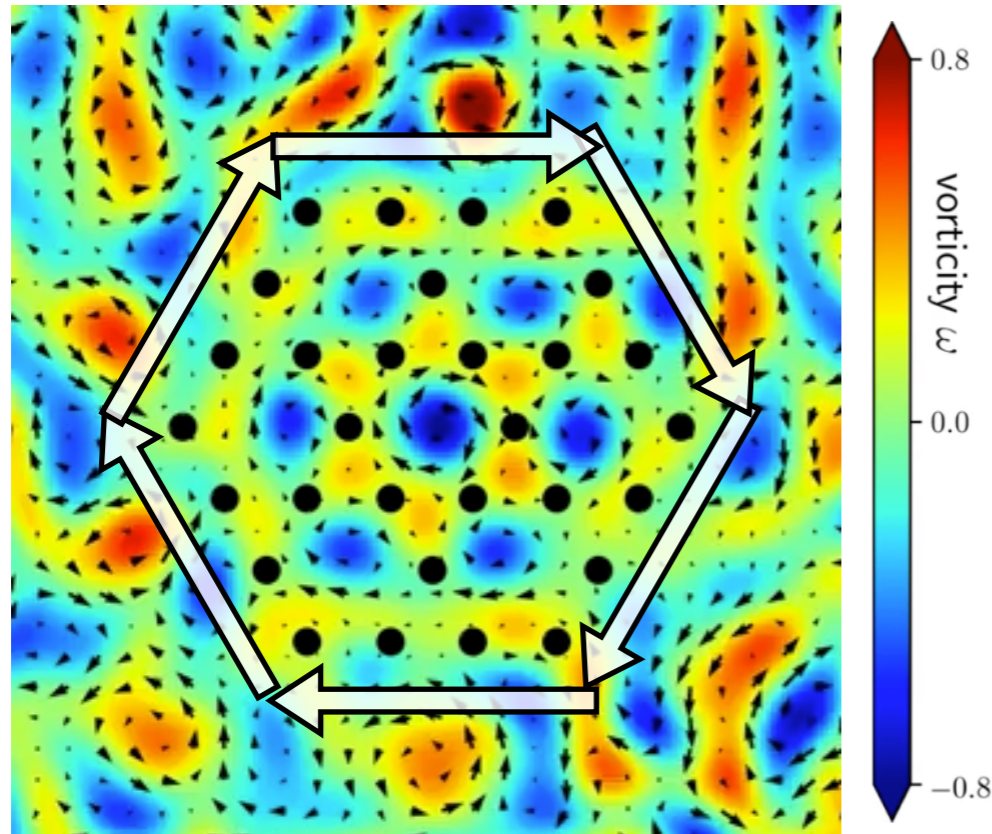
非ゼロChern数のトポロジカルに非自明なエッジモードが現れる

→非エルミート量子力学とアクティブマターの融合研究が盛んになりつつある

他の例：細胞集団運動でエッジモードの報告 Yamauchi, et al. arXiv: 2008.10852
カイラルアクティブマターでの非エルミートトポロジーの予測なども。
Sone et al. Nat. Commun. 11:5745 (2020)

カゴメでの秩序形成の予言を実験で確認

■ 数値計算



■ 実験 (最近やっているのでunpublished)



- 偏微分方程式レベルで微生物集団運動を予測できるようになった
Nishiguchi et al. *Nat. Commun.* (2018), Reinken, Nishiguchi et al. *Commun. Phys.* (2020)
- この理論的枠組みをアクティブ乱流を閉鎖系に閉じ込めたときの秩序化現象にも適用して理解を深めよう！

Shiratani, Takeuchi, Nishiguchi, *in preparation*

そのまえに：数値計算方法の詳細

バルクのバクテリア乱流を記述する方程式：

$$\partial_t \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla q + a\vec{v} - b|\vec{v}|^2 \vec{v} - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v} \\ +$$

$$\text{実験で推定した境界条件: } \vec{v} = \vec{0}, \quad \omega = (\nabla \times \vec{v})_z = 0$$

壁の中で \vec{v} と ω を減衰させるdamping項を実装

速度のdamping

$$\partial_t \vec{v} + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\nabla q + a\vec{v} - b|\vec{v}|^2 \vec{v} - (1 + \nabla^2)^2 \vec{v} - \gamma_v K(\vec{r}) \vec{v}$$

↓ $\nabla \times$

どこでdampingを効かせるか？ : $K(\vec{r}) \approx 1 \leftarrow$ 壁の中

$K(\vec{r}) \approx 0 \leftarrow$ 流体中

$$\partial_t \omega + \lambda \vec{v} \cdot \nabla \omega = a\omega - b[\nabla \times (|\vec{v}|^2 \vec{v})]_z - (1 + \nabla^2)^2 \omega - \gamma_v \{ \nabla \times [K(\vec{r}) \vec{v}] \}_z$$

$$- \gamma_\omega K(\vec{r}) \omega$$

渦度のdamping

↓
擬スペクトル法で解く

(擬スペクトル法の制約として $K(\vec{r})$ を高波数モードを含まないように用意するなど工夫)

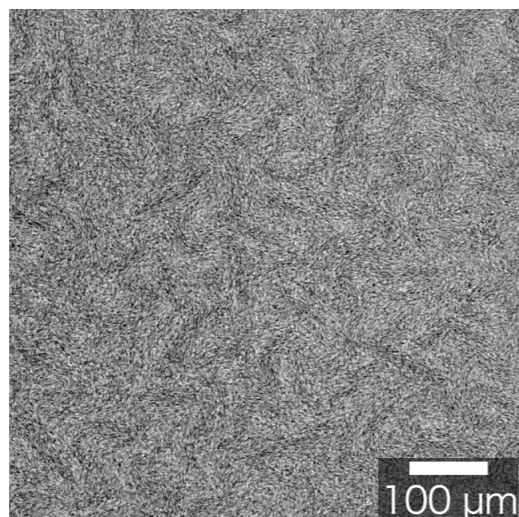
**すみません、
後半の未出版部分は公開版から削除しました。
もうすぐpreprintを公開します。**

振動解について：先行研究との比較

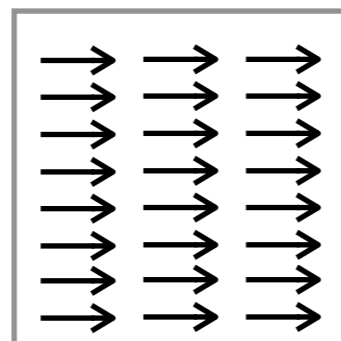
■アクティビティを制御変数とした場合の乱流化の道筋（バルク、境界なし）

bacterial suspension

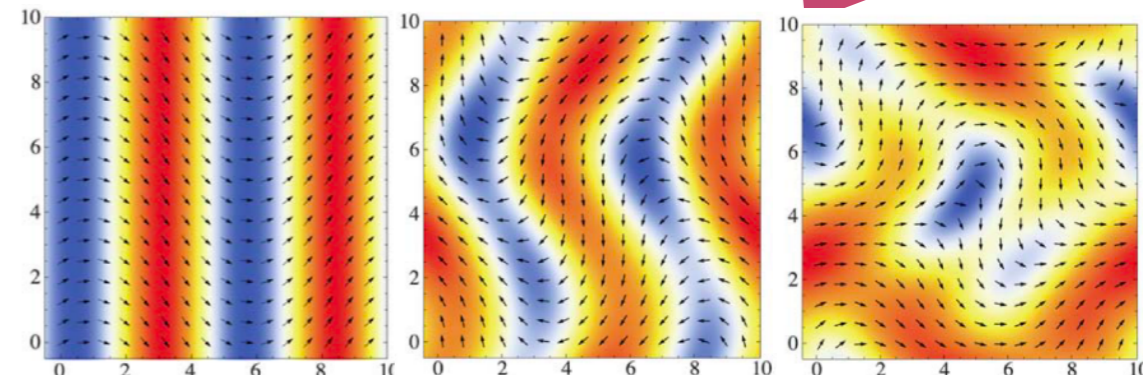
polar



数値計算



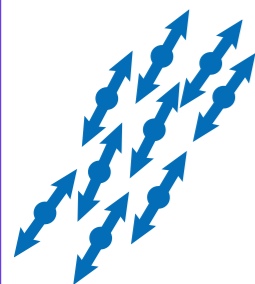
activity



振動状態を経て乱流化
(ただしTTSH eq.とは異なるモデル)
Giomi & Marchetti, *Soft Matter* 8, 129 (2012)

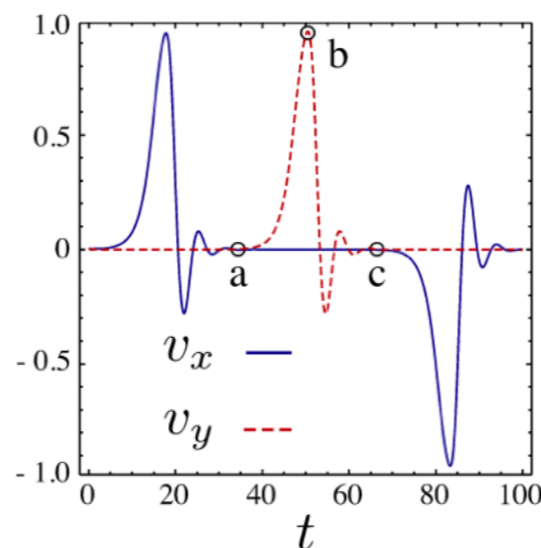
微小管 + 分子モーター

nematic



Sanchez, et al.
Nature, 491, 431 (2012)

数値計算



興奮系の振る舞いを経て乱流化

Giomi et al.,
Phys. Rev. Lett. 106, 218101 (2011)

→我々の閉じ込めを制御変数とした場合も似たシナリオが得られた