非線形計画法における双対性

—— Lagrange 乗数および双対問題の経済学的意味 ——

小 山 昭 雄

1 序

線形計画法は，1940年代の後半には，すでにその理論的基礎は確立されていたが，それの一般化ともみられる非線形計画法の研究の進展は，1951年の Kuhn-Tucker の有名な論文 "Non-linear programming"(文献〔1〕)まで待たなくてはならなかった。その後，この論文を契機として非線形計画問題のもつ理論的構造が次第に明らかになってきたのである。

経済学上の問題で条件付極値問題として定式化されるものは少くない。制約条件が等式で与えられる問題は，**ラグランジュ乗数法**が有力な解法を与えることは周知の通りであり，制約条件が不等式であっても，それらが1次式で目的関数もまた1次式であれば，**線形計画法**によって解を求めることができる。制約条件，目的関数のなかに非線形の関数が含まれ，しかも，制約条件が不等式である場合を**非線形計画問題**とよぶが，これはラグランジュ乗数法と線形計画法の双方の一般化とみなすことができる。

線形計画法においては，主問題と双対問題の間に見られる美しい双対性が，理論面においても計算技術面においても，線形計画法の内容を極めて豊かなものにしていることはよく知られているが，この双対性のもつ経済学的意味は，この方法を経済学上の問題に適用するときに，きわめて重要である。ラグランジュ乗数法でも，双対問題を考えることができるが，これは線形計画法における双対性ほどには知られていないようである。しかし，経済学上の条件付極値問題にラグランジュ乗数法を適用した場合，Lagrange 乗数および双対問題の経済学的意味を考えることは興味深い。

非線形計画法はラグランジュ乗数法および線形計画法を特殊な場合として含む。したがって，非線形計画法における双対問題を定式化し，その中に含まれる Lagrange 乗数のもつ意味と，双対問題のもつ経済学的意味を考えることは，経済学徒にとっては興味もあることだし，また，重要なことであろう。これはまた，当然のこととして，線形計画法における双対問題の解釈，ラグランジュ乗数法における双対問題の解釈を特殊の場合として含むはずである。

筆者は，かつて，線形計画問題における双対問題の（筆者のとる）解釈を述べた（文献〔8〕，〔9〕）また，同じ立場から，ラグランジュ乗数法の双対問題のもつ意味を考えた（文献〔10〕)。ここでは，はじめに非線形計画法における主要な結果を整理した上で，Lagrange 乗数の意味付けをおこない，さらに，双対問題に対して，その経済学的意味を考えてみたい。

2　非線形計画問題

われわれが考えるのは，つぎの問題である。

（問題Ⅰ）　条件

$g_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m,\ \boldsymbol{x} \geqq 0$

のもとで

$max f(\boldsymbol{x})$

ならしめる $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

ここでは最大問題の形で問題を定式化したが，目的関数の符号を変えれば最大問題はいつでも最小問題に転化できるから，最大問題でも最小問題でも，本質的に変りはない。

非線形計画法では取扱う関数を凸関数あるいは凹関数に限定する場合が多い。また，重要な諸定理は，いわゆる鞍点問題と深い関りをもつ。そこで，まず，準備として凸関数，凹関数について述べ，次いで鞍点問題に触れ，そのあとで Kuhn-Tucker の定理を述べる。そして最後に，Lagrange 乗数と双対性のもつ意味について考察する。

3　凸関数，凹関数

n 次元空間の凸集合Ω上で定義された関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，任意の$\boldsymbol{x}^1$，$\boldsymbol{x}^2 \in \Omega$，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ に対して $f(\alpha \boldsymbol{x}^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1) \leqq \alpha f(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^1)$ が成り立つとき，Ω上で**凸関数**である，あるいは**凸**である，という。逆向きの不等式が成り立つならば**凹関数**である，あるいは**凹**である，という。$0<\alpha<1$ のとき強い不等号$<$（あるいは$>$）が成り立つならば，$f(\boldsymbol{x})$ は**強い意味で凸（あるいは凹）**であるという。$f(\boldsymbol{x})$ が凸（あるいは凹）ならば，$-f(\boldsymbol{x})$ は凹（あるいは凸）である。

定理 1　$f(\boldsymbol{x})$，$f_2(\boldsymbol{x})$，$\cdots\cdots f_m(\boldsymbol{x})$ がいずれも凸集合Ω上で凸関数ならば

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x})$$

もΩ上で凸関数である。

証明　$0 \leqq \alpha \leqq 1$ に対して

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^2+(1+\alpha)\boldsymbol{x}^1)=\sum_{i=1}^{m} f_i(\alpha \boldsymbol{x}^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1)$$

$$\leqq \sum_{i=1}^{m}(\alpha f_i(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)f_i(\boldsymbol{x}^1))$$

$$=\alpha \sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)\sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x}^1)$$

$$=\alpha f(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^1) \quad \text{（証明終）}$$

定理 1 系　凹関数の和は凹関数である。

凸関数の定義のなかには関数の連続性は仮定されていないが，$f(\boldsymbol{x})$ が開凸領域内で凸であれば，そこで連続であることが示される。

定理 2　凸集合Ω上で定義された凸関数 $f(\boldsymbol{x})$ がΩの内点で連続な偏導関数をもてば，Ω の任意の内点 $\boldsymbol{x}^1$ と任意の $\boldsymbol{x}^2 \in \Omega$ に対して

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j{}^2-x_j{}^1)\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^1)}{\partial x_j} \leqq f(\boldsymbol{x}^2)-f(\boldsymbol{x}^1)$$

が成立する。ここで $x_j{}^2$，$x_j{}^1$ は $\boldsymbol{x}^2$，$\boldsymbol{x}^1$ の第 j 成分である。$f(\boldsymbol{x})$ がΩ上の凹関数であれば，同様の仮定のもとで逆向きの不等式が成立する。

証明　$f(\boldsymbol{x})$ の凸性から

$$f(\alpha \boldsymbol{x}^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1) \leqq \alpha f(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^1)$$

これを変形して

$$\frac{f(\boldsymbol{x}^1+\alpha(\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1))-f(\boldsymbol{x}^1)}{\alpha} \leqq f(\boldsymbol{x}^2)-f(\boldsymbol{x}^1)$$

左辺に平均値の定理を使うと

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j{}^2-x_j{}^1)\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^1+\alpha\theta(\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^1))}{\partial x_j}$$

$$\leqq f(\boldsymbol{x}^2)-f(\boldsymbol{x}^1)$$

ここで $\alpha \to 0$ とすると

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j{}^2-x_j{}^1)\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^1)}{\partial x_j} \leqq f(\boldsymbol{x}^2)-f(\boldsymbol{x}^1)$$

同様にして，凹関数の場合は逆向きの不等式がえられる。（証明終）

定理 3　$f(\boldsymbol{x})$ が n 次元空間全体で凸関数のときは，任意の b に対して，

$f(\boldsymbol{x}) \leqq b$，$\boldsymbol{x} \geqq 0$

本論文冒頭

をみたす $\boldsymbol{x}$ の集合は凸集合である。

証明 $f(\boldsymbol{x}^1)\leqq b$, $f(\boldsymbol{x}^2)\leqq b$, $\boldsymbol{x}^1\geqq 0$, $\boldsymbol{x}^2\geqq 0$ であれば，$0\leqq\alpha\leqq 1$ に対して

$$f(\alpha\boldsymbol{x}^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1)\leqq\alpha f(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^1)\leqq\alpha b+(1-\alpha)b=b$$

また，$\alpha\boldsymbol{x}^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1\geqq 0$ は明らかである。（証明終）

定理3系 $f(\boldsymbol{x})$ が n 次元空間全体で凹関数であれば

$$f(\boldsymbol{x})\geqq b,\ \boldsymbol{x}\geqq 0$$

をみたす $\boldsymbol{x}$ の集合は凸集合である。

凸（凹）関数が非線形計画法において重要な意味をもつのは，つぎの定理による。

定理4 $f(\boldsymbol{x})$ を閉凸集合 Ω 上の凸関数とすれば，Ω における $f(\boldsymbol{x})$ の極小値（局所的最小値）は最小値（大域的最小値）である。

証明 $f(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}^0$ において極小値をとり，$\bar{\boldsymbol{x}}$ において最小値をとるとする。当然 $f(\bar{\boldsymbol{x}})\leqq f(\boldsymbol{x}^0)$ であるが，ここで $f(\bar{\boldsymbol{x}})<f(\boldsymbol{x}^0)$ であったとしよう。このとき $f(\boldsymbol{x})$ は凸関数だから，$0\leqq\alpha\leqq 1$ に対して

$$f(\alpha\bar{\boldsymbol{x}}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^0)\leqq\alpha f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)f\boldsymbol{x}^0)$$

が成り立つ。$f(\boldsymbol{x}^0)$ は極小値だから，十分小さい $\varepsilon>0$ をとれば，$|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0|<\varepsilon$ であるすべての $\boldsymbol{x}\in\Omega$ に対して $f(\boldsymbol{x}^0)\leqq f(\boldsymbol{x})$ となるようにできる。このような ε を，さらに $|\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^0|>\varepsilon$ をみたすようにえらび，$\boldsymbol{x}^0$ の ε-近傍を考える。α を

$$0<\alpha<\frac{\varepsilon}{|\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^0|}$$

となるようにえらべば，$\hat{\boldsymbol{x}}=\alpha\bar{\boldsymbol{x}}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}_0$ は $\boldsymbol{x}^0$ の ε-近傍に属する。なぜなら

$$|\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^0|=\alpha|\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^0|<\frac{\varepsilon}{|\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^0|}|\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}^0|=\varepsilon$$

となるからである。そして $f(\boldsymbol{x})$ の凸性と $f(\bar{\boldsymbol{x}})<f(\boldsymbol{x}^0)$ とから

$$f(\hat{\boldsymbol{x}})\leqq\alpha f(\bar{\boldsymbol{x}})+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^0)<f(\boldsymbol{x}^0)$$

がえられるが，これは不合理である。よって $f(\bar{\boldsymbol{x}})=f(\boldsymbol{x}^0)$ でなくてはならない。（証明終）

定理4系 閉凸集合上の凹関数 $f(\boldsymbol{x})$ の極大値は同時に最大値である。

定理5 凸集合上の凸（凹）関数 $f(\boldsymbol{x})$ が最小（大）値をとる $\boldsymbol{x}$ の集合は凸集合である。

証明 凸関数の場合を証明する。$f(\boldsymbol{x})$ のとる最小値を M とし，$f(\boldsymbol{x}^1)=f(\boldsymbol{x}^2)=M$ とする。$f(\boldsymbol{x})$ の凸性から

$$f(\alpha\boldsymbol{x}^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1)\leqq\alpha f(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^1)=M$$

であるが，M は最小値であるから左辺は M よりも小さくはなりえない。よって

$$f(\alpha\boldsymbol{x}^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1)=M$$

でなくてはならない。（証明終）

定理5系 $f(\boldsymbol{x})$ が凸集合上で強い意味で凸（凹）ならば，$f(\boldsymbol{x})$ が最小（大）値をとる点は，あるとすれば，唯一つである。

証明 相異る2点 $\boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}^2$ で最小値 M をとるとすれば

$$f(\alpha\boldsymbol{x})^2+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^1)<\alpha f(\boldsymbol{x}^2)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^1)=M$$

となって不合理である。（証明終）

定理6 凸集合 Ω 上の凸（凹）関数 $f(\boldsymbol{x})$ が連続な偏導関数をもつとする。$\boldsymbol{x}^0\in\Omega$ で

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}=0,\ j=1,2,\cdots\cdots n$$

が成り立つならば，$\boldsymbol{x}^0$ において $f(\boldsymbol{x})$ は最小（大）値をとる。

証明 定理2により，任意の $\boldsymbol{x}\in\Omega$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j{}^0)\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}\leqq f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}^0)$$

が成り立つが，$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}=0$ だから左辺は0。よって $f(\boldsymbol{x}^0)\leqq f(\boldsymbol{x})$ である。（証明終）

4 鞍点問題

n 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ と m 次元ベクトル $\boldsymbol{\lambda}$ の

本論文冒頭

関数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ に対して，不等式

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$$

をみたすような点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ があれば，$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ を $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ の**鞍点**とよぶ。

経済学で登場する変数は，いずれも，何らかの経済量をあらわすから，変数に対して非負性を要求するのが普通である。鞍点を求める問題を**鞍点問題**というが，非負変数の関数の鞍点問題に関して，つぎの定理は重要である。

定理 7　$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ は各変数について連続な偏導関数をもつとする。すべての $\boldsymbol{x} \geqq 0$，$\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ に対して，点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$，$\boldsymbol{x}^0 \geqq 0$，$\boldsymbol{x} \geqq 0$ において

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}) \quad (4 \cdot 1)$$

が成り立つならば，点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ において

(i) $\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} \leqq 0, \ j=1, 2, \cdots\cdots n,$

かつ $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j{}^0 \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} = 0$

(ii) $\dfrac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} \geqq 0, \ i=1, 2, \cdots\cdots m,$

かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^0 \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} = 0$

が成立する。

証明　(4・1) 式の前半から

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) - F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq 0, \quad \boldsymbol{x} \geqq 0$$

ここで $\boldsymbol{e}_j$ を第 j 成分が1である単位ベクトルとして $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{e}_j$ とおけば，$x^0{}_j + h \geqq 0$ である h に対して

$$F(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{\lambda}^0) - F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq 0$$

が成立する。したがって

$$\frac{F(\boldsymbol{x}^0 + h\boldsymbol{e}_j, \boldsymbol{\lambda}^0) - F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{h}$$

$$\begin{array}{ll} \leqq 0 & h > 0 \text{ のとき} \\ \geqq 0 & h < 0 \text{ のとき} \end{array} \quad (4 \cdot 2)$$

となる。$x_i{}^0 > 0$ のときは $|h|$ を十分小さくとれば，h の符号に関係なく $x_j{}^0 + h \geqq 0$ とできるから (4・2)で $h > 0$，$h < 0$ のおのおのの場合に $h \to 0$ とすると

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} = 0, \quad x_j{}^0 > 0 \text{ のとき} \quad (4 \cdot 3)$$

がえられる。一方，$x_j{}^0 = 0$ のときは $x_j{}^0 + h \geqq 0$ となるのは $h \geqq 0$ のときだから，(4・2) の $h > 0$ の場合に $h \to 0$ とすると

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}_0)}{\partial x_j} \leqq 0, \quad x_j{}^0 = 0 \text{ のとき} \quad (4 \cdot 4)$$

がえられる。(4・3)，(4・4)から(i)が成立することはすぐわかる。同様にして $\boldsymbol{\lambda}$ についても

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \boldsymbol{\lambda}^0} = 0, \quad \lambda_i{}^0 > 0 \text{ のとき}$$

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} \geqq 0, \quad \lambda_i{}^0 = 0 \text{ のとき}$$

がえられるが，これは (ii)と同値である。

(証明終)

上記(i)(ii)は $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が鞍点であるための必要条件であるが，十分条件ではない。十分条件は(i)(ii)のほかに別の条件をつけ加えなくてはならない。

定理 8　点 $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$，$\boldsymbol{x}^0 \geqq 0$，$\boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0$ において，前定理の (i) (ii)のほかに，さらに

(iii) $\displaystyle F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j{}^0) \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}$

(iv) $\displaystyle F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \geqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) + \sum_{i=1}^{m} (\lambda_i - \lambda_i{}^0) \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i}$

がすべての $\boldsymbol{x} \geqq 0$，$\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ に対して成り立つならば，$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ において

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$$

が成立する。

証明　(iii)，(i)，(ii)，(iv) の順で各条件式を使うと

$$F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) + \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_j{}^0) \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} \quad \text{((iii)による)}$$

本論文冒頭

$$=F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}$$

((i)による)

$$\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)\quad\left(\boldsymbol{x}\geqq 0,\ \frac{\partial F}{\partial x_j}\leqq 0\ \text{による}\right)$$

$$\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i}$$

$$\left(\boldsymbol{\lambda}\geqq 0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}\geqq 0\ \text{による}\right)$$

$$=F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)+\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i-\lambda_i^0)\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{x}^0)}{\partial \lambda_i}$$

((ii)による)

$$\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda})$$

((iv)による)

(証明終)

定理 9　$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ が $\boldsymbol{x}$ について凹関数，$\boldsymbol{\lambda}$ について凸関数であり，さらに各変数について連続な偏導関数をもつとする。このとき $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ が $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ の非負の鞍点であるための必要十分条件は，定理７の (i) (ii)が成り立つことである。

証明　必要性は定理７で証明した。十分性については，$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ に関する仮定から，定理２により (iii)(iv) がえられることからわかる。　(証明終)

5　Kuhn-Tucker の定理

ここでは，非線形計画法における基本定理ともいうべき Kuhn-Tucker の定理について述べる。問題を改めて述べておこう。

〔**問題Ⅰ**〕　条件

$$g_i(\boldsymbol{x})\geqq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m,\ \boldsymbol{x}\geqq 0 \qquad (5\cdot1)$$

のもとで

$$max\ f(\boldsymbol{x}) \qquad (5\cdot2)$$

ならしめる $\boldsymbol{x}$ を求めよ。

目的関数 $f(\boldsymbol{x})$，制約条件を与える関数 $g_i(\boldsymbol{x})$ を用いて，つぎの関数 $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ をつくる。

$$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}) \qquad (5\cdot3)$$

$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ を問題Ⅰの **Lagrange 関数**といい，$\lambda_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m$を **Lagrange 乗数**という。

$f(\boldsymbol{x}),\ g_i(\boldsymbol{x}),\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m$ はすべて，各変数について連続な偏導関数をもつものとする。さらに，制約条件をみたす $\boldsymbol{x}$の集合をΩとしたとき，Ωの点について，つぎの制約想定 (Constraint qualification) を設ける。

Kuhn-Tucker の制約想定　$\boldsymbol{x}^0\in\Omega$ において

$g_i(\boldsymbol{x}^0)=0$ となる i の集合を I

$x_j^0=0$　となる j の集合を J

としたとき

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}h_j\geqq 0 \quad i\in I \qquad (5\cdot4)$$

$$h_j\geqq 0 \quad j\in J$$

をみたす任意の $\boldsymbol{h}=(h_1,\ h_2,\ \cdots\cdots h_n)$ に対して，$\boldsymbol{x}^0$から出るΩ内の微分可能な曲線で，$\boldsymbol{x}^0$ において，$\boldsymbol{x}^0$ から$\boldsymbol{h}$方向に向う半直線に接するようなものが存在する。

点 $\boldsymbol{x}^0$ がこの条件をみたすとき，$\boldsymbol{x}^0$ において Kuhn-Tucker の制約想定がみたされるというのである。

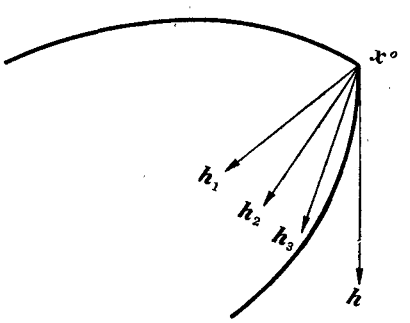
$\boldsymbol{x}^0\in\Omega$ と $\boldsymbol{h}$ に対して，$\delta>0$を十分小さくとれば，$0<\alpha<\delta$ となるすべての α に対して

$$\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h}\in\Omega$$

が成り立つとき，$\boldsymbol{h}$ を $\boldsymbol{x}^0$ における**実行可能方向** (feasible direction) というが，これは，$\boldsymbol{x}^0$ から出て $\boldsymbol{h}$ 方向に向う半直線上の点は，$\boldsymbol{x}^0$ の十分近くではすべてΩに属することを意味する。したがって，$\boldsymbol{h}$ が $\boldsymbol{x}^0$ における実行可能方向であれば，$\boldsymbol{x}^0$ から出るΩ内の微分可能曲線で，$\boldsymbol{x}^0$ における接線方向が $\boldsymbol{h}$ であるものが存在する。$\boldsymbol{h}$ が $\boldsymbol{x}^0$ における実行可能方向でなくても，こういうことは可能である。この場合は，共に $\boldsymbol{x}^0$ から出る $\boldsymbol{h}$ 方向の半直線とΩ内の微分可能曲線とが $\boldsymbol{x}^0$ で接するのだから，$\boldsymbol{h}$ のいくらでも近くに実行可能方向がなくてはならない。すなわち，$\boldsymbol{h}$ に収束する実行可能方向列 $\boldsymbol{h}^1,\ \boldsymbol{h}^2,\ \cdots\cdots\boldsymbol{h}^n$ が存在す

本論文冒頭

図 1



る（図 1 参照）。$\boldsymbol{h}$ が $\boldsymbol{x}^0$ における実行可能方向であるか，あるいは実行可能方向列の極限であれば，それに対して（5・4）が成り立つことは容易に確かめられる。この逆を主張するのが Kuhn-Tucker の制約想定にほかならない。

以上のことから，Kuhn-Tucker の制約想定はつぎのように述べることができる。

Kuhn-Tucker の制約想定 λ^0 において（5・4）をみたす $\boldsymbol{h}$ は，それ自身が実行可能方向であるか，さもなければ $\boldsymbol{h}$ に収束する実行可能方向列がある。

Kuhn-Tucker の制約想定をおくことの意味は，つぎの定理を成立させるためである。

理定10 λ^0 を問題 I の最適解とし，さらに $\boldsymbol{x}^0$ おいて Kuhn-Tucker の制約想定がみたされているものとする。このとき（5・4）をみたすすべての $\boldsymbol{h}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}h_j\leqq 0 \tag{5・5}$$

が成立する。

証明 （5・4）をみたすある $\boldsymbol{h}$ に対して

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}h_j>0 \tag{5・6}$$

となったとしよう。$\boldsymbol{x}^0$ は Kuhn-Tucker の制約想定をみたすから，この $\boldsymbol{h}$ は $\boldsymbol{x}^0$ における実行可能方向列 $\boldsymbol{h}^1, \boldsymbol{h}^2, \cdots\cdots \boldsymbol{h}^\nu \cdots\cdots$ の極限である（$\boldsymbol{h}$ 自身が実行可能方向である場合は $\boldsymbol{h}^\nu=\boldsymbol{h}$, $\nu=1, 2, \cdots\cdots$ と考えればよい）。$\boldsymbol{h}^\nu$ が実行可能方向だから十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して $\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h}^\nu\in\Omega$ である。ところで平均値の定理により，ある $0<\theta<1$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h}^\nu)=f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0+\theta\alpha\boldsymbol{h}^\nu)}{\partial x_j}\alpha h_j{}^\nu \tag{5・7}$$

$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}h_j$ は $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{h}$ の連続関数だから，$\boldsymbol{h}^\nu\to\boldsymbol{h}$ のとき

$$\lim_{\nu\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h}^\nu)}{\partial x_j}h_j{}^\nu=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h})}{\partial x_j}h_j \tag{5・8}$$

となる。（5・6）が成り立つならば $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ の連続性から，十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して（5・8）の右辺は正であり，したがって十分大きなすべての ν に対して

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h}^\nu)}{\partial x_j}h_j{}^\nu>0$$

である。このことと，$\alpha>0$ とから（5・7）の右辺の第 2 項は正である。よって

$$f(\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h}^\nu)>f(\boldsymbol{x}^0)$$

となるが，$\boldsymbol{x}^0+\alpha\boldsymbol{h}^\nu\in\Omega$ だから，これは $\boldsymbol{x}^0$ が Ω 上での $f(\boldsymbol{x})$ の最大値を与えるという仮定に矛盾する。よって（5・5）が成立する。
（証明終）

この定理の成立を保証するために Kuhn-Tucker の制約想定は必要となるのであり，しかも，この定理を成立させるためには，最適解を与える $\boldsymbol{x}^0$ において制約想定がみたされればよい。$\boldsymbol{x}^0$ が制約想定をみたさないのは，たとえばそれが Ω の外向き尖点になっているような特殊な場合だけであって，実際上はきわめて稀であるから，大抵の場合は定理10は成立すると思ってよい。

以上を準備として連続微分可能性だけを仮定した場合の Kuhn-Tucker の定理の説明に入る。

本論文冒頭

定理11 (Kuhn–Tucker の必要条件)

x^0 を問題 I の最適解とし，x^0 は Kuhn–Tucker の制約想定をみたすものとする。そのとき，Lagrange 関数 $F(x,\ \lambda)$ に対して，条件

$$\text{(i)}\quad \frac{\partial F(x^0,\ \lambda^0)}{\partial x_j} \leqq 0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n,$$

$$\text{かつ}\sum_{j=1}^{n} x_j{}^0 \frac{\partial F(x^0,\ \lambda^0)}{\partial x_j}=0,\quad x^0 \geqq 0$$

$$\text{(ii)}\quad \frac{\partial F(x^0,\ \lambda^0)}{\partial \lambda_i} \geqq 0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots n$$

$$\text{かつ}\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^0 \frac{\partial F(x^0,\ \lambda^0)}{\partial \lambda_i}=0,\quad \lambda^0 \geqq 0$$

をみたす λ^0 が存在する。

証明　x^0 は問題 I の最適解であり，x^0 で Kuhn–Tucker の制約想定がみたされるから，定理10により，(5·4) をみたすすべての h に対して (5·5) が成立する。(5·4)，(5·5) を行列形式でかくと

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ ej_1 \\ ej_2 \\ \vdots \\ ej_l \end{array}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_{i2}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_{i2}}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial g_{i2}}{\partial x_{in}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_2} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_n} \\ 0\cdots\cdots & 1 & \cdots\cdots & 0 \\ 0\cdots\cdots & \cdots\cdots & 1\cdots\cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & & \\ 0\cdots\cdots & & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \geqq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (5\cdot 9)$$

$$\mathrm{I}=\{i_1,\ i_2\cdots\cdots i_k\}\qquad \mathrm{J}=\{j_1,\ j_2\cdots\cdots j_l\}$$

をみたすすべての h に対して

$$\left(-\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_1},\ -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_2},\ \cdots\cdots,\ -\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} \geqq 0 \qquad (5\cdot 10)$$

が成立する。(5·9) の左辺の行列中の g の添字 $i_1,\ i_2,\ \cdots\cdots i_k$ は (5·4) の集合 I に属する添字であり，行列の下方には，J に属する添字 $j_1,\ j_2,\ \cdots\cdots j_l$ 番目の成分が 1 である単位ベクトルが並べてある。(5·9)，(5·10) に Farkas–Minkowski の定理を適用すると

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_1} & 0 & 0\cdots 0 \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_2} & 1 & 0\cdots 0 \\ \cdots & 0 & 1\cdots 0 \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial g_{i1}}{\partial x_n}\cdots\dfrac{\partial g_{ik}}{\partial x_n} & 0 & 0\cdots 1 \end{pmatrix}_{x=x^0} \begin{pmatrix} \lambda i^0{}_1 \\ \lambda i^0{}_2 \\ \vdots \\ \lambda i^0{}_k \\ \mu j^0{}_1 \\ \vdots \\ \mu j^0{}_l \end{pmatrix} \qquad (5\cdot 11)$$

となる非負ベクトル $(\lambda_{i1}{}^0,\ \lambda_{i2}{}^0,\ \cdots\cdots \lambda_{ik}{}^0,\ \mu_{j1}{}^0,\ \cdots\cdots,\ \mu_{jl}{}^0)$ が存在する。この右辺の行列では I に含まれない i と J に含まれない j の列が欠けているが，これらの $i,\ j$ に対しても，それぞれの場所に，i については $\dfrac{\partial g_i}{\partial x_j}$ の形の列を補い，j については第 j 成分が 1 である単位ベクトルを補って完全なものにし，それに対応して非負ベクトル $(\lambda_i{}^0,\ \cdots\cdots \lambda^0{}_{ik},\ \mu^0{}_{j1},\ \cdots\cdots \mu^0{}_{jl})$ 中の欠けている個所に 0 を補って $m+n$ 次元のベクトルにする。このようにしても，行列中の補った列とベクトル中に補った 0 とが掛け合されることになるから，(5·11) はつぎのようにかくことができる。

$$\begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ -\dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=x^0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial g_2}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial g_m}{\partial x_1} & 1 & 0\cdots 0 \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2}\dfrac{\partial g_2}{\partial x_2}\cdots\dfrac{\partial g_m}{\partial x_2} & 0 & 1\cdots 0 \\ \cdots\cdots\quad\cdots\cdots & & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_n}\dfrac{\partial g_2}{\partial x_n}\cdots\dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} & 0 & 0\cdots 1 \end{pmatrix}_{x=x^0} \begin{pmatrix} \lambda_1{}^0 \\ \lambda_2{}^0 \\ \vdots \\ \lambda_m{}^0 \\ \mu_1{}^0 \\ \vdots \\ \mu_n{}^0 \end{pmatrix}$$

ここで $i \notin I$ ならば $\lambda_i{}^0=0$ であり，$j \notin J$ ならば $\mu_j{}^0=0$ である。この関係を成分毎にかくと

$$-\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0 \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_j}+\mu_j{}^0$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

あるいは

$$\frac{\partial f(x^0)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0 \frac{\partial g_i(x^0)}{\partial x_j}+\mu_j{}^0=0,$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \qquad (5\cdot 12)$$

となる。ここで $\mu_j{}^0 \geqq 0$ であるから

本論文冒頭

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}=\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}\leqq 0$$

$$j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \qquad (5\cdot 13)$$

がえられる。また，$j\in J$ ならば $x_j{}^0=0$，$j\notin J$ ならば $\mu_j{}^0=0$ であるから

$$\sum_{j=1}^{n}x_i{}^0\mu_j{}^0=0$$

となり，したがって

$$\sum_{j=1}^{n}x_j{}^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}x_j{}^0\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_j{}^0\lambda_i{}^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}x_j{}^0\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}+\mu_j{}^0\right)$$

とかける。最後の式の（　）内は（5・12）により0となるから，結局

$$\sum_{j=1}^{n}x_j{}^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}=0 \qquad (51\cdot 4)$$

がえられる。(5・13）と（5・14）から定理の(i)が成立する。

つぎに

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i}=g_i(\boldsymbol{x}^0)\geqq 0$$

であり，ここで $i\in I$ ならば $g_i(\boldsymbol{x}^0)=0$, $i\notin I$ ならば $\lambda_i{}^0=0$ であるから

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i{}^0g_i(\boldsymbol{x}^0)=0$$

よって

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0)=0$$

これで（ii）が示された。(証明終)

定理12（Kuhn-Tucker の十分条件）

問題Ｉの Lagrange 関数 $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ に対して，点 $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ において定理11の(i)，(ii)が成り立ち，さらに，すべての $\boldsymbol{x}\geqq 0$ に対して

(iii) $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}^0)\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$

$$+\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j{}^0)\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}$$

が成り立つならば，$\boldsymbol{x}^0$ は問題Ｉの最適解である。

証明　定理11の条件(i)と $\boldsymbol{x}\geqq 0$ とから

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j{}^0)\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}\leqq 0$$

したがって(iii)により，不等式

$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}^0)\leqq F(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$

$$+\sum_{j=1}^{n}(x_j-x_j{}^0)\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$$

がすべての $\boldsymbol{x}\geqq 0$ に対して成り立つ。よって

$$f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0g_i(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0g_i(\boldsymbol{x}^0)$$

となるが，定理11（ii）により，右辺の第2項は0であるから

$$f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0g_i(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{x}^0)$$

ところで，$g_i(\boldsymbol{x})\geqq 0$，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ をみたす $\boldsymbol{x}$ に対しては $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0g_i(\boldsymbol{x})\geqq 0$ だから，

したがって

$$f(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{x}^0)$$

となり，$\boldsymbol{x}^0$ は $f(\boldsymbol{x})$ の最大値を与える。すなわち問題Ｉの最適解である。(証明終)

この定理の証明には Kuhn- Tucker の制約想定は不要である。

つぎに，$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$，がすべて凹関数である場合を考えよう。この場合には Lagrange 関数 $F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$ は $\boldsymbol{x}\geqq 0$ のときに $\boldsymbol{x}$ について凹関数になる。したがって定理2により，実行可能領域内で定理12の(iii)はつねに成立するから，(i)，(ii)が成立すれば定理12が成り立つことになる。よってつぎの定理がえられる。

定理13　$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,2,\cdots\cdots,\ m$，がいずれも凹関数であり，かつ，$\boldsymbol{x}^0$ で Kuhn-Tucker の制約想定がみたされているとする。そのとき，$\boldsymbol{x}^0$ が問題Ｉの最適解であるための必要かつ十分な条件は，定理11の(i)，(ii)をみたす $\boldsymbol{\lambda}^0$ が存在することである。

鞍定問題との同値性も証明できる。

定理14　（Kuhn–Tucker の同値定理）

$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$，$i=1, 2, \cdots\cdots, m$，はいずれも凹関数で，$\boldsymbol{x}^0$ において Kuhn–Tucker の制約想定がみたされるとする。そのとき，$\boldsymbol{x}^0$ が問題Ⅰの最適解であるための必要かつ十分な条件は，ある $\boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0$ をとれば，$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が，すべての $\boldsymbol{x} \geqq 0$，$\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ に対して

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$$

をみたすことである。

証明　$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ は $\boldsymbol{x}$ について凹関数であり，$\boldsymbol{\lambda}$ については1次式だから凸関数と考えてよい。定理9によれば，条件 (i)，(ii) は $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が $\boldsymbol{x} \geqq 0$，$\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ 内での $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ の鞍点となるための必要十分条件である。一方定理13によれば，(i)，(ii)は $\boldsymbol{x}^0$ が問題Ⅰの最適解であるための必要十分条件である。よって，$\boldsymbol{x}^0$ が問題Ⅰの最適解であるための必要十分条件は $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が非負領域での $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ の鞍点となる $\boldsymbol{\lambda}^0$ が存在することである。（証明終）

〔注意〕　定理11の(i)，(ii)はつぎの(i′)，(ii′) と同値である。

(i′)

$$x_j^0>0 \text{ ならば} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}=0$$

$$x_j^0=0 \text{ ならば} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}\leqq 0$$

(ii′)

$$\lambda_i^0>0 \text{ ならば } g_i(\boldsymbol{x}^0)=0$$

$$\lambda_i^0=0 \text{ ならば } g_i(\boldsymbol{x}^0)\geqq 0$$

条件(i)，(ii) あるいは (i′)，(ii′)を **Kuhn–Tucker の条件**という。

この同値定理は，Kuhn–Tucker の制約想定をつぎの制約想定でおきかえても成立する。（文献〔3〕）

Slater の制約想定

$g_i(\hat{\boldsymbol{x}})>0$, $i=1, 2, \cdots\cdots, m$, となる $\hat{\boldsymbol{x}} \geqq 0$ が存在する。

定理15　$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$，$i=1, 2, \cdots\cdots, m$，はすべて凹関数であり，かつ，Slater の制約想定がみたされるものとする。このとき，$\boldsymbol{x}^0 \geqq 0$ が問題Ⅰの最適解であるための必要かつ十分条件は，Lagrange 関数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ に対して，$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が非負鞍点となるような $\boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0$ が存在することである。

証明　すべての $g_i(\boldsymbol{x})$が凹関数だから定理3系，および，いくつかの凸集合の共通部分は凸集合である，という事実から制約条件をみたす $\boldsymbol{x}$の集合，すなわち実行可能領域は凸集合である。はじめに十分性を証明する。

十分性：$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が非負領域での $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ の鞍点であるとき $\boldsymbol{x}^0$ が問題Ⅰの最適解であることを示す。$(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が非負鞍点だから，任意の $\boldsymbol{x} \geqq 0$, $\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ に対して

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \leqq F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda})$$

すなわち

$$f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)$$

$$\leqq f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0) \tag{5·15}$$

が成立する。後半の不等式から，すべての $\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ に対して

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0) \geqq \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}^0) \tag{5·16}$$

となるから

$$g_i(\boldsymbol{x}^0) \geqq 0 \quad i=1, 2, \cdots\cdots, m \tag{5·17}$$

でなくてはならない。なぜなら，$g_i(\boldsymbol{x}^0)<0$ となる i があれば，その i に対する λ_i を十分大きくとることによって (5·16) の左辺をいくらでも小さくできるからである。$g_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ と $\boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0$ とから $\sum\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}^0) \geqq 0$ となるが，一方 (5·16) で $\lambda_i=0$, $i=1, 2, \cdots\cdots, m$, とおけば $\sum\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}^0) \leqq 0$ となる。よって

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)=0 \tag{5·18}$$

である。つぎに (5·15) の前半の不等式と(5·18) により

$$f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}^0)$$

本論文冒頭

となるから，$\lambda^0 \geqq 0$ を考慮すると $g_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0$, $i=1, 2, \cdots\cdots, m$, をみたす $\boldsymbol{x} \geqq 0$ に対して

$$f(\boldsymbol{x}) \leqq f(\boldsymbol{x}^0)$$

が成立する。よって $\boldsymbol{x}^0$ は問題Iの最適解である。

必要性：$\boldsymbol{x} \geqq 0$ が問題Iの最適解であるとき，すべての $\boldsymbol{x} \geqq 0$, $\boldsymbol{\lambda} \geqq 0$ に対して $(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ が $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ の非負鞍点であるような $\boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0$ が存在することを示す。$m+1$ 次元ベクトル $\boldsymbol{y}=(y_0, y_1, \cdots\cdots, y_m)$ の集合 S_1, S_2 をつぎのように定義する。

$$S_1=\{\boldsymbol{y} \mid \text{ある}\boldsymbol{x} \geqq 0 \text{に対して} \boldsymbol{y} \leqq (f(\boldsymbol{x}), g_1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, g_m(\boldsymbol{x}))\}$$

$$S_2=\{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} > (f(\boldsymbol{x}^0)\ 0, \cdots\cdots, 0)\}$$

あきらかに S_1, S_2 は空集合ではない。S_2 が凸集合であることはすぐわかるが，S_1 もまた凸集合である。なぜなら，$\boldsymbol{y}^1$, $\boldsymbol{y}^2 \in S_1$ とすれば $\boldsymbol{y}_1 \leqq (f(\boldsymbol{x}^1), g_1(\boldsymbol{x}^1), \cdots\cdots, g_m(\boldsymbol{x}^1))$ となる $\boldsymbol{x}^1 \geqq 0$ があり，$\boldsymbol{y}_2 \leqq (f(\boldsymbol{x}^2), g_1(\boldsymbol{x}^2), \cdots\cdots, g_m(\boldsymbol{x}^2))$ となる $\boldsymbol{x}^2 \geqq 0$ がある。このとき，$0 \leqq \alpha \leqq 1$ に対して $\alpha \boldsymbol{y}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^2$ の第1成分 $\alpha y_0{}^1+(1-\alpha)y_0{}^2$ は

$$\alpha y_0{}^1+(1-\alpha)y_0{}^2 \leqq \alpha f(\boldsymbol{x}^1)+(1-\alpha)f(\boldsymbol{x}^2)$$

をみたすが，$f(\boldsymbol{x})$ が凹関数であるから

$$\alpha y_0{}^1+(1-\alpha)y_0{}^2 \leqq f(\alpha \boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2)$$

が成り立つ。しかも $\boldsymbol{x}^1 \geqq 0, \boldsymbol{x}^2 \geqq 0$ から $\alpha \boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2 \geqq 0$ である。第2成分以後についても，まったく同様にして

$$\alpha y_i{}^1+(1-\alpha)y_1{}^2 \leqq g_i(\alpha \boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2), \quad i=1, 2, \cdots\cdots, m$$

が成立する。そこで $\boldsymbol{x}^3=\alpha \boldsymbol{x}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{x}^2$ とおけば

$$\alpha \boldsymbol{y}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^2 \leqq (f(\boldsymbol{x}^3), g_1(\boldsymbol{x}^3), \cdots\cdots, g_m(\boldsymbol{x}^3))$$

となって，$\alpha \boldsymbol{y}^1+(1-\alpha)\boldsymbol{y}^2 \in S_1$ となるからである。さらに，S_1 と S_2 に共通に含まれる $\boldsymbol{y}$ は存在しない。なぜなら，$\bar{\boldsymbol{y}} \in S_1$, $\bar{\boldsymbol{y}} \in S_2$ となる $\bar{\boldsymbol{y}}$ があれば，その $\bar{\boldsymbol{y}}$ に対して，一方において $\bar{\boldsymbol{y}} \leqq (f(\bar{\boldsymbol{x}}), g_1(\bar{\boldsymbol{x}}), \cdots\cdots, g_m(\bar{\boldsymbol{x}}))$ となる $\bar{\boldsymbol{x}} \geqq 0$ があり，他方，$\bar{\boldsymbol{y}} > (f(\boldsymbol{x}^0), 0, \cdots, 0)$ となるから

$$(f(\boldsymbol{x}^0), 0, \cdots\cdots, 0) < (f(\bar{\boldsymbol{x}}), g_1(\bar{\boldsymbol{x}}), \cdots\cdots, g_m(\bar{\boldsymbol{x}}))$$

となる。よって $\bar{\boldsymbol{x}}$ はすべての i に対して $g_i(\bar{\boldsymbol{x}}) > 0$ をみたし，$\bar{\boldsymbol{x}} \geqq 0$ で，しかも $f(\boldsymbol{x}^0) < f(\bar{\boldsymbol{x}})$ となる。これは $\boldsymbol{x}^0$ が問題Iの最適解であるという仮定に反するからである。S_1 と S_2 が共通点をもたない凸集合であるから，S_1 と S_2 を分離する分離超平面が存在する。すなわち，超平面

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}=\boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{a}=(a_0, a_1, \cdots\cdots, a_m) \neq 0$$

で（注：a·yはaとyの内積である），任意の $\boldsymbol{y}^1 \in S_1$, $\boldsymbol{y}^2 \in S_2$ に対して

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}^1 \leqq \boldsymbol{b}, \text{ かつ, } \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}^2 \geqq \boldsymbol{b}$$

をみたすものが存在する。このとき当然

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}^1 \leqq \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}^2 \tag{5·19}$$

が成立する。ここで $\boldsymbol{a} \geqq 0$ でなくてはならない。なぜなら，S_2 の定義から $\boldsymbol{y}^2$ の各成分はいくらでも大きい値をとりうるから，$a_i < 0$ となる i があれば，対応する $\boldsymbol{y}^2$ の第 i 成分を限りなく大きくすることによって（5·19）の右辺 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}^2$ の値をいくらでも小さく（負で絶対値をいくらでも大きく）でき，したがって $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}^1$ の値はすべての $\boldsymbol{y}^1 \in S_1$ に対して $-\infty$ になってしまい不合理だからである。そこでいま，任意の $\boldsymbol{x} \geqq 0$ に対して

$$\boldsymbol{y}^1=(f(\boldsymbol{x}), g_1(\boldsymbol{x}), \cdots\cdots, g_m(\boldsymbol{x}))$$

とおき，さらに

$$\boldsymbol{y}^2=(f(\boldsymbol{x}^0), 0, \cdots\cdots, 0)$$

とおけば，この $\boldsymbol{y}^2$ は S_2 には属さないが，しかし S_2 の境界上の点だから，この $\boldsymbol{y}^1$ と $\boldsymbol{y}^2$ に対しても不等式（5·19）が成立する。そして

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y}^1=a_0 f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{y}^2=a_0 f(\boldsymbol{x}^0)$$

であるから，すべての $\boldsymbol{x} \geqq 0$ に対して

$$a_0 f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m} a_i g_i(\boldsymbol{x}) \leqq a_0 f(\boldsymbol{x}^0) \tag{5·20}$$

が成立する。すでに示したように $a_i \geqq 0$, $i=0, 1, \cdots\cdots, m$, であるが，特に $a_0 > 0$ でなく

本論文冒頭

てはならない。なぜなら，$a_0=0$ であったとすれば，(5・20)から，すべての $\boldsymbol{x}\geqq 0$ に対し $\sum_{i=1}^{m}a_i g_i(\boldsymbol{x})\leqq 0$ であるが，一方，仮定により $g_i(\hat{\boldsymbol{x}})>0$，$i=1, 2, \cdots\cdots m$ となる $\hat{\boldsymbol{x}}\geqq 0$ が存在するから，$\boldsymbol{a}\geqq 0$ かつ少くとも1つの $a_i>0$ であることを考慮すると $\sum_{i=1}^{m}a_i g_i(\hat{\boldsymbol{x}})>0$ となって矛盾が生ずるからである。$a_0>0$ であるから，(5・20) の両辺を a_0 でわり

$$\lambda_i{}^0=\frac{a_i}{a_0},\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$$

とおけば，$\lambda_i{}^0\geqq 0$, $i=1,2,\cdots\cdots, m$ であって

$$f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0 g_i(\boldsymbol{x})\leqq f(\boldsymbol{x}^0) \tag{5・21}$$

が成立する。すなわち，すべての $\boldsymbol{x}\geqq 0$ に対して

$$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}^0)\leqq f(\boldsymbol{x}^0) \tag{5・22}$$

が成り立つ。(5・21) で $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^0$ とおけば $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)\leqq 0$ となるが，一方，$\lambda_i{}^0\geqq 0$, $g_i(\boldsymbol{x}^0)\geqq 0$ であるから $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)\geqq 0$ である。よって

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)=0 \tag{5・23}$$

がえられる。これから

$$f(\boldsymbol{x}^0)=f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i{}^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)=F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$$

よって (5・22) から，すべての $\boldsymbol{x}\geqq 0$ に対して

$$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}^0)\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0) \tag{5・24}$$

つぎに，$g_i(\boldsymbol{x}^0)\geqq 0$, $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ であるから，すべての $\boldsymbol{\lambda}\geqq 0$ に対して $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})\geqq 0$ となり，したがって

$$f(\boldsymbol{x}^0)\leqq f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0)=F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda})$$

すなわち

$$F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}) \tag{5・25}$$

が成立する。(5・24), (5・25) から，すべての $\boldsymbol{x}\geqq 0$，$\boldsymbol{\lambda}\geqq 0$ に対して

$$F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda}^0)\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)\leqq F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda})$$

が成立する。(証明終)

(注意) この定理では $g_i(\boldsymbol{x})$ の偏導関数の存在は仮定していないことに注意せられたい。

Slater の制約想定と Kuhn-Tucker の制約想定の間には，つぎの定理が成立する。

定理16 $g_i(\boldsymbol{x})$, $i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$ が連続な偏導関数をもつ凹関数で，しかも Slater の制約想定をみたすならば，実行可能領域 $\Omega=\{\boldsymbol{x}\,|\,g_i(\boldsymbol{x})\geqq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,\ \boldsymbol{x}\geqq 0\}$ のすべての点で Kuhn-Tucker の制約想定がみたされる。

証明 $g_i(\boldsymbol{x})$ はすべて凹関数だから Ω は凸集合であり，Slater の制約想定がみたされるから $g_i(\hat{\boldsymbol{x}})>0$, 1, 2, $\cdots\cdots$, m となる $\hat{\boldsymbol{x}}\geqq 0$ が存在する。いま，任意に $\boldsymbol{x}\in\Omega$ をとる。$g_i(\boldsymbol{x})$ が凹関数であることから

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}(\hat{x}_j-x_j)\geqq g_i(\hat{\boldsymbol{x}})-g_i(\boldsymbol{x}) \tag{5・26}$$

が成り立つ。

$$I=\{\,i\mid g_i(\boldsymbol{x})=0\},\quad J=\{\,j\mid x_j=0\}$$

とおき，$\boldsymbol{h}$ を

$$i\in I \text{ に対して} \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}h_j\geqq 0$$

$$j\in J \text{ に対して}\qquad h_j\geqq 0$$

となるようにとったとき，$\boldsymbol{h}$ に収束する実行可能方向列が存在することを示す。そのために

$$\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}=\boldsymbol{k}$$

とおき，$\boldsymbol{h}^\beta$ を

$$\boldsymbol{h}^\beta=\beta\boldsymbol{k}+(1-\beta)\boldsymbol{h}\qquad(0\leqq\beta\leqq 1)$$

で定義する。当然 $\beta\to 0$ のとき $\boldsymbol{h}^\beta\to\boldsymbol{h}$ である。$i\in I$ ならば $g_i(\boldsymbol{x})=0$ であることと，凹関数であることから，平均値の定理により

$$\begin{aligned}g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h}^\beta)&=g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\beta\boldsymbol{k}+\alpha(1-\beta)\boldsymbol{h})\\&=g_i(\beta(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{k})+(1-\beta)(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h}))\\&\geqq\beta g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{k})+(1-\beta)g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h})\\&=\alpha\Bigl(\beta\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\theta_1\boldsymbol{k})}{\partial x_j}k_j+(1-\beta)\\&\qquad\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\theta_2\boldsymbol{h})}{\partial x_j}h_j\Bigr)\end{aligned} \tag{5・27}$$

がえられる。(5・26) から

本論文冒頭

$$K=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}k_j \geqq g_i(\hat{\boldsymbol{x}})>0$$

であるから

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\theta_1\boldsymbol{k})}{\partial x_j}k_j=k+\varepsilon \qquad (5\cdot28)$$

とおくと，$\alpha\to0$ のとき $\varepsilon\to0$ である。一方 $\boldsymbol{h}$ の定義から

$$H=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}h_j \geqq 0$$

であるから

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\theta_2\boldsymbol{h})}{\partial x_j}h_j=H+\delta \qquad (5\cdot29)$$

とおくと $\alpha\to0$ のとき $\delta\to0$ である。

(5·28)，(5·29) を (5·27) の右辺に代入すると

$$g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h}^\beta)\geqq\alpha(\beta K+(1-\beta)H+\beta\varepsilon+(1-\beta)\delta) \qquad (5\cdot30)$$

となるが，与えられた $\beta>0$ に対して $\beta K+(1-\beta)H>0$ であるから，十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して (5·30) の右辺は正になる。したがって十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して

$$i\in I \text{ ならば } g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h})>0$$

となる。$i\notin I$ のときは $g_i(\boldsymbol{x})>0$ であり，したがって，十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して $g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{k})>0$, $g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h})>0$ となるから

$$g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h}^\beta)\geqq\beta g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{k})+(1-\beta)g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h})>0$$

となる。よって，すべての i に対して $\alpha>0$ を十分小さくとれば，つねに

$$g_i(\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h}^\beta)>0$$

が成立する。

つぎに，十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して

$$\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h}^\beta\geqq0$$

となることを示す。まず，$\boldsymbol{x}$, $\hat{\boldsymbol{x}}\in\Omega$ と Ω が凸集合であることから，$0\leqq\alpha\leqq1$ のとき

$$\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{k}=\boldsymbol{x}+\alpha(\hat{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x})=\alpha\hat{\boldsymbol{x}}+(1-\alpha)\boldsymbol{x}\in\Omega$$

よって $\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{k}\geqq0$ である。このことから

$$j\in J \text{ ならば } x_j=0 \text{ で，} \alpha h_j\geqq0 \text{ すなわち } h_j\geqq0$$

でなくてはならない。また $\boldsymbol{h}$ の定義から，$j\in J$ のとき $h_j\geqq0$ である。よって

$$j\in J \text{ ならば } h_j{}^\beta=\beta h_j+(1-\beta)h_j\geqq0$$

である。$j\notin J$ ならば $x_j>0$ であるから，十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して $x_j+\alpha h_j{}^\beta>0$ である。

以上により，十分小さなすべての $\alpha>0$ に対して $\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{h}^\beta\in\Omega$ となる。したがって $\boldsymbol{h}^\beta$ は実行可能方向である。$\boldsymbol{h}=\lim_{\beta\to0}\boldsymbol{h}^\beta$ であったから，$\boldsymbol{h}$ は実行可能方向列の極限となる。したがって $\boldsymbol{x}$ で Kuhn-Tucker の制約想定がみたされる。(証明終)

(注意) $g_i(\hat{\boldsymbol{x}})>0$, $i=1, 2, \cdots\cdots, m$ となる $\hat{\boldsymbol{x}}\geqq0$ がなければ Kuhn-Tucker の制約想定は必ずしも Ω のすべての点でみたされるとは限らない。(注：Slater, Kuhn-Tucker の制約想定のほかにも，各種の制約想定が考えられ，これらの間の関係も研究されている)

6　双対性

線形計画法の場合と同様に，非線形計画法においても，与えられた問題（主問題）に対して，それの双対問題とよばれる別の問題が対応し，それらの一方が最適解をもつ場合は他方が最適解をもち，双方の最適値は一致する，という性質が示される。この性質を**双対性**とよぶ。主問題と双対問題は，1つの問題の表から見た姿と裏から見た姿をあらわすと考えることができる。このことは，非線形計画法を現実の問題に適用した場合に，しばしば，重要な意味をもつ。

まず，問題Iを主問題としたとき，その双対問題はどういう形になるべきか，を考えてみよう。そのために，まず，問題IをLagrange 関数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ を使って表現してみる。

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})=f(\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

であること，および

$$g_i(\boldsymbol{x})=\frac{\partial F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i}$$

本論文冒頭

であることから

$$f(\boldsymbol{x})=F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i}$$

となる。したがって問題Ⅰはつぎのようにかくことができる。

〔**問題Ⅰ**〕　条件

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i}\geqq 0,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m,$$

$$\boldsymbol{x}\geqq 0,\ \boldsymbol{\lambda}\geqq 0 \qquad (6\cdot1)$$

のもとで

$$\max\ F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial\lambda_i} \qquad (6\cdot2)$$

ここで，$\boldsymbol{\lambda}\geqq 0$ という条件をつけてあるが，$\boldsymbol{\lambda}$ は実質的には問題Ⅰの中には現れて来ないのだから，非負性を仮定しても何ら差支えない。

問題Ⅰをこの形で捉えれば，これの双対問題は，線形計画法の場合から類推して，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\lambda}$ の役割を入れかえ，不等号の向きを逆にし，さらに max と min を入れかえて，つぎのようになると考えられる。

〔問題Ⅱ〕　条件

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}\leqq 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,$$

$$\boldsymbol{x}\geqq 0,\ \boldsymbol{\lambda}\geqq 0 \qquad (6\cdot3)$$

のもとで

$$\min F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})-\sum_{i=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \qquad (6\cdot4)$$

事実，$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{\lambda})$，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$，がすべて凹関数で連続な偏導関数をもつ場合には，問題Ⅰと問題Ⅱの間には，以下に示すような双対定理が成立する。

定理17　問題Ⅰの最適解を $\boldsymbol{x}^o$ とし，$\boldsymbol{x}^o$ は Kuhn-Tucker の制約想定をみたすとする。そのとき適当な $\boldsymbol{\lambda}^0$ に対して $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ は問題Ⅱの最適解になり，双方の最適値は一致する。

証明　定理13により，つぎの条件をみたす $\boldsymbol{\lambda}^0\geqq 0$ が存在する。

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}\leqq 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \qquad (6\cdot5)$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_i^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}=0 \qquad (6\cdot6)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial\lambda_i}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)=0 \qquad (6\cdot7)$$

このとき $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ が問題Ⅱの最適解となることを証明する。

$$\left[F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)-\sum_{j=1}^{n}x_j^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}\right]$$

$$-\left[F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})-\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}\right]$$

$$=F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)-F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}^0)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}$$

（(6·6) による）

$$=f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)-F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$$

$$+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}=f(\boldsymbol{x}^0)-F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$$

$$+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \qquad ((6\cdot7)\text{による})$$

$$=f(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0)-F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}=F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda})-F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}$$

ここで $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ が $\boldsymbol{x}$ の凹関数であることを使うと

$$\leqq\sum_{j=1}^{n}(x_j^0-x_j)\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x})$$

$$+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}x_j^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}$$

$$-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g_i(\boldsymbol{x}^0)\leqq 0 \qquad (x_j^0\geqq 0,\ g_i(\boldsymbol{x})\geqq 0,$$

(6·3) による）

よって，条件 (6·3) のもとで

$$F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)-\sum_{j=1}^{n}x_j^0\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}\leqq(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})$$

$$-\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \qquad (6\cdot8)$$

が成立する。よって $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ は問題Ⅱの最

本論文冒頭

適解である。さらに，(6•8) の左辺が $f(\boldsymbol{x}^0)$ に等しいことはすぐわかる。すなわち問題 I の最大値と問題 II の最小値は一致する。（証明終）

関数 $f(\boldsymbol{x},)$，$g_i(\boldsymbol{x})$ に対する条件を少し強くすれば，この定理の逆が成立する。

定理18 $f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$，$i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$，がいずれも連続な2階の偏導関数をもつ凹関数とする。問題 II の最適解を $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ とし，点 $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ において，行列

$$F^0_{\boldsymbol{xx}}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_1{}^2} & \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_2{}^2} \cdots & \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \\ \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_n \partial x_2} \cdots & \dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_n{}^2} \end{pmatrix}$$

が負値であり，さらに $(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)$ において Kuhn-Tucker の制約想定がみたされるとする。このときは問題 I の最適解であり，双方の最適値は一致する。

証明　問題 II を，制約条件式，目的関数の符号を変えてつぎの最大問題にしておく。すなわち

問題 II′　条件

$$-\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \geqq 0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n$$

$$\boldsymbol{x} \geqq 0,\quad \boldsymbol{\lambda} \geqq 0$$

のもとで

$$\max -F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})+\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}$$

この問題に対する Lagrange 関数数は，$\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots\cdots,\ \mu_n)$ を Lagrange 乗数ベクトルとして

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu})=-F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})+\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} \mu_j \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j}$$

となる。このとき定理11により，つぎの (6•9) から (6•15) までの条件をみたす $\boldsymbol{\mu}^0$ が存在する。

$$\mu \geqq 0$$

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0)}{\partial x_j}=\sum_{k=1}^{n}(x_k{}^0-\mu_k{}^0)\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$\leqq 0,\quad j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n \tag{6•10}$$

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0)}{\partial \lambda_i}=-\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i}+\sum_{k=1}^{n}(x_k{}^0-\mu_k{}^0)$$

$$\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i \partial x_k} \leqq 0,\quad i=1,\ 2,\cdots\cdots, m \tag{6•11}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j{}^0 \frac{\partial G(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \mu^0)}{\partial x_j}=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j(x_k{}^0-\mu_k{}^0)$$

$$\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k}=0 \tag{6•12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^0 \frac{\partial G(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0)}{\partial \lambda_i}=-\sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^0 \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i}$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} \lambda_i(x_k{}^0-\mu_k{}^0)\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i \partial x_k}=0 \tag{6•13}$$

$$\frac{\partial G(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}^0)}{\partial \mu_j}=-\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} \geqq 0,\quad j=1,\ 2,$$

$$\cdots\cdots n \tag{6•14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mu_j{}^0 \frac{\partial G(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0, \boldsymbol{\mu}_0)}{\partial \mu_j}=-\sum_{j=1}^{n} \mu_j{}^0 \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j}$$

$$=0 \tag{6•15}$$

(6•10) と (6•12) から

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_j{}^0-\mu_j{}^0)\ (x_k{}^0-\mu_k)\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k}$$

$$=-\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \mu_j(x_k-\mu_k)\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k} \geqq 0$$

一方，仮定によって行列 $\left(\dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ は負値だから

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_j{}^0-\mu_j{}^0)(x_k{}^0-\mu_k{}^0)\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k} \leqq 0$$

である。よって

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(x_j{}^0-\mu_j{}^0)(x_k{}^0-\mu_k{}^0)\frac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k}=0 \tag{6•16}$$

である。ところで $\left(\dfrac{\partial^2 F(\boldsymbol{x}^0,\ \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j \partial x_k}\right)$ の負値性から，$\boldsymbol{x}^0 \fallingdotseq \boldsymbol{\mu}^0$ ならば (6•17) の左辺は負でなくてはならない。したがって (6•16) が成り立つためには

$$\boldsymbol{x}^0=\boldsymbol{\mu}^0 \tag{6•17}$$

でなくてはならない。これと (6•11) とから

本論文冒頭

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} \geqq 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m \quad (6 \cdot 18)$$

（6・13）から

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^0 \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i} = 0 \quad (6 \cdot 19)$$

また（6・14），（6・15）から

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} \leqq 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots n \quad (6 \cdot 20)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j{}^0 \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} = 0 \quad (6 \cdot 21)$$

である。（6・18）から（6・21）までは $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ に対する Kuhn-Tucker の条件にほかならない。したがって，$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$ が凹関数であるわれわれの場合には，これらの条件が成り立てば $\boldsymbol{x}^0$ は問題 I の最適解になる。（定理13）

$$F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) - \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial x_j} = F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$$

（(6・21)による）

$$= f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^0 g_i(\boldsymbol{x}^0)$$

$$= f(\boldsymbol{x}^0) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^0 \frac{\partial F(\boldsymbol{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)}{\partial \lambda_i}$$

$$= f(\boldsymbol{x}^0)$$

（(6・19)による）

であるから，問題 I の最大値と問題 II の最小値は一致する。（証明終）

定理17，定理18で与えられる双対定理には，条件に多少の変更を加えた形の variant が何種類かある。条件の変更の主たるものは，変数の非負性を落す場合と，制約不等式を等式にする場合である。これらの場合に双対問題に加えられる変更は，つぎの表のようになる。

	主　問　題	双　対　問　題
	$\max f(x)$	$\min F(x,\lambda) - \sum x_j \frac{\partial F}{\partial x_j}$
制約条件	(1) $g_j(x) \geqq 0,\ x \geqq 0$	(1) $\frac{\partial F}{\partial x_j} \leqq 0,\ x \geqq 0,\ \lambda \geqq 0$
	(2) $g_j(x) = 0,\ x = 0$	(2) $\frac{\partial F}{\partial x_j} \leqq 0,\ x \geqq 0$
	(3) $g_j(x) \geqq 0$	(3) $\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0,\ \lambda \geqq 0$
	(4) $g_j(x) = 0$	(4) $\frac{\partial F}{\partial x_j} = 0$

これらのうち(1)はわれわれが考察してきたケースである。(2)の対応関係を確かめるには，$g_i(\boldsymbol{x})=0$ を $g_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0$，$-g_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ とかきかえて(1)の関係を使えばよいし，(3)を確かめるには $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^+ - \boldsymbol{x}^-$，$\boldsymbol{x}^+ \geqq 0$，$\boldsymbol{x}^- \geqq 0$ とおいて(1)を使えばよい。(4)は(2)と(3)を合せたものであり，これは微分法における Lagrange 乗数法の場合である。

7 Lagrange 乗数および双対問題のもつ経済学的意味

ここでは，いままでの理論を経済学上の問題に適用した場合の，Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ のもつ経済学的意味と，それを踏まえて，双対問題のもつ経済学的意味を考えてみたい。

主問題（問題 I ）をつぎの形の問題とする。

主問題　条件

$$g_i(\boldsymbol{x}) \leqq b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots\cdots m,\ \boldsymbol{x} \geqq 0 \quad (7 \cdot 1)$$

のもとで

$$\max f(\boldsymbol{x})$$

（7・1）の制約条件は，$b_i - g_i(\boldsymbol{x}) \geqq 0$ とかき，$b_i - g_i(\boldsymbol{x})$ を前節まで扱ってきた $g_i(\boldsymbol{x})$ と考えれば，前節の問題 I の形になる。

この問題を**生産の問題**と考え，$\boldsymbol{x}$ は生産量ベクトル，b_i は第 i 資源の手持ち量とする。目的関数 $f(\boldsymbol{x})$ は，$\boldsymbol{x}$ だけの生産によって企業が得る収入額をあらわし，$g_i(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ だけの生産に必要な第 i 資源の量である。そのとき，手持ち資源の範囲内で最大の収入を獲得する生産計画を求めているのが主問題である。

Lagrange 関数 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda})$ は

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\boldsymbol{x}))$$

となる。$f(\boldsymbol{x})$，$g_i(\boldsymbol{x})$ に対しては前節における諸仮定は，そのままおくことにする。そのとき定理11によれば，最適な生産計画ベクトル $\boldsymbol{x}^0 \geqq 0$ に対して，つぎの Kuhn-Tucker 条件をみたす $\boldsymbol{\lambda}^0 \geqq 0$ が存在する。

本論文冒頭

(i) $\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}_0)}{\partial x_j} \leqq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^0 \dfrac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$, $j=1, 2, \cdots\cdots, n$

$x_j{}^0 > 0$ となる j に対して

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i{}^0 \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$$

(ii) $g_i(\boldsymbol{x}^0) \leqq b_i \quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ m$

$\lambda_i{}^0 > 0$ となる i に対して $g_i(\boldsymbol{x}^0) = b_i$

さて

$$Z^0 = f(\boldsymbol{x}^0)$$

とおく，最適な生産計画 $\boldsymbol{x}^0$ は利用可能な資源量の関数である。そのことを明示して $\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}^0(\boldsymbol{b})$ とかく。このとき $Z^0 = f(\boldsymbol{x}^0)$ も $\boldsymbol{b}$ の関数である。また，$\boldsymbol{x}^0$ に対応してきまる $\boldsymbol{\lambda}^0$ もまた $\boldsymbol{b}$ の関数である。ここで，$\boldsymbol{b}$ の関数としての $\boldsymbol{x}^0$，$\boldsymbol{\lambda}^0$ に対して，つぎのことを仮定する。

(a) $\boldsymbol{x}^0$ は $\boldsymbol{b}$ の近傍で各 b_i について連続な偏導関数をもち，さらに，$x_j{}^0(\boldsymbol{b}) = 0$ である j については，十分 $|\Delta \boldsymbol{b}|$ が小さい範囲で，つねに $x_j{}^0(\boldsymbol{b}+\Delta \boldsymbol{b}) = 0$ である。

(b) $\boldsymbol{\lambda}^0$ は $\boldsymbol{b}$ の近傍で各 b_i について連続である。

仮定(a)は，経済学的にはつぎのことを意味する。すなわち，資源ベクトルが $\boldsymbol{b}$ から $\boldsymbol{b}+\Delta \boldsymbol{b}$ に変ったときの最適生産計画の変更は，$\Delta \boldsymbol{b}$ が十分小さいかぎりいままで生産していた製品の数量の調節という形でおこなうことができ，いままで生産していなかった製品を生産する形は採らないで済む，ということである。こう仮定することは，数学的には $\boldsymbol{x}^0$ をかなり限定することにはなるが，経済学的には，ほとんど無害な仮定であり，かつて筆者が別のところ（文献〔8〕）で示したように，線計形画問題に対しても，同様な仮定は必要なのである。仮定(b)については問題はないだろう。

〔ここで多少の弁解を含めて一言述べさせてもらうと，(a)，(b)のような仮定のおき方は，数学的な見地からは実は，あまり面白くないやり方である。本来は，f，g_i，$\boldsymbol{b}$ などに何らかの付加的な仮定をおいて，その仮定のもとで(a)，(b)が証明できる，という形に議論をもってゆくのが筋であろう。しかし，そうするためには，もっときめ細かい考察をしなくてはならないが，そして，できれば将来それを試みてみたいとは思っているが，多くの経済学者が理論展開の過程でごく普通におこなっているやり方に安易に従って，経済学的根拠で数学的な仮定を設けるという方法を採った。ただ，この節の議論は，経済学的な意味付け，という点に狙いがあるのだから，このような態度も，必ずしも不当ではないであろう〕

仮定(a)，(b)のもとで以下，論を進める。

$\lambda_i{}^0 > 0$ となる i の集合を I とおく。

$$I = \{i \mid \lambda_i{}^0 > 0\}$$

このとき，$i \in I$ ならば $\boldsymbol{\lambda}$ の連続性（仮定(b)）から，$\boldsymbol{b}$ の十分近傍ではつねに $\lambda_i{}^0 > 0$ であるから，Kuhn-Tucker の条件 (ii) により，$\boldsymbol{b}$ の近傍で恒等的に $g_i(\boldsymbol{x}^0) = b_i$ が成立する。よって，この式の両辺を b_k で微分すると

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \frac{\lambda x_j{}^0}{\partial b_k} = \delta_{ik}$$

ここで $\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & i=k のとき \\ 0 & i \neq k のとき \end{cases}$

となる。この式の両辺に $\lambda_i{}^0$ をかけ，$i \in I$ について加えると

$$\sum_{i \in I} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i{}^0 \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j{}^0}{\partial b_k} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^0 \delta_{ik}$$

$i \notin I$ ならば $\lambda_i{}^0 = 0$ であることを考慮すると

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i{}^0 \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j{}^0}{\partial b_j} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i{}^0 \delta_{ik} = \lambda_k{}^0$$

移項して

$$\lambda_k{}^0 - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i{}^0 \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \frac{\lambda \boldsymbol{x}^0}{\partial b_j} = 0 \qquad (7\cdot 2)$$

つぎに $Z_0 = f(\boldsymbol{x}^0)$ を b_k で微分すると

$$\frac{\partial Z^0}{\partial b_k} = \frac{\partial f(\boldsymbol{m})}{\partial k_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \frac{\partial x^0}{\partial b_k}$$

となるが，この式の右辺に (7・2) の左辺を加えると

$$\frac{\partial Z_0}{\partial b_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j{}^0}{\partial b_k} + \lambda_k{}^0 - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \lambda_i{}^0 \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j{}^0}{\partial b_k} = \lambda_k{}^0$$

本論文冒頭

$$+\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j^0}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}\right)\frac{\partial x_j^0}{\partial b_k} \qquad (7\cdot3)$$

ここで，$x_j^0>0$ となる j の集合を J とする。

$$J=\{\,j \mid x_j^0>0\}$$

$\boldsymbol{x}^0$ は $\boldsymbol{b}$ について連続だから，$\boldsymbol{b}$ の近傍で，$j\in J$ ならばつねに $x_j=0$ であり，$j\notin J$ ならば，つねに $x_j^0=0$ である。したがって，Kuhn-Tucker の条件(1)により，$j\in J$ ならば，$\boldsymbol{b}$ の近傍でつねに

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}=0$$

であり，$j\notin J$ ならば，$\boldsymbol{b}$ の近傍でつねに

$$\frac{\partial x_j^0}{\partial b_k}=0$$

である。したがって（7·3）の右辺の第2項はつねに0になって

$$\frac{\partial Z^0}{\partial b_k}=\lambda_k^0 \qquad (7\cdot4)$$

がえられる。

$\dfrac{\partial Z^0}{\partial b_k}$ は b_k の微小変化が最大収入にもたらす限界効果をあらわし，それが λ_k^0 にほかならないのである。経済学者の慣用の用語によれば，λ_k^0 は，第 k 資源の1単位の増加による企業の収入の増加分である。したがって λ_k^0 は第 k 資源の**限界（価値）生産力**にほかならず，これは，一般に **shadow price** とよばれているものに対応する。別の言い方をすれば，第 k 資源は，それを最適に使用することによって，限界1単位当り，λ_k^0 だけの収入をもたらすのである。

λ_k^0 に対してこのような意味が与えられれば，Kuhn-Tucker の条件 (i)，(ii) は，経済学的にきわめて当然な条件であることが理解される。まず (i)についていえば，条件(i)はつぎのように言い換えることができる。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}<\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j} \text{ となる } j \text{ に対しては } x_j^0=0 \qquad (7\cdot5)$$

$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$ は，いうまでもなく，第 j 製品の限界1単位の生産によって企業が獲得する収入である。第 j 製品の限界1単位を生産するのに要する第 i 資源の増加分が $\dfrac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$ であるから，不等式の右辺は，第 j 製品の限界1単位を生産するのに要する各資源の量を，shadow price λ_i^0 で評価したときの総価値額である。既述の shadow price の意味に照して考えれば，資源量ベクトル

$$\left(\frac{\partial g_1(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j},\ \frac{\partial g_2(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j},\ \cdots,\ \frac{\partial g_m(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}\right) \qquad (7\cdot6)$$

は，それの各成分を企業内で個別に最適に利用すれば，第 i 資源の限界1単位は λ_i^0 であらわされる価値を生む力をもっているのだから，全体として

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j}$$

だけの価値を生む力をもっているはずである。ところが（7·6）の資源ベクトルを実際に企業内に投入すると，$\dfrac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$ だけの収入増しかもたらさない。したがって，(7·5) の不等式が成立するということは，(7·6) の各資源量を使って第 j 製品を生産するということが，各資源に，それのもつ価値創造能力を一杯に発揮させることにはならないことを意味する。そして，そのような製品は最適な生産計画の中では，生産してはならない，というのが $x_j^0=0$ の意味である。あるいは，逆に見て，実際に生産される製品，すなわち $x_j^0>0$ となる j に対しては，それを生産することによって，各資源は能力一杯の力を出しているのであり，これが

$$x_j^0>0 \text{ ならば } \frac{\partial f(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^0\frac{\partial g_i(\boldsymbol{x}^0)}{\partial x_j}$$

の意味である。これにより条件 (i) のもつ経済的意味は明瞭になった。

条件(ii) の意味は，ほとんど自明に近い。すなわち，条件(ii)をいいかえて

$$g_i(\boldsymbol{x})<b_i \text{ となる } i \text{ に対して } \lambda_i^0=0$$

とすれば，これは，最適な生産計画を実行したとき，第 i 資源が余るならば，第 i 資源の shadpw price は0ということである。第 i 資源が余分にあるなら，第 i 資源の量を少し

本論文冒頭

減らしても，前と同じ生産計画を実行することは可能である。したがって，第 i 資源の限界1単位は，企業の収入増加に何ら貢献しない。そのような資源の限界（価値）生産力は当然0であり，したがって shadpw price は0である。この考え方は，技術的見地から，皆が十分に使用してもなお余りがあるほど多くある資源は経済学的には価値0と評価されるという，自由財の考えに通じるものである。

Kuhn-Tucker の条件(i)，(ii)は，線形計画法における**相補スラック性**（均衡定理ともいう）に対応するものである。

つぎに，双対問題の経済学的意味を考えてみよう。改めて双対問題をかいておく。

双対問題　条件

$$\frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \leqq 0,\ j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n,$$
$$\boldsymbol{x} \geqq 0,\ \boldsymbol{\lambda} \geqq 0 \qquad (7\cdot 7)$$

のもとで

$$\min\ F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) - \sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})}{\partial x_j} \qquad (7\cdot 8)$$

ここで

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda}) = f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\boldsymbol{x}))$$

であるから，$f(\boldsymbol{x})$，$g(\boldsymbol{x})$ を用いて双対問題を表わすとつぎのようになる。

双対問題　条件

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \leqq \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j},\ j=1,2,\cdots\cdots,m,$$
$$\boldsymbol{x} \geqq 0,\ \boldsymbol{\lambda} \geqq 0 \qquad (7\cdot 9)$$

のもとで

$$\min\ f(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\boldsymbol{x}))$$
$$-\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\boldsymbol{x})}{\partial x_j} \right) \qquad (7\cdot 10)$$

経済学的見地からすれば，主問題（表の問題ともいう）が生産の最適編成の問題であれば，双対問題（裏の問題ともいう）は資源の評価の問題であるべきである。そして，これらは，同一の問題の表から見た姿と裏から見た姿の記述であると考えられる。線形計画法においては両者の関係はまことにあざやかに説明できるので（文献〔9〕）非線形計画法においても，同様のことを試みてみよう。

はじめに，Lagrange 関数 $F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ の意味を考えてみよう。$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ だけの生産により企業の獲得する収入である。$b_i - g_i(\boldsymbol{x})$ は第 i で資源の余剰分であるから，$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\boldsymbol{x}))$ は $\boldsymbol{x}$ だけ生産したときの余剰資源の，価格体系 $\boldsymbol{\lambda}$ のもとでの総価値である。したがって，$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\lambda})$ は，資源価格ベクトルが $\boldsymbol{\lambda}$ であって $\boldsymbol{x}$ だけ生産したときの企業の総資産ともいうべきものである（総資産といっても，当面の生産活動に直接かかわる部分だけを問題にしているのであって，しかも，生産水準の変化によって影響を受ける部分のみに限定した用い方をしていることは言うまでもなかろう）。そうすると，$\frac{\partial F}{\partial x_j} \leqq 0$ という制約条件は，第 j 製品の限界1単位の生産に伴う総資産の変化分が正にならないこと，あるいは(7·9)の形でいえば，第 j 製品の限界1単位の生産に必要な各資源の価格体系 $\boldsymbol{\lambda}$ のもとでの総価値が，それによって生産される第 j 商品のもたらす収入を下まわらないことを意味する。これは，資源価格 $\boldsymbol{\lambda}$ のもとで限界コストが限界収入を下まわってはならないことを意味するから，ちょっと考えると，奇妙に感ぜられるかもしれない（線形計画法においても，事情は同じであった）。

目的関数の意味を（7·8）あるいは（7·10）に照して考えてみよう。

企業家が $\boldsymbol{x}$ だけ生産したものとする。このときの x_j の生産による限界収入は $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ であるが，彼がもし，資源を，不等式（7·9）をみたす価格体系 $\boldsymbol{\lambda}$ で売ることができると知ったならば，彼は第 j 製品の限界1単位について

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

だけ損をしたと考えるだろう。資源の価格は限界（価値）生産力で決まると考えれば，彼

本論文冒頭

は x の生産によって（λ で資源を他に売る場合に比べて

$$\sum_{j=1}^{n} x_j\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_j\frac{\partial g_i}{\partial x_j}-\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)=\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial F}{\partial x_j}$$

だけ損をしたと考えるだろう。$F(x,\lambda)$ は，すでに述べたように総資産と考えられるから，目的関数は“企業家が x だけの生産をし，そのとき資源が λ で売れると知ったときに，残余資源を λ で評価したときの企業家の総資産と，彼が x だけの生産をしたことによって蒙ったと考える機会損失額との合計である”とみなすことができよう。これは，裏から考えれば，企業家が，彼の生産した x と残余資源を資源価格 λ のときに手放すに当って補償として要求する額である，とみることもできよう。

以上のことを念頭におけば，双対問題に対して，つぎのような解釈を与えることができよう。

主問題の経済主体から，彼の持っている資源を買い取ろうとしている架空の主体を想定する。その際，架空の主体は，製品をもとの資源に還元する能力をもっているとしよう。したがって，彼は，企業家のもつ全資源を手に入れるに当って，必ずしもすべてを資源のままで入手しなくても，製品と資源の組合せの形で入手しても，何ら差し支えないものとする。こう考えれば，双対問題は，架空の主体から企業家への次のような提案と考えることができる。

“私があなたに，生産量 x と，残余資源の買取り価格を提示します。そのときの資源の買取り価格 λ は，その価格のもとでの資源の限界価値が，あなたの限界収入を下まわらないことを保証します。その上で，あなたが生産した製品のすべて，すなわち x と，残余資源のすべてを私に売って下さい。対価として私が支払う額は，x の生産によってあなたが得られるはずの収入額 $f(x)$ と，資源価格 λ のもとでの残余資源の価値総額，および，あたたが，λ で売れる資源で x だけの生産をしたことによって損をしたと思われるであろう損失額の合計です。”

この提案を，企業家は，彼が十分賢明であれば受け入れるはずである。なぜなら，双対定理で示したように，企業家が，自由意志で生産したときの彼の期待できる最大の収入額 $f(x^0)$ よりも，架空の主体の提示する保証額の方が，つねに多い（少くはない）からである。こうして，買取り交渉に応じさせた上で，架空の主体は，彼の支払額を，可能な限り小さくするように x と λ を決める。それが双対問題の意味である。そして，架空の主体が，支払額を最小にするように x と λ を決めたとき，企業家の手に入るのは，結局，彼が独自に，最適な生産をおこなったときの収入額と同じになってしまい，余剰の出る資源につける価格0はとなってしまうのである（Kuhn-Tucker 条件(ii))。これが双対定理の意味である。

参考文献

〔1〕 H. W. Kuhn and A. W. Tucker “Nonlinear Programming” Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. (1951)

〔2〕 M. Slater “Lagrange Multipliers, Revisited; A Contribution to Nonlinear Programming” Cowles Commission Discussion Paper, Math, 403 (1950)

〔3〕 H. Uzawa “The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming” Studies in Linear and Nonlinear Programming. (1958) Stanford

〔4〕 W. J. Zangwill: Nonlinear Programming Prantice-Hall. (1969)

〔5〕 H. P. Künzi and W. Krelle: Nonlinear Programming: Blaisdell Publishing Company. (1966)

〔6〕 O. L. Mangasarian: Nonlinear Programming: Mc Graw-Hill. (1969) (関根智明訳『非

本論文冒頭

線形計画法』培風館)
〔7〕 G. Hadley: Nonlinear and Dynamic Programming, Addison-Wesley Publishing Company. (1964)
〔8〕 小山昭雄「Shadow Price と限界価値生産力」『上智経済論集』Vol. XIII. No. 1. (1966)
〔9〕 小山昭雄『線型計画入門』日経文庫77.
〔10〕 小山昭雄「ラグランジュ乗数法をめぐって」『上智経済論集』Vol. XX. No. 23. (1974)