需要予測の序論的研究 (I)*

——とくに計量経済学的方法を中心として——

渡 部 福 太 郎

は じ め に

この小論の目的は需要予測にあたって用いられる代表的な手法の一つである，計量経済学的な方法について考察することである。需要予測のための手法はもちろんこれが唯一の方法でないことは確かであるし，このような方法のほかに，いかに多くの方法があるかはあとの脚註にあげた河野教授の研究に詳しく論じられている。

予測というものはつまるところ“未知のもの”——時間的にも，内容的にも——の起りそうな“すがた”を画くことであるから，それはある確率のもとでしかいえないことであり，しかも，予測にあたって手掛りとなるものは，それがいかなる形で把握されるにせよつねに“過去”において生起したある関連事象である。この過去に生起した関連事象を比較的に客観的かつ consistent に把握する方法の一つとして計量経済学的な方法がある。もちろん，ここでは経済事象一般の分析において用いられる magnificient model を対象とはしない。したがって，分析はいわゆる計量経済学的分析の全般をここで取り扱うわけではない。あくまで需要予測に関して限られた範囲でのみ考察することを断わっておかなければならない。以下の小論において取りあげる課題は下記のとおりである。

〔1〕 需要要因の分析
〔2〕 理論モデルの構成
〔3〕 理論モデルから統計的モデルへ
〔4〕 統計的モデル構成における若干の補論
〔5〕 最小自乗法の簡単な説明
〔6〕 その他の方法について
〔7〕 誘導形法と二段階最小自乗法
〔8〕 構造推定の検討項目
〔9〕 シミュレーション分析
〔10〕 予測値の算定

これらの課題についての説明のほかに，補論的にいわゆる傾向分析についても，ごく簡単に需要予測の視点からふれておいた。具体的な事例については，ほとんどふれていないが，設例は用いた。これらの設例は現実においてどこかの企業ないし業界におこなわれた予測モデルとはまったくかかわりのないものであることをお断りしておく。

* この小論は，昭和39年度における文部省科学研究費の交付をうけた『需要予測に関する研究』の研究報告の一部である。この研究は河野豊弘教授との共同研究であり，さきに本誌第2巻第1号（1965年9月）に掲載された河野教授の「需要予測の序論的研究」につづくものである。ただし，この研究はなお続行中であるので，ここに報告するものは，そのデッサンにしかすぎず，今後の改善を予定していることを付記しておく。したがって，感謝しなければならない人びとの名前も，この段階では mention しておかないことにした。

〔1〕 需要要因の分析

需要予測のための方法は決して単一ではない。それは直感的な方法からきわめて厳密な

調査と計算によるものまで多種多様である。これらの方法は決してそれぞれ相対立するような性格のものではなく，むしろ相互に補完しあう性質のもであることが多い。予測ということは，はじめにも述べたように，もともといまだ発生していない未知の事柄についての見解の表明という性質をもっているのであるから，どのような方法によっても，それで完全であるということはありえない。導きだされたどのような見解も，そのとられた手続きのいかんをとわず，蓋然性をもっていえるだけである。しばしば用いられておりながら科学的な手続きとはいえないとして排除される直感的な判断であっても，予測ということに関するかぎり，これを完全に排除してしまうことはできない。むしろ，その直感的判断の予測作業においてしめる位置が明確になるだけに，その重要性と権限とが明確になってくる。その点についてはのちに言及することにしよう。

いま，この直感というものを除いて考えると，予測の方法は大きく三つにわけることができる。一つはしばしば相関分析というタームでよばれている方法である。これは，正確には計量経済学的モデルによる分析ともよばれている。もう一つは，傾向分析（時系列分析ともよばれている）による方法である。残りの一つは，その二つを除いた他のすべての方法である。これには標本調査によってあつめたデータを基礎にして，各種の判断をつけ加えて予測してゆくような積みあげ式のものから，外国の事例ないし類似製品の需要の動きから類推してゆくものにいたるまでの多くの方法がふくまれている。

このうち，計量経済学的な方法は，需要予測にあたって，さきに述べたように，もっとも代表的な位置をしめる方法の一つである。この方法を説明するためには，まずエコノメトリック・モデルの構造そのものについて説明しなければならない。

エコノメトリック・モデルというのは，決して需要予測においてのみ用いられるものではない。一般的にいって，エコノメトリック・モデルのねらいは，経済の相互依存関係を数量的につかまえてゆくということである。そのつかまえてゆく場合に，決してでたらめにつかまえてゆくのではなく，一定の経済理論のおしえるところにしたがって，それを把握してゆくわけである。したがって，そういうモデルによる分析は必然的に数式を伴うことになる。つまり経済現象というのを，ある特定の数式によって表現された体系に表現しなおすことが，エコノメトリック・モデルの最初の仕事になってくる。

8頁の図表をみてもらいたい。この図表で「現実」と書いてあり，つぎに「重要な決定要因の選定」というように書いてあるが，ここで「現実」というのは，予測を行なうにあたって，問題となっている経済現象そのものである。したがって，油圧器機をこしらえている会社であれば，その油圧器機に関連したいろいろな経済現象がこの「現実」であり，ルーム・クーラーを生産しているところであれば，そのルーム・クーラーに関連した経済現象が「現実」である。そして，その「現実」について問題になることは，その生産している財に対する需要を知るということであるから，その需要がどうなるかということを知るには，需要そのものが，現実にどのような仕組みできまっているかを知らなければならないであろう。

そこで「現実」がどうなっているかを知るために，いまそれがルーム・クーラーであるならば，そのルーム・クーラーの需要に影響をおよぼしている，いろいろ重要な要因をえらびだすことになる。もちろん，こういうものを選定してゆく場合には需要理論の助けを借りることになる。たとえば，ルーム・クーラーのような耐久消費財であれば，消費財に関する需要理論を用いることになる。これは

本論文冒頭

需要者の消費支出に関する分析であるが，消費財に対する需要をDという記号で表わすとすると，この需要はこれを買う人たちがどれくらいの所得を持っているかによって，需要の大きさがきまってくるであろう。それからその価格もまた，需要に影響を与えるであろう。しかもその価格だけでなく，それに関連した他の財の価格が影響をあたえる。これはいくつもある場合もあれば，ひとつしかない場合もある。これは競争財の価格または代替財の価格とよばれる。このように所得と価格が問題になるということが，需要理論で説明されている。そこで，

$$D=D(Y, P_1, \cdots\cdots P_n)$$

という式を作りだすわけであるが，これは要するに，所得Yと，いま問題にしている財および代替財の価格 $P_1\cdots\cdots P_n$ および，その他によって影響されることを示している。ルーム・クーラーを決定する重要な要因は所得であり，その財の価格であり，それに関連したその他の財の価格であるということを，記号でもって表わしただけである。もちろん，需要理論はこういう式を導きだすまでにいろいろと複雑な手続きをふんでいるわけである。そして，最終的にこういう式がでてくる。もちろん，このでてきた式を見るかぎりでは，多くの人の常識とほぼ一致していることになる。ルーム・クーラーと競争関係にたっている財が，たとえば中古車などであれば，その中古車の価格が上ったり下ったりすることはこの需要に重要な影響をあたえるということになる。

ある財について需要者がそれを使うか使わないかを決めるときに，いつもそれと競争関係にたっている財の価格が問題となる。こういうことは消費財の場合だけではない。もし油圧を用いるときのコストが，その競争財(たとえばメカニカル)を用いるときのコストに比して，相対的に有利ならば，油圧を用いるが，もしそうでなければ，油圧を用いることが割りに合わないというケースがおこるかもしれない。その場合には双方の価格が問題となる。あるいはこの機械は油圧でなければどうにもならないので，代替財の価格は問題にならないというケースもある。この場合には必ず油圧を使うことになる。代替関係にたつ財の数が多ければ多いほど，価格の影響の仕方はいろいろとあるであろう。

こうして，消費者の需要の構造が理論的にあきらかになってくるのであるが，需要がどの程度まで所得変化によって影響され，どの程度まで価格変化によって影響されるか，これを数量的に把握してゆく必要がある。この数量的な把握のための手続きがエコノメトリック・モデルによる需要予測のつぎの重要な部分となる。いうまでもなく，需要に影響をあたえる要因は，上にあげたような所得と価格だけではないから，そうした他の要因について明白に数量的につかまえることができるものは考慮しなければならないであろう。すでにのべたごとく，デモンストレーション効果とか，依存効果とかいわれるものも，そういった要因のなかにはいるが，もし当面問題としている財の需要について，それらの効果を数量的にあらわすことができないならば，需要予測のなかにくみいれてゆくことができない。

さらにつけ加えておかねばならないことはいまは消費財などを例にとりながら説明してきたが，需要予測のためのモデルを構成するにあたって必要な理論は，上にのべたところにつきないことは当然である。おなじ消費財でも，耐久財のときには需要の構造はより一層に複雑なものとなるであろう。生産財の場合には所得効果という表現を用いてあらわしたところは，所得効果ではなくて“生産効果”とでもなづけるべきものとなる。しかし，その経済的な意味づけは，まったくおなじである。また，おなじ生産財であっても，それが耐久性をもったものであるか，そうでないか

本論文冒頭

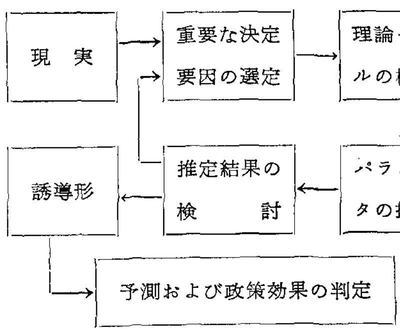
によって，モデルを構成してゆく場合の基礎となる理論がことなってくるであろう。その財が耐久性をもたないならば，その財にたいする需要は，過去において需要され購入された数量というのは，その財にたいするそのときの需要に影響をあたえないことになるであろう。しかし，逆にそれが耐久性のあるものであれば，そうして過去における需要というのが無関係ではありえなくなる。過去において購入された生産物は，部分的には磨損しながらも蓄積されており，その蓄積された部分は，新らたに需要され蓄積される部分とともに，一定量のサービスを提供することができる。ここから，こうした耐久財にたいする需要の分析には，さきにのべた単純な消費財のケースにあてはまる需要理論とはことなったものが必要となる。また生産財であっても，耐久性のないものもあれば，ある生産設備のパーツとしての機能をもつものもあり，さらには巨大な生産設備もある。それぞれに応じて需要構造はことなってくる。

さらに，その生産物の需要者（ないし需要部門）がどの地域にあるかによって需要は影響をあたえることになるであろう。とくにその需要部門が国籍をことにする場合，その外国の需要部門についてのモデル分析は，いささかことなった原理にもとづかなくてはならない。また，ある特定の財にたいする需要を分析してゆこうとする場合，その需要はさらに別な部門の需要によって影響をうけるということになるのが通常である。たとえば，消費財をとった場合，その特定の消費財にたいする需要は，消費家計の所得によって影響されるが，その家計所得は，またその家計の所有する労働（あるいは資本）が，どのような賃金水準で，どのくらい需要されているかによって影響される。その価格はたんに生産者のコスト条件によってのみならず，家計の需要状態によっても影響をうけ，その需要状態はまたその特定の消費財以外の他の消費財の価格によっても影響をうける。その内容がいくらかことなるにしても，同じようなことは生産財の場合にもいえる。したがって，ある財にたいする需要を分析し，そのエコノメトリック・モデルを構成するといっても，それほど簡単なことではない。通常の場合，こうしたことのほかに，その特定の財の性質いかんにより，いろいろと特別な需要要因が存在しているはずであるから，そうした要因もすべて考慮してゆくのが正当なゆき方であるということになるであろう。

いずれにせよ，これまで開拓されてきた各種の財の需要理論というものを基礎としながら，対象としている現実のある具体的な財の需要構造を分析し，そこからその需要をうごかしている重要な決定要因をいくつか選びだす。これは，エコノメトリック・モデルによる場合の第一の手続きである。

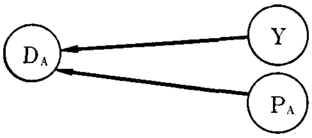
〔2〕 理論モデルの構成

需要を決定している数多くの要因のなかから，重要ないくつかの要因を選びだしたあとの第二の手続きは，理論モデルの構成である。わかりやすくするために，それらの手続きおよび以下の手続きを図示するとつぎのようになる。



この理論モデルの構成の場合の重要なポイントは，そのモデルが一つの体系として完結したものであることである。モデルは通常一

組みの方程式体系としてしめされる。したがって，モデルは一定の解をもちうるように構成されなければならない。いま，ある食料品をとりあげてみよう。それをAとよぶ。食料品Aにたいする需要はいうまでもなく，その食料品Aがいかなる価格でうられているのか，需要する家計の所得はどのくらいあるのかによって影響をうける。したがって，その関係を図示するとつぎのようになる。



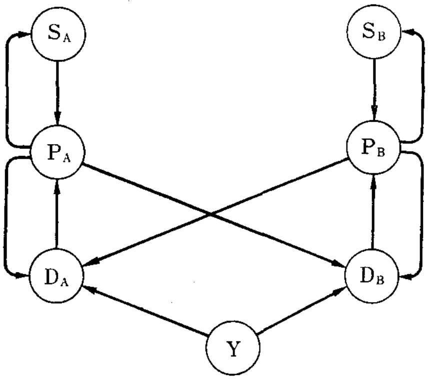
矢印は“影響を与える”ということを意味する。通常この関係は，

$$D_A=f(Y,P_A)$$

のごとくあらわすことは周知のところである。ところで，この食料品Aにたいする需要は，それと競争関係にたっている他の食料品の価格の動きによっても影響をうけるかもしれない。たとえば，Aが豚肉であり，Bが牛肉であるとしたら，その需要における個々の価格の影響は交叉的である。したがって，そのような場合には，Aにたいする需要は，

$$D_A=f(Y,P_A,P_B)$$

のようにあらわすことができる。Yは所得であり，P_Aは，その食料品Aの価格，P_Bは，その食料品と競争関係にたつ他の食料品Bの価格をあらわしている。しかし，その価格P_Aは，生産者がどれだけの供給S_Aをおこなうか，また，食料品Bの供給をおこなうかによっても影響をうけるであろう。また他の食料品Bの価格P_Bは，同じようにそれぞれの財がどれだけ供給されるかによって影響をうける。それらの要因の間の関係はつぎのようにあらわすことができよう。



この矢印は，それぞれが影響をあたえる方向をしめしている。このような関係が成立していることから，さらに，つぎのような式をつくることができる。供給については，

$$S_A=g(P_A)$$
$$S_B=h(P_B)$$

となり，さらに食料品Bにたいする需要については，

$$D_B=e(Y,P_A,P_B)$$

となるであろう。また市場における需給の一致をあらわすために，

$$D_A=S_A$$
$$D_B=S_B$$

が成立していなければならない。この最後の需給一致の条件はかならずしもいつでもみたされるとはかぎらないかもしれない。そのときには，その需要と供給との不一致は，その食料品の価格を変動させることになるであろう。

これは需要関数の重要な要因である，価格と所得とを用いた一つの理論モデルである。このモデルは未知数として D_A,D_B,S_A,S_B,P_A,P_B の6個が選ばれた場合，方程式の数が6個であるから，さきにのべたような意味でモデルは完結している。所得Yはこのモデルでは外からあたえられるものとみなされている。このようなモデルを構成する場合，現在のやり方が唯一つの方法でないことはあきらかである。たとえば，価格の変化率を需要と供給の差に依存させるという考え方もありうるであろう。このように，モデルを構成する場合には，つねに未知数と方程式との数の

本論文冒頭

一致がえられるようになされなければならない。この未知数をエコノメトリック・モデルにおいては内生変数（endogeneous variables）とよび，所得のように，外部から決ってくるものを外生変数(exogeneous variables)または先決変数(pre-determined variables)とよぶ。

上にあげた(1)から(6)までの式からなりたっているモデルは，いま対象として取りあげた食料品にたいする理論モデルを構成している。ここで気がつくことは，この(1)から(6)までのモデルが唯一つの完結したモデルではないということである。この外生変数としてえらばれた所得Yは，本来は決して外生変数ではないのであり，それはさらに別な要因によって説明されなければならない。それを外生変数とみなしているということは，モデルが大きくなるのをある点で押えているということになる。もし所得が賃金や配当によってきまってくるとすれば，その賃金や配当がきめられてくる道程をあきらかにするモデルが必要となるであろう。このことは，逆に，モデル(1)〜(6)を縮小させることができるということを意味している。たとえば，競争関係にある食料品Bに関するものをすべて外生的とみなすモデルをつくり，

（1） $D_A=f(P_A,P_B,Y)$

（2） $S_A=g(P_A)$

（5） $D_A=S_A$

のようにすることができる。ここでは内生変数は D_A,S_A,P_A の3個であり，残りはすべて外生変数である。これは，競争関係にたつ食料品Bについては，単にその価格 P_B を外生的にあたえることによって，モデルを完結させようとしたものである。

さらに，D_A のみを内生変数とすることによって，モデルは，

（1） $D_A=f(P_A,P_B,Y)$

となってしまう。この場合には，もはや内生変数とみなされるべきものは D_A のみとなってしまっている。もし D_A のかわりに P_A を内生変数とおくならば，それも一つの考え方ではある。いずれにせよ，モデル構成にあたっては，内生変数と外生変数との関係を明確にすることが必要であり，それによってモデルの完結性を確認することができる。

このようにして構成されるモデルは，見方をかえれば，必要な変数の間の適当な組合せを作成するということである。その組合せをつくるときに，その接合はいろいろとその構成者によってことなってくる。その接合の仕方は，具体的にはパラメータによってしめされるのであるが，その決定されたパラメータの値の組合せを構造とよぶ。もしことなった想定のもとで同一の事象をあつかったモデルを作成するならば，当然に構造はことなったものとなる。たとえば，

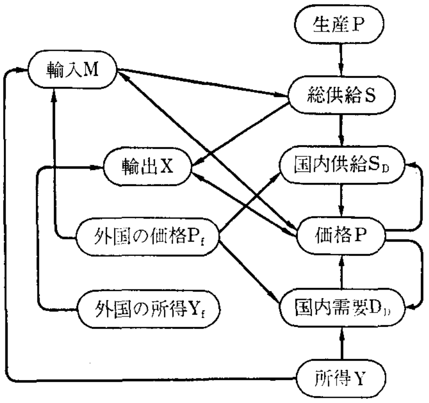
（7） $D_A=f^*(Y)$

（8） $D_A=g^*(P_A,P_B)$

という二つのモデルを構成したとするならばこの(7)と(8)とはことなった想定のもとでの変数の組合せであるから，構造もまたことなっていることになる。このようにみてくるならば，通常の場合，構造のことなった数多くのモデルを構成することができることがわかるであろう。いうまでもなく，こうした構造の相違はモデルの形のみによってきまってくるとはいえない。使用するデータがことなれば，構造もまた変化してくる。その点についての具体的な例については，のちに言及することにしたい。

ところで，さきにモデルを拡大したり，縮小したりすることが可能であるとのべたが，つぎのように構成するときには，モデルはより一層に拡大されることになる。たとえば，つぎの図表をみてもらいたい。この図表は，さきのものよりも複雑である。これは食料品が輸出されたり，輸入されたりするケースをもあつかっている。

このモデルでは，まず総供給量Sは，生産



された数量Pと在庫変化の部分Vと輸入Mとからなっている。すなわち，

(9)　$S=P+V+M$

つぎに，この総供給は輸出にふりむけられる部分と，国内にふりむけられる部分とからなっているから，

(10)　$S=X+S_D$

国内にふりむけられる供給と輸出とは，それぞれ，

(11)　$S_D=S_D(P,P_f)$

(12)　$X=X(P,P_f,Y_f)$

とあらわされる。後者は，輸出が国内価格と国外価格と外国の所得によって影響をうけることをしめしている。さらに，国内需要は所得と国内価格と国外価格とに依存してきまってくるから，

(13)　$D_D=D_D(P,P_f,Y)$

であり，輸入はやはり，おなじ要因によって影響されるとみなしているから，

(14)　$M=M(P,P_f,Y)$

となる。いうまでもなく，国内需要に輸入需要を合計したものは国内総需要であり，したがって，

(15)　$D=D_D+M$

となる。均衡状態では，

(16)　$D=S$

が成立するから，モデルは(9)～(16)から構成されることになる。もし，このモデルにおいて，生産P，所得Y，外国価格P_f，外国所得Y_fがあたえられたものとすれば，すなわち，それらが外生変数であるとすれば，上のモデルは，輸入M，国内供給S_D，総供給S，国内需要D_D，総需要Dおよび国内価格Pの値を決定してくれるであろう。

先にあげた(1)～(6)ないし(1)(2)(5)のモデルよりは，より一層に複雑ではあるが，しかしいずれも食料品Aを対象とするモデルではある。このようにして，もし欲するならば，モデルをより一層にたちいった詳細なものにしてゆくことができるであろう。たとえば，もし在庫について，さらにその波及関係を明らかにしてゆくならば，また需要者をある基準によって細分化してゆくならば，より一層に複雑なものになってゆく。

さらに，つぎのような点も考慮される。たとえば，酪農製品を考えてみよう。これは決して単一製品ではないから，もしこの需要予測をおこなおうとするならば，その中味をいろいろと必要に応じて分類し，それぞれについて需要を予測するのでなければ，全体としての酪農製品の需要予測をおこなうことはできないであろう。おなじようなことは，油圧のような機械部品についても，ビニールのような生産財についても，工作機械のような生産設備についてもいえるであろう。したがって，多くの場合に，こうした分類別の需要予測をおこなうのが普通であり，そのためのモデルを作成することになる。食料品を例にあげてきたついでに，ここでも例を酪農品についてみると，たとえば，つぎのようなモデル構成が考えられる。酪農品を(1)ミルクとクリーム，(2)バター，(3)チーズ，(4)その他の酪農品という，四つのグループにわけるとすると，(1)から(4)のグループについての需要関数を，それぞれ，

(16)　$D_f=D_f(P_f,Y)$

(17)　$D_b=D_b(P_b,P_m,Y)$

(18)　$D_c=D_c(P_c,P_s,Y)$

(19)　$D_o=D_o(P_o,Y)$

本論文冒頭

のごとく示すことができる。DとPとは，それぞれ需要と価格とを示し，添字 f, b, c, o は，順次にミルクとクリーム，バター，チーズその他をあらわしている。ここで，P_m はマーガリンの価格をあらわしている。マーガリンの価格がはいっているのは，バターとマーガリンとは競争関係にたっている代替財であり，それぞれの価格がどのような値をしめしているかによって，バターにたいする需要は変化するからである。

つぎに，それらの価格であるが，もし供給量が原料の関係でもって先にきまってしまうならば，価格はそれを需要に“はめこむ”ように変動することになるであろう。そうすると，価格によって供給が動くというよりも，価格はむしろ供給量や所得やマーガリンの価格などに依存することになるであろう。酪農品の供給量を一括して考え，それをSであらわすならば，

(20)　$S=S_f+S_b+S_c+S_0$

となる。Sは供給をしめし，添字f,b,c,oはさきにしめしたとおりである。それぞれの価格は，

(21)　$P_f=P_f(S,P_m,Y)$

(22)　$P_b=P_b(S,P_m,Y)$

(23)　$P_c=P_c(S,P_m,Y)$

(24)　$P_0=P_0(S,P_m,Y)$

のごとくあらわすことができる。この式の意味するところは，それぞれの酪農品グループの価格は，酪農品の総供給量とマーガリン価格と所得とに依存することを示す。この酪農品の総供給量Sは，その原料である原乳に依存しているから，Sは原乳の供給と平行に動くものとみてよい。また，先行している供給を需要にはめこむときには，競争品（マーガリン）の価格や所得は，当然に酪農品の価格決定に影響をあたえるであろう。したがってこの(16)〜(24)は，酪農製品に関する一つのモデルをあらわすことになる。このモデルにおいては，供給量は需要にひとしくなるから

(25)　$S_i=D_i\quad i=f,b,c,o$

という式が成立している。したがって，もし所得水準Yと，マーガリンの価格 P_m があたえられるならば，ミルクとクリーム，バターチーズ，それ以外の酪農品グループ別に価格と需給量とが，計算によって導出されることになるであろう。

これは生産物が幾種類にもわかれているケースである。もし単に生産物が種類別にわかれているばかりでなく，需要者が単一のグループ（ここでは消費者）ではなくて，いくつかのグループにわかれているならば，事態はより一層に複雑となってゆくであろう。いいかえると，需要予測のための理論モデルは，生産物別需要部門別に作成されなければならなくなるであろう。このような場合には，しばしば理論的に納得しうるモデルを構成することができなかったり，またはそれが可能であっても，それに必要なデータが現実に入手できなかったりするケースがでてくる。この部分については，ここでいう相関分析を適用しえないこともあり，そのときには他の方法(つぎの補論の傾向分析やその他の分析方法)によらなければならなくなるであろう。

これまでいくつかのモデルの例をあげてきたが，これらのモデルは，いずれも理論モデルである。ところで，これらのモデルを構成している各種の式は，大きく定義式と行動式とに分類される。(9)式や(10)式のように，食料品Aの総供給の内容をしめしたものや(15)式のように，それにたいする総需要をしめしたものは，いずれも定義式である。これにたいし，(11)（12）（13）(14)の各式のように，国内および外国における供給者や需要者の行動を表わしたものは行動式とよばれる。もっとも単純なケースにおいては，需要関数という行動式ただ一つということになる。もちろん，モデルを構成する式はこの二つのものしかないといったら誤りである。技術に関係する式があれば，それは技術式といわれ

本論文冒頭

る。たとえば，ある特定の工作機械にかならずとりつけられる特定の計器をとってみよう。その計器は，その工作機械が１台生産されるたびに１セットとりつけることになる。その場合，その特定の計器と工作機械とのあいだには，技術的な関係が成立しているわけであり，もしこの関係を式でしめすとすればその式は技術式ということになる。また，その工作機械を一定時間運転するに必要なエネルギーは，技術的にほぼ一定しているとすれば，その両者の関係もまた一つの技術式となるであろう。

このような固定的な技術関係が存在するときには，事態の分析はきわめて簡単であることはいうまでもない。二つの生産物XとYとのあいだに，このような関係が成立しているとき，それを，

$$X=f(Y)$$

のごとくあらわしたものを技術式とよんでいる。これは技術式ではあっても，同時に需要予測のためのモデルである。このことは例としてあげた計器と工作機械の例からみても容易にわかるであろう。そのほかに税金と税率と所得との関係や，貿易においてしばしば問題となる関税に関するモデルのようなものがあるとすれば，それは制度式とよばれる。需要予測において関税が問題となるケースがしばしばある。この要因に関して，とくにモデルを作成した例をみかけないけれども，もしそうしたモデルを作成したときには，それはモデルに制度式をとりいれたことになる。

このように，エコノメトリック・モデルによる予測をおこなうときには，その対象とした生産物に関して必要な定義式，行動式，技術式等から構成される理論モデルを作成することがまず第一の仕事である。ここでふたたび強調しておかなければならないことは，そうした理論モデルの構成にあたっては，それが経済理論のロジックにそくしていなければならないということである。もし，この条件をみたしていなければ，いかにモデルがきれいにできていても，それにたいして一応の留保条件をつけておく必要があり，あくまでもそうしたモデルは理論的な裏付けのあるモデルにたいする代用品である。ところで，理論モデルの構成という点からみる場合に，それは二つのカテゴリーにわけることができる。

さきの牛肉と豚肉との例をみてみよう。この例は別に豚肉と牛肉でなくてもかまわないわけであり，石炭と重油，ボールペンと万年筆という具合に，競争的な代替関係にたっているものであれば，どのような組合せの生産物にもあてはまる。このモデルでは，どれか一つの式が他の式から，形式的にも実質的にも独立していない。一方の価格は他方の式にはいっており，その価格は供給と需要との双方の動きのなかで決定されてくる。モデルがこのような構成になっている場合，需要は価格と供給とともに，同時に決定される形になっている。このような形のモデルをいま同時決定モデルとよぶことにする。これにたいして，たとえばさきの計器のケースを考えてみよう。計器需要は工作機械が何台生産されるかに依存したが，もしこの特定の工作機械はとくに自動車のある特定部品を生産するために用いられるとしたら，その工作機械の生産台数は，その特定部品の生産量に大きく依存し，その特定部品の生産量は，それを使用する自動車の生産（したがって，その自動車の販売台数）に依存するということになる。その部品がある特定車種の自動車と密接な関係をもつなら，その特定車種の販売量は，その需要部門の活動水準（または所得）に依存する。このような因果の連鎖がある場合，それぞれについて作成されるモデルは，さきにのべたような意味では同時決定的ではない。その形は，

$$X_1=f_1(X_0, \alpha_1)$$
$$X_2=f_2(X_1)$$
$$X_3=f_3(X_2)$$

本論文冒頭

……………

$X_k = f_k(X_{k-1})$

のようにしめすことができる。一見して明らかなように，このようなモデルにおいては，X_0 と α_1 があたえられるならば X_1 がわかり，それをつぎの式に代入すれば，X_2 がわかる。同様にして X_2 をつぎの式に代入すれば X_3 がわかる。このようにして X_0 からはじまってつぎつぎと $X_1, X_2 \cdots\cdots X_k$ をもとめることができる。このような形のモデルを因果連鎖形のモデルとよぶ。その構成されたモデルが同時決定形のモデルであるのか，それとも因果連鎖形であるのかによって，厳密にはそれ以後の取扱い（それは後に説明するパラメータの推定値の計算方法）がことなってくる。この点については後にふれることにしよう。

モデル構成にあたってふれておかなければならないことは，それを構成している各種の経済要因——それらを通常は経済変数とよぶ——の間の関係は無時間的なものではないということである。いいかえると，ある財にたいする需要とそれをひきおこす要因との間には時間のおくれがともなう。その財の価格が安くなったというとき，それが需要の増大をひきおこすであろうということはあきらかである。しかし，たとえば40年の第1・4半期における価格引下げが，需要の上に影響をあらわしてくるのは，その第1・4半期であるよりはむしろ第2・4半期であるということがあるかもしれない。所得水準の上昇がおきても，耐久的な消費財を購入しようという家計は，その決意に時間を要するであろうし，さらに古い耐久財を所有している場合には，その古い耐久財の寿命がくるまで新たな需要をまたなくてはならない。耐久的な生産財にたいする需要をとってみると，その生産財を使用する産業部門における生産活動水準が上昇し，その設備が不足しても，その設備を増設しようという決意をするまでには，当然のことながら一定の時間の経過が必要である。その経過がおきて決意され実行計画が樹立され，そうして需要が現実におきてくるのであるから，そこに生産活動水準の変化と，その設備にたいする投資需要の発生との間に一定の時間が介在する。生産と消費との両側面における，このような状態が現実であるとするならば，それをモデルのなかに表現しておくのが現実的であるということになるであろう。耐久生産財についての議論は，またその個所でおこなうことにして，ここではそのようなタイム・ラッグ（time-lag）の存在を指摘しておくことにしよう。

このような経済変数の間におけるタイム・ラッグをモデルにおいてはつぎのように表現する。

$X_t = f(Y_{t-1})$

これは $_t$ 期の需要（たとえば34年下半期のある生産財の需要）が $_{t-1}$ 期の需要要因（たとえば34年上半期の生産活動水準）の状況に依存するということをしめしている。もしその対象としているモデルについて，このようなタイム・ラッグの存在が明白に確認されるときには，こうした取扱いをしなければ事態を不正確に表現することになるであろう。取りあげている二つの経済変数間にタイム・ラッグがあるかどうかは，通常，経験的にわかるものであるが，もしそれらの変数の変動状況をグラフに書きあらわすならば容易にわかるであろう。もちろん，厳密にはタイム・ラッグの長さがあらゆる時点をとおしてひとしいとはかぎらないから，みいだされるいくつかのタイム・ラッグのなかでもっとも頻度がたかいものを中心とした平均的なタイム・ラッグをモデルに想定しなければならない。統計学的には，より一層に厳密な手続き（たとえばスペクトル分析）が必要であるかもしれないが，需要予測の場合にそこまでふみこんでゆくことが，各種の考慮から望ましいかどうか問題であろう。さらに，ひとつの方法が

本論文冒頭

考えられる。それは，

$X_t = h(Y_t)$

$X_t = f(Y_{t-1})$

$X_t = g(Y_{t-2})$

というように，タイム・ラッグを一期間ずつ増加させたモデルをいくつか構成する。そうして，そのそれぞれについて計量し，その結果のなかでもっとも現実に適合したものを選び，そのモデルを需要予測に使用するというやり方である。もしモデルのなかにタイム・ラッグをいれるならば，そのラッグの期間がきわめて明確に規則的でないかぎり，いくつかのラッグのなかから適当なものを選ぶという手続きをとるのが適切である。

〔3〕 理論モデルから統計的モデルへ

（i） これまで需要予測のための理論モデル構成についてのべてきたが，このままではもちろんモデルの構造を計量的に把握することは不可能である。構造を具体的に把握するためには理論モデルを統計的モデルに変えなくてはならない。いいかえると，これは利用しうる統計データを用いてモデルの具体的な形と数値とをしめすことができるようにモデルを構成することである。たとえば，所得と扇風機との保有需要の関係をモデルにしめしたとしよう。ある範囲についてみると，所得が増加するときには扇風機にたいする保有需要がふえるという意味において，両者のあいだには相関がある。各種の所得水準に対応して扇風機の保有需要がことなっているわけであるが，この両者のあいだにつぎにしめすような関係がみいだされるとする。

所得水準X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
保有需要Y	2	3	5	4	6	8	8	9	11	14

この仮設的な数値はXが1のときには対応する保有需要Yは2であることをしめしている（以下同様）が，それをグラフにあらわすことは容易である。それぞれの点はすべてXとYとの現実値に対応して画かれている。これはXとYとの間に右上りの関係があるときを示しているが，この関係を数量的に把握するために，しばしば直線的な関係をXとYとの間に想定する。つまり，

（1） $Y=f(X)=a+bX$

という形の式を考える。ここでaとbとを構造パラメータとよぶ。この一次式のモデルを線形モデルとよぶが，この形のモデルがもっとも多く用いられる。その理由は計量的把握がそれによって容易になるからである。グラフから容易にわかるように，かりに構造パラメータ a,b が $\hat{a},\hat{b}$ という値に決定されたとしよう（その方法については後に説明する）。容易によみとれるごとく，現実におけるXの値に対応するYの値はすべてこの直線上にあるわけではない。直線上のYの値（$=a+bX$）を理論値とよび，現実のYを現実値とよぶ。この直線上の点（たとえばA点）とそれに対応する現実の点（たとえばB点）との差は誤差である。その差を誤差項（error term）または攪乱項（disturbance term）あるいは確率項（stochastic term）とよびしばしばuであらわす。したがって，現実値Yは理論値Yと誤差項uとの合計で，しめされることになる。もし誤差項がマイナスならば，現実値Bは理論値Aの下方にあるわけである。そこで現実値は

（2） $Y=a+bX+u$

ということになる。

この誤差項uがモデルのなかにはいってくる理由は，つぎのとおりである。設定されたモデルでは，扇風機の保有需要は所得によって説明されることになっているが，それだけではすべてを説明しつくすことができないのは当然である。もしその保有需要に影響をあたえるすべての要因を知り，それについての必要なデータのすべてを入手しうるならば，保有需要の動きは完全に説明されるであろう。しかし，影響力のつよいものや弱いもの

本論文冒頭

を含めて，それらの要因は無数にあるであろう。いま，それらの要因が $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n$ だけあるとするならば，$a_0, a_1, \cdots\cdots, a_n$ を構造パラメータとし，攪乱項を v とすると，扇風機の保有需要 Y は

$$（3）\quad Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+\cdots\cdots+a_nX_n+v$$

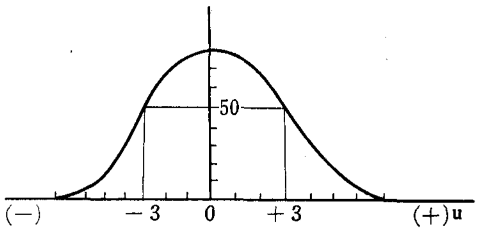
のごとくあらわすことができる。したがって(2)は(3)において，

$$u=a_2X_2+\vdots\cdots+a_nX_n+v$$

とおいたものであると考えることができる。それらの要因はプラスとマイナスとのいずれの方向にも作用しているとみなすことができる。そういう意味であまり影響がないものとして無視された要因の存在がいわばこの攪乱項 u のなかにいれられてしまっている。いいかえると，所得 X によって説明しきれない部分がこの u によって説明されているということになる。この u は，それぞれ独立に生起している数多くの要因が混在している袋のようなものである。

したがって，その袋のなかからとびだしてくる影響要因の動きが全体として規則的であるとは考えられないであろう。u はその意味ではある確率分布をもつ確率変数（random variable）であると考えられる。攪乱項 u が確率項とよばれる理由はこれである。この確率項 u はしばしばゼロを平均値とする正規分布をなすものと想定される。この想定の意味するところは，u のなかにふくまれている数多くの要因が扇風機の保有需要にあたえる影響は全体としてみると平均的にはゼロであるということである。

しかも，現実値を理論値からひきはなす度合いは全体としてみたときにはプラスの方向へもマイナスの方向へもまったく均等であるということである。このような想定がつねにみたされているとはかぎらない。もし数多くの要因のなかで，ある特定の要因がきわめて強力であるならば，この強力な要因がこの確率項の変動を支配することになるかもしれない。そのときにはこの確率項 u は at random な変動をしなくなってしまう。このようなケースについては，のちに言及するであろう。したがって，以下においては，この確率項 u は平均値がゼロで，一定範囲にちらばっている正規分布をもちその生起は at random なものであると想定することにしよう。したがって，扇風機の保有需要と所得とのデータが n 個あるとすると，確率項（＝攪乱項）もまた n 個あることになるが，この n 個の確率項の分布はつぎのグラフのごとくになる。横軸には $u_i(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ がはかられ，縦軸にはそれが生起する頻度がしめされる。たとえば，グラフにおいて $u=-3$ または $u=+3$



という値がおきる回数は，それぞれ50回である。いいかえると，±3 という値をもつものは n 個の u_i のうち 50×2 個である。

（ii） この場合，つねに一次式の線形モデルが使用されるとはかぎらない。たとえば，

$$（a）\quad Y=a\times bu$$

という式は一次式ではない。しかし，この両辺の対数をとるならば

$$（b）\quad \log Y=\log a+b\log+\log u$$

となるから，この(a)式は対数をとると線形モデルであることがわかる。つぎのような式を考えると，

$$（1）\quad Y=a+bX+cX^2+u$$

これは X^2 の項がはいるので一見して線形でないかのようにみえるが，$X^2\equiv Z$ とおくならば，

$$（2）\quad Y=a+bX+cZ+u$$

とみなすことができるから，これはやはり線

形モデルとして扱うことができる。このように式それ自体としては非線形であっても，取扱い上はあたかも線形モデルであるかのごとくあつかうことができるケースがある。これらのモデルにおける構造パラメータの推定をおこなう場合には，その計算方法の上で本質的にことなった要素はない。しかし，モデルが単一のモデルから成り立っている場合か，あるいは因果連鎖的になっている場合には，たとえそれが通常の一次式の関数と対数線形関数とからなりたっているときでも，予測値の計算にあたってとくに困難な問題はふくまない。それは予測値の計算は後にふれるごとく連立方程式の解をもとめることとおなじであるからである。そのような点からみて，連立形のモデルの構成にあたっては，もし因果連鎖形にモデルが構成されても大してさしつかえがないようなときには，因果連鎖形にするのがのぞましい。さらにこれまたのちにふれるように，構造パラメータの推定にあたっても単純に最小二乗法を適用しうるからである。

通常の線形モデルと対数線形モデルとのいずれを用いるべきかの基準はそれほど明確に存在しているわけではない。しかし，相関図にXとYとの点を画いたときに，対数グラフと算術グラフとのいずれにおいて，より直線がスムースにあてはめやすいか（点の散らばりが一様になるか）ということをチェックするのが実際的には便利である。しかしこれも変数が3個以上になると利用しがたいチェックである。一応の基準をあげるならば，対数線形モデルを用いるのがのぞましいと思われるのは，むずかしい議論をぬきにすれば，データの値そのままを用いるよりも，比率（パーセント）をとる方が各変数相互間の関係が安定しているとみられる場合，また各変数相互間の関係は“和”の形よりも“積”の形の方が適しているとみられる場合などであろう。

所得が10パーセント上昇したときに，需要が5パーセント伸びたとしよう。そのとき，この両者の比率をとったものを需要の所得弾力性とよばれることは先にふれた。説明要因が何であろうとも，このような弾力性を定義することができる。弾力性は$\dfrac{\Delta Y}{\Delta X}\cdot\dfrac{X}{Y}$によってあらわすことができるから，それは，対数線形モデルの構造パラメータそのものであることがわかる。このことから，しばしば簡単にこの弾力性の値をうるために，このような対数線形モデルを使用する例がみられる。

〔4〕 統計的モデル構成における若干の問題

（i） まず第一にどのような時間単位を選ぶかということである。1年単位で問題を考察したいというのであれば，使用されるデータもまた年別データでなければならないことは当然であるが，問題は1年単位，6ヵ月単位，3ヵ月単位のなかのどれを選ぶかということである。たとえば，扇風機の需要は決して年間に平均してあらわれるわけではない。その需要がもっとも集中的にあらわれるのは夏季にはいる頃からその終り頃まででであろう。それ以外のシーズンには需要は激減する。

また果実はそれぞれ種類に応じた市場期間というものをもっている。その市場期間以外ではその果実は問題とはならない。扇風機はその市場期間における所得ではなくて恐らくその年の上半期の所得水準が大きく作用するであろう。もし下半期において期待される所得がやはり重みをもつとすれば，年間の所得というものが作用するといえるかもしれない。これにたいし，果実の場合には，その市場期間の所得が大きく需要に影響する。果実のときには供給は最初にきまってしまうからそれは同時にその価格にも影響をあたえるであろう。扇風機では前期（ないし今期）の所

本論文冒頭

得水準，果実のときは，そのシーズンにおける所得水準が問題だということになる。したがって，それぞれの種類に応じてデータのカバーする期間がことなり，モデルもそれに応じてかわってくることになる。

もちろん，選ばれる時間単位はこうした季節的なことのほかに，3ヵ月や6ヵ月などの時間単位ごとの変化が重要である場合があるであろう。これはたとえば外貨準備高と輸入との場合のように実態をうまく把握するために必要とされる場合がある。しかし，他方，たとえば年別データのサンプル数が不足しているというような場合それを増加させるのに用いられる。年単位では10個のサンプルも3ヵ月単位であれば40個となる，時間単位は論理的にはかなりこまかく刻むことができるが，時間単位をあまり短かくすると，不規則的な要因の影響が大きくなることを留意しておく必要がある。

（ii） そのモデルがどのくらいの期間を対象とするかということは，それほど単純なことではない。需要構造はある程度の期間をへてゆくと変化するものである。したがって，需要予測のためには，できるだけ最近の期間を対象とし，しかし，その期間内に構造変化が大きくあらわれていないような長さをとることになる。しかも，もし分析目的のなかに需要構造の変化を知るということがはいっているときには，対象としている期間を二つにわけてモデルを構成することになる。いうまでもなく，そのときには対象期間は構造変化をふくむ長さである。たとえば合成繊維の出現以前と以後とにおける綿製品の需要の変化をしろうとするならば，大戦を中心として二つのモデルを構成しなければならないことになろう。

しかし，他方，合成繊維が一般的に使用されていなかった期間における需要構造を基礎として，それ以後における変化をみる。いいかえると，どのように変化したかを合成繊維使用以前の式の“修正”という形で表現することも可能である。この後者の例はいわゆるダミー変数Dを使用する方法である。これは一方の期間についてはゼロ，他方の期間については1という値をとるところの特別の変数を導入する方法である。モデルは，

（1） $Y=a_0+a_1X+a_2D+u$

とあらわされる。合成繊維が出現する以前のデータに対応してはすべて$D=0$という値を対応させ，その出現以後のデータに対応してはすべて$D=1$という値を対応させる。したがって，データをならべると，

$$\begin{array}{ll} Y & y_1, y_2, \cdots\cdots, \ y_r, y_{r+1}, \cdots\cdots, \ y_n \\ X & x_1, x_2, \cdots\cdots, \ x_r, x_{r+1}, \cdots\cdots, \ x_n \\ D & \underbrace{0, 0, \cdots\cdots\cdots,}_{\text{合成繊維出現以前の期間}} \ \underbrace{0, 1, \cdots\cdots\cdots\cdots,}_{\text{合成繊維出現以後の期間}} \ 1 \end{array}$$

のようになる。このダミー変数による方法にしたがうならば，比較的に長い期間についてのデータを利用しうるために，モデルのカバーする期間を長くすることができる。

いうまでもなく，このようなダミー変数の使用は例示したような構造変化の分析の場合にのみ用いられるわけではない。もう一つの典型的な利用は季節変動を考慮する場合にも用いられる。たとえば，その財の需要が季節的に変動する性格をもっているときには，3個のダミー変数を使用する。対象としている財の需要Yが所得Xに依存しているが，しかし季節的に変動するとしよう。D_1, D_2, D_3というダミーを式にいれると，

（2） $Y=a_0+aX+b_1D_1+b_2D_2+b_3D_3+u$

のごとくになる。このダミー変数Dはつぎのような値をとる。

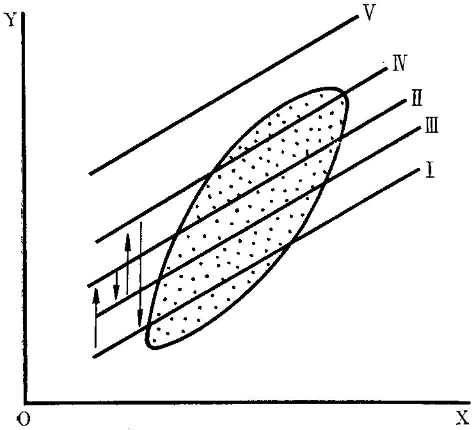
	第2•4半期	第3•4半期	第4•4半期
D_1	1	0	0
D_2	0	1	0
D_3	0	0	1

Dはそれぞれこのように変化をする変数であ

本論文冒頭

るとの想定をとることによって，需要Yの季節的な動きをしることができる。このケースでは $Y=a_0+a_1X$ は第1·4半期に対応する関数であり，第2·4半期に対応する関数は $Y=a_0+a_1X+b_1D_1$ 第3·4半期に対応する関数は $Y=a_0+a_1X+b_2D_2$ である。したがって，(2)式について構造パラメータを推定しておけば季節的な需要の変化をもとめることができることになる。

（iii） 前節では，4半期別需要の季節的変動をダミー変数をつかってモデルにくみいれることが可能であることを示した。そこでは対象とする生産物にたいする需要と所得との関係が季節ごとに移動するという形で分析がおこなわれた。グラフに画くとつぎのようになる。第1·4半期から第4·4半期へと期間がうつってゆくにつれて，同一の勾配をもった直線が Ⅰ→Ⅱ→Ⅲ→Ⅳ→Ⅰ という具合に移動してゆく。



これは関数（$Y=a_0+a_1X$）の移動によって事態を説明するということである。このような関数の移動によって事態（＝需要構造）を説明するという行き方はいろいろと応用範囲の広い行き方であることに気づくであろう。たとえば，時系列データによる場合，需要と所得との関係は時間の経過とともに変化してゆく。このような現象は需要と所得との関係が別な移動要因によって移動させられるものと解することができる。このような移動要因としてたとえば人口が考えられる。繊維や住宅にたいする需要を思いうかべるならば，この人口の変化による需要構造の変化（需要関数の移動）ということは容易に理解しうるであろう。

いま繊維にたいする需要をY，所得をXとしよう。人口の増加があると所得はかりに一定であるとしても，繊維需要は増加してゆく。人口はゆっくりとした歩調（年率にして1％というように）で増加してゆくものであるが過去10年とか20年とかの間にはかなり大きい値となるであろう。この増加の影響は，YとXとの関係を移動させてゆく。人口をNであらわすと，需要関数はつぎのようにあらわされる。

$$Y=a_0+a_1X+a_2N+u$$

さきのグラフでいうならば，$Y=a_0+a_1X$という直線が，Nの増加とともにⅠ→Ⅲ→Ⅱ→Ⅳ→Ⅴ……としだいに上昇してゆくことを意味する。しかし，このような上昇傾向をもたらす要因は人口だけとはかぎらない。嗜好慣習　気候　生活様式の変化，その他の種々の要因によってもたらされる。もし繊維でない他の生産物であったら技術的進歩や資産保有量などが有力な要因となるかもしれない。しばしば，人口の増加のもつ影響を考慮する場合に，人口そのものを単独に用いずに一人当りの需要という概念を用いる。 $Y/N, X/N$ は1人当りの需要と所得をしめし，両者の関係は，

$$\frac{Y}{N}=a_0+a_1\frac{X}{N}+u$$

という式によってあらわされる。人口の年令構成や性別構成や所得別構成が重要な意味をもっているときには，人口をさらに分類して用いるか，または加重平均値としての人口を用いることができることはいうまでもない。

人口のように明瞭に移動要因がわかってい

本論文冒頭

る場合には，それをいれることができるが，それがさきにあげた嗜好や慣習その他のように，明瞭に数量的に把握できないときには，適当な代替物を用いる。たとえば，時間 t を用いて，

$$Y=a_0+a_1X+a_2t+u$$

とおくことができる。この場合，t は 1,2,3,……，T というように変動するデータであるとみなしてもよい。t そのものでなく t の関数 $F(t)$ とすることもできる。また，一度上昇した生活水準が尾をひいて影響するようなときには，過去における最高所得水準 Y_h というのを用いることができる。現実の所得がその Y_h よりも低下しても，すでにもらったことのある最高所得水準は現実の消費需要に影響をあたえる。したがって，そのときには

$$Y=a_0+a_1X+a_2Y_h+u$$

とあらわすことができる。

この例では過去の最高所得水準というのがでてくるが，このようにある変数の特定水準がモデルにあらわれるケースとしてはつぎのような表現が考えられる。嗜好飲料などのなかには，ある年令水準においてもっとも需要が多く，それよりも若くてもそれよりも年をとっても，ともに需要が減少してゆくというものがある。このようなケースにおいては，需要は，単に所得水準に依存するばかりでなく，年令にもまた依存する。年令をA，需要がもっともたかい年令を$\overline{A}$であらわすならばたとえば，

$$Y=a_0'+a_1X+a_2(A-\overline{A})+u$$

のように表現することができるであろう。ただし，$a_2<0$ である。もし$\overline{A}$よりも若い方において減少率が大きいときには a_3（$A-\overline{A}$）というのを加えることができる（$a_3>0$）当然のことながら，この設例ではデータは当然にクロス・セクション・データでなければならない。

（iv） 影響要因がいくつかあるということがはじめからわかっているときにははじめから $X_1,\cdots\cdots,X_n$ という n 個の要因をいれたモデルを作成する。しかし，1個はわかっても他の要因についてはどの程度まで関係をもつか疑問であるという場合や，ある特定の要因のみが支配的に影響をあたえているであろうと思われるときには，まず$Y=a_0+a_1X+u$ という単純なモデルを用いる。つぎに，その式を用いたときの現実値Yと計算値Yとの差を考えうる他の要因と対比してみることが必要である。もしこの残差とあらたな要因（たとえばZ）との間に相関がみいだされたときには，はじめにさかのぼって，

（3） $Y=a_0+a_1X+a_2Z+u$

というモデルを用いることにすればよい。この点は移動要因(具体的に説明されない要因)としてさきに説明した時間変数 t についても同様である。原理的には，時間変数は，考えうるいくつかの具体的な要因が有意ではないことがあきらかになってのちに，使用されるべきものである。

（v） いままでふれなかったモデル形式の一つは定差をとるモデルである。たとえば，ミシンにたいする保有需要の大きさは一人あたり所得水準とある年令範囲の女性の数とによって影響をうけると想像されるが，もしかりにそうだと仮定すると，ミシンの保有需要の変化部分はそれらの説明要因の変化部分によって説明されることになるであろう。このような場合，そのミシン需要の変化部分を ΔY とし，一人あたり所得の変化部分を ΔX とし，その女性数の変化部分を ΔZ とするならば，

（4） $\Delta Y=a_1+a_2\Delta X+a_3\Delta Z+\Delta u$

という関係がえられるであろう。これを一階定差モデルとよぶが，このような形にモデルを構成することがしばしばおこなわれる。この定差は4半期別に，半期別に，あるいは年別にとることができるが，もし年別であれば ΔY はたとえば35年のYと，36年のYとの差をしめすことになる。ΔX，ΔZ や Δu につい

本論文冒頭

ても同様である。このような定差モデルの場合，常数項 a_1 がゼロでないということは，そこに時間変数が移動要因として作用していることをあらわしている。一般的に第 t 期における各変数の変化部分は，

$$\Delta Y_t=Y_{t+1}-Y_t \qquad \Delta u_t=u_{t+1}-u_t$$
$$\Delta X_t=X_{t+1}-X_t \qquad \Delta Z_t=Z_{t+1}-Z_t$$

であるから，(4)はつぎの二つの式

$$(5)\quad Y_{t+1}=a_0+a_1(t+1)+a_2X_{t+1}+a_3Z_{t+1}+u_{t+1}$$

$$(6)\quad Y_t=a_0+a_1t+a_2X_t+a_3Z_t+u_t$$

の差をとったものと解することができる。すなわち，ある特定の時点については，さきにいくつかあげてきた通常の線形式が成立している。その二つの時点について左右両辺のそれぞれの差をとると，(3) が得られるわけである。このことから明らかなように，$a_1\neq0$ ということは，時間変数が暗黙のうちにモデルにはいっていることをしめしている。a_1 が無視しうる程度の大きさかまたはゼロならば，そのような移動要因がほとんど存在しないことになる。

このような定差モデルを使用するのが適したケースとは何か。それは需要やその説明要因が現実においてともにつよい上昇（ないし下降）傾向をもっている場合である。それらの傾向をもたらす要因を傾向要因という。経済がその傾向要因によってつよく支配されているとき，それを (3) のような形で分析しようとするならば，Y も X も Z もともにつよい上昇傾向をしめしているために，構造パラメーターの推定がうまい結果をもたらさない。

このようなときに定差モデルを用いると結果が改善される。これらの点については後に言及するであろう。

〔5〕 最小自乗法の簡単な説明

ここでモデルの構造パラメータの推定方法についてふれておくことにしよう。ただし，詳しい計算手続きそのものについては，後に一括して示すことにするので，ここでは以後の説明にとって必要なかぎりでの最少限度の初等的な説明にとどめることにする。

説明変数が X，被説明変数が Y とし，モデルは，

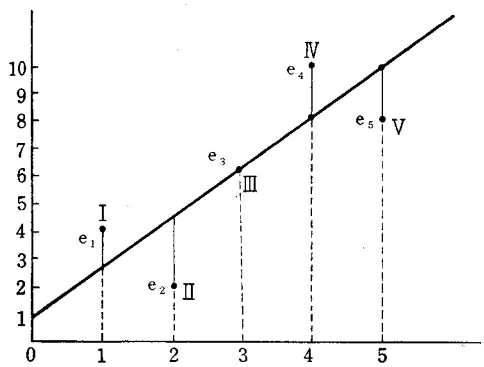
$$(1)\quad Y=a_0+a_1X+u$$

のごとくであるとしよう。理解を早めるためいまつぎのような架空的な数値を想定することにする。

	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ
X	1	2	3	4	5
Y	4	2	6	10	8

需要予測の例に関するかぎり，ほとんど例外なしに使用されているのは最小二乗法であるので，このデータを用いて最小二乗法の基本的な考え方から説明することにしよう。

X と Y との５つの組合せ(1,4) (2,2) (3,6) (4,10) (5,8) をグラフに画くと Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ の各点がえられる。



この５つの点は一見あきらかなように，全体として X と Y とのあいだにある関係があることをしめしているわけであるが，その関係を数量的に把握するためにはどうしたらよいか。最小二乗法はこの問題に答える一つの計算方法である。

X と Y との数量的関係を (1)のような線形式でもって近似的に把握しようとすることは

本論文冒頭

a_0 と a_1 と u の分散 σ_u^2 とのパラメータの値を，あたえられたXとYとのデータから推定することを意味する。しかし，その推定値はあまり任意にえらばれてはならない。そのためには，あたえられたデータがもっともたかい確率でもって表現していると考えられる線形式でなくてはならない。さきにのべたごとく，誤差項uは確率変数であり，その動きは at random であり，一般にゼロを平均値とする正規分布をしめすと考えられる。誤差項が正規分布をしめす確率変数である場合，最小二乗法によるパラメータ a_0, a_1, σ_u^2 の推定値は上の条件をみたすものであることがしられている。

いま $a_0=1.0, a_1=2.0$ という推定値がきめられたとしよう。そのとき，(1)は，

（2） $\hat{Y}=1.0+2.0X$

となる。Xの値を代入したときにえられるYの値は計算値$\hat{Y}$であるが，この計算値をもとめるとつぎのようになる。

$\hat{Y}$	3	5	7	9	11	
Y	4	2	6	10	8	
$Y-\hat{Y}$	1	-3	-1	1	-3	$\sum(Y-\hat{Y})=5$
$(Y-\hat{Y})^2$	1	9	1	1	9	$\sum(Y-\hat{Y})^2=21$

計算値$\hat{Y}$と現実値Yとの差をとると5であり，さらにその差の二乗をとって合計すると21となる。この (2)はグラフでは点線によって示されているが，最小二乗法とは，この計算値と現実値との差の二乗の和$\sum(Y-\hat{Y})^2$が最小になるように a_0, a_1 の値をきることである。

(1)と(2)とから，

$Y-\hat{Y}=Y-1.0-2.0X=\hat{u}$

ということがわかる。$\hat{u}$ は特定の計算値に対応してえられる誤差項の計算値であることをしめす。したがって $\sum(Y-\hat{Y})^2$ を最小にするようなパラメータの値をもとめることは誤差項（計算値）の二乗の和 $\sum\hat{u}^2$ を最小にするパラメータの値をもとめることにひとしい。

そこで，つぎに $a_0=1.2$, $a_1=1.6$ としてみよう。

（3） $\hat{Y}=1.2+1.6X$

となるが，計算値と現実値との関係はつぎの表のとおりである。

$\hat{Y}$	2.8	4.4	6.0	7.6	9.2	
Y	4	2	6	10	8	
$Y-\hat{Y}$	1.2	-2.4	0	2.4	-1.2	$\sum(Y-\hat{Y})=0$
$(Y-\hat{Y})^2$	1.44	5.76	0	5.76	1.44	$\sum(Y-\hat{Y})^2=14.4$

あたえられたパラメータのもとでは，現実値と計算値との差の合計はゼロであり，差の二乗の合計は14.4である。いずれもさきの例の場合よりも小さくなっている。さらに$a_0=1.5, a_1=1.2X$ とおくならば，

$Y-\hat{Y}$	1.3	-1.9	0.9	3.7	0.5
$(Y-\hat{Y})^2$	1.69	3.61	0.81	13.69	0.25

となり，計算の結果は $\sum(Y-\hat{Y})=4.5$ および，$\sum(Y-\hat{Y})^2=20.05$ となる。この三つの計算例から直感的に $\sum(Y-\hat{Y})\equiv\sum(\hat{u})=0$ となるケースにおいて，その二乗の和が最小になることが推測される。$a_0=1.2, a_1=1.6$のケースにおいて $\sum(Y-\hat{Y})^2=\sum(\hat{u})^2$ が最小となっているが，事実，他のどのようなパラメータの値をもってきてもこれよりも誤差項の二乗の和を小さくすることはできない。いいかえると，このあたえられたデータのもとで，この (2)がもとめる線形式となる。

このようなパラメータの値の決定は通常つぎのような形式でおこなわれる。

（4） $\sum_{i=1}^{5} u_i=\sum(Y_i-a_0-a_1X_i)=0$

（5） $\sum_{i=1}^{5} u_i^2=\sum(Y_i-a_0-a_1X_i)^2$

$=$最小値

本論文冒頭

となるように a_0, a_1 をもとめるわけであるがこの規準をみたす値は，X_i, Y_i の平均値を $\overline{X}$，$\overline{Y}$ とし，$x_i = X_i - \overline{X}$，$y_i = Y_i - \overline{Y}$ とおくならば，

$$a_0 = \overline{Y} - a_1\overline{X}$$

$$a_1 = \frac{\sum(X_i-\overline{X})(Y_i-\overline{Y})}{\sum(X_i-\overline{X})^2} = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2}$$

でもってしめされる[1)]

この計算によって a_0, a_1 をもとめるためには $\overline{X}$，$\overline{Y}$，$\sum x_i y_i$，$\sum x_i^2$ が必要であるが，$N\overline{X} = \sum X_i, N\overline{Y} = \sum Y_i$ を考慮すれば，

$$\sum x_i^2 = \sum(X_i - \overline{X})^2$$

$$= \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2 \frac{1}{N}$$

$$\sum x_i y_i = \sum(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})$$

$$= \sum X_i Y_i - (\sum X_i)(\sum Y_i)\frac{1}{N}$$

であるから，つぎのような計算表を用いればよい。

Y	X	Y^2	X^2	XY
4	1	16	1	4
2	2	4	4	4
6	3	36	9	18
10	4	100	16	40
8	5	64	25	40
$\sum$: 30	15	220	55	106

$$\sum x_i^2 = 55 - (15)^2 \frac{1}{5} = 10$$

$$\sum_i y_i = 106 - (15)\ (30) \frac{1}{5} = 16$$

となるから，ここからただちに，

$$a_1 = \frac{16}{10} = 1.6$$

となり，さらに $\overline{X} = 15/4, \overline{Y} = 30/4$ であるから，

$$30/4 = a_0 + 1.6(15/4)$$

がえられ，そこから $a_0 = 1.2$ がえられる。したがって，

$$Y = 1.2 + 1.6X$$

となる。この式はグラフにおいて実線でしめされてある。

このようにして推定されたパラメータは，グラフの上で，一本の直線の位置と傾斜とを決定する。この直線はXとYとのあいだの平均的な関係をあらわしている。しかし，現実の値はこの直線上にはない。現実の値がこの直線からはずれたところに散在しているならば，その散在の程度を知る必要がある。いいかえると，ある特定のXの現実値に対応するYの現実値が計算値からどの程度はなれたところにどのように散在しているかを知っておかなければならない。この散在の度合い，これを標準誤差とよぶ。これは誤差の散らばりの程度，すなわち分散を明らかにすることにひとしい。誤差 $\hat{u}_i$ であるから，分散は，

$$\frac{\sum(\hat{u}-\bar{u})^2}{N-1} = \frac{\sum(Y_i-\hat{Y})^2}{N-1} = \sigma_u{}^2$$

のごとくにあらわされる。これをYの分散とよぶが，σ_u をその標準誤差と定義する[2)]。

この標準誤差が一定のゼロ以外の値をとるのは，Yの動きがXの動きと完全に対応していないときである。もしYがXによってのみ影響され，それ以外の要因によっては何ら影響をうけないとしたならば，この標準誤差はゼロとなるであろう。しかし，ゼロということはありえない。かならずX以外の数多くの要因が（程度の差こそあれ）Yの動きに影響をあたえることになるからである。この標準誤差は計算値$\hat{Y}$の誤差範囲をしめすわけであり，したがって，Yと同じ単位（金額単位であるとか指数単位であるとか）で表示されることになる。したがって，そのままでは推定せられた方程式がXとYとの平均的な関係をしめすものとして利用可能であるかどうかの判定基準としては用いることができない。単位が変更されれば標準誤差の大きさもまた変更されることになるからである。そのような判定基準として用いられるためには絶対的な大きさとしてではなく，比率として表示され

本論文冒頭

る必要がある。この目的のためにYの標準誤差をYそのものの標準偏差でもって割ったものが用いられる。すなわち，$\hat{Y}=\hat{a}_0+\hat{a}_1X$ がどこまでXとYとの平均的な関係をしめしているかの判定基準として，

$$\frac{\sum(Y_i-\hat{Y})^2/N-1}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2/N-1}$$

が用いられる。通常はこれを，

$$1-\frac{\sum(Y_i-\hat{Y})^2}{\sum(Y_i-\overline{Y})^2}=r^2$$

のごとくあらわし，rを相関係数とよぶ。XとYとの相関が完全であれば1となり，そうでなければ1より小となる。このことはYの計算値と現実値とがひとしくて，データがことごとく $Y=\hat{a}_0+\hat{a}_1X$ であらわされる直線上にあるならば，左辺の第2項の分子がゼロとなり，$r=1$ となる。そうでないかぎり，その分子はゼロとはなりえない。したがって相関係数rは，

$$r\leqq 1$$

である。これはXやYがどのような単位で測定されているかということは無関係であるから，XとYとのあいだにどの程度の関係があるのか，または両者の平均的な関係の存在を充分に信頼してよいかどうかの判定基準として用いることができる。この相関係数はかきかえるとつぎのようになる。

$$r=\sqrt{\frac{\hat{a}_1\sum x_1 y_1}{\sum y_i^2}}=\sqrt{\frac{(\sum x_i y_i)^2}{\sum x_i^2\cdot\sum y_i^2}}$$

この表現が通常用いられるものである。

なお，通常の場合，相関係数は自由度による修正をおこなったものを用いる。自由度修正済の相関係数 $\bar{r}$ は，

$$\bar{r}=1-\frac{\sum u^2/N-1}{\sum x_i^2/N-1}\cdot\frac{N-1}{N-2}$$

によってあらわされる。これは分子となっている誤差項の分散 $\sum u_i^2/N-1$ に$\dfrac{N-1}{N-2}$をかけたものと解することができるが，誤差項の分散がバイヤスをもたないためにはそのような操作が必要とされる。[2] $N-2$ が自由度とよばれるわけであるが，この自由度はサンプルの数から変数の数をさしひいたものにひとしい。サンプルがN個あり，変数がXとYとの2個であるから，したがって自由度は$N-2$となる。したがって，一般的に変数の数がn個あれば自由度は $N-n$ となる。この場合この変数は説明変数と先決変数との合計であることはいうまでもない。

自由度による修正をおこなうことは，誤差項の影響を過小に評価することによって需要とそれの説明要因との関係が過大に評価されるのを防ぐのが目的である。したがって，サンプル数がすくないときには，自由度修正をおこなったときに，相関係数がマイナスになるということもおこりうる。このような場合たとえいかに修正以前の相関係数がたかくても，需要と説明要因との関係は有意ではないことになる。

〔註〕

1) いまサンプル i について $u_i=Y_i-a_0-a_1X_i$ が成立している。サンプル数をNとすると，

$$\sum_{i=1}^{N}u_i=\sum_{i=1}^{N}Y_i-Na_0-a_1\sum_{i=1}^{N}X_i=0$$

となるから，この両辺をNでもって割るならば

（Ⅰ） $\overline{Y}-a_0-a_1\overline{X}=0$

が成立する。したがって，

（Ⅱ） $a_0=\overline{Y}-a_1\overline{X}$

これを $\hat{Y}_i=a_0+a_1X_i$ に代入するならば，

$$\hat{Y}_i=(\overline{Y}-a_1\overline{X})+a_1X_i$$

となる。したがって，

$$u_i=Y_i-\hat{Y}_i=Y_i-(\overline{Y}-a_1\overline{X})-a_1X_i$$
$$=y_i-a_1x_i$$

ただし，$y_i\equiv Y_i-\overline{Y}, x_i=X_i-\overline{X}$ である。そこから，

（Ⅲ） $\sum u_i^2=\sum y_i^2-2a_1\sum x_iy_i+a_1^2\sum x_i^2.$

この $\sum u_i^2$ が最小であるための必要条件は $\dfrac{d\sum u^2}{da_1}=0$ であるから，

$$-2\sum x_iy_i+2a_1\sum x_i^2=0$$

したがって，

（Ⅳ） $a_1=\sum x_iy_i/\sum x_i^2$

となる。この(Ⅳ)を(Ⅱ)に代入することによって a_0 をうる。

本論文冒頭

2) ただし，このままではその値にバイヤスがともなうために，そのバイヤスを修正する意味で $\frac{N-1}{N-2}$ を乗じる。この $\sigma_u{}^2\frac{N-1}{N-2}$ を自由度修正をおこなった標準誤差とよぶ。

この点については J. Johnston, *Econometric Method*, MaGraw-Hill Co., New York, 1963（竹内啓訳，東洋経済新報社），pp. 19～20 を参照されたい。

〔6〕 その他の方法についての補論

これまで最小二乗法についてのみ説明を加えてきたが，これのみがパラメータの推定方法であるといったら大変な誤りとなるであろう。その他にいくつかの形の最小二乗法や最尤法やその変種の情報制限法などがある。しかし，これらの推定方法のすべてについて説明することはそれ自体として多くのスペースを必要とする。通常の需要予測において用いられるのは主として最小二乗法であるという点からもそれらの詳細な説明は必要になったときに適当な書物を参照してもらいたいと思う。しかし，ここで，すくなくとも最小二乗法が適用しえないケースというのを説明しておかなければならないであろう。

はじめに説明したように，需要予測のためにたてられるモデルが一個ないし数個の外生的な説明要因をもつ一本のモデルから成りたっている場合には，最小二乗法をそのまま適用してもさしつかえない。たとえば，電気製品の価格 X_3 とによって説明されると考えられるときには，

$$Y=a_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3+u$$

というモデルが構成される。もし家計所得 X_1 のみがつよく影響するというのであれば，

$$Y=a_0+a_1X_1+u$$

というモデルとなるであろう。モデルがこの一本から成りたっている場合，この式に直接に最小二乗法を適用することによって，

$$a_0=\hat{a}_0 \qquad a_1=\hat{a}_1$$

がえられるであろう。

また，外生変数である家計所得については今期の水準ではなくて前期の水準がその需要に影響するというのであれば，

$$Y=a_0+a_1X_{1(-1)}+a_2X_2+a_3X_3+u$$

というモデルになるが，そのときでも通常は問題がない（$_{(-1)}$ は“前期の”という意味である）。最小二乗法をそのまま適用することができる。

それでは，モデルが数本の式から成りたっている場合はどうであろうか。たとえば，その電気製品は単に家計のみならず企業（第二第三次産業部門）の需要対象ともなっているとしよう。かりに家計の所得水準 X_1 と第二および第三次産業部門の関連生産活動水準とがともに影響するとしよう。モデルは，

（1） $Y=a_0+a_1X_1+a_2P_1+a_3P_2+u$

となる。この第二次産業部門の関連生産活動水準 P_1 はその電気製品そのものに関連した部分であるが，その関連生産活動水準そのものは，その部門の全体の活動水準 Q_1 とそこにおけるウエイトとに依存する。そのウエイトは民間の嗜好ないし生活様式の変化 Q_2 と結びついているとすれば，

（2） $P_1=b_0+b_1Q_1+b_2Q_2+v$

とあらわすことができる。第三次産業部門の関連活動水準 P_2 についてはあきらかに個人の消費支出水準 R_1 と金融的要因 R_2 とに依存しているとすれば，その部分のモデルは，

（3） $P_2=C_0+C_1R_1+C_2R_2+w$

となるであろう。このようなモデルが構成されたとした場合にも，最小二乗法をそのまま適用してよいかどうかということである。このモデルはさきに，因果連鎖形のモデルに該当する。モデルがこのような形をしている場合，すべての式にそれぞれ直接に最小二乗法をそのまま適用することはできない。このような場合には，はじめに最小二乗法を (2) および (3) 式に適用して $b_0, b_1, b_2, C_0, C_1, C_2$ の推定値を決定する。その結果，説明変数 Q_1, Q_2, R_1, R_2 の動きに対応する計算値 $\widehat{P}_1, \widehat{P}_2$ が

本論文冒頭

えられるであろう。つぎに(1)のパラメータを推定するときには，この計算値 $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ を用いる。直接に最小二乗法を適用するときには，X_1, P_1, P_2 についての観測データを用いるわけであるが，そうせずに X_1 については観測された現実のデータを使用するけれども P_1 と P_2 とについては，すでに推定された(2)と(3)からの計算値をデータとして用いる。このようなデータによって最小二乗法による推定値 $\hat{a}_0, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \hat{a}_3$ を得るのである。手続きがいくらかことなっているが，最小二乗法を用いていることにはかわりがない。このような方法を逐次最小二乗法とよぶ。

ここではなぜこのような手続きをとるのかということの説明が必要であろう。しかし，これについて詳細な説明は他にゆずらねばならない。ただつぎのことだけを指摘しておこう。説明変数 X と誤差項 u との間に相関があるときに最小二乗法を適用するならば，そのパラメータ推定値にはバイヤスが生じるということである。したがって，最小二乗法を用いるときには，その点についての考慮が必要となる。いまの例では，誤差項は(1)(2)(3)のそれぞれに u, v, w と3つあるが，誤差項は説明変数以外のすべての要因の集合であるから，たとえば，ある時点と別な時点とにおける誤差項のあいだには関連がないとしても同じ時点における誤差項相互間には当然に関連が生じてくる。したがって，つぎのようになる。P_1 は当然に v と関連をもつから，P_1 と u とは関連があることになる。しかし，計算値 $\hat{P}_1$ は $\hat{b}_0+\hat{b}_1Q_1+\hat{b}_2Q_2$ であるから（より正確には「P_1 の期待値 $\hat{P}_1$ は誤差項 v の期待値がゼロであるから」というべきである）誤差項 v とは関係がない。したがって，(1)のパラメータ推定にあたって $\hat{P}_1$ をデータとして使用するときには，その(1)式において，誤差項 u との相関はないと考えることができる。この場合，最小二乗法を適用することによるバイヤスはさけることができるであろう。しばしばこのような因果連鎖形の需要予測用モデルにおいて，それぞれの式にたいして直接に最小二乗法を適用しているケースを見かけるけれども，のぞましいことではない。

なお，ついでにいえば，タイム・ラッグをともなった変数をふくむつぎのようなケースにおいても，やはり問題はある。ある財にたいする需要が前期にどれぐらいあったかによって影響されるような場合を考えてみよう。この場合，もっとも単純にモデルを構成すると，

$$Y=a_0+a_1Y_{-1}+u$$

のごとくになる。Y_{-1} はラッグをともなった内生変数である。いま，さらに一期前の状態をしめすと，

$$Y_{-1}=a_0+a_1Y_{-2}+u_{-1}$$

となる。u と u_{-1} とのあいだに完全に相関がないというのでないかぎり，さきほどの理由とまったくおなじ理由でもって，Y_{-1} と u とのあいだには明瞭な関連が生じてくる。この場合には最小二乗法によるパラメータ推定値はバイヤスをもつことになる。しかし，たとえ u と u_{-1} とのあいだに相関がなくても，ラッグをともなった内生変数が説明要因となっている場合，直接的な最小二乗法による推定値はバイヤスをともなうことが明らかにされている。その意味からいうならば，最小二乗法によろうとするかぎり，需要予測のためのモデル構成にあたってはこうしたラッグをともなう内生変数を説明要因として用いなくてすむように構成する必要がある。ただし，サンプル数が多ければ多いほどそのようなバイヤスが縮少してくることをつけ加えておかなければならない。

〔7〕 誘導形法と2段階最小自乗法

ここで注意すべき重要なことがある。それはデータのもつ本質的な性質についてであ

本論文冒頭

る。いま，価格Pと需要Dデータが昭和30年から39年までそろっているとしよう。そこでこのデータを用いてただちに，この生産財について，

(1)　$D=\alpha_0+\alpha_1P+u$

という形の需要関数のパラメータの推定値を計算したとしよう。しかし，この場合，こうして計算された計算結果をそのまま需要関数とみなしてよいのであろうか。たしかに，データは需要と価格とに関するデータである。しかし，問題は，このデータは過去において需要された数量をあらわしているのであり，したがって，それはまた同時にその期間に供給された数量をもあらわしているということである。したがって，需要についてのデータは同時に供給についてのデータである。おなじことは価格についてもいえる。価格は需要価格であると同時に供給価格である。そうであるとすれば，これらのデータを用いて上の式のパラメータを推定した場合，それははたして需要関数を推定したことになるであろうか。

いま供給Sの決定要因として価格をとりあげたとしよう。そこで，需要関数にならい，

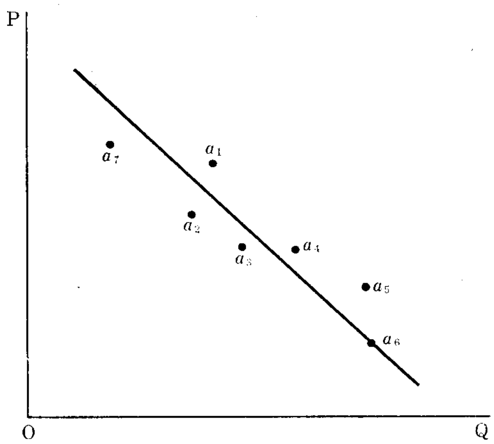
(2)　$S=\beta_0+\beta_1P+v$

という形の供給関数を想定する。現実の市場では，この供給と需要とはひとしいわけであるから，

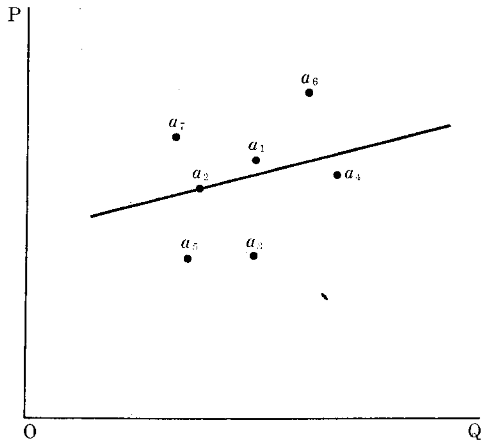
(3)　$D=S$

が成立していることになる。これをグラフにしめすと7.3図のようになるであろう。需要関数はそのときの所得水準のもとで価格に関して右下りとなる。また供給関数は価格に関して右上りとなる。したがって，(1) 式をしめす需要曲線D_1と (2) 式をしめす供給曲線S_1との交点a_1は需要と供給との一致をしめす (3) 式をあらわしている。このときの価格はP_1であり，需要数量はQ_1である。いいかえると，市場で現実に成立している点はこの価格P_1であり，数量Q_1である。この価格のもとで一定量Q_1が需要されたのであり，また供給されたのである。たとえば，昭和30年から39年までのデータは，このような需給の一致点aに関するものである。したがって，7個のデータがえられたとすると，それは7.1図のようになるかもしれないし，7.2図のようになるかもしれない。

7.1 図



7.2 図

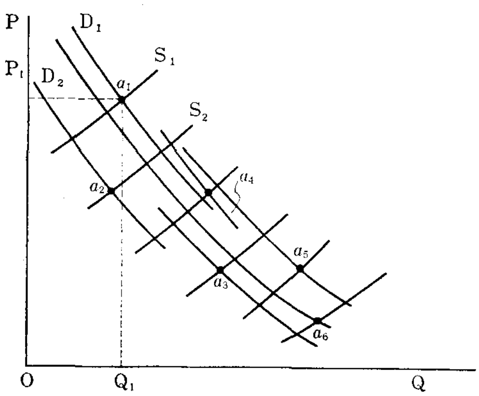


たまたま7.1図のようになったときには，これらの点の散在の様子から，そこへ一本の線をあてはめたときに，それが右下りの直線となることがわかる。このような状況のもとでこの直線をほぼ需要と価格との関係をしめすものと判定してもそれほどおかしくはないで

本論文冒頭

あろう。それは，これらの点は需要曲線があまり移動せず，供給曲線のみが大きく移動した結果として生じたものであるとみなすことができるからである。いいかえると点 a_1 は D_1 でしめされる需要曲線と，S_1 でしめされる供給曲線の交わった均衡点であり， 点 a_2 はおなじく需要曲線 D_2 と供給曲線 S_2 との交点であるというように，それぞれがその需給の均衡点である。供給曲線が大きく各時点ごとに移動しているが，需要曲線はごくわずかしか移動していない。したがって，1, 3, …

7.3 図



…， 7の点によって表現されている価格と数量との関係は，需要方程式をあらわしているとみなすことができ，それらの点にもとずいて計算されたパラメータ推定値は需要モデルの推定値とみなすことができる。しかし，もし7.2図のようになっているならば，そこへ直線をあてはめてもあまり意味がないし，場合によっては，右上りの直線があてはまることになるかもしれない。そうした場合，その直線はどう考えても需要と価格との関係をあらわしているというわけにはゆかないであろう。

これは，価格と需要との本来の関係が，価格と供給との関係や需給一致の関係などによって“攪乱”されるために生じるということができよう。具体的な数字例を用いてそれを説明しよう。いま需要関数が本来，

（4） $D=70-4P$

であり，供給関数が，

（5） $S=2.5P+5$

であり，市場の均衡条件が，

（6） $D=S$

であるとしよう。そこで(5)と(6)とから，

（7） $D=2.5P+5$

となるが，(4)×2 と (7)×4 との合計をとり，変形すると，

（8） $D=(2/6)P-160/6$

となる。さらに (4)×2 と (8)×3 との合計をとると，

（9） $D=-(7/6)P-10$

となる。この (7), (8), (9) はそれぞれ (4), (5), (6) から導出された式であり，いずれも需要Dに関する式である。容易にわかるように，このような式はこのほかに無数に導出することができる。したがって，市場において (4), (5), (6) でしめされるような関係が成立しているかぎり，現実にえられるデータに，$D=a+bp$ をあてはめるときに (7), (8), (9) その他の無数にある式のいずれがもたらされるかまったく不明であるといってよいであろう。このような状態のもとでは，計算の結果えられる構造方程式が，はたして本来のもとめている需要関数であるかどうか，を認定することは不可能であろう。いいかえると，一般的にいって，上にのべたようなモデルの場合，現実のデータから直接に需要関数を推定することはむずかしい。たまたま (8), (9) の場合にはPにかかる符号，ないし常数項の符号などから，それが需要関数ではないであろうということを確認できるけれども，つねにそうであるとはかぎらない。たとえば，(4)×2と(7)×2との合計をとると，

(10) $D=37-\frac{3}{4}p$

となるから，符号が (4) と同一であるような式は簡単に導出できる。したがって，このような場合，一般的に符号をみることによって

需要関数を認定することはできないといってよいであろう。

これは一般に認定問題といわれている事柄の一つの例である。なぜこのようになったかといえば，需要関数も供給関数もともに同一の説明変数を含んでいてそれ以外の変数を含んでいないということにもとづいてることがわかる。需要関数には，さきにもふれたごとく，通常，需要部門の生産活動水準が説明変数としてはいっている。その場合，

(11) $D=\alpha_0+\alpha_1P+\alpha_2y+u$

となるが，結果はまったく先のケース(4)，(5)(6)と同じである。いまかりに(11)を計測した結果が，

(12) $D=70-4P+2y$

となったとしよう。この(12)とさきの(5)，(6)とからなる市場を考えてみると，(4)，(5)，(6)の場合と比較して，事態の本質に何らの変化はないことがわかる。(11)×2と，(7)×4との合計から，

(13) $D=(2/6)P+(2/3)y-160/6$

を導出することができるであろう。前と同じような操作によって，(11)と同一の形の式を無数につくりだすことができる。こうしてつくりだされるDに関する式は，形の上で(11)の需要関数と識別することは困難であり，そのことはさきに述べたところとまったく同じである。

したがって，かりに需要関数に価格P以外に生産水準yがはいったとしても認定不可能という状況には変化はない。そこで，つぎに供給関数に別な説明変数を加えてみよう。たとえば，生産物の供給はかりに価格が一定であるとしても，労働生産性が上昇すると増大する。労働生産性の上昇は一般的に生産コストを低下させる傾向をもつ以上そう考えてよいであろう。労働生産性をLとおくと，供給関数は，

(14) $S=\beta_0+\beta_1P+\beta_2L+v$

となる。(6)，(11)，(14) からなる市場モデルでは，需要関数と区別がつかないような形の関数を導出することはできないであろう。読者はみずからそれを試みてみられたい。式をどのように組みあわせても，$D=f(P,y)$という形の式は導き出すことはできない。このような場合，その生産物の需要関数(11)は，供給関数(14)や均衡方程式(9)などとの混合によって識別できないものとはならない。したがって，価格のように，需要に影響する要因が同時に供給にも影響するようなケースにおいては，モデルの認定問題について考慮する必要がある。

その意味では価格に関するデータを需要予測に用いるときには，単純に両者の関係を結びつけてはならないのである。たとえば，需要が供給よりもたえず大幅に増加している場合，需要の増加と価格の上昇とは平行して起りうるであろう。このような場合，両者の関係を直接に数量的に把握してもあまり意味がない。

そこで，(6)，(11)，(14) によって，その生産物にたいする需給状態があらわされている場合，さきに述べたような意味で認定が可能であるとするならば，直接に(11)にデータをあてはめてよいかどうかが問題となる。しかしその場合でも，直接にそのような手続きをとることは誤りである。通常，このような場合には，(6)，(11)，(16) のモデルをDとSとPについて解いてからパラメータを推定する方法が用いられる。これは誘導形法とよばれるが，それはつぎのような手順をふむ。

1. まず数量D（これは(6)からSにひとしい）とPについて解をもとめると，

(15) $$D=\frac{\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}+\frac{\beta_1\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}y-\frac{\beta_2\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}L+\frac{\beta_1u-\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}$$

(16) $$P=\frac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_1-\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}y-\frac{\beta_2}{\beta_1-\alpha_1}L+(u-v)/(\beta_1-\alpha_1)$$

となる。この両式の係数をそれぞれ，

本論文冒頭

$$(17)\begin{cases}\xi_0=\dfrac{\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}, \quad \xi_1=\dfrac{\beta_1\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1},\\ \xi_2=\dfrac{-\beta_2\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}\\ \eta_0=\dfrac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_1-\alpha_1}, \quad \eta_1=\dfrac{\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1},\\ \eta_2=\dfrac{-\beta_2}{\beta_1-\alpha_1}\end{cases}$$

とおくならば，(15),(16) は，

$(15)'$ $D=\xi_0+\xi_1y-\xi_2L+u'$

$(16)'$ $P=\eta_0+\eta_1y-\eta_2L+v'$

とかきかえられる。これは通常，誘導形とよばれる。

2. この$(15)'$と$(16)'$とについてパラメータの推定をおこない，ξとηの値を決定する。すでに需要，需要産業部門の活動水準，労働生産性のデータはあたえられているから，これは単純に最小二乗法を適用することによってもとめられる。

3. つぎに，(17)にそれらの推定値を代入する。この(17)は6個の式からなっているが$\xi_0,\xi_1,\xi_2,\eta_0,\eta_1,\eta_2$ の値を固定するならば，これは $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1,\beta_2$ を未知数とした連立方程式であるとみることができる。したがって(17)からそれらのパラメータの値を決定することができるであろう。需要関数(11)は$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ がわかれば推定した事になる。したがって，その値を代入して，

$(11)'$ $D=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1P+x_1y$

をみちびきだすことができるであろう。

この方法は誘導形法とよばれ，もっとも代表的な推定方法の一つである。この方法は，さきにのべたような意味で認定可能でなければ適用することができない。そこで，一般に，どのようにして認定が可能であるかを判定するのか——これが問題となる。モデルのなかのある方程式——たとえば需要関数——をとり出しその認定可能の条件をみようとするときには，その問題となっている方程式（需要関数）と同じ形の方程式をモデルのなかの他の方程式を用いて導出することができないということであった。(14),(11),(16)のモデルではその条件がみたされていたが，たとえば，(11),(2),(3)のモデルではその条件がみたされていなかった。いまモデルをもう一度かいてみると，

(11) $D=\alpha_0+\alpha_1P+\alpha_2y+u$

(2) $S=\beta_0+\beta_1P+v$

(3) $D=S$

となる。この誘導形をしめすならば

(18) $D=\xi_0+\xi_0y+u'$

(19) $p=\eta_0+\eta_1y+v'$

のようになる。ところで，さきの場合と同じように，最小二乗法によって $\xi_0,\xi_1,\eta_0,\eta_1$ の値をもとめたとしても，ここから，$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_0,\beta_1$ の5個のパラメータの値を決定することはできない。そのことは(17)をみれば明らかである。4本の連立方程式から5個の未知数を決定することはできない。しかしながらそれにもかかわらず，じつは，β_0とβ_1とを決定することはできる。すでに(18),(19)のパラメータは確定されたのであるから，われわれは $\xi_0,\xi_1,\eta_0,\eta_1$ の値を知っており，それらは(17)から

$$(17)' \quad \hat{\xi}_0=\frac{\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}, \quad \hat{\xi}=\frac{\beta_1\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}$$

$$\hat{\eta}_0=\frac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_1-\alpha_1}, \quad \hat{\eta}_1=\frac{\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}$$

であることがわかっている。したがって，そこからまず，

$$(20) \quad \beta_1=\frac{\hat{\xi}_1}{\eta_1}$$

を用いて β_1 をもとめることができ，さらに

$$(21) \quad \beta_0=\hat{\xi}_0-\beta_1\hat{\eta}_0$$

を用いて β_0 をもとめることができるであろう。したがって，供給関数についてはパラメータの推計が可能である。しかし，需要関数については，たとえ β_0 と β_1 の値がわかったとしても，$(17)'$ から $\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2$ の値を決

定することはできないであろう。(20),(21)があたえられているから，$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ をきめるのに (17)′ のうちで $\hat{\eta}_0$ と $\hat{\eta}_1$ に関する式（または $\hat{\xi}_0$ と $\hat{\xi}_1$ に関する式）のみを用いることができる。したがって，

(22) $\hat{\beta}_0+\hat{\eta}_0\hat{\beta}_1-\hat{\eta}_0\alpha_1=\alpha_0$

(23) $\hat{\eta}_1\hat{\beta}_1-\hat{\eta}_1\alpha_1=\alpha_2$

となる。ここから明らかなように $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ の3個のうちどれか1個の値をきめることによってのみ残りの値をきめることができる。そのような組合せは無数に考えられる。いいかえると，需要関数は認定可能であるが，しかし，供給関数は認定不可能である。なぜならば，β_0 と β_1 のみを確定することができたからである。このようになったのは，β_0, β_1 については(20),(21) がしめすように未知数の数とそのための方程式数が一致しているのにたいし，$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ については(22),(23)がしめすように，未知数と方程式数とが一致しないからである。

そこで考えられることは，もし供給関数にも同じ変数 y がはいっていたならば，事情は需要関数の場合とまったく同じになったであろうということである。供給関数(2)にはもちろん変数 D が含まれていないから，(2)に含まれていない変数は2個あることになる。また，β をきめる方程式数は2本あったが，これは生産物の需給モデルの方程式数3から1をひいたものにひとしい。[1] 通常はこのような条件を用いて認定問題を判別する。これは位数条件とよばれ，一般的に，

その方程式に含まれていない変数の数
≧モデルの方程式数マイナス1

のごとくにあらわされる。上のモデル(11)(2)(3) における供給関数のように両辺とも2であって等式が成立する場合，これは適度認定といわれる。もし不等号が成立するならば過剰識別とよばれる。もしこのいずれでもないならば，すなわち，その方程式にふくまれていない変数の数がモデルの方程式数から1をひいた数より小さいならば，識別不能といわれる。たとえば，上のモデルにおける需要関数は前者の数が1で，後者の数が2であるから識別不能である。

したがって，需要予測のためにモデルを作成するときには，この点に留意しなくてはならない。しかしながら，このことは逐次代入形のモデルにおいては問題となりえない。そのことは別な表現でさきにのべたとおりである。ここで一つの疑問をもつ人がいるかもしれない。認定問題というのがモデルの構成の仕方に依存するとするならば，需要関数について認定可能になるように構成しさえすればよいことになり，極端にいえばモデルは適当にいくらでもできることにならないだろうか，いいかえると，モデル構成に一種の恣意性がはいってこないだろうか，ということである。この点についての解答は明瞭である。前にもふれたように，構成されたモデルには経済理論の裏づけがなければならないということと，モデルは計量経済学的な手続きによってテストされなければならないということの二つである。理論的にみて納得しうるものであるかどうか，実証分析にあたってとられる各種のテストに合格しうるかどうか，を検討することによって，認定可能ないくつかのモデルのなかからどれかひとつが選定されることになるであろう。

モデルのパラメータ推定の説明にあたって重要な誘導形法についてのべたが，それが唯一の方法ではないことをいっておかなければならない。識別不可能な式についてはいかなる方法も意味がないけれども，さきのモデルの供給関数 (2) のように適度認定のときには誘導形法がもっとものぞましい方法である。しかし過剰認定の場合にはその方法はさける必要がある。たとえば，つぎのようなモデルを考えよう。

(22) $D=\alpha_0+\alpha_1P+\alpha_2y+u$

(23) $S=\beta_0+\beta_1P+\beta_2L+\beta_3R+v$

本論文冒頭

(24)　$D=S$

ここでRはある任意の影響要因であると考えよう。この場合，需要関数の位数条件は，

$3>2$

となり，過剰認定である。また供給関数については，

$2=2$

で適度認定である。このような場合，需要関数については誘導形法によってのパラメータを推定することはできない。このような場合の一つの方法として二段階最小自乗法がある。その手順はつぎのとおりである。

1. 誘導形をもとめる。

$$D=\frac{\alpha_0\beta_1-\beta_0\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}+\frac{\alpha_2\beta_1}{\beta_1-\alpha_1}y-\frac{\alpha_1\beta_2}{\beta_1-\alpha_1}L-\frac{\alpha_1\beta_3}{\beta_1-\alpha_1}R-\frac{\beta_1 u-\alpha_1 v}{\beta_1-\alpha_1}$$

$$P=\frac{\alpha_0-\beta_0}{\beta_1-\alpha_1}+\frac{\alpha_2}{\beta_1-\alpha_1}y-\frac{\beta_2}{\beta_1-\alpha_1}L\ \frac{\beta_3}{\beta_1-\alpha_1}R+\frac{u-v}{\beta_1-\alpha_1}$$

2. このなかのPに関する式についてパラメータをηでおきかえその値を最小自乗法により推定する。

$P=\hat{\eta}_0+\hat{\eta}_1 y-\hat{\eta}L-\hat{\eta}_3 L$

3. この式によってPの計算値$\hat{P}$をもとめ，それを最初の需要式に代入し，

$D=\alpha_0+\alpha_1\hat{P}+\alpha_2 y+u$

この式についてパラメータの推定を最小自乗法によりおこなう。

4. 供給関数についても同じようにして，パラメータの推定をおこなうことができる。

以上まとめてみるとつぎのようになる。需要モデルが一本の方程式からなりたっている場合と複数の方程式からなりたっている場合とではパラメータの推定方法がことなっている。一本の式からなりたっているときには，それに直接に最小自乗法を適用してもさしつかえないが，複数の方程式体系の場合には，それぞれの式に直接に最小自乗法を適用することはできない。どのような方法を用いるかはそのモデルの性質に依存する。通常，その方程式体系は因果連鎖形の場合と同時決定形の場合とに分けられる[2]。因果連鎖形のときには，逐次最小自乗法が用いられる。また同時決定形のときには，誘導形法もしくは2段階最小自乗法がもちいられる。誘導形法が適用できるのはその問題としているモデルが適度認定の場合のみであり，過剰認定の場合には2段階最小自乗法を用いなければならない。もし，そのモデルが認定可能であれば，パラメータの決定をおこなうことができない[3]。

現実の需要予測のためのモデルをみてみると，これまで認定方法があまり問題となりえなかったケースが多いが，それはモデル構成がことなっていたからである。たとえば，経済がたかい成長率で成長するとき，各種の生産財にたいする需要は，需要産業部門のたかい生産の増加によって増大してゆく。この場合，需要にたいする重大な影響要因は何よりも需要産業部門の生産活動水準である。したがって，需要関数は，

(25)　$D=b_0+b_1 y+u$

とあらわすことができる。これにたいして供給は，その需要をみたすようにおこなわれる。いいかえると，供給者はある価格のもとで，その需要にひとしい生産をおこない，それを供給する。このときの価格は，需要部門とのあいだにコスト計算を基礎にして適当に決定される。もちろん，その業界の事情ないし生産物の性質により厳密なコスト計算が容易にはおこなわれない場合があるであろう。そのようなときでも，本来のコスト計算に“類似”した方法でわりだされた価格をもとにして取引されるのが普通である。供給量が大きければ価格は割り安となり，供給量が小さければ，価格は，割り高となる。いずれにせよ，そのような形で供給がおこなわれるとするならば，供給は，

本論文冒頭

(26)　$S=D$

(27)　$P=a_0+a_1S$

となるであろう。このようなモデルのもとでは，需要式も供給式もともに適度認定となりしかも，需要モデルは単独に推定することができる。なぜならば，モデル全体が逐次代入形になっているからである。これまでの需要予測のためのモデルの多くが，複雑な形をとってはいても，基本的には(25)式の形になっていた。いいかえると，供給との関係で同時連立形となっていなかった。しばしば需要だけを考慮してモデルを構成しえたのは，あるいは“需要＝生産”という前提でモデルを構成しえたのは，以上のべたような事情にあったからである。

このことからも明らかなように，モデル構成にあたって，それが同時連立式になるかそうでないかによってパラメータの推定方法に相違がでてくる。しかし，それだからといってモデルを構成するときにいつでも単純な逐次代入形にしてしまえばよいというわけにはゆかない。もしそうした形に構成できればパラメータの推定が比較的に容易であることはたしかであるが，そのモデルが現実を比較的に忠実に反映していなければ，たとえそれによってパラメータを推定したとしても，そのモデルを予測のために使用することはできないであろう。価格変化が重要な役割を演じているときに，それを無視してモデルを構成してもそれを需要予測に使用することは不可能である。その意味からいって，さきにモデルはできるだけ因果連鎖形である方がのぞましいといったけれども，それはあくまでも，それでもって現実をうまく描写しうるということを前提としてのことであるということを断わらなければならない。もし因果連鎖形のモデルにするとどうしても現実をうまく説明しえないならば，あるいは現実の需要の重要な決定要因を見のがすことになるならば，そのようなモデル構成をやめて同時連立形にしなければならないであろう。

〔註〕

1）この表現方法はいささかラフであるが，このための厳密な手続きについては，たとえば，福地崇生『計量経済学入門』東洋経済新報社，昭和37年，第5章を参照されたい。

2）これはまたしばしば三角形モデルともよばれる。たとえば，3本の方程式がそれぞれ順次につぎのように未知数をもつとき，

(i)　x_1

(ii)　x_1, x_2

(iii)　x_1, x_2, x_3

はじめの方程式でもって x_1 がきまり，二番目の方程式でもって x_2 がきまり，きまった x_1, x_2 を三番目の方程式に代入して x_3 がきまる。これは因果連鎖形の典型的な形をあらわしている

3）さきに，逐次最小自乗法のさいに，なぜ直接に最小二乗法をすべての式に適用できないかの統計学的説明をおこなったが，同時決定形の場合，たとえそのモデルが適度認定の条件をみたしていても，直接に最小自乗法をもちいることができないという統計学的理由をあげなかったがそれはつぎのとおりである。

さきの(11),(14),(6)のようなモデル構成のとき，それぞれの式は認定条件をみたしている。いま(14)をかきかえて，

$$P=-\frac{b_0}{b_1}-\frac{1}{b_1}S-\frac{b_2}{b_1}W+\frac{v}{b_1}$$

としてみよう。そのとき上の式から P と v とは独立ではなく，また，さきにもふれたように，u と v とは同時にある確率分布にしたがっているから独立ではなく，したがって(11)において P と u とは独立でないことになる。したがってこのような条件のもとにおいては，(11)に最小自乗法を直接に適用すると結果にはバイヤスがともなうことになる。

〔8〕構造推定後の検討項目

構造パラメータの推定がおわったあとでおこなうべきことは，そのモデルが果して需要構造を説明しているものと信じてよいかどうか，ということである。もしかなりの程度まで信頼できるならば，これをもちいて将来時点における需要の予測をおこなうことができる。もし，そうでなかったならば，その信頼

本論文冒頭

しがたいモデルによって需要を予測することになるから，予測値についても信頼性がうすいものとなる。パラメータの推定値がつぎのようにあたえられたモデルを想定しよう。

$$Y=110+0.85X$$

これはY財にたいする需要とその説明要因Xとについてのエコノメトリック・モデルである。このモデルを予測目的に使用しうるかどうかをきめるためにいかなることが検討されなければならないか。検討されるべき点はすくなくとも四つある。すなわち，

1. Xの動きはYの動きをどの程度まで説明することができるか。
2. 構造パラメータの値は経済の論理と矛盾していないかどうか。
3. Yの計算値と現実値との誤差が特別の動きをしめし，そのモデルの信頼性をひくめていないかどうか。
4. 計算された構造パラメータの値が別な値をとる可能性はどの程度か。

これら四つの点についてそれぞれ検討することが必要である。

第一の点から説明してゆくことにしよう。この説明変数が需要という被説明変数とどの程度まで関連があるか，ということは相関係数によってしめされることはさきに説明したとおりである。この相関係数は，

$$r^2=1-\frac{\sum u_j^2}{\sum y_j^2}$$

であるが，サンプル Y_j の分散は計算値 $\hat{Y}_j$ の分散と攪乱項 u_j の分散との合計にひとしいことがしられている。したがって，

$$\sum y_j^2=\sum y_{jcj}^2+\sum u_j^2$$

がえられる[1]。ここで $y_{cj}\equiv\hat{Y}_j-\overline{Y}$ である。この式は Y_j の分散のうち計算値 $\hat{Y}_j$ の分散によって“説明”されない部分は攪乱項の分散によって“説明”されることをしめしている。これを用いると，

$$r^2=\sum y_{cj}^2/\sum y_j^2$$

となる。したがって，相関係数は Y_j の分散と $\hat{Y}_j$ の分散との比の平方根にひとしいことをしめしている。これは計算値 $\hat{Y}_j$ の分散が現実値 Y_j の分散をどの程度説明しているかをしめす比率であると解することができる。この比率は決定係数（coefficient of determination）とよばれ，もし決定係数が0.64なら被説明変数の変動のうち説明変数の変数に帰属させうる部分が，64%であるということになる。いうまでもなく，これは設定されたモデルについていうわけであるから，モデルをはなれてこの帰属部分の値を問題とすることには何の意味もない。モデルが不適当なものであれば，この決定係数は低下する。相関係数が0.9以上であることがなぜのぞましいかということは，以上の点から十分に了解できるであろう。被説明変数である需要の動きは用いられた需要要因の動きに81パーセント以上帰属するのでなければ，後者の動きから前者の動きを“説明”することは困難であり，かなりの誤差をともなうことになる。

第二の点は構造パラメータの値が経済のロジックと矛盾していないかどうかということであった。これはまず何よりもパラメータの推定値の符号によってたしかめられる。他の競争的な財の価格に比して当該生産物の価格が低下したときには需要は通常の場合には増加する。それにたいする例外となることがあきらかに説明できないかぎり，もしつぎのような計算結果がえられたとしたら，そのモデルを用いることはできないであろう。ここでXが所得，Zが相対価格であるときに，

$$Y=110+0.85X+1.53Z$$

という結果になれば，価格Zが上昇するとともに，かえって需要が増加することになるからである。もちろん，価格Zが上昇してかえって需要が増加する（あるいは価格が下落するとかえって需要が減少する）という財がないわけではないから，分析の対象としている財がそのような財であることが，十分の論拠をもっていえるのであれば別である。このよ

本論文冒頭

うに，モデルに組みいれられた需要の説明要因に結合しているパラメータの符号が，通常の理論の教えるところとことなるときには，それにたいする経済学的に納得しうる説明理由がみいだされるかどうかを検討し，もしそれが見いだされないときには，そのモデルを棄却することがのぞましい。

ところで，符号は逆ではないが，その値がいちじるしく想像されるものとはことなっているというケースが生じるときがある。このことは，需要の弾力性が異常な値をもつことを意味する（そういう意味では符号の相違はこの弾力性の異常な値ということのなかにふくめられるといってよい)。

上の例では，需要の所得弾力性 e の定義から，XとYとの平均値を$\overline{X},\overline{Y}$とすると，

$$e=a_1\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}=0.85\frac{\overline{X}}{\overline{Y}}$$

という値がえられる。もし a_1 の推定値が異常な値であれば，弾力性 e の値もまた，そのようになるであろう。このような場合もやはり同じように，それについての経済学的に納得しうる説明がえられるのでなければ，それを採用することには注意が必要である。

このような推定結果がえられるのは，いうまでもなく，説明変数が二つ以上あるときである。多元相関のときに，ときおりみいだされるこのような現象は，通常，線形重合(multicollinearity）とよばれている現象と密接な関係があるとみなされている。したがって線形重合とは何かということについて，ここで説明しておかなければならない。

需要を説明する二つの要因としてXとZとがあたえられたとする。線型重合とは，このXとZとがともに第三の別な要因Wと密接な関連をもつときに生ずる現象である。こうした現象は，たとえばつぎのようなときにはしばしばあらわれる。経済がつよい成長要因をふくんでいるとき，多くの経済変数はすべて上昇傾向（upward trend）をもつことになる。その場合，説明変数としてえらばれるXもZもともに上昇傾向をもつ。あるいはZが経済の成長とともに減少する性質のものであればそれでもよい。Yをある電気機械とし，Xが所得でZが価格としたときに，成長とともに，Xは上昇傾向をしめし，Zは低下傾向をしめすということがおこるかもしれない。この場合，XとZとの間には密接な関連があることになる。それらの動きはともに成長要因によって規定されている。このような関係が説明変数のあいだにみいだされるとき，線形重合があるという。

もし線形重合が完全であって，XとZとのあいだの相関係数が1であるならば，構造パラメータの推定値を決定することはできない[2)]。もちろん，現実にはこのような完全な相関が成立することは稀であろう。しかし，しばしばかなりたかい相関がみられる。その場合推定されたパラメータの値の信頼度が低下するということは十分におこりうる。それでは，XとZとの間の相関がどれぐらいであったならばよろしいのかということであるが，これについては明確な基準はない。相関係数が0.7ならよいが，0.9ならわるいというようにきめられない。

ある特定の説明変数についてのパラメータの推定値が，他のそれに比していちじるしく奇妙な値をしめしているとき，あるいは符号条件がみたされていないときには，線形重合が存在するかもしれないと疑がってよいであろう。その疑いが明瞭なときには，モデルの出発点にさかのぼって構成しなおさなければならない。一つの方法はXとZとの双方に影響をあたえている第三の変数Wを説明変数として用いることである。あるいは，そのWでもってXとZとをデフレートすることである。

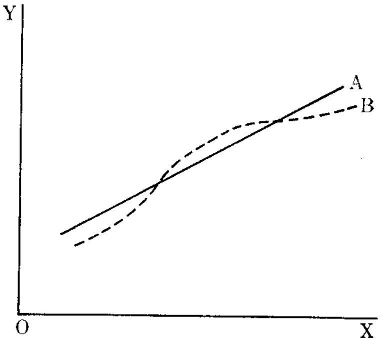
また，線形重合の程度を低めるために一階定差をとったモデルを用いることである。これについてはすでに統計的モデルのところで

本論文冒頭

説明した。すなわち，$Y=a_0+a_1X+a_2Z+u$のかわりに，$\varDelta Y=b_0+b_1\varDelta X+b_2\varDelta Z+v$ というモデルで分析することである。

それから，これはモデルそのものに関するものではないが，使用するデータをかえることである。たとえばXについては時系列データを用いて，Zについてはクロス・セクション・データを使用することである（もちろんこの場合，そのクロス・セクション・データにおいてはXが一定であるという保証が必要である)。この場合には，ZについてのデータはXが一定という条件のもとにあるから，この両者の線形重合という問題はさけられるであろう。これについての説明はややこみいっているので，ここでは省略することにしよう。

第三の問題はいわゆる系列相関（serial correlation）の問題である。現実値と計算値とのあいだに誤差の生じることはさけがたいことであるが，ここでの問題はそのような誤差そのものではなくて，その誤差の発生のあり方である。たとえば，あてはめられた線形モデルにおいて重要な役割りを演じている変数がなお考慮されていないとき，誤差項は at random な動きとは逆にむしろある規則的な動きをすることがある。たとえば，ある財にたいする需要がたんに所得だけではなくて，需要者の年令構成によっても影響をうけるとしよう。その需要層の年令が低いことは他方その所得水準も相対的にたかくないことをしめしているが，そのような需要者の支出は一般に低く，さらに年令も上昇し，所得も増加するにつれて需要が増大する。しかし，ある程度以上に年令が増加すると，所得もまた増大するにもかかわらず，その財にたいする支出もまた相対的にいくらか低下してくる。このようなケースにあっては，もし所得を説明要因として採用した線形モデルをあてはめるならば，誤差項は規則的な動きをすることになるであろう。



上の図には，A, B の二つの線が画かれてあるが，AはXとYとに関する相関式をしめし，Bはサンプルの分布をしめす。この場合所得Xが低い領域では誤差項はマイナスの符号をもち，途中でプラスとなり，さらにXが上昇するとふたたびマイナスとなっている。誤差項 u_i は，それ自身かなり規則的に動いていることがわかる。これはひとつの例であるが，誤差項が，このように規則的な動きをする場合，系列相関もしくは自己相関（autocorrelation）があるという。一般に系列相関があるとき，

（1） $u_t=bu_{t-1}+v_t$

のごとくあらわされる。ただし，ここでの誤差項 v_t には系列相関はないものとする。このパラメータbは，同時にこの自己相関式における相関係数をあらわしている。したがって，

$1\geqq b\geqq -1$

である[3]。

この(1)において $b=1$ とするならば，

（2） $u_t-u_{t-1}=\varDelta u_t=v_t$

となるから，一階定差をとるときには，誤差項からこの系列相関を完全にとりさってしまうことができる。しかし，もしbが1よりかなり小さかったり，$b<0$ であったならば，近似的にも(2)のような形が成立しなくなってしまうであろう。このことは，系列相関がみいだされるときには，もとの線形モデルを一階定差のモデルに変換するならば，系列相関のチャンスを縮少させうることをしめして

本論文冒頭

いる。

系列相関がどの程度あるかをしらべるために，もっともしばしば用いられるのは，ダービン・ワトソン・テスト（Durbin-Watson test）である。それは，

$$d=\frac{\sum_{t=2}^{N}(u_t-u_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{N}u_t{}^2}\ \frac{N}{N-1}$$

とあらわされる。これを変形してゆくと，

$$2(1-r)\frac{N}{N-1}$$

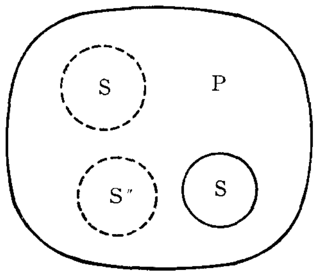
がえられる。もし系列相関がなければ $r=0$ であるから，サンプル数が十分に大きいならば，$d=2$ となることがわかるであろう。いいかえると，このダービン・ワトソン・テストによるときには，この比率 d が2に近ければ近いほど，誤差項に系列相関がないということになる。最近では，このダービン・ワトソン比をとることは，かなり一般化してきたといってよい。もし，この比が2よりあまりにもかけはなれているときには，モデル構成をかえる必要がでてくる。

第4番目にあげたが，構造パラメータの推定値の信頼性の問題はきわめて重要である。その内容はパラメータの推定値が異なった値をとる可能性がないかどうか，その結果，モデルの基本構造が不安定になる可能性がないかどうかを検討することである。

$$Y=\hat{a}_0+\hat{a}_1X$$

における構造パラメータの推定値 $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ はあたえられるデータにもとづいて決定される。そのデータがでたらめに収集されたものであれば，もちろんえられる推定値もまたでたらめになってくるが，ここでの問題はそのような意味での信頼性の問題ではない。データは一応まともに収集されたという前提のもとでもって，なお問題となる信頼性である。ある財の需要 Y と，その価格 X とにたいして線形の相関式をあてはめるとしよう。まずその需要と価格との双方についての一群のデータをもとめ，それにもとづいてパラメータ $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ を推定する。この場合，この用いられたデータがパラメータ推定値をうるための手がかりとなっているわけであるが，このデータはその財の需要と価格とに関する事実のすべてをおおいつくしているわけではない。それはほとんど不可能である。

いいかえると，使用されるデータは，需要と価格とに関する事実のうちで，たまたま入手できた部分についてのデータである。いまその需要と価格とについてのすべてのデータを P とし，たまたま手にしているデータを S とするならば，S は P のなかの一部分である。図にしめすとつぎのようになる。



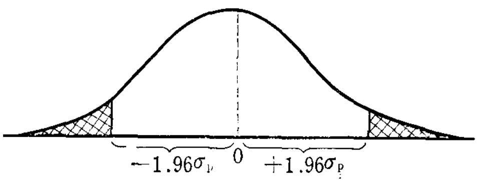
もし，すべてのデータ P にもとづいて構造パラメータを推定したとき，その推定値を真の推定値とよぶことにしよう。そうすると現実には，その一部分のサンプル S にもとづいて構造パラメータを推定するわけであるから当然に一つの問題が生じてくる。それは，このあたえられた一群のデータからえられた推定値が需要と価格との関係をしめすものであると一般的に断定してしまってよいかどうか，ということである。その需要と価格との真の関係をしめす構造パラメータは，異なった値をとっているかもしれない。

この場合，つぎのような想定をおこなうことも可能である。その財の需要と価格とについて，線形モデルがあてはめられ，一見したところ需要と価格との間には，かなりの相関関係がみいだされたとしても，それはまったくの偶然にしかすぎない。実際にはそのよう

本論文冒頭

な関係が存在しないにもかかわらず，そのときにサンプルとしてえらばれたデータがたまたまそのような結果（推定値）をもたらしたのである。このような想定を前提にするとすれば，価格の一定範囲にわたっての散らばりは，需要の散らばりと何らの関係もないというのが「真の関係」ということになる。もし真の関係がそうであったと仮定した場合，X にかかるパラメータ a_1 の真の推定値はゼロである。

ところで，データの全集団 P を母集団とよぶが，この母集団からサンプル・データ S をとりだしたと同じように，別なサンプル・データ $S', S'', \cdots\cdots$ と選んでゆくことができるとするならば，それに対応して構造パラメータ a_1 の推定値もまた $\hat{a}_1', \hat{a}_1'' \cdots\cdots$ というように変わってくるであろう。このような繰返しを何度も何度もおこなうとすれば，それらは図にしめしたような正規分布となり，真の値はその平均値となる。もし a_1 の真の値がゼロであるならば，その分布の平均値はゼロとなるであろう。



いいかえると，このようなサンプルの取りなおしによって計算される数多くのパラメータ a_1 の推定値のなかで，もっとも多くあらわれるのが a_1 の真の値である（この分布の分数を $\sigma_p{}^2$ であらわすことにする)。

現実には，このような無限回のサンプルの取りなおしという事態は実行不可能なことであり，したがって，入手しているサンプル・データ S についておこなわれた推定結果を評価する以外にはない。しかも，真の値がゼロであるかどうかもわかっていない。

いま真の値がゼロ（X と Y とのあいだには相関がない）と仮定した場合，可能なすべてのサンプル・データ（$S, S', S''\cdots\cdots$）から得られるパラメータの推定値（$\hat{a}_1, \hat{a}_1', \hat{a}_1''\cdots\cdots$）の95パーセントは，その正規分布の平均値の左右の $1.96\sigma_p$ の領域に含まれることになるであろう。いいかえると，現実に計算されてくるパラメータ推定値がゼロの周辺 $1.96\sigma_p$ のところにはいる確率は 0.95 であるということになる。したがって，データ S についてえられた推定値 $\hat{a}_1$ もまた大体において，この $\pm 1.96\sigma_p$ の範囲内にはいるものとみてよい。したがって，もしパラメータの真の値がゼロであるとしたら，0.95の確率でもって，

$$0-1.96\sigma_p \leqq \hat{a}_1 \leqq 0+1.96\sigma_p.$$

が成立する。書きかえると，

$$-1.96 \leqq \frac{\hat{a}_1}{\sigma_p} \leqq 1.96$$

または，

$$(12)\quad |\hat{a}_1| \leqq 1.96\sigma_p$$

となる。このことはつぎのことを意味する。もし価格 X と需要 Y とのあいだには本来まったく相関がないとした場合，推定値 $\hat{a}_1$ の絶対値は標準誤差 σ_p の1.96倍よりも小さい。したがって，このことから逆に，標準誤差 σ_p の1.96倍よりもパラメータの推定値 $\hat{a}_1$ が小さかった場合には，真の値がゼロの可能性がある。したがって，もし，

$$|\hat{a}_1| \hat{a} \leqq \sigma_p$$

であるならば，上の(3)は当然に成立する。

そこで，うえの結論はつぎのようにいいかえることができる。もし，

$$|\hat{a}_1| > 1.96\sigma_p$$

であるならば，さきの図表で両端の黒い部分に推定値 $\hat{a}$ がはいることになるから，その確率は0.05以下となる。これはきわめてありそうにもないケースと考えられる。つまり，a_1 の真の値がゼロであるという可能性はきわめてうすい。いいかえると，X と Y とのあいだに相関がまったくないというのが真の状態であるときに，$1.96\sigma_p$ より大きい $\hat{a}_1$ とい

本論文冒頭

う推定値が偶然にえられる確率はきわめて低いことになる。そこで，このような場合，推定値 $\hat{a}_1$ は5パーセントの有意水準に達しているといい，XとYとの間に相関がないとした最初の仮説は棄却されることになる。

もし推定値 $\hat{a}_1$ が，

$$|\hat{a}_1|>\sigma_p$$

であるとしたならば，$\hat{a}_1$ は $1/3$ の確率でもって，その領域にはいることになり，$a_1=0$ の仮説をかりに棄却するとしても，不安定であることはさけられない。したがって，たとえゼロ仮説を棄却するとしても，その点にたいしては留保が必要である。その意味からいうならば，σ_p の約2倍の大きさよりも推定値の絶対値が大きいことが望ましい。分散 σ_p はこの構造パラメータ a_1 がゼロである可能性が5パーセントの有意水準でもって棄却しうるかどうかの決定に，重要な役割りをもっているが，この推定値は，

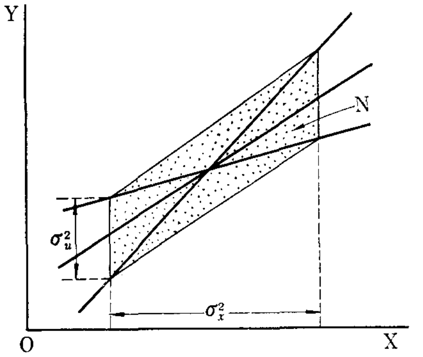
$$\sigma_p{}^2 \doteqdot \sigma_{\hat{a}_1}{}^2=\frac{\sigma_u{}^2}{\sum x_i{}^2}$$

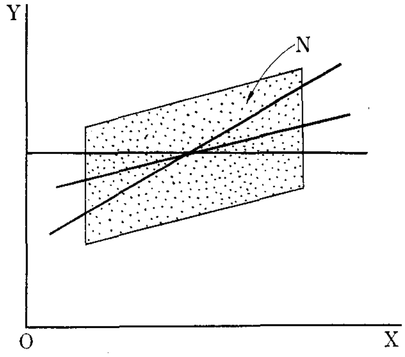
によってもとめられる[4]。

このパラメータの分散が大きいときどのようなことがおきるかが，わかったわけであるがふたたびこのことをグラフによって説明するとつぎのようになる。いま横軸にXをはかり，縦軸にYをはかる。その平面にある回帰線が画かれているとする。$\hat{a}_1$ の分散は $\sigma_x{}^2/N$ にひとしいから，$\hat{a}_1$ の分散は誤差項の分散とXの分散とサンプル数とから構成されることになり，それはグラフの上ではつぎのようにあらわされる（下図左）。もし $\hat{a}_1$ の分散が大きければ，回帰線が動きうる範囲は拡大されるであろう。下図右のように，回帰線はゆるされる変動の範囲内で水平になることも可能である。もしこのようなケースがありうるとしたら，そのときXとYとの間には何らの相関もないわけであり，かりにそうではないケースが計算によって導出されたとしても，それは偶然のことにしかすぎないことがわかるであろう。

ここでつけ加えておかなければならない点は，サンプルの数である。すでに自由度という概念を用いて相関係数を修正することをのべたが，それは誤差項の影響を過小に評価することによって，要素とその説明要因との間の関係が過大に評価されるのを防ぐのが目的であった。

このような自由度による修正の効果は，サンプル数が変数の数に比して少なければ少ないほど大きかった。サンプル数が少ない場合その少ないサンプルから，需要とその説明要因との関係について何か一般的なことをいおうとすることがむずかしいであろうということは容易に想像しうる。たとえば，サンプルがわずか2個しかなかったら，そこをつらねた一本の線を画くことはできるであろうが，その回帰線を基礎にして，これからおこりうる両者の関係を想定することはまったく不可能に近いであろう。サンプル数が多ければ多





本論文冒頭

いほど，そこからみいだされる需要と説明要因との関係は（それがどの程度の関係があるとみなされるにしても）それなりにより確定的なものとなるであろう。

それに関連してつけ加えておくべきことがある。パラメータ $\hat{a}_1$ が有意であるかどうかのテストは，その分散を用いておこなったわけであるが，サンプル数がすくない場合，σ_{a1} を1.96倍したものを規準に用いることは，$\hat{a}_1$ の有意性を過大に評価することになる。$\hat{a}_1$ の分散 σ_{a1} には，サンプル数Nがはいっていたことを想起されたい。そこで，サンプルが少ないときには，その自由度（サンプル数—変数の数）に応じた倍率をかける必要がある。もし自由度が50であるならば0.05の有意水準で $\hat{a}_1=0$ の可能性を否定するためには，$\sigma_{\hat{a}}$ を2.01倍して $\hat{a}_1$ と比較しなければならない。これは1.96倍と大差はない，といってよい。しかしながら，もし自由度が10であったならば，同じような条件をみたす倍率は2.23倍となる。この倍率はステューデント表から容易によみとることができるから，この表によって自由度に応じた倍率をさがし出すのがよいであろう。

構造パラメータの推定値の決定後におこなわれなければならないと思われる四つの点についての説明は以上でおわった。相関係数がかなり高い値をしめし，係数の符号や値が経済理論的に，また経験的に納得しうるものであり，系列相関が問題となりうるような値をしめさず，係数の分散が説明要因の役割りをを果さない可能性を有意に否定しうるような値をしめすならば，そのモデルをパスさせてよいであろう。しかし，もしこれらの“テスト”に合格しなかったならば，もう一度モデルの構成について考慮しなおす必要があり，データの取り方が間違っていなかったかどうか（一応データは妥当にとられているという前提でやってきたわけであるが）を検討する必要もある。予測目的のために使用するのであるから，特別にモデルについて，そのような検討は必要でないという考え方もある。相関係数と符号条件さえよければ，その他の点についてとやかく問題にしなくてもよいのではないかといった主張はしばしばみうけるところである。また現実に作成されている需要予測のためのモデルについても，結果的にはそういう考え方にたっているものが多い。その書物のなかで紹介されているモデルの大部分は，そのモデルの作成者によって現実に計算され，利用されたものであるが，その多くは上にのべた四つの点についての検討結果をしめしていない。しかし，こういうことによって，それらのモデルによる予測を否定するつもりは毛頭ない。それでも結果的には，それほど不都合ではないケースが多いと想像されるからである。ただ，エコノメトリック・モデルそのものの点検にある程度の労力を投じておくことの意味は“車両点検”とおなじようなものであることを指摘しておきたいのである。

“車両点検”についてこまかいところはやらなくとも，多くの場合，利用上こまるということはないかもしれない。しかし利用者としてはやはりきちんと点検してもらった方が，安心してその車を利用できるというものである。

系列相関とパラメータの信頼性とをみるための計算は，とくに説明変数が二つ程度までならば，それほど手数のかかるものではないから容易に実行しうるであろう。とくにパラメータの信頼性の分析は実行するのが望ましい。

ここですこしつけ加えておくことがある。さきにパラメータ $\hat{a}_1$ の分散について述べたが，そこで問題となったのは，$\hat{a}_1$ がゼロになる可能性を一定の有意水準で否定するための条件であった。ところで，このような分散 σ_{a1} を検討しなければならないならば（いいかえると，同一の母集団からサンプルが別に

本論文冒頭

抽出されたとするならば，異なった a_1 の推定値がえられたであろう.という想定をとり，それによってa_1の真の値がゼロとなる可能性を検討することが必要であるとするならば)，おなじことは相関係数についてもいえないであろうか，ということである。

この点について，もしそうした疑問が生じたとするならば，それは正当なことである。この相関係数についても，実は同じようにその分散を問題とすることができる。もし，その分散が大きければ，真の相関係数がゼロである可能性を一定の有意水準で否定できないということがおこりうるであろう。いいかえると，現実にある一定の相関係数がえられたが，それは本当の相関係数がゼロであるにもかかわらず，そのときのサンプル・データのもとで，偶然にそうした値がえられることだってありうるのである。そこで，計算された相関係数が，そのような配慮のもとでなお意味をもつためには，すくなくともどのような値でなければならないかが問題となる。もし相関係数 r のある分数の範囲のなかにゼロがふくまれるならば，相関がない可能性があるわけであるから，すくなくとも，ゼロをその範囲（いいかえると信頼限界内）にふくまないために必要な r の大きさがわからなければならない。この大きさは自由度に応じてきまってくるが，ここではこれらの点について詳しい説明は省略することにして，一般的な目安となる数値のみをしめそう。0.05の有意水準で $r=0$ の可能性を否定するためには，

（自由度）	（相関係数）
5	0.75（以上）
7	0.67（〃）
10	0.58（〃）
20	0.42（〃）
30	0.35（〃）
50	0.27（〃）

となる。これはあくまでも $r=0$ の仮説を否定するための条件であることに留意しておく必要がある。ここからもサンプル数がすくないときには，たとえ相関係数がたかくても，それほど安心しているわけにはゆかないことがわかる。

註

1) $Y_j=a_0+a_1X_j+u_j$

において，$y_j=Y_j-\overline{Y}$，$d_j=\hat{Y}_j-\overline{Y}$，

$u_j=Y_j-\hat{Y}$ とおく。ただし $\overline{Y}=$(Yの平均値)

$\hat{Y}=$(Yの計算値)とする。このとき，

$y_j=Y_j-\overline{Y}=u_j+d_j$

この二乗の和をとれば，

$\sum y_j^2=\sum u_j^2+\sum d_j^2+2\sum u_jd_j$

しかし，$x_j=X_j-\overline{X}$ とおくならば，$u_j=y_j-a_1x$，$d_j=a_0+a_1X_j-a_0-a_1\overline{X}=a_1x_j$ であるから，

$\sum u_jd_j=\sum(y_j-a_1x_j)(a_1x_j)$

$=a_1(\sum y_jx_j-a_1\sum x_j^2)$

となる。$a_1=\dfrac{\sum y_jx_j}{\sum x_j}$ であるから，括弧のなかはゼロとなる。

$\sum u_jd_j=0$

であるから，$\sum y_j^2=\sum u_j^2+\sum d_j^2$ となる。

2) いま，$X=Z$ であるとしよう。かりにパラメータの推定値が，

$Y=10+0.8X+1.5Z$

であるとしよう。しかし，$X=Z$ であるとすれば，

$Y=10+1.8X+0.5Z$

であってもよく，

$Y=10+3.5X-1.2Z$

であってもよい。Yの計算値はまったく同一であろう。このことはXとZとの間の線形重合が完全な場合の極端なケースである。

3) $u_t=\beta u_{t-1}+v_t$ の両辺に u_{t-1} をかけてその期待値をとるならば，

$E(u_t\cdot u_{t-1})=\beta E(u_{t-1}^2)+E(v_t\cdot u_{t-1})$

v_t と u_{t-1} との間には相関はないから

$E(v_t\cdot u_{t-1})=0$ である。したがって，

$\beta=E(u_t\cdot u_{t-1})/E(u_{t-1}^2)$

上の自己相関式における相関係数は，

$r^2=1-E(u_t-bu_{t-1})^2/E(u_t^2)$

この分子を展開してを代入し，$E(u_t^2)=E(u_{t-1}^2)$ を考慮するならば，

$\gamma=\beta$ をうる。

4) すでにしめしたごとく，$\hat{a}_1=\sum x_iy_i/\sum x_i^2$ であるが，$y_i=Y_i-\overline{Y}$ であり，かつ $\sum x_i\equiv0$ であることを考慮するならば，

本論文冒頭

$\hat{a}_1=\sum x_iY_i/\sum x_i^2=\sum g_iY_i$
とかきかえられる。ただし $g_i=x_i/\sum x_i^2$.
あきらかに $\sum g_i\equiv 0$ であるから，
$\hat{a}_1=\sum g_i(a_0+a_1X_i+u_i)=0+a_1\sum g_iX_i$
$+\sum g_iu_i$
しかし，
$\sum g_iX_i=\sum g_i(\overline{X}_i-\overline{X})=\sum g_ix_i=1$
であるから，
$\hat{a}_1=a_1+\sum g_iu_i$
となる。したがって，a_1 の分散をもとめることは，
$\sigma_{\hat{a}1}{}^2=E(\hat{a}_1-a)^2=E(\sum g_iu_i)^2$
をもとめることにひとしい。右辺は，
$E[\sum g_i{}^2u_i{}^2+2(\sum_{i\neq j} g_ig_ju_iu_j)]$
となるが，g_i は価格に関する既知のデータの数値であるから一定であり，また系列相関はないものとするならば，
$2E(\sum_{i\neq j} g_ig_ju_iu_j)=0$
である。$E(\sum g_i{}^2u_i{}^2)=\sum g_i{}^2E(u_i{}^2)$ $=\sigma_u{}^2\sum g_i{}^2$ であり，また $\sum g_i{}^2$ $=\sum(x_i/\sum x_i{}^2)^2=1/\sum x_i{}^2$ である。したがって，

$$\sigma\hat{a}^2=\frac{\sigma_u{}^2}{\sum x_i{}^2}$$

であることがわかる。

〔9〕 シミュレーション分析

需要予測のためのモデルが構成され，そのパラメータの推定値が計算され，それについて各種の検討をおこなって採用されるモデルが決定されたとしよう。そのあとになすべきことは，そのモデルを用いて過去における需要と説明要因との動きをしらべてみることである。モデルの説明変数に過去のデータをいれてみる。その結果，需要の計算値がえられるが，その計算値は，過去において両者の関係がモデルでしめすとおりであったならば，得られるはずの需要をしめす。それが現実における需要の動きとどのようにことなっているかを明らかにしておく必要がある。この場合，もしモデルが一本の式からなりたっているならば，この操作はきわめて単純である。

しかし，もしモデルが何本かの式から成立しているときには，まず誘導型を導きだしてから，上述した操作をおこなう必要がある。したがって，モデルが３本の方程式からなっているときには，それを内生変数について解くことがまず必要である。さきに，

（1） $D=\alpha_0+\alpha_1P+\alpha_2y$
（2） $S=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1P+\hat{\beta}_2L$
（3） $D=S$

というモデルをしめしたが，これをDについて解くと，

$$（4）\quad D=\frac{\hat{\alpha}_0\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_0\alpha_1}{\hat{\beta}_1-\hat{\alpha}_1}+\frac{\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_2}{\hat{\beta}_1-\hat{\alpha}_1}y-\frac{\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_1}{\hat{\beta}_1-\hat{\alpha}_1}L$$

となる。これに外生変数であるyとLとのデータをいれて，需要の計算値$\hat{D}$を計算する。これがどのように現実値とことなっているかを明らかにすることができる。これをシミュレーション分析という。

このシミュレーション分析の方法は，そのほかにいろいろとある。たとえば，外生変数のひとつ（たとえばL）を動かして，その影響をしらべることも，パラメータ（たとえば$\hat{\alpha}_2$）について，その標準誤差にひとしい大きさだけ動かしてその結果をみることも，その方法の重要なものである。

前者の場合，もしその外生変数が政策的に動かしうる政策変数であったならば，それは政策効果の判定を意味することになるであろう。後者の場合，これは構造変化の効果をしらべることを意味する。いうまでもなく，構造変化は，単にパラメータの変化だけでなくて，まったくあらたな方程式が加わることもありうるであろう。これらの分析は実は需要予測のときにかなり重要な意味をもってくるので，それらについては後に詳しくとりあげることにしたい。

ここでつけ加えておかなければならないこ

とは，モデルのなかに時間の遅れをともなった変数がはいっているときである。たとえば需要にたいしては需要産業部門における前期の生産水準が影響力をもつとすれば，さきのモデルは，

$$(5)\quad D_t=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 P_t+\hat{\alpha}_2 y_{t-1}$$

$$(6)\quad S_t=\hat{\beta}_0+\beta_1 P_t+\hat{\beta}_2 L_t$$

$$(7)\quad D_t=S_t$$

となるであろう。この場合でもやり方はまったくおなじである。たとえば，パラメータは２段階最小二乗法によって求めたとしよう。シミュレーションのときには，おなじくDに関して，

$$(8)\quad D_t=\frac{\hat{\alpha}_0\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_0\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}+\frac{\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_2}{\beta_1-\alpha_1}y_{t-1}-\frac{\hat{\beta}_2\hat{\alpha}_1}{\hat{\beta}_1-\hat{\alpha}_1}L_t$$

という形にといて，この式によってシミュレーションをおこなえばよいであろう。

ついでに述べておくと，かりに供給は前期の価格にたいして反応するとした場合，(６)式は，

$$(9)\quad S_t=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 P_{t-1}+\hat{\beta}_2 L_t$$

となる。この場合，モデルは(5),(9),(7)よりなるわけであるが，このパラメータの推定は，逐次最小二乗法によりおこなわれている。その理由は，さきにのべたように，外生変数と時間の遅れをともなった内生変数とはともに先決変数とよばれ，それらは内生変数とは区別されている。したがって，P_{t-1}とP_tとは，第 $t-1$ 期の価格と第 t 期の価格とをあらわしていて，ともに価格であるが，前者は先決変数で後者は通常の意味での内生変数である。そこで，パラメータの推定にあたっては，まず(9)について，最小二乗法をもちいて $\hat{\beta}$ を決定し，(9)式からえられる供給の計算値 $\hat{S}_t$（これは(7)によって $\hat{D}_t$ にひとしい）を(5)式に代入してから，最小二乗法によりパラメータの推定をおこなう。ただし，この場合，直接に(5)式が推定されるのではなく，

$$(5)\quad P_t=e_0+e_1\hat{D}_t+e_2 y_{t-1}+u_t$$

という式について e の推定値を決定したあとで，かきなおされるわけである。一般的にいって，(5),(9),(7) のような形のモデルの場合，つねに先決変数（P_{t-1}，L_t）のみを説明変数とする式からパラメータを推定し，そこでえられた被説明変数($\hat{D}_t$)はすでに((9)で)決定されているから，それがその別な式(5)のなかで“先決変数”としての位置にたつように式を構成しなおす（(5)→(5)′)，その構成しなおした式についてパラメータを推定するのである。一般的にいって，このように先決変数によって被説明変数を説明するようにモデルを構成することは，モデルを逐次代入の形式に再構成することを意味するといってよい。定差形のモデルのときには，このような形になるようにモデルを構成すると便利である。

さて，(5),(9),(7) については，このようにしてパラメータを推定したわけであるが，このモデルのように時間の遅れをともなった内生変数をふくんでいるときには，モデル自体は定差形式になる。したがって，モデルをこの順序にしたがってとくことによって，内生変数の時間的変動径路を明らかにすることができるであろう。つまり，順序は，

$$\begin{array}{l} L_0\searrow \qquad y_0\searrow L_1\searrow \qquad y_1\searrow \\ P_0\rightarrow S_1\rightarrow D_1\rightarrow P_1\rightarrow S_2\rightarrow D_2\rightarrow P_2\rightarrow\cdots\cdots \end{array}$$

となるから，はじめの P_0（これを初期条件とよぶ）と外生変数の値がわかれば，S, D, P の動きがわかる。価格Pに着目すると，

$$(10)\quad P_t=(\hat{\alpha}_0+e_1\hat{\beta}_0)+\alpha_1\hat{\beta}_1 P_{t-1}+(\alpha_1\hat{\beta}_2 L_t+e_2 y_t\alpha_1)$$

となる。かりに $L_t=L^*$，$y_{t-1}=y^*$ とするならば，

$$(10)'\quad P_t=(\alpha_0+\alpha_1\hat{\beta}_0+\alpha_1\hat{\beta}_2 L^*+\alpha_2 y)+\hat{\alpha}_1\hat{\beta}_1 P_{t-1}$$

がえられる。

またおなじようにして需要Dに着目すると

$$(11)\quad D_t=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}\hat{\alpha}_{10}+\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_1D_{t-1}+\hat{\beta}_1\alpha_2y_{t-2}+\hat{\beta}_2L_t$$

となり，L_tとy_tとがさきの場合とおなじように常数とするならば，かきかえて，

$$(11)'\quad D_t=(\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\hat{\alpha}_0+\hat{\beta}_1\alpha_2y^*+\hat{\beta}_2L^*)+\hat{\beta}_1\alpha_1D_{t-1}$$

とすることができる。この (10)，(11) または (10)′，(11)′ はモデル (9)，(7)，(5)′の誘導形である。定差形モデルにおける誘導形は，定差形モデルの解であるといってよいであろう。この誘導形がどのような変動径路をしめしてくれるかをみるために，数値別によって説明してみよう。いまパラメータと外生変数とについて，

$$\hat{\beta}_0=10,\ \hat{\beta}_1=1,\ \hat{\beta}_2=2$$
$$\hat{\alpha}_0=5,\ \hat{\alpha}_1=-1,\ \hat{\alpha}_2=0.2$$
$$y^*=100,\ L^*=1$$

という推定値を想定するならば，価格方程式は，

$$(12)\quad P_t=37-P_{t-1}$$

となり，需要方程式は，

$$(13)\quad D_t=32-D_{t-1}$$

となるであろう。初期条件を，

$$P_0=1,\ D=10$$

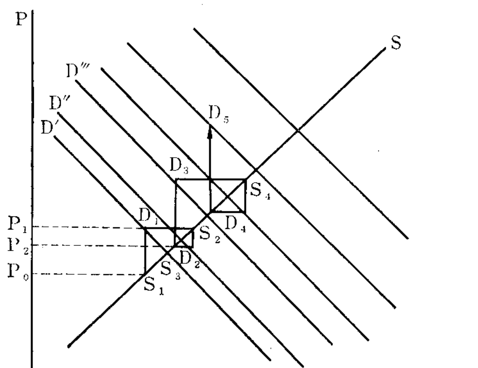
と仮定するならば，P_t と D_t との時間的変動径路は，

t	0	1	2	3	4………
P	1	36	1	36	1………
D	10	22	10	22	10………

のようになるであろう。価格と需要とは一定の循環変動をしめしていることがわかる。これは $\hat{\beta}=1$，$\alpha_1=-1$ という条件のためにそうなっているのであって，もし$\alpha_1=-0.5$であるとしたならば，需要も価格も循環しながら，しかも急速にある一定値にむかって収束してゆくことがわかるであろう。これについては読者みずからの計算にまかせることにしよう。

ところで，y_t と L_t とは，はじめのモデルでは常数ではなかったから，もしこれらが一定率で上昇してゆくとしたならば，その変化が P_t と D_t との動きに影響をおよぼすことになる。y_t の上昇速度の方が L_t のそれよりも大きければ，いいかえると，国民所得の方がたかい成長率をしめすのにたいし，この生産物における生産性の上昇はそれほど大きくはないとしたならば，価格と需要とは循環しながら，しかも，しだいに上昇してゆくであろう。いまこのことをグラフによってしめすならば，つぎのようになる。

単純に事態をしめすために生産性はまったく変化しないので，所得の成長だけがみられるものとしよう。供給曲線Sは一定であり，需要曲線Dは１期ごとに上昇してゆくであろう。P_0 に対応して S_1 がきまり，それに応じて D_1 と P_1 とがきまってくる。その P_1 にたいして S_2 がきまってくるが，それに応じて決定されてくる D_2 はもとの需要線 D' 上にはない。y_1 が y_2 へと上昇しているために，需要曲線は D' から D'' へと移動しているから，D_2 は D'' 上にくる。そこできまる P_2 と D_2 とから S_3 が決定されるが，それとひとしい D_2 はすでに所得上昇の影響をうけて上昇している需要曲線 D''' 上にきまってくるであろう。このようにしてD_4, D_5……と進行してゆく。PもDもSも明らかに循環



本論文冒頭

的に上昇しているのがわかる。

モデルの誘導形を計算することの利益は，先決変数をあたえると，他の内生変数とはかかわりなく，ただちに需要の大きさを計算することができるという点にある。いうまでもなく，単一方程式モデルの場合には誘導形はモデルそれ自体であることになる。しかし，連立方程式モデルのときには，一般的にはその解をだすことによって，誘導形を導出しなければならない。単一方程式モデルのときでも，それが一次式（対数式をふくむ）でなかったり，定義式であったりすれば，解をもとめることが必要となる。さきに (10), (10)′, (11), (11)′ についていえば，厳密にはそれらの式を D_t または P_t について解いた結果を誘導形とよぶべきであろう。しかし，そうまでやらなくとも，D_t や P_t の時間的変動径路を先決変数からもとめることができるので，そこまでの計算はやらなかったのである。連立方程式の場合，とくにタイム・ラッグをともなった内生変数が含まれているならば，最終的な解をもとめることがむずかしいケースもでてくる。(10)や(11)は，先決変数をすべて外生変数であるかのごとくにして解いた形式であるとみなしうる。この形式に解いたものも誘導形とよんでいる。式が多くふくまれる連立モデルの場合，このような形の誘導形で満足しなければならないこともでてくる。

いずれにせよ，誘導形がみちびきだされるならば，それに先決変数の値を代入してゆくことによって，過去における需要の動きと計算された需要の動きとを対比させることができる。このような対比をして著しく現実値と計算値とがことなっている個所が存在するときには，その理由をみてみることは有益である。たとえば，そのとき特別な外的事情が発生して現実値が大きく動かされたということがおこりうる。もしそうであることがわかれば，その計算値の現実値からの離脱はモデルにとって深刻ではないかもしれない。

しかし，シミュレーション分析は，このような過去を単純に追うことだけではない。タイム・ラッグをふくむモデルの場合には，初期条件をあたえなければ計算できないことはさきにしめしたとおりであるが，その初期条件をどこにとるかによって，需要の時間的径路がことなることがある。たとえば，昭和28年から38年までの半期別データによってモデルのパラメータを推定したとしよう。シミュレーションにあたって，28年上期の値を初期条件として以後の内生変数の変動を計算してゆくのが一般的である。

ところが，たとえば，さきの需要に関する誘導形

(11) $D_t=\hat{\theta}_0+\hat{\theta}_1 D_{t-1}+\hat{\theta}_2 y_{t-2}+\hat{\theta}_3 L_t$

をみるとわかるとおり，ある期の需要の決定には常に前期の需要が影響をあたえるようになっている。ここで θ はもとの式の係数をかきかえたものである。しかし，モデルにはつねに誤差がともなっているから，計算された需要 $\hat{D}$ には，この誤差がふくまれている。したがって，時間を追ってゆくにつれて，その誤差は累積してゆくものと考えてよいであろう。

そのことは，このようなモデルにおいては初期条件をどの時期にとってシミュレーションをおこなうかによって，結果がことなる可能性のあることをしめしている。そのためにもし初期条件をかえて30年上期をとってシミュレーションをおこなったときに，計算値と現実値との差のパターンに著しい変化があるならば，そのモデルによって，たとえば43年までの予測をおこなうことはむずかしいことになる。初期条件をどこにとったかによってこの予測値がかなりことなる可能性がでてくるからである。このような意味で，初期条件をかえてテストすることが必要となる。いうまでもなく，タイム・ラッグをふくんだ先決変数が存在しなければ，このような点につい

本論文冒頭

ての配慮は必要ではない。なぜならば，そのときには，誤差の累積という現象がないからである。たとえば，さきの，

（4） $D_t=\hat{\eta}_0+\hat{\eta}_1 y_t-\hat{\eta}_2 L_t$

または，

（8） $D_t=\hat{\epsilon}_0+\hat{\epsilon}_1 y_{t-1}-\hat{\epsilon}_2 L_t$

の場合には，どの時期からはじめても，その時期の需要がつぎの時期の需要に影響をおよぼすというプロセスは存在しない。ここでηとϵとは，それぞれ係数をかきかえたものである。

また，つぎのような手続きも一つのシミュレーションである。ふたたび需要に関する誘導形(11)をとって説明することにしよう。この誘導形については，数値計算をおこなうときに，便宜上，労働生産性L_tや所得水準y_tをある値（L^*, y^*）に固定して，

(11)′ $D_t=\hat{\varphi}_0+\hat{\varphi}_1 D_{t-1}$

という形のものに書きかえた。係数は前と同じく簡単化のためかきかえてある。この式は外生変数が変動しないものと想定したときに需要が時間の経過とともにどのような変動径路をたどるかをしめしてくれる。容易にわかるように，かりに，

$(11)_a$ $D_t=100-0.2D_{t-1}$

であれば，初期条件 $D_0=40$ とすると，以後のD変動径路は，

t	0	1	2	3	4	5	・・・
D	40	92	81.4	83.7	83.3	83.3	・・・

のごとくになり，83.3におちついてしまう。この$(11)_a$の場合，最初条件D_0をどのような値におこうとも，かならずこの83.3に収束してしまうであろう。このことは，この需要の動きは本質的には安定した性質をもっていることをしめしている。したがって，この安定性は外生変数である所得や生産性の変化がおこることによって，需要は変動するのでありそれがなければ，需要は一定水準におちついてしまう。そこでかりに，

$(11)_b$ $D_t=100-2D_{t-1}$

であったとすれば，初期条件として $D_0=30$ をいれると，

t	0	1	2	3	4	5・・・
D	30	40	20	60	−20	140・・・

というような変動径路がみちびきだされる。この場合には，需要は時間の経過とともに大きい振幅をもって変動してゆくことがわかる。これは一つの仮説例であるから，マイナスの値がでているが，需要がマイナスということは経済学的には意味はない。しかし，このような数値の動きは，需要にはその落ちついてゆく安定した値がないことをしめしている。現実には，Dは最低ゼロであるから，第4期のときに$D_{t-1}=0$を代入すると$D_t=100$となり，つぎのときにはふたたび需要は-100となるが，これは「最低ゼロ」の条件にしたがってマイナスとはならない。以後，100とゼロとの間を動くことになるであろう。

以上のべた例からもわかるとおり，モデルの構成およびパラメータの推定値いかんにより，需要そのものが基本的に（あるいは潜在的に）安定した性質をもっているのか，不安定な性質をもっているのかが決定される。

モデルのシミュレーション分析は，以上につきるわけではない。たとえば，政策的に操作しうる変数であるときには，その一定パーセントの変化が，需要の大きさ，および需要の時間的変動径路にどのような影響をもたらすかをしらべること，あるいは，パラメータの大きさが変化したときにあたえられる影響をしらべること，等もまたその分析の一部をなすであろう。

いずれにせよ，このような分析をおこなうことによって，構成され，かつ推定されたモデルの性質を明らかにしてゆくことができるとともに，それを将来の予測へ用いるための準備ができあがることになる。

〔10〕 予測値の算定

決定されたモデルによって予測をおこなう

本論文冒頭

ことは，それが機械的にいくつかの予測値を計算するということを意味するだけならば，それ自体単純な計算の問題でしかないから簡単である。しかし，その場合，その予測値がすじのとおった条件を前提としたものでなければ，予測値の名にあたいしないであろう。それではその条件とはいったい何であろうか。まずあたえられた需要予測モデルをとって考えてみることにする。あたえられたモデルを，

（1） $D=\hat{\nu}_0+\hat{\nu}_1 z+\hat{\nu}_2 y+u$

としよう。もっとも単純に考えて z と y という，ただ2個の外生変数によって需要が説明されているとする。この外生変数は，それぞれ金融的条件と所得水準とをあらわすものとしよう。このモデルは単一方程式モデルであるが，パラメータはかりに過去時系列データを用いて計算されたとする。

このモデルを用いて，これから5年後における需要予測をおこなおうとした場合の手続きはつぎのとおりである。

まず，金融的条件（いま貸出金利によってそれをあらわすことにしよう）z と，所得水準 y との5年後の値をきめなければならない。もしそれがきまるならば，その値を (1) に代入することによって，ただちに5年後の需要 D の予測値がきめられる。しかし，この外生変数の5年後における予測値は，それほど簡単にはきめられない。なぜならば，5年後に貸出し金利がいかなる水準になるか，また所得水準がいかなる大きさになるかは，それ自体きわめて重要で，かつ，困難な予測の対象にほかならないからである。かりに，その困難を回避するために，さらに，z や y についてのモデルを構成したとしても，結果はおなじことである。z や y の説明のために，さらに別な外生変数が追加されることになるであろう。したがって，事柄を単純にするために，z と y とについて5年後の予想値をだすものとしよう。ところが，この外生変数の5年後の値はそれほど簡単に予想することはできない。もっとも簡単な方法は，政府発表の予測値をそのまま用いることである。ただし，これは，そのような政府発表の予測値が存在するときにかぎられる。政府はその経済計画の作成にあたって，こうした予測値の計算をおこなっているから，それらを利用することは大いに労働と費用との節約をもたらす。いうまでもなく，それらの予測値がつねに妥当であるとか，当たるであろうとかというつもりはない。過去における例でみるかぎりは，それらの予測値は過小評価であったわけであるから，その意味では，それらの数値を用いた場合には結果もまた過小評価になったはずである。しかし，将来ともにそうなるであろうと信ずべき理由は別にないばかりでなく，さらに政府が発表するような変数——消費，投資，輸出，輸入，所得，鉱工業生産機械工業生産，さらにはそれらの部門別数値——の予測値を，まったく独立に計算してゆくということは容易ではない。それは資料収集力や労働投入力，計算能力（それらは費用投下能力によって決定される）といった点からみて，独立にやってゆくことはロスである。政府の各種の予測値は十分に考慮すべきことがらである。事実，このような政府の予測値を利用できるように，説明変数を選んだモデルが非常にしばしばみいだされる。

しかし，各種の外生変数について政府の予測値をつねにうまく利用できるとはかぎらない。そのときには，それらの外生変数については何らかの方法でもって，5年後の予測値ないし予想値を計算しなければならないであろう。そのためにとられる一つの方法は，その外生変数の時系列データを用いて，単純にそれを5年先へのばしてゆくことである。この方法は，それほど信頼のおける方法ではないが，“いままでの動きがもし将来まで持続するものとするならば”という条件のもとでえられる予想値であると考えるならば，それ

本論文冒頭

ほどおかしなものでもない。もし，その外生変数（たとえばzやy）が平均的にある一定の大きさAで低下してきたとか，あるいは一定水準にとどまっているとか，ある一定率gで増加してきたとか――そういった事実がみとめられるならば，そのときには，その大きさAや一定率gを用いて将来までひきのばしてゆくことになる。yが所得であり，それが過去10年間において平均9パーセントで上昇してきたとするならば，そのまま5年さきまで9パーセントで上昇するものとみなすわけである。あるいはもしyがその財の輸出部分を説明する世界貿易量をあらわしているならば，それの過去における平均増加率6パーセントを，そのまま5年先までのばしてゆく。これは後に説明する時系列の単純な引きのばしの例である。もし，それでは不十分であるとみられるときには，そのyに関する各種の情報をあつめることによって，5年先の値を予想する方法もある。たとえば，類似の事象をとりあげることによって，将来を類推によって予想することもできるであろう。したがって，この外生変数の予測は，

（i） そのためのモデルをさらに構成するか（この場合には，そこでの外生変数について，同じく予測の問題が生じてくるであろう。）

（ii） その時系列を分析して延長するか

（iii） 各種の情報をあつめることによって予想値をだすか

のいずれか，もしくはその全部を用いておこなうことになるであろう。政府（または他の機関）の予測値は，それ自体，モデルを用いて外生変数の予測をおこなって導出されたものであるから，結局において，上のいずれかに帰着することになる。

ここで注意すべき点は，予測値は決してはじめから一つしかでないという性質のものではないということである。元来，外生変数の予測を確定的におこなうことはできないはずである以上，外生変数の予測値それ自体がいくつかの可能な値をとりうるであろう。もし外生変数のなかに政策的に操作しうるようなものがあるならば，それに政策的にとりうるいくつかの値を代入する。それらの政策効果はそれぞれことなるから，それに対応していくつかの予測値がえられることになる。いま需要が消費者の平均所得と販売促進費との関係できまってくるものとし，モデルは半期モデルであるとし，需要にたいして販売促進費は2期間（12ヵ月）のラッグをもち，所得は1期（6ヵ月）前と2期前の所得が影響するが，2期前の所得のあたえる効果は1期前の所得のあたえる効果の約60%である。このようなモデルがえられたときに，販売促進費のあたえる影響は，他の要因が変化しないものとして計算すればよい。

そこで，$y_{t-1}=y_{t-2}=y_{t-3}$ とであるとして

$$D_t-D_{t-1}=5.2(S_{t-2}-S_{t-3})$$

がえられたとしよう。

ここで

$$D_t-D_{t-1}\equiv\varDelta D_t,\quad S_{t-2}-S_{t-3}\equiv\varDelta S_{t-2}$$

とおくことにより，

$$5.2=\frac{\varDelta D_t}{\varDelta S_{t-2}}\qquad t=1,2,3\cdots\cdots$$

がえられる。すなわち，販売促進費の一定量の増加にともなう需要の増加は，その5倍ぐらいになることがわかる。もし販売促進費を毎期一定ずつふやしてゆくならば，それによって需要がどのぐらい上昇してゆくかがわかってくる。この販売促進費というものは，いうまでもなく，企業にとっては一種の政策変数である。この政策変数の値をかえることによって，需要の予想される値がかわってくるであろう。その政策変数の値について，E_1, E_2, ……E_5という5種類の方法が考えられるとする。それに応じて $d_1, d_2, \cdots\cdots d_5$ ということになった結果がえられるとするならば，販売促進費について，

1 $(E_1 \;\; d_1)$

本論文冒頭

2　$(E\ \ _2d_2)$

………………

5　$(E_5\ \ d_5)$

という組合せができるであろう。また，おなじことは平均所得yについてもいえる。消費者の平均所得が5年後にどのような水準に達するかは，人口の動きと総所得の動きとの双方からきまってくるが，人口の方はある程度まで正確に予測することができても，総所得の方はかならずしも容易ではない。もし，その消費者の多くが都市生活者であるとするならば，都市人口の大きさが問題となるが，それでも総所得よりは推測しやすいであろう。総所得はある程度までは政府の政策にも依存しており，その他の多くの要因によって影響される。したがって，これについても，いくつかの選択可能な予測値の組合せが考えられるであろう。販売促進費を一定としたときの平均所得のこのような組合せが B_1, B_2, B_3, B_4 の4種類あったとすれば，それに応じて需要はことなる。

いまそれを d_1', d_2', d_3', d_4' とすると，

1　$(B_1\ \ d_1')$

2　$(B_2\ \ d_2')$

3　$(B_3\ \ d_3')$

4　$(B_4\ \ d_4')$

という組合せがえられる。そこで販売促進費と平均所得との各種の予測値が，それぞれ5組と4組えられるわけであるから，厳密にはさらにそれぞれの組合せをとると20組の予測値がえられることになるであろう。この組合せがすべて feasible であるとはかぎらない。実現可能なものとして平均所得については2種類，販売促進費については2種類を選び，全体として4種類をとったとすると，需要予測値は外生変数Sとyとの4個の組合せに対応して4個えられることになる。この4個の需要予測値は，それぞれ“対等の権利”をもっているわけであるから，そのなかのいずれを選ぶかは，その企業がどのような販売政策をとろうとするのか，また将来における消費者の平均所得がどの程度伸びるとみるのかに依存する。

このうち後者についてはある程度まで選ぶことができたとしても，前者はその企業の政策にも依存するものであるから，その選択は簡単ではない。それは企業における他の計画との関連でもって決定されるべき性質をもっている。したがって，この場合，需要予測値を計算するということは，たとえば，平均所得がある大きさで上昇するときに，販売政策をどのようにしたら，どの程度の需要が期待できるかということについてのメニューを提示することにひとしい。そのメニューのなかから，どのような予測値を採用するかは，もはや客観的にはきめがたいことになる。究極的には，この決定はその企業の責任ある人びとの決断にゆだねられることになるであろう。

需要予測値の決定にあたっての以上の問題は，販売政策に視点をあわせるときに，それは政策変更についてのシミュレーション分析とみることができる。需要予測にあたっては，このような問題があるわけであるが，一般に外生変数にたいして過去のトレンドを，そのまま伸ばした数値を代入するとき得られる予測値は単純予測値とよばれる。このような予測値を計算することを単純予測とよぶ。

需要予測値の評価にあたって注意すべき点は，モデルによる予測値にはつねに誤差がともなうということである。このようにいったからといって，このことを“モデルを用いて予測してもあたらない”という意味に解してはならない。いま問題にしているのは予測値の導出と，その導出された結果にたいする統計的な評価手続きである。

そこで，つぎの問題は予測誤差についてである。予測値は先決変数に一定の値を代入するならば，それに対応したある特定値としてあたえられる。しかし，その予測値はつねに

本論文冒頭

一定の誤差範囲をもっているから，その予測値の誤差がどの程度の分散をしめすかをしらべておく必要があるであろう。標準誤差は回帰方程式から計算された計算値と，現実の観測値とのあいだの誤差の平均値をあらわすものであるから，もし将来ともにそのような誤差を見込むとするならば，予測値の前後の範囲に（たとえば$\pm 2\sigma_u$の範囲に）ほぼ95パーセントの確率でサンプルがはいることになる。

しかし，はじめに回帰方程式を計算するときの標本には，標本誤差があったはずであるから，パラメータ推定のときとおなじく，その回帰方程式にもとづいて計算された予測値そのものは，その影響をうけているはずである。予測値については，そのような意味における誤差をしらなければならない。

いま需要に関する回帰方程式が，所得水準yを説明変数として，

$$D=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1 y$$

のごとくあらわされるものとしよう。このパラメータの推定に用いられたDとyとのデータは $D_1, D_2, \cdots\cdots D_{20}$ および $y_1, y_2 \cdots\cdots y_{20}$であるとしよう。そこで，このモデルを用いて10期後の予測値 $\hat{D}_{30}$ をもとめることとし，そのために y_{30} を選定して代入し，$\hat{D}_{30}$ をもとめる。そこで，さきにのべたような意味における予測値 $\hat{D}_{30}$ の分散であるが，一般的に表現すると，それは，

$$\text{予測値の分数}\ \sigma_{\hat{D}}{}^2= \sigma_u{}^2\left(\frac{1}{n}+\frac{(\bar{y}-y_e)^2}{\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}-y_i)^2}\right)$$

とあらわされる。ここで，

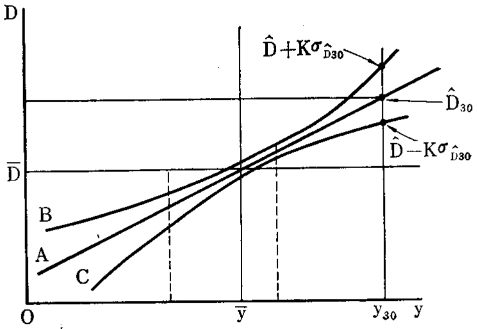
y_e＝予測される時点における先決変数 yの値〔上の例では y_{30}〕

$$\bar{y}=\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)$$

〔上の例では $y_n=y_{20}$〕

n＝サンプル数〔上の例では20個〕

である。したがって，この予測値$\hat{D}$の分散は，予測される時点における所得 y_e が，その平均値 $\bar{y}$ よりはなれていればいるほど，その分散が大きくなることがわかる。また，所得yの分散が大きいときには，予測値の分散は小さくなることもわかる。いま，このことをグラフにしめすと，つぎのようになる。$\hat{D}+K\sigma_{\hat{D}}$の$B$曲線と$\overline{D}-K\sigma_{\hat{D}}$の$C$曲線によってかこまれた範囲が，予測値$\hat{D}$の許容区間と呼ばれるが，これは y_{30} が$\bar{y}$よりも遠くはなれればはなれるほど広くなる。この区間は設



定されるKの値によって調整されることはいうまでもない。たとえば，予測値$\hat{D}$の一定パーセントが，どのような確率でもって，この範囲にふくまれるかはKの大きさに依存する。したがって，もし $K=2.75$ とすれば，可能性のある数多くの予測値 $\hat{D}_{30}$ のうち，その95パーセントがこの範囲にふくまれることになり，もし，$K=1.62$とすれば，予測値の75パーセントがこの範囲にふくまれることになる。通常は，この75パーセントの確率でもって十分であろう。多くの場合，サンプル数は20個前後であるから，大雑把には予測値$\hat{D}$に $\pm 1.6\sigma_{\hat{D}}$（正しくは $S_{\hat{D}}$ とかくべきであろう）の許容区間を設定すればよいであろう。そうすれば，可能性のある予測値のうち，その75パーセントがこの範囲にふくまれることになる。

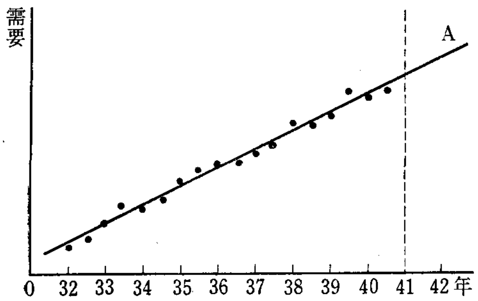
本論文冒頭

〔補論〕 傾向分析

1. 時間を説明変数としたモデル

この分析方法は過去における需要の動きと時間を追ってしらべてゆくことから出発する。しばしば時系列分析などともいわれるがこの方法による予測は単純な経験法則の適用ということができるであろう。

いまある財にたいする需要を半期別にしらべてみたところが，下図のような点が，画かれたとする。これらの点をむすびつける一本の線を図のように画くときに，そのA線は過去における需要の時間的な変化を傾向的に表現したものとなる。これを画くには相関分析



のときのように，需要Dと時間tとを相関させればよい。すなわち，

$$D=\alpha_0+\alpha_1 t+u \quad \cdots\cdots(1)$$

とおいて，最小二乗法によって $\hat{\alpha}_0$ と $\hat{\alpha}_1$ を定めればよいであろう。ただし，この場合，データが32年上期からそろっているから，時間変数tについては，この32年上期を1とおき，同年下期を2とおき33年上期を3という具合においてゆけばよい。したがって，時間変数tは $1,2,3,4\cdots\cdots,18$ という順序と大きさの資料となる。

いうまでもなく，これについて相関係数，標準誤差等，計量経済学的なモデル分析のときに計算されたものはすべて計算される。

場合によっては，

$$\log D=\alpha_0+\alpha_1 t+u \quad \cdots\cdots(2)$$

という形のものが用いられる。これはデータを半対数グラフに画いたときにほぼ直線になるようなケースに用いられる。このような半対数式を用いた場合，いわゆる需要成長率を容易にしることができる。いま $t=1$ のときの需要 $D_1=50$，$t=2$ のときの需要 $D_2=55$ であったとしよう。単位期間あたりの需要の増加分は $D_2-D_1=5$ である。したがって，

需要の成長率をgとおくと，

$$g=\frac{D_2-D_1}{D_1}=\frac{5}{50}=0.1$$

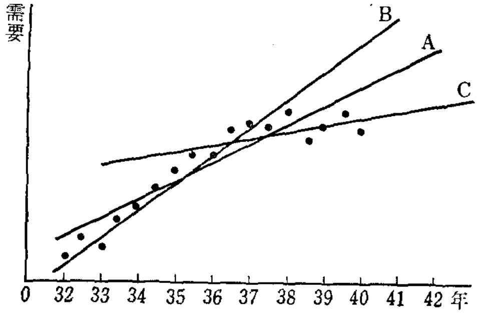
となる。つまり，10％の成長率ということになる。ところが，(2) の式を用いるときには

$$g=\alpha_1 \quad \cdots\cdots(3)$$

であることがしられているから，時間変数tにかかる係数 α_1 が，成長率をあらわすことになり，きわめて便利である。傾向線の画き方はこれがオーソドックスであるが，これが唯一のやり方ではない。たとえば，最初の点と終りの点とを結んでしまうという簡単なやり方もある。これはある意味で不正確であるが，最初の点と終りの点とがいちじるしく片寄っていないときには，一時しのぎの方法として簡便である。

このようにして引かれた傾向線は，(あまりひどく遠い将来ではない) 将来の方向を見定めるのに用いられる。たとえば，第1図において，43年の値をそのA線上にみいだすということになる。しかし，これは散在する点がほとんど直線上にならんでいるとみなしうるときにかぎられることは容易にわかるであろう。もしそうでなければ，この単純な外挿はほとんど意味をなさなくなる。たとえば，次頁の図のような場合，一本の直線Aをあてはめるとしてもそれは予測用としては用いられない。その理由は簡単である。このデータは36年までと，それ以後とにおいて点のちらばりに転型が生じているからである。このような場合，むしろ36年までのデータにはB線

本論文冒頭



があてはまり，37年以後のデータにはC線があてはまることになる。したがって，全体としてはA線があてはまっていたとしても，需要の動きには36年までと，それ以後とで屈折がみいだされるために，予測にはC線を用いる方がよいことになる。

ところが，データがつけ加えられるたびにこの線の傾斜に顕著な変動がつぎつぎとみいだされるとき，このような直線のあてはめはまったく適さないであろう。なぜならば，そのような直線による表現はきわめて不安定なものとなるからである。そのようなときには別の方法をとらなければならない。ただ，その変動がある種の規則性をもっているならばそこから，何らかの一般的な傾向をよみとることもできる。こうした時間変数を用いる式は，一般的には需要を時間の関数とみなしていることとなるから，たとえば，時間の経過とともに需要が加速度的に増加(または減少)しているようなときに，

$$D=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+w \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

$$D=\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 e^{\beta t}+v \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

というような形の式を用いることもできるであろう。右辺の第3項は経済学的には何らの意味づけもできないから，これは主としてその直線のフィットをよくするためにのみ用いられたものである。このようなフィットをよくするための式の構成は，それが経済学的な意味づけがまったくないところから，たとえ相関がよくても，予測用として用いるときにどうしても一抹の不安が残ることになるのはやむをえない。時系列データを用いて，時間変数のみ用いて式をたてようとすると，そうした経済学的解釈という側面を犠牲にしてしまうことになるのが欠点である。したがって(3)や(4)のような複雑な形のものはあまり適当であるとはいえない。

2. 成長曲線

ところで次ぎの図にしめされたようなグラフが画かれるとき，しばしばそれにゆるいS字形のカーブがあてはめられる。それはあたかも，その対象となっている生産物の需要が全体として，ある生物学的な一つの傾向をもっていると想定することにひとしい。いいかえると，生産物の誕生からしばらくの間は，それに対する需要はゆるやかに上昇し，しだいにその上昇の速度をはやめてゆくが，やがて需要はその成長の速度をおとしてゆき，ついにはその上昇は停止する。こうした想定は需要もまた，生物とおなじ運命をたどってゆく，すなわち，需要は，誕生→急速な成長→成長の鈍化→衰退→死滅という一つの“流転”をしめすということを意味している。

このような想定は，耐久消費財についてのみならず，たとえ非耐久財であっても（かつての「フラフープ」などのような非耐久的な玩具のケース）妥当する場合がありうる。どのような財の需要の場合にも，期間を十分に長くとるならば，多かれ少なかれ，このような“生命の循環”がみいだされるであろうから，このような想定を基本的な意味において否定することはむずかしい。成長曲線をあてはめるということは，いわばその財にたいする需要の絶頂点をみきわめようということにひとしい。ここでは，このような成長曲線をあらわすものとして，代表的な二つのモデルをとりあげるこにしたい。

〔1〕 ロジスティック曲線

この曲線は需要の長期的な傾向をしるための一つの方法として用いることができる。こ

本論文冒頭

れは，

（1）　$\frac{1}{D}=\alpha_0+\alpha_1A^t$

という式によって定義され，α_0, α_1, Aがパラメータである。需要Dが逆数で定義されていることをのぞくならば，それは一つの指数曲線である。この式のパラメータの計算は，いわゆる相関分析のときとはことなり，きわめて単純なやり方でもとめることができる。

（i）　まず，需要Dについてのデータを三つのひとしい数のグループにわける。

（ii）　つぎに，それぞれのグループごとに需要の逆数，つまり $1/D$ の合計をとる。その合計をSでしめすこととし，たとえば第1のグループの合計は $S_1=19,507$，第2のグループの合計は $S_2=3,632$，第3のグループの合計は $S_3=1,480$ であるとしよう。

（iii）　それら合計の間の差をとる。その差をdとすると，いまの場合，それは，

（2）　$d_1=S_2-S_1=-15,875$

（3）　$d_2=S_3-S_2=-2,152$

となる。

（iv）　そこで $A^n=d_2/d_1$ とおく。ここでグループのなかのサンプル数を11とするならば，$A^{11}=2,152/15,875$ となり，したがって

$$A=n\sqrt{A^n}=11\sqrt{A^{11}}=0.8339$$

となる。これをつぎの式に代入すると，

（5）　$\alpha_0=\frac{1}{n}\left(S_1-\frac{d_1}{A^n-1}\right)=103.9$

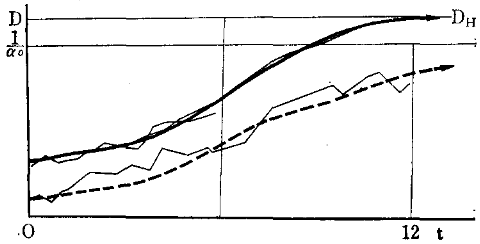
（6）　$\alpha_1=\frac{d_1A}{(A^n-1)^2}=3,529.1$

（v）　それゆえ，

（7）　$\frac{1}{D}=103.9+3,529.1(0.8339)^t$

となる。$t=0,1,2,\cdots\cdots, T$を代入すれば，それに応じて $D_0, D_1, D_2, \cdots\cdots D_T$ が上の式からもとめられる。

この曲線は，時間の経過とともに需要が増加してゆくが，一定時点以降において増加率が減少してゆくような傾向をもつケースに適当している。たとえば，つぎの如き図にしめされるようなケースがそれである。家庭電気器具などのような場合，需要は最初しだいにその増加のテムポを早めてゆくが，ある時期をこえると，その増加テムポはしだいに低下



してゆくケースが多い。（v）から明らかなように，tが大きくなるにつれて$(0.8339)^t\to0$となるから，極限においては，

$$\frac{1}{D}=103.9=\alpha_0$$

となる。ここから，需要Dの極限値すなわち上昇限界水準 D_H

$$D_H=\frac{1}{\alpha_0}=963$$

であることがわかるであろう。これは需要の上昇限界をしめすものといえる。

ここで注意すべき点は，この上昇限界水準はパラメータの推定に用いられるデータに依存して決定されているということである。したがって，データが数個追加されることによって，この上昇限界がたちまち上昇（または低下）してしまうことは容易におこりうるであろう。すこし極端に表現すれば，このことは，ロジスティック曲線によって計算された需要の上昇限界水準はかなり“気まぐれ”なものであることをしめしている。

そのような意味から，この上昇限界が長期的な傾向の予測として妥当なものであるのかどうかは，最近における需要の低下傾向が，どのような要因によっておこっているものであるかについての分析をまって，はじめてあきらかになしうるものといわなければならない。もし，そのような検討によって合理的な

本論文冒頭

説明と裏付けがえられないならば，その上昇限界水準というものを性急にうけいれることはできなくなるであろう。

しかしながら，ロジスティック曲線は，このような目的にのみ用いられるわけではない。たとえば，つぎのような例を考えよう。いま何らかの方法によって，その耐久消費財にたいする需要の飽和点がわかったとしよう。この需要を D_H とおくとき，現実の需要 D は，この飽和点 D_H にむかってロジスティック曲線を画いて接近してゆくものとする。

そのとき，既存のデータを二つのグループ S_1 と S_2 にわけて合計するならば，$d_1=S_2-S_1$ であるから，

$$\hat{\alpha}_0=\frac{1}{D_H}=\frac{1}{n}\left(S_1-\frac{d_1}{A^n-1}\right)$$

から，A^n をもとめることができる。したがって，$\widehat{A}$がわかる。さらにそれらを下の式，

$$\alpha_1=\frac{d_1A}{(A^n-1)^2}$$

に代入して $\hat{\alpha}_2$ がもとめられるであろう。それだけの計算ができるならば，そこから，

$$\frac{1}{D}=\hat{\alpha}_0+\hat{\alpha}_1(A)^t$$

という式を得ることができる。これは，需要の飽和点がある方法によって予想された場合に，その飽和水準にむかって需要がどのような形で接近してゆくかについての一つの想定された径路をあたえてくれるであろう。このような径路の推定は，たとえば，外国における事例にしたがい，国民消費水準や人口その他の指標を用いて推定することができるような場合，ひとつの有益な参考となるであろう。

このロジスティック曲線のあてはめについて，さらにもう一つの考慮は，その耐久消費財の置換需要をこれに加味することである。その財にたいする需要が飽和点に近づいてきたころから，最初のころに購入された財が廃棄され，新らしい製品に買い換えられるということは十分にありうるであろう。これがいつあらわれるかは，その財の耐久年限に依存することになるであろうが，それはかならずしも物理的な意味における耐久年限であるとはかぎらない。むしろ品質向上，性能の改善などによって影響をうけるところの経済的な意味における耐久年限というものになるであろう。このような置換需要部分がさきのロジスティック曲線によってしめされる数量に上積みされると解する方がよいときもあれば，それらをふくめての数量が曲線によってしめされていると解する方がよいときもあるであろうが，それらの点については，具体的なケースに応じて決定すべきであろう。

〔2〕 ゴンペルツ曲線

この曲線をあらわす式は，

（8） $\log D=\alpha_0+\alpha_1A^t$

とあらわされる。ロジスティック曲線の場合とおなじように，十分な時間の経過のあとに到達する需要の飽和点 D_H は，

$$\alpha_0=\log D_H \text{ または } D_H=e^{\alpha 0}$$

によってしめされる。(8) 式の第２項の $\alpha_1\cdot A^t$ は，あたえられた時点における現実の需要が，その飽和水準にどの程度達していないかをしめす。これもまた需要の傾向を曲線によってあらわすということを目的としているが，ロジスティック曲線とは，右辺の需要が対数でしめされている点でことなる。

この曲線をあてはめる場合の計算手続きはロジスティック曲線の場合とよく似ている。

（i） 需要データは三等分してすべて対数をとる。

（ii） その合計をグループごとに計算する。いま合計を S であらわし，第１グループの合計 $S_1=20.22$，第２グループについて $S_2=27.52$，第３グループについて $S_3=31.65$ であるとしよう。

（iii） つぎに，それらの間の差額をとる。その差を d とすると，

$$d_1=S_2-S_1=7.30$$

本論文冒頭

$$d_2=S_3-S_2=4.13$$

となる。

(iv) そこで $A^n=d_2/d_1$ とおく。ここで n は一つのグループのなかのサンプルの数をあらわし，いまの場合それは11とする。$A^n=4.13/7.30=0.566$，したがって，

$$A=\sqrt[11]{0.566}=0.949$$

となる。さらに，これを(5)とおなじ式に代入すると，

$$\alpha_0=\frac{1}{n}\left(S_1-\frac{d_1}{A^n-1}\right)=3.366$$

となり，(6)に代入すると，

$$\alpha_1=\frac{d_1(A-1)}{(A^n-1)^2}=-1.953$$

となる。

(v) それゆえ，あたえられたデータのもとでのゴンペルツ曲線は，

$$\log D=3.366-1.953(0.949^t)$$

となる。ここでも需要は時間 t の関数としてもとめられる。

この曲線もまた時間の経過とともに，第2項がゼロに接近してゆくので，需要の飽和水準 D_H は，

$$D_H=e^{3.366}\fallingdotseq 2,324$$

と計算することができる。時間とともに需要が変動してゆくプロセスはロジスティック曲線の場合とおなじような形をしめすが，その需要の上昇限界水準はロジスティック曲線の場合に比較して高い水準になる。（この二つの曲線のパラメータの推定に用いた原データはまったく同一のものである)。

ここでは原データそのものがどのようなものであるかは，かならずしも問題ではないので，ここにそれをあげることはしないが，同一のデータについて計算された需要水準の上昇限界水準がロジスティック曲線をあてはめたときには963であり，ゴンペルツ曲線をあてはめた場合には2,324になるという計算結果は，このような曲線のあてはめによって得られた上昇限界水準については，各種条件の周到な分析によらなければ，いずれが妥当であるとも判定することができないということをしめしている。いいかえると，機械的な曲線のあてはめは，それが現実のデータにいかに適合していても，そのままではかならずしも将来の需要水準の予測に，それを用いることはできないということがわかるであろう。

〔参考文献〕

1. Allen, R. G. D., *Statistics for Economists*, London, Hutchinson, 1951 (大石泰彦訳)
2. Beach, E. F., *Economic Models: An Exposition*, New York, John Wiley & Sons, Inc., 1957.
3. Bratt, E. C., *Business Forecasting*, New York, McGraw-Hill, 1958.
4. Chow, G. C., *Demand for Automobiles in The United States: A Study in Consumer Durables*, North Holland Co., 1957.
5. 福地崇生，『計量経済学入門』，東洋経済新報社，1962.
6. 伊大地良太郎，『企業の需要予測』，丸善株式会社，1965.
7. Johnston, J., *Econometric Methods*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1960 (竹内啓訳)
8. Klein, L. R., *A Textbook of Econometrics*, New York, Reterson & Co., 1953 (中村貢訳)
9. Klein, L. R., *An Introduction to Econometrics*, N. J., Prentice-Hall Inc., 1962.
10. 松島康夫『需要予測の技術』日刊工業新聞社，1963.
11. 松島康夫『需要予測の分析と予測』日刊工業新聞社，1962.
12. Mills, F. C., *Statistical Methods*, New York, Henry Holt & Co., the 3rd edition, 1955.
13. Mood, A. M., *Introduction to the Theory of Statistics*, New York, McGraw-Hill Book Co., 1950.
14. 森敬，「日本経済のシミュレーション分析」，森嶋通夫，篠原三代平，内田忠夫編『新らしい経済分析』創文社，1960.
15. 森田優三，『統計学概論』日本評論社，1956.
16. 河野豊弘，『需要予測の序論的研究』，『学習

本論文冒頭

院大学経済論集』第2巻第1号，1965.

17. Spencer, M. H., Clark, C. G. and Hoguet, P. W., *Business and Economic Forecasting: An Econometric Approach*, Illinois, Richard D. Irwin, Inc., 1961.
18. Suits, D. B., "*Forecasting and Analysis with an Econometric Model*," American Economic Review, Mar., 1962, pp. 104～132.
19. Suits, D. B., *Statistics: An Introduction to Quantitative Economic Research*, New York, 1963.
20. Theil, H., *Economic Forecasts and Policy*, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1961,（岡本哲治訳）
21. 内田忠夫，「所得分析と予測」，安井琢磨，熊谷尚夫，西山千明編『近代経済学講義』創文社，1964.
22. 横山保，松田武彦『需要予測の実体』東洋経済新報社，1962.

本論文冒頭