定数係数線型連立微分方程式・差分方程式の解の一般型 ——経済数学講義への補論——

小　山　昭　雄

1　はしがき

経済学において，とりわけ経済動学の理論に於て，微分方程式，差分方程式の果す役割は極めて大きい。経営科学の分野でも，待ち行列をはじめとして，さまざまな領域でこの理論は重要な道具となっている。ただ，社会科学で使用される微分方程式，差分方程式は定数係数線型という，限られたタイプのものがもっとも多い。このタイプのものは，数学的に，その解の構造がはっきりわかっていることと，応用面で多く現れる問題は，このタイプのものでほとんど間に合う，という事情によるのである。

定数係数線型連立微分方程式，差分方程式の理論は，行列の理論，とりわけ固有値，固有ベクトルの理論と深い係り合いをもつ。経済数学の講義で固有値，固有ベクトルに関する内容はかなり精しく説明しているし，差分方程式の話もしている。しかし，両者を結びつけた一般論まで述べるには時間が不足しているし，また，理論の構造もかなり複雑になるので，そこまで述べるのは無理かもしれない。そこで，より進んだ議論に興味をもたれる学生諸君のために，経済数学の講義の知識をもとにすれば理解できるように，講義の補足として，ここで一般論を展開しておきたいと思う。これが，本論文の第1の意図である。

この論文の意図はもう1つある。定数係数線型差分方程式の解の一般型を厳密な形で与える議論は，筆者の見聞した限りでは，巷間に見られる教科書には，内外を問わず，まったく見当らない。実際的な簡便法とでもいうべき方法はほとんどの教科書にあるが，それ以上に出ない。これは，厳密な理論が行列のジョルダン標準形の理論を必要とし，ジョルダンの標準形を導く論理がかなり面倒であることと，実際問題を取り扱うときは，簡便法で十分間に合う，ということによるのであろう。

微分方程式に関しては，有名なポントリヤーギンの教科書に見事な解説がある。しかし，そこで述べられた論理は，理解するのに少々骨が折れる。そこで，その論理を咬みくだいて述べた上で，結論を差分方程式に適用することを試みてみたい。これがもう1つの意図である。

内容的には，行列のジョルダン標準形を導く過程にかなり紙数を費すことになるが，ジョルダンの標準形自身も，線型経済学の進んだ理論を理解するのには必要な知識であり，ここで述べる説明は，巷間の数学の教科書にかかれているものよりも，ずっと明快になっているはずである。

2　ジョルダンの標準形

正方行列Aをジョルダンの標準形にすることは，ときに大変便利なことがある。A^nの$n\to\infty$のときの状態を調べる場合はその一例であるが，定数係数線型微分方程式，差分方程式の解の一般形を導く際にも，この形は必要

となる。しかし，その形を導く過程は，あまり容易ではない。まず，固有値，固有ベクトルに関する理論を整理することから始める。

2•1 固有値

n次正方行列Aに対して

$$Ax=\lambda x,\ \ x\neq 0 \qquad (2\cdot1)$$

をみたす数λとベクトルxを求める。この関係式は

$$(\lambda I-A)x=0 \qquad (2\cdot2)$$

とかくことができる。ここでIはn次単位行列である。この関係式をみたす$x\neq 0$が存在するための必要かつ十分な条件は，λが

$$|\lambda I-A|=0$$

をみたすことである。ここで$|\lambda I-A|$は行列$\lambda I-A$の行列式である。tのn次多項式

$$f_A(t)=|tI-A|$$

をAの**固有多項式**といい，$f_A(t)=0$を**固有方程式**という。固有方程式のn個の根を$\lambda_1, \lambda_2\cdots\lambda_n$とする。これが$A$の**固有値**である。固有値$\lambda$に対して，(2•1)あるいは(2•2)をみたすベクトル$x\neq 0$を，λに対応する**固有ベクトル**という。

固有値，固有ベクトルに関する主要な性質のうちで，基本的なものは経済数学の講義の中で説明しているが，ここでは，以下の議論に必要となる諸性質を定理の形でまとめておくことにする。

定理2•1 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$が$A$の相異る固有値であれば，対応する固有ベクトル$x_1, x_2, \cdots, x_k$は1次独立である。

証明

$$\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\cdots+\alpha_k x_k=0 \qquad (2\cdot3)$$

とおく。(2•3)式の両辺にλ_kをかけると

$$\alpha_1\lambda_k x_1+\alpha_2\lambda_k x_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k x_k=0 \qquad (2\cdot4)$$

一方，(2•3)の両辺に左からAをかけ，$Ax_j=\lambda_j x_j$という関係を使うと

$$\alpha_1\lambda_1 x_1+\alpha_2\lambda_2 x_2+\cdots+\alpha_k\lambda_k x=0 \qquad (2\cdot5)$$

(2•5)から(2•4)を引くと，$\alpha_k\lambda_k x_k$の項が消えて

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_k)x_1+\alpha_2(\lambda_2-\lambda_k)x_2+\cdots+\alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)x_{k-1}=0 \qquad (2\cdot6)$$

がえられる。ふたたび(2•6)式の両辺にλ_{k-1}をかけたものと，(2•6)式に左からAをかけて$Ax_j=\lambda x_j$を使ってかきなおした式の差をとれば，x_{k-2}の項が消えて

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{k-1})(\lambda_1-\lambda_k)x_1+\cdots+\alpha_{k-2}(\lambda_{k-2}-\lambda_{k-1})(\lambda_{k-2}-\lambda_k)x=0$$

がえられる。以下同様に進めて，結局

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)\cdots(\lambda_1-\lambda_k)x_1=0$$

がえられるが，ここで$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$がすべて相異ること，および，$x_1\neq 0$であることを考慮すると，$\alpha_1=0$でなくてはならない。同様にして$\alpha_2=\alpha_3=\cdots=\alpha_k=0$がえられるから，$x_1, x_2, \cdots, x_k$は1次独立である。（証明終）

定理2•2 Pを任意のn次正方行列としたとき，行列APとPAは同じ固有多項式をもつ。したがって当然，固有値も同じである。

証明。Pがゼロ行列であればAPもPAも共にゼロ行列となるから，定理の主張は当然成立する。そこで，Pはゼロ行列ではない場合を考える。まず，Pが正則（すなわち$|P|\neq 0$）のときはPの逆行列P^{-1}があるから$tI-AP=(tP^{-1}-A)P$とかくことができしたがって行列APの固有多項式は

$f_{AP}(t)=|tI-AP|=|(tP^{-1}-A)P|=|tP^{-1}-A|\,|P|$とかける。同様にして$PA$の固有多項式は

$f_{PA}(t)=|tI-PA|=|P(tP^{-1}-A)|=|P|\,|tP^{-1}-A|$となる。この両式の右辺は同じものだから，左辺も同じである。よって$f_{AP}(t)=f_{PA}(t)$である。

Pが正則でないときはPは逆行列をもたないから上述の論法は使えないが，この場合は絶対値が十分小さいすべての$\varepsilon\neq 0$に対して$\varepsilon I+P$は正則になる。なぜなら，$|tI+P|=0$となるのはtが$-P$の固有値の場合に限るから，$-P$の固有値のうちで，0を除いて絶対値の最小のものをαとすれば，$0<|\varepsilon|<|\alpha|$となるようなどんなεに対しても，$|\varepsilon I+P|=0$とはなりえないからである。このようにえらばれたεに対して$\varepsilon I+P$に上

本論文目次

述の結果を適用すると

$$f_{A(\varepsilon I+P)}(t)=f_{(\varepsilon I+P)A}(t)$$

がえられるが，固有多項式の係数は行列の要素の連続関数であることに注意して $\varepsilon\to 0$ とすれば，$f_{AP}(t)=f_{PA}(t)$がえられる。(証明終)

系　Pが正則であれば $f_{P^{-1}AP}(t)=f_A(t)$

証明，定理2の結論のところでAを $P^{-1}A$ でおきかえればよい。(証明終)

一般に，tのm次多項式

$$g(t)=a_0t^m+a_1t^{m-1}+\cdots a_{m-1}t+a_m$$

に対して，tのところへn次正方行列Aを代入してえられる行列を $g(A)$とかく。ただし，定数a_mのところはa_mIとしておく。すなわち

$$g(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots a_{m-1}A+a_mI$$

これに対して，次の定理が成り立つ。

定理 2・3 (Frobeniusの定理) (註) Aの固有値をλ_1，λ_2，…，λ_nとすれば，$g(A)$の固有値は$g(\lambda_1)$，$g(\lambda_2)$，…，$g(\lambda_n)$である。

(註) Frobenius の名を冠してある定理はいくつもある。産業連関論で重要な非負行列に関して，経済学者の間で著名なFrobeniusの定理は，ここで述べるものとは異る。

証明　$g(\lambda_j)$が$g(A)$の固有値であることはすぐわかる。λ_jに対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{x}_j$とすれば

$A\boldsymbol{x}_j=\lambda_j\boldsymbol{x}_j$，$A^2\boldsymbol{x}_j=\lambda_jA_j\boldsymbol{x}=\lambda_{2j}\boldsymbol{x}_j$，…，$A^n\boldsymbol{x}_j=\lambda_j{}^n\boldsymbol{x}_j$であるから，

$$(a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_{m-1}A+a_mI)\boldsymbol{x}_j$$
$$=(a_0\lambda_j{}^m+a_1\lambda_j{}^{m-1}+\cdots+a_{m-1}\lambda_j+a_m)\boldsymbol{x}_j$$

がえられる。すなわち

$$g(\mathrm{A})\boldsymbol{x}_j=g(\lambda_j)\boldsymbol{x}_j,\quad \boldsymbol{x}_j\neq 0$$

が成り立つ。これは，$g(\lambda_j)$が行列$g(A)$の固有値であり，対応する固有ベクトルが$\boldsymbol{x}_j$であることを示している。

しかし，$g(A)$の固有値が$g(\lambda_1)$，$g(\lambda_2)$，…，$g(\lambda_n)$のみであることを示さなくてはならない。そのためには，次のようにすればよい。まず

$$f_A(t)=|tI-A|=(t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n)$$

である。一方，$g(t)=0$の根をα_1，α_2，…，α_mとすると

$$g(t)=a_0(t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_m)$$

であるから，ここでtのところへAを代入して

$$g(A)=a_0(A-\alpha_1I)(A-\alpha_2I)\cdots(A-\alpha_mI)$$

がえられる。両辺の行列式をとると

$$|g(A)|=a_0{}^n|A-\alpha_1I||A-\alpha_2I|\cdots|A-\alpha_mI|=(-1)^{mn}a_0{}^n|\alpha_1I-A||\alpha_2I-A|\cdots|\alpha_mI-A|$$

ところで

$$|\alpha_iI-A|=f_A(\alpha_i)=(\alpha_i-\lambda_1)(\alpha_i-\lambda_2)\cdots(\alpha_i-\lambda_n)$$

であるから，これを上式に代入すると

$$|g(A)|=(-1)^{mn}a_0{}^n[(\alpha_1-\lambda_1)(\alpha_1-\lambda_2)\cdots(\alpha_1-\lambda_n)][(\alpha_2-\lambda_1)(\alpha_2-\lambda_2)\cdots(\alpha_2-\lambda_n)]\cdots[(\alpha_m-\lambda_1)(\alpha_m-\lambda_2)\cdots(\alpha_m-\lambda_n)]$$

ここで右辺をλについてまとめなおせば

$$[a_0(\lambda_1-\alpha_1)(\lambda_1-\alpha_2)\cdots(\lambda_1-\alpha_m)]\cdots[a_0(\lambda_n-\alpha_1)(\lambda_n-\alpha_2)\cdots(\lambda_n-\alpha_m)]=g(\lambda_1)g(\lambda_2)\cdots g(\lambda_n)$$

がえられる。$g(t)$はtに関する任意の多項式でよいから，任意のsに対して$h(t)=s-g(t)$とおいて，多項式$h(t)$に対して上述の結論を適用すると

$$|h(A)|=h(\lambda_1)h(\lambda_2)\cdots h(\lambda_n)$$

となるが，ここで$|h(A)|=|sI-g(A)|$，$h(\lambda_j)=s-g(\lambda_j)$であるから

$$|sI-g(A)|=(s-g(\lambda_1))(s-g(\lambda_2))\cdots(s-g(\lambda_n))$$

がえられる。左辺は$g(A)$の固有多項式$f_{g(A)}(s)$に他ならない。よって$g(A)$の固有値は$g(\lambda_1)$，$g(\lambda_2)$，$g(\lambda_n)$のみである。

定理2・4 (Hamilton - Cayley の定理) Aの固有多項式を$f_A(t)$とすると

$$f_A(A)=O$$

である。ここで右辺のOはゼロ行列である。

証明　e_jを，第j成分が1で，その他の成分がゼロである単位ベクトルとする。Aの第j列を$\boldsymbol{a}_j$とし，$(i,\ j)$要素をa_{ij}とすれば

$$Ae_j=\boldsymbol{a}_j=a_{1j}e_1+a_{2j}e_2+\cdots+a_{nj}e_n=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$$

とかける。また，δ_{ij}を，$i=j$ならば1，$i\neq j$

本論文目次

ならば0をあらわす記号(Kronecker のデルタとよばれている)とすれば$Ae_j=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}Ae_i$とかけるから

$$\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}Ae_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}e_i$$

となる。よって，移項して

$$\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ij}A-a_{ij}I)e_i=\mathbf{0} \qquad (2\cdot7)$$

がえられる。いま，行列

$$tI-A=\begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12}\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t-a_{22}\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \\ -a_{n1} & -a_{n2}\cdots & t-a_{nn} \end{pmatrix}=(\delta_{ij}t-a_{ij})$$

の余因数行列を$B(t)=(b_{ij}(t))$とすれば

$$(tI-A)B(t)=\begin{pmatrix} |tI-A| & & & 0 \\ & |tI-A| & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & |tI-A| \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} f_A(t) & & & 0 \\ & f_A(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & f_A(t) \end{pmatrix}$$

両辺の$(i,\ j)$要素を比較すると

$$\sum_{k=1}^{n}b_{kj}(t)(\delta_{ikt}-a_{ik})=\delta_{ij}f_A(t)$$

これはtについて恒等的な関係式だから，tをAでおきかえた式も成立する。よって

$$\sum_{k=1}^{n}b_{kj}(A)(\delta_{ik}A-a_{ik}I)=\delta_{ij}f_A(A)$$

両辺に右からe_iをかけてiについて加えると

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}b(_{kj}A)(\delta_{ik}A-a_{ik}I)e_i=\sum_{i=1}^{n}\delta_{ij}f_A(A)e_i$$

となるが

$$左辺=\sum_{k=1}^{n}b_{kj}(A)[\sum_{i=1}^{n}(\delta_{ik}A-a_{ik}I)e_i]$$

(2•7)により

$$=\sum_{k=1}^{n}b_{kj}(A)\cdot\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

$$右辺=f_A(A)e_j$$

であるから

$$f_A(A)e_j=\mathbf{0}$$

となる。これは$f_A(A)$の第j列がゼロ・ベクトルであることを示す。jは任意であったから，$f_A(A)=O$である。(証明終)

2•2 最小多項式

一般に，多項式$f(t)$で，$f(A)=O$(ゼロ行列)となるものがあれば，$f(t)$をAの**零化多項式**という。Hamilton-Cayleyの定理により，Aの固有多項式$f_A(t)$はAの零化多項式であるから，どんな正方行列Aに対しても，その零化多項式は必ず存在する。

Aの零化多項式のうちで次数が最小であり，かつ，最高次の項の係数が1であるものを，Aの**最小多項式**とよび，それを$\varphi_A(t)$であらわす。最小多項式に関して，次の定理が成立する。

定理 2•5 Aの任意の零化多項式$f(t)$は最小多項式$\varphi_A(t)$で割り切れる。Aが実数行列なら，$\varphi_A(t)$も実係数の多項式である。

証明　最小多項式の定義から，$\varphi_A(t)$の次数は$f(t)$の次数よりも大きくはない。$f(t)$を$\varphi_A(t)$で割った商を$g(t)$，余りを$r(t)$とすると

$$f(t)=g(t)\varphi_A(t)+r(t)$$

となるから

$$f(A)=g(A)\varphi_A(A)+r(A)$$

ところで$f(A)=\varphi_A(A)=O$であるから$r(A)=O$となり，$r(t)$もAの零化多項式となるが，$r(t)$の次数は$\varphi_A(t)$の次数よりも小さいことと，$\varphi_A(t)$が次数最小の零化多項式であることから，$r(t)\equiv0$でなくてはならない。よって$f(t)$は$\varphi_A(t)$で割り切れる。次に

$$\varphi_A(t)=t^m+b_1t^{m-1}+\cdots+b_{m-1}t+b_m$$

としたとき

$$\varphi_A(A)=A^m+b_1A^{m-1}+\cdots+b_{m-1}A+b_mI$$
$$=O$$

であるから，Aが実数行列であれば，$\varphi_A(A)$の共役複素行列を$\overline{\varphi_A(A)}$としたとき

$$\overline{\varphi_A(A)}=A^m+\overline{b}_1A^{m-1}+\cdots\overline{b}_{m-1}A+\overline{b}_mI=O$$

本論文目次

となる。よって，b_iを$\overline{b_i}$の共役複素数として

$$\overline{\varphi_A}(t)=t^m+\overline{b}_1t^{m-1}+\cdots\overline{b}_{m-1}t+\overline{b}_m$$

もAの零化多項式となる。したがって$\overline{\varphi_A}(t)$は$\varphi_A(t)$で割り切れるが，$\varphi_A(t)$と$\overline{\varphi_A}(t)$は最高次の係数は共に1であるから，そして共にtのm次式であるから，$\varphi_A(t)\equiv\overline{\varphi_A}(t)$でなくてはならない。よって$\varphi_A(t)$は実係数の多項式である。

定理2・6　λがAの固有値であるための必要十分条件はλが$\varphi_A(t)=0$の根となることである。

証明　Aの固有値をλ，対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{x}$とすれば，Frobenius の定理の証明のところで述べたのと同様な論法により，$\varphi_A(A)\boldsymbol{x}=\varphi_A(\lambda)\boldsymbol{x}$が成立する。ところが$\varphi_A(A)=O$であるから，$\varphi_A(\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$となり，$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$であるから$\varphi_A(\lambda)=0$でなくてはならない。よって$\lambda$は$\varphi_A(t)=0$の根である。

逆は次のようにしてわかる。Hamilton-Cayley の定理によりAの固有多項式$f_A(t)$はAの零化多項式であるから，定理5により$f_A(t)$は$\varphi_A(t)$で割り切れる。よって$f_A(t)=\varphi_A(t)g(t)$とかけるから，$\varphi_A(t)=0$の根は$f_A(t)=0$の根になる。したがって，λが$\varphi_A(t)=0$の根であれば，λは$f_A(t)=0$の根であり，Aの固有値である。(証明終)

定理2・7　Aの最小多項式$\varphi_A(t)$が

$\varphi_A(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)$，$\varphi_1(t)$と$\varphi_2(t)$は互に素と因数分解されるものとする。$n$次元ベクトルの全体（$n$次元空間）を$R^n$とし

$\varphi_1(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$となる$\boldsymbol{x}$の全体を$R_1$

$\varphi_2(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$となる$\boldsymbol{x}$の全体を$R_2$

とすれば，R^nはR_1とR_2の直和(註)に一意的に分解される。すなわち

$$R^n=R_1+R_2$$

(註)　$\boldsymbol{x}\varepsilon\boldsymbol{R}^n$が$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_1\varepsilon\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{x}_2\varepsilon\boldsymbol{R}_2$とかけ，$\boldsymbol{R}_1\cap\boldsymbol{R}_2=0$のとき$\boldsymbol{R}^n$は$\boldsymbol{R}_1$と$\boldsymbol{R}_2$の直和に分解される，という。このとき$\boldsymbol{R}^n=\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2$とかく。

証明　$\varphi_1(t)$と$\varphi_2(t)$は互に素，すなわち最大公約数が1，であるから，適当な多項式$p_1(t)$，$p_2(t)$に対して

$$1=p_1(t)\varphi_1(t)+p_2(t)\varphi_2(t)$$

が恒等的に成立する(註)。これは恒等式だから，tのところへ行列Aを入れた関係式

$$I=p_1(A)\varphi_1(A)+p_2(A)\varphi_2(A)$$

も成立する。$\boldsymbol{x}\varepsilon R^n$を任意にえらび，この$\boldsymbol{x}$を上式の両辺に右からかけると

$$\boldsymbol{x}=p_1(A)\varphi_1(A)\boldsymbol{x}+p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{x}$$

がえられる。そこで

$$\boldsymbol{x}_1=p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{x},\quad \boldsymbol{x}_2=p_1(A)\varphi_1(A)\boldsymbol{x}$$

とおくと

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$$

であって，しかも$\varphi_A(A)=0$であるから

$$\varphi_1(A)\boldsymbol{x}_1=\varphi_1(A)p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{x}=p_2(A)\varphi_1(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{x}=p_2(A)\varphi_A(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

よって$\boldsymbol{x}_1\varepsilon R_1$である。同様にして$\varphi_2(\mathrm{A})\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{0}$から$\boldsymbol{x}_2\varepsilon R_2$である。

(註)　φ_1の次数$\geqq\varphi_2$の次数，とする。φ_2をφ_1で割った商をq_1，余りをr_1をすると$\varphi_2=\varphi_1q_1+r_1$，ここで$r_1$の次数は$\varphi_1$の次数より小さい。次に$\varphi_2$を$r_1$で割り，商を$q_2$，余りを$r_2$とすると$\varphi_2=r_1q_2+r_2$で，$r_2$の次数は$r_1$の次数より小さい。同様に進めば，$\varphi_1$と$\varphi_2$は互に素だから，何回目かで余り1がになる。たとえば3回目で余りが1になったとすれば

$\varphi_2=\varphi_1q_1+r_1$，$\varphi_2=r_1q_2+r_2$，$\varphi_2=r_2q_3+1$

となる。真中の式にq_3をかけて最後の式のr_2q_3を消去すると$\varphi_2(1-q_2)+r_1q_2q_3=1$がえられるから，最初の式に$q_2q_3$をかけて，いま得た式から$r_1q_2q_3$を消去すると$\varphi_2(1-q_2+q_2q_3)-\varphi_1q_1q_2q_3=1$となる。そこで$p_1=-q_1q_2q_3$，$p_2=1-q_2+q_2q_3$とおけば$p_1\varphi_1+p_2\varphi_2=1$がえられる。$k$回目で余りが1となる場合も，同様である。

分解の一意性を証明するために，同じ$\boldsymbol{x}$がさらに$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$，$\boldsymbol{y}_1\varepsilon R_1$，$\boldsymbol{y}_2\varepsilon R_2$とかけたとすれば

$$\boldsymbol{y}_1=p_1(A)\varphi_1(A)\boldsymbol{y}_1+p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{0}+p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{y}_1=p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{y}_2+p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{y}_1=p_2(A)\varphi_2(A)(\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2)$$

本論文目次

$=p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1$

である。同様に $\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2$ である。よって $\boldsymbol{x}$ の $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$への分解は一意的である。

最後に，$R_1\cap R_2=\boldsymbol{0}$ であることは，次のようにしてわかる。$\boldsymbol{x}_0\varepsilon R_1\cap R_2$とすれば，$\boldsymbol{x}_0\varepsilon R_1$かつ$\boldsymbol{x}_0\varepsilon R_2$であるから$\varphi_1(A)\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$, $\varphi_2(A)\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$が共に成立する。よって，$\boldsymbol{x}_0=p_1(A)\varphi_1(A)\boldsymbol{x}_0+p_2(A)\varphi_2(A)\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$, すなわち$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{0}$でなくてはならない。(証明終)

この定理の論法を繰り返えすことにより，次の系がえられる。

系　$\varphi_A(t)=\varphi_1(t)\varphi_2(t)\cdots\varphi_k(t)$,　ここで各$\varphi_i(t)$はどの２つも互に素，と因数分解されるならば，$R^n$の任意の$\boldsymbol{x}$は

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_k$$

と一意的に分解される。ここで各$\boldsymbol{x}_j$, $j=1$, 2, …, k, は，$\varphi_j(A)\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{0}$ となるベクトルである。したがって，いま $\varphi_j(A)\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{0}$ となる$\boldsymbol{x}_j$ の全体をR_j とすれば，R^nは

$$R^n=R_1+R_2+\cdots+R_k$$

と直和分解される。

さて，行列Aの相異る固有値を λ_1, λ_2, …, λ_k とし，これらが固有方程式$f_A(t)=0$の，それぞれm_1, m_2, …, m_k重根であるとすると

$$f_A(t)=(t-\lambda_1)^{m1}(t-\lambda_2)^{m2}\cdots(t-\lambda_k)^{mk}$$

と因数分解される。一方，定理2•6によればλ_1, λ_2, …, λ_kは$\varphi_A(t)=0$ の根であり，しかも$\varphi_A(t)$は$f_A(t)$の因数であるから

$$\varphi_A(t)=(t-\lambda_1)^{l1}(t-\lambda_2)^{l2}\cdots(t-\lambda_k)^{lk}$$

と因数分解され，しかも

$$m_1\geqq l_1,\ m_2\geqq l_2,\ \cdots,\ m_k\geqq l_k$$

でなくてはならない。

$\varphi_A(t)$の各因数$(t-\lambda_j)^{lj}$, $j=1$, 2, … k, は互に素であるから，定理2•7の系により，R^nの任意のベクトル$\boldsymbol{x}$は

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2+\cdots+\boldsymbol{x}_k$$

$$(A-\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{0},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

と一意的に分解されることになる。そこで

$R_j=\{\boldsymbol{x}_j\mid(A-\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{0}\}$　$j=1, 2, \cdots, k$

とおくと(註)，R^nはR_1, R_2, …, R_kの直和に一意的に分解されることになる。このとき次の定理が成立する。

(註)　$\{\boldsymbol{x}_j\mid(A-\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{0}\}$は，$(A-\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{0}$となるすべての$\boldsymbol{x}_j$の集合，という意味である。

定理 2•8　各R_jはベクトル空間であり，その次元は固有値 λ_jの重複度m_jに等しい。

証明　$(A-\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ならば任意のスカラー$\alpha$ に対して$(A-\lambda_jI)^{lj}\alpha\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$であるから，$\boldsymbol{x}\varepsilon R_j$ ならば$\alpha\boldsymbol{x}_j\varepsilon R_j$である。また，$(A-\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, $(A-\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ならば$(A-\lambda_jI)^{lj}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\boldsymbol{0}$であるから，$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}\varepsilon R_j$ ならば $\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y}\varepsilon R_j$ である。よってR_jはベクトル空間である。

さらに

$$\boldsymbol{x}\varepsilon R_j \text{ ならば } A\boldsymbol{x}\varepsilon R_j$$

である。なぜなら，$\boldsymbol{x}\varepsilon R_j$ なら$(A-\lambda_j)^{lj}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$であるが，このとき $(A-\lambda_jI)^{lj}(A\boldsymbol{x})=A(A\lambda_jI)^{lj}\boldsymbol{x}=A\cdot\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$ となるからである。さて，R_jの次元をn_jとし，R_jの基底を構成するベクトルを

$$\boldsymbol{p}_1^{(j)},\ \boldsymbol{p}_2^{(j)},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{nj}^{(j)}$$

とする。$\boldsymbol{x}_j\varepsilon R_j$ をこの基底の１次結合として

$$\boldsymbol{x}_j=\boldsymbol{u}_1^{(j)}\boldsymbol{p}_1^{(j)}+\boldsymbol{u}^{(j)}\boldsymbol{p}_2^{(j)}+\cdots+\boldsymbol{u}_{nj}^{(j)}\boldsymbol{p}_{nj}^{(j)} \tag{2•8}$$

とあらわす。上に述べたことから，$A\boldsymbol{p}_1^{(j)}$, $A\boldsymbol{p}_2^{(j)}$, …, $A\boldsymbol{p}_{nj}^{(j)}$はいずれも$R_j$に属するから，これらを基底の１次結合としてあらわしたものを

$$\begin{aligned}A\boldsymbol{p}_1^{(j)}&=b_{11}^{(j)}\boldsymbol{p}_1^{(j)}+b_{21}^{(j)}\boldsymbol{p}_2^{(j)}+\cdots+b_{nj1}^{(j)}\boldsymbol{p}_{nj}^{(j)}\\A\boldsymbol{p}_2^{(j)}&=b_{12}^{(j)}\boldsymbol{p}_1^{(j)}+b_{22}^{(j)}\boldsymbol{p}_2^{(j)}+\cdots+b_{nj2}^{(j)}\boldsymbol{p}_{nj}^{(j)}\\&\cdots\cdots\qquad\qquad\cdots\cdots\\A\boldsymbol{p}_{nj}^{(j)}&=b_{1nj}^{(j)}\boldsymbol{p}_1^{(j)}+b_{2nj}^{(j)}\boldsymbol{p}_2^{(j)}+\cdots b_{njnj}^{(j)}\boldsymbol{p}_{nj}^{(j)}\end{aligned} \tag{2•9}$$

とし，$n\times n_j$行列$\boldsymbol{p}_j$, $n_j\times n_j$行列B_iを

$$P_j=(\boldsymbol{p}_1^{(j)},\ \boldsymbol{p}_2^{(j)},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{nj}^{(j)}),\quad B_j=$$

$$\begin{pmatrix}b_{11}^{(j)} & b_{12}^{(j)} & \cdots b_{1nj}^{(j)}\\ b_{21}^{(j)} & b_{22}^{(j)} & \cdots b_{2nj}^{(j)}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{nj1}^{(j)} & b_{nj2}^{(j)} & \cdots b_{njnj}^{(j)}\end{pmatrix}$$

本論文目次

で定義すると，(2•9)の関係は

$$AP_j=P_jB_j$$

とかくことができる。したがって(2•8)にAをかけると

$$Ax_j=u_1^{(j)}Ap_1^{(j)}+u_2^{(j)}Ap_2^{(j)}+\cdots+u_{nj}^{(j)}Ap_{nj}^{(j)}$$

$$=(Ap_1^{(j)},\ Ap_2^{(j)},\ \cdots,\ Ap_{nj}^{(j)})\begin{pmatrix} u_1^{(j)} \\ u_2^{(j)} \\ \vdots \\ u_{nj}^{(j)} \end{pmatrix}$$

$$=AP_ju_j=P_jB_ju_j \qquad (2•10)$$

となる。 ここで u_j は $u_1^{(j)}$, $u_2^{(j)}$, $\cdots$, $u_{nj}^{(j)}$ を成分とする n_j次元列ベクトルである。

さて，任意の $x \varepsilon R^n$ は

$$x=x_1+x_2+\cdots+x_k,\quad x_j \varepsilon R_j,\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$$

とかけるから，(2•10)の関係を使うと

$$Ax=Ax_1+Ax_2+\cdots Ax_k$$

$$=P_1B_1u_1+P_2B_2u_2+\cdots+P_kB_ku_k \qquad (2•10)$$

とかける。ここで

$$P=(P_1P_2\cdots P_k),\quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix},$$

$$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{pmatrix}$$

とおくと，(2•11)の関係は

$$Ax=PBu \qquad (2•12)$$

とかくことができる。一方(2•8)式は $x_j=P_ju_j$ とかけるから

$$x=x_1+x_2+\cdots x_k$$

$$=P_1u_2+P_2u_2+\cdots+P_ku_k \qquad (2•13)$$

$$=Pu$$

となる。(2•12)と(2•13)から $APu=PBu$ であり，さらに，Pは$n\times n$の正方行列で，各列ベクトルは1次独立であるから，Pは正則行列であり，したがって逆行列がある。よって

$$P^{-1}APu=Bu$$

という関係がえられる。ところで $u=P^{-1}x$ で x はR^n の任意のベクトルであったから，uも任意のベクトルをとることができる。したがって，u として n 個の単位ベクトルをとればすぐわかるように

$$P^{-1}AP=B$$

でなくてはならない。ところで定理2系により，Aと $P^{-1}AP=B$ は同じ固有多項式をもつ。

このことと，行列Bの形から，Bの固有多項式は B_1, B_2, $\cdots$, B_k の固有多項式の積となることはすぐわかるから

$$f_A(t)=f_B(t)=f_{B1}(t)f_{B2}(t)\cdots f_{Bk}(t) \quad (2•14)$$

がえられる。$AP=PB$から$A=PBP^{-1}$ となることを考慮すると

$$(A-\lambda_jI)^{lj}=(PBP^{-1}-\lambda_jPIP^{-1})^{lj}$$

$$=[P(B-\lambda_jI)P^{-1}]^{lj}$$

$$=P(B-\lambda_jI)^{lj}P^{-1}$$

となるが，ここで両辺にR_jの基底ベクトル $p_i^{(j)}$を右からかけると，R_j の定義から

$$0=(A-\lambda_jI)^{lj}p_i^{(j)}=P(B-\lambda_jI)^{lj}P^{-1}p^{(j)}$$

となる。ところで，右辺の $P^{-1}p_j^{(j)}$ は，Pの定義から，P のなかで$p_j^{(j)}$ が位置する列の番号と同じ番号をもつ成分が1で，その他の成分がゼロである単位ベクトルとなるから，それを $e_i^{(j)}$ とかくと

$$P(B-\lambda_jI)^{lj}e_i^{(j)}=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j$$

となり，両辺に左からP^{-1}をかけると

$$(B-\lambda_iI)^{lj}e^{(j)}=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n_j$$

がえられる。これは，行列

$$(B-\lambda_jI)^{lj}=\begin{pmatrix} (B_1-\lambda_jI_1)^{lj} & & & & 0 \\ & (B_2-\lambda_{2j}I)^{lj} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (B_j-\lambda_jI_j)^{lj} & \\ 0 & & & & \ddots \\ & & & & (B_k\lambda_jI_k)^{lj} \end{pmatrix}$$

の$(B_j-\lambda_jI_j)^{lj}$の部分がゼロ行列であることを意味するから，したがって多項式$(t-\lambda_j)^{lj}$ は B^jの零化多項式になる。しかも，この零化多項式は唯1つの根λ_j をもつだけであるから，定理2•6によりB_jの固有値はλ_j だけである。B_jは$n_j\times n_j$の大きさをもつから，B_jの固有多項式の次数はn_j である。よって

$$f_{Bj}(t)=|tI_j-B_j|=(t-\lambda_j)^{nj}$$

本論文目次

である。これと(2・13)の関係から

$$f_A(t)=(t-\lambda_1)^{n1}(t-\lambda_2)^{n2}\cdots(t-\lambda_k)^{nk}$$

がえられる。一方

$$f_A(t)=(t-\lambda_1)^{m1}(t-\lambda_2)^{m2}\cdots(t-\lambda_k)^{mk}$$

であったから，両者を比較すると

$$m_1=n_1,\quad m_2=n_2,\quad m_k=n_k$$

でなくてはならない。よって R_j の次元 n_j は λ_j の重複度 m_j に等しい。(証明終)

2・3 行列のジョルダン標準形

前節の結果を要約しておこう。行列 A の相異る固有値を λ_1，λ_2，…，λ_k とし，A の固有多項式を

$$f_A(t)=(t-\lambda_1)^{m1}(t-\lambda_2)^{m2}\cdots(t-\lambda_k)^{mk}$$

最小多項式を

$$\varphi_A(t)=(t-\lambda_1)^{l1}(t-\lambda_2)^{l2}\cdots(t-\lambda_k)^{lk}$$

とすれば，$m_1\geqq l_1$，$m_2\geqq l_2$，…，$m_k\geqq l_k$ である。

$$(A-\lambda_j I)^{lj}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

をみたす $\boldsymbol{x}$ の全体を R とすれば，n 次元空間 R^n は

$$R^n=R_1+R_2+\cdots+R_k$$

と直和分解される。各 R_j はベクトル空間であって，その次元は λ_j の重複度 m_j と一致する。各 R_j のなかから m_j 個の基底ベクトルをえらび，それらのすべてを並べてつくられる R^n の基底行列を P とすれば

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

となる。ここで各 B_j は m_j 次の正方行列で，対応する最小多項式中の因数 $(t-\lambda_j)^{lj}$ は B_j の零化多項式になる。

以上が前節の内容の要約であるが，以下においては，各 R_j の基底ベクトルをうまくえらぶことによって，行列 B_j をきれいな形——ジョルダンの標準形——にすることを考えるのである。各 R_j に対して適用される以下の考察では，記号の簡単化のために，下つき添字 j はすべて省略してかくことにする。

λ は A の重複度 m の固有値で，最小多項式の中での λ の重複度が l，$(A-\lambda I)^l\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ をみたす $\boldsymbol{x}$ の全体を R とする。R は m 次元ベクトル空間で，対応する $P^{-1}AP$ 中の m 次正方行列が B である。

$\boldsymbol{x}\varepsilon R$ が，条件

$$(A-\lambda I)^r\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0},\quad (A-\lambda I)^{r-1}\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$$

をみたすとき，$\boldsymbol{x}$ の**次数**は r である，ということにする。R の定義から，当然，$r\leqq l$ である。

R に含まれるベクトルの系列 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ が

$$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0},\ (A-\lambda I)\boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{0},\ (A-\lambda I)\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1,\ \cdots,\ (A-\lambda I)\boldsymbol{x}_r=\boldsymbol{x}_{r-1}$$

をみたすとき，あるいは，同じことであるが

$$\boldsymbol{x}_1\neq\boldsymbol{0},\quad A\boldsymbol{x}_1=\lambda\boldsymbol{x}_1,\quad A\boldsymbol{x}_2=\lambda\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{x}_1,\quad\cdots,\quad A\boldsymbol{x}_r=\lambda\boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_{r-1}$$

をみたすとき，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$ を，固有値 λ に対応する A の**特性系列**といい，r をこの特性系列の**長さ**という。

$r=0$，1，2，…，l に対して，R のベクトル $\boldsymbol{x}$ で

$$(A-\lambda I)^r\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

をみたすものの全体を K_r であらわす。容易にわかるように，各 K_r はベクトル空間であって

$$R=K_l\supset K_{l-1}\supset\cdots\supset K_1\supset K_0=\boldsymbol{0}$$

となっている。そこで，まず，$K_l=R$ には含まれるが K_{l-1} には含まれないベクトル $\boldsymbol{u}_1^{(l)}$ をとる。あきらかに，$\boldsymbol{u}_1^{(l)}$ の次数は l である。次に，$\boldsymbol{u}_1^{(l)}$ と K_{l-1} から生成されるベクトル空間を考え，このベクトル空間に含まれない K_l のベクトルがあれば，その1つを $\boldsymbol{u}_2^{(l)}$ とする。$\boldsymbol{u}_2^{(l)}$ の次数も l である。さらに，$\boldsymbol{u}_1^{(l)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(l)}$，K_{l-1} で生成されるベクトル空間を考え，それに含まれない K_l のベクトルがあれば，その1つを $\boldsymbol{u}_3^{(l)}$ とする。以下同様に進むと，次数 l のベクトルの系列

$$\boldsymbol{u}_l^{(l)},\ \boldsymbol{u}_2^{(l)},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}$$

で，これらと K_{l-1} とから生成されるベクトル

本論文目次

空間がK_lと一致するようなものがえられる。そのつくり方から，$\boldsymbol{u}_1^{(l)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(l)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}$が1次独立であることはすぐわかるが，さらに

$$\alpha_1\boldsymbol{u}^{(l)}+\alpha_2\boldsymbol{u}^{(l)}+\cdots+\alpha_{nl}\boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}\varepsilon K_{l-1} \quad (2\cdot15)$$

となるのは，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{nl}=0$の場合に限ることが示される。なぜなら，(2•15)が成り立つとき

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1^{(l)}+\alpha_2\boldsymbol{u}_2^{(l)}+\alpha_{nl}\boldsymbol{u}_{ni}^{(l)}=\boldsymbol{v}$$

とおくと $\boldsymbol{v}\varepsilon \mathrm{K}_{l-1}$であるが，ここで $\alpha_{nl}\neq0$とすると

$$\boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}=\frac{1}{\alpha_{nl}}(\boldsymbol{v}-\alpha_1\boldsymbol{u}_1^{(l)}-\cdots-\alpha_{nl-1}\boldsymbol{u}_{nl-1}^{(l)})$$

の右辺は$\boldsymbol{u}_1^{(l)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nl-1}^{(l)}$と$K_{l-1}$で生成されるベクトル空間に含まれるから，左辺の$\boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}$もその空間に含まれることになって，$\boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}$のえらび方に矛盾する。よって $\alpha_{nl}=0$でなくてはならない。同じようにして，次々に$\alpha_{nl-1}=\cdots=\alpha_1=0$がえられるのである。

(2•15) の前提から$\alpha_1=\cdots=\alpha_{nl}=0$が導かれるとき，$\boldsymbol{u}_1^{(l)}$，$\boldsymbol{u}^{2(l)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}$は$K_{l-1}$を法として1次独立である，という。

同様な推論はすべてのK_r，$r=1$，2，…，lに対して成立する。すなわち，まず，K_rに含まれK_{r-1}に含まれないベクトル$\boldsymbol{u}_1^{(r)}$をとり，次に$\boldsymbol{u}_1^{(r)}$とK_{r-1}とで生成されるベクトル空間に含まれないK_rのベクトルがあれば，その1つ$\boldsymbol{u}_2^{(r)}$をとり，以下同様の手続きを続けて，K_rに含まれるがK_{r-1}には含まれないベクトルの系列

$$\boldsymbol{u}_1^{(r)},\ \boldsymbol{u}_2^{(r)},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{nr}^{(r)}$$

を，これらとK_{r-1}とで生成されるベクトル空間がK_rと一致するようになるまで選んでゆく。この$\boldsymbol{u}_1^{(r)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(r)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nr}^{(r)}$はいずれも次数は$r$であって，これらは$K_{r-1}$を法として1次独立になる。

さて，ここで，$\boldsymbol{u}_1^{(r)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(r)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nr}^{(r)}$が$K_{r-1}$を法として1次独立であれば

$$\boldsymbol{u}_j^{(r-1)}=(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_j^{(r)},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_r$$

で定義される$\boldsymbol{u}_1^{(r-1)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(r-1)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nr}^{(r-1)}$は，$K_{r-1}$に含まれ，$K_{r-2}$を法として1次独立になることを証明する。まず，$\boldsymbol{u}_j^{(r)}$は次数が$r$であるから$\boldsymbol{u}_j^{(r-1)}$の次数は$r-1$であり，したがって$\boldsymbol{u}_j^{(r-1)}\varepsilon K_{r-1}$である。次に

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1^{(r-1)}+\alpha_2\boldsymbol{u}_2^{(r-1)}+\cdots+\alpha_{nr}\boldsymbol{u}_{nr}^{(r-1)}\varepsilon K_{r-2}$$

とすると，K_{r-2}および$\boldsymbol{u}_j^{(r-1)}$の定義から

$$\boldsymbol{0}=(A-\lambda I)^{r-2}(\alpha_1\boldsymbol{u}_1^{(r-1)}+\cdots+\alpha_{nr}\boldsymbol{u}_{nr}^{(r-1)})$$
$$=(A-\lambda I)^{r-1}(\alpha_1\boldsymbol{u}_1^{(r)}+\cdots+\alpha_{nr}\boldsymbol{u}_{nr}^{(r)})$$

となるが，これは$\alpha_1\boldsymbol{u}_1^{(r)}+\cdots\alpha_{nr}\boldsymbol{u}_{nr}^{(r)}\varepsilon K_{(r-1)}$となることを示している。そして$\boldsymbol{u}_1^{(r)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(r)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nr}^{(r)}$は$K_{r-1}$を法として1次独立であったから，$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{nr}=0$でなくてはならない。

まったく同様にして，$k<r$に対して

$$\boldsymbol{u}_j^{(r-k)}=(A-\lambda I)^r\boldsymbol{u}_j^{(r)},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_r$$

で定義される$\boldsymbol{u}_1^{(r-k)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(r-k)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nr}^{(r-k)}$は，$K_{r-k}$に含まれ，かつ，$K_{r-k-1}$を法として1次独立であることが証明できる。

既に述べた，K_{l-1}を法として1次独立なK_lのベクトル

$$\boldsymbol{u}_1^{(l)},\ \boldsymbol{u}_2^{(l)},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{nl}^{(l)}$$

からスタートして，$\boldsymbol{u}_1^{(l-k)}$，$\boldsymbol{u}_2^{(l-1)}$，…，$\boldsymbol{u}_{nl}^{(l-1)}$を

$$\boldsymbol{u}_j^{(l-1)}=(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_j^{(l)},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_l$$

で定義する。これらはK_{l-1}に含まれ，K_{l-2}を法として1次独立である。次にこれらのベクトルとK_{l-2}で生成されるベクトル部分空間を考え，それに含まれないK_{l-1}のベクトルがあればその1つを$\boldsymbol{u}_{nl+1}^{(l-1)}$とする。 これをさらにつけ加えて拡大したベクトル部分空間を考え，それにも含まれないK_{l-1}のベクトルがあれば，その1つを$\boldsymbol{u}_{nl+2}^{(l-1)}$とし，これをさらにつけ加えて部分空間を拡大する。この操作を続けて次々に部分空間を拡大してゆき順次に

$$\boldsymbol{u}_{nl+1}^{(l-1)},\ \boldsymbol{u}_{nl+2}^{(l-1)}+\cdots,\ \boldsymbol{u}_{nl-1}^{(l-1)}$$

まで求めたとき，$\boldsymbol{u}_1^{(l-1)}$から$\boldsymbol{u}_{nl-1}^{(l-1)}$までと$K_{l-2}$で生成されるベクトル空間が$K_{l-1}$と一致するものとしよう。このとき，$K_{l-2}$につけ加えられる$K_{l-1}$のベクトルの全体

$$\boldsymbol{u}_1^{(l-1)},\ \boldsymbol{u}_2^{(l-1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{nl}^{(l-1)},\ \boldsymbol{u}_{nl+1}^{(l-1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{u}_{nl-1}^{(l-1)}$$

本論文目次

はK_{l-2}を法として1次独立になる。

次に，いま得た$u_j^{(l-1)}$, $j=1, 2, \cdots, n_{l-1}$から

$$u_j^{(l-2)}=(A-\lambda I)u_j^{(l-1)},\ j=1, 2, \cdots, n_{l-1}$$

によって$u_1^{(l-2)}$, $u_2^{(l-2)}$, $\cdots$, $u_{nl-1}^{(l-2)}$を定義する。これらはK_{l-2}に含まれ，K_{l-3}を法として1次独立になるが，これらとK_{l-3}とで生成されるベクトル部分空間がK_{l-2}と一致しないときは，前述と同様の手続きにより，順次に$u_{nl-1+1}^{(l-2)}$, $\cdots$を求め，それらを次々にK_{l-3}につけ加えることによって拡大されてゆく部分空間がK_{l-2}と一致するまで，その手続きを続ける。こうして

$$u_1^{(l-2)},\ u_2^{(l-2)},\ \cdots,\ u_{nl-2}^{(l-2)},\ u_{nl-1+1}^{(l-2)}\ \cdots,\ u_{nl-2}^{(l-2)}$$

がえられる。これらはK_{l-3}を法として1次独立なK_{l-2}のベクトルの系列である。以後同様の手続きを続け，こうして得られたすべての$u_j^{(r)}$をならべると，次のようになろう。

$$\begin{array}{l} u_1^{(l)},\ u_2^{(l)},\ \cdots,\ u_{nl}^{(l)} \\ u_1^{(l-1)}, u_2^{(l-1)}, \cdots, u_{nl}^{(l-1)}, u_{nl+1}^{(l-1)}, u_{nl-1}^{(l-1)} \\ \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \\ u_1^{(2)},\ u_2^{(2)}, \cdots, u_{nl}^{(2)}, u_{nl+1}^{(2)},\ \cdots,\ u_{nl-1}^{(2)},\ \cdots,\ u_{n2}^{(2)} \\ u_1^{(1)},\ u_2^{(1)}, \cdots, u_{nl}^{(1)}, u_{nl+1}^{(1)}, \cdots,\ u_{nl-1}^{(1)},\ \cdots,\ u_{n2}^{(1)},\ u_{n2+1}^{(1)},\ \cdots,\ u_{n1}^{(1)} \end{array} \tag{2•16}$$

これらのベクトルのうち，最下行に並んでいる$u_1^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, $\cdots$, $u_{n1}^{(l)}$はK_1の基底となり，これに下から2行目の$u_1^{(2)}$, $u_2^{(2)}$, $\cdots$, $u_{n2}^{(2)}$をつけ加えたn_1+n_2個のベクトルがK_2の基底になり，こうして，一般に，$u_1^{(r)}$, $u_2^{(r)}$, $\cdots$, $u_{nr}^{(r)}$までをつけ加えた$n_1+n_2+\cdots+n_r$個のベクトルがK_rの基底を構成する。それを証明しよう。

証明はrに関する数学的帰納法によっておこなう。$r=1$のときは，$u_1^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, $\cdots$, $u_{n1}^{(1)}$のえらび方は，まず，K_1には含まれるが$K_0=0$ではない$u_1^{(l)}$をとり，次いで$u_1^{(l)}$で生成される部分空間に含まれない$u_2^{(l)}\varepsilon K_1$をとり，さらに$u_1^{(l)}$, $u_2^{(l)}$で生成される部分空間に含まれない$u_3^{(l)}\varepsilon K_1$をとり，以下同様に続けて，究極的に$u^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, $\cdots$, $u_{nl}^{(l)}$のつくる部分空間がK_1と一致するまでとり続けるわけだから，これらがK_1の基底を構成するとは明らかであろう。

次に，$u_1^{(l)}, \cdots, n_{n1}^{(1)} \cdots, u_1^{(r-1)}, \cdots, u_{nr-1}^{(l-1)}$が$K_{r-1}$の基底であると仮定して，これに$u_1^{(r)}$, $\cdots$, $u_{nr}^{(r)}$をつけ加えた全体がK_rの基底になることを示す。そのために，まず，これらのベクトルが1次独立であることを示さなくてはならない。そこで

$$\alpha_1^{(r)}u_1^{(r)}+\cdots+\alpha_{nr}^{(r)}u_{nr}^{(r)}+\alpha_1^{(r-1)}u_1^{(r-1)}+\cdots+\alpha_{n1}^{(1)}u_{n1}^{(1)}=0 \tag{2•17}$$

とおく。両辺に$(A-\lambda I)^{r-1}$をかけると，左辺の$u_1^{(r+1)}$からあとの部分はゼロになるから

$$(A-\lambda I)^{r-1}(\alpha_1^{(r)}u_1^{(r)}+\cdots+\alpha_{nr}^{(r)}u_{nr}^{(r)})$$
$$=\alpha_1^{(1)}u_1^{(1)}+\alpha_2^{(r)}u_2^{(1)}+\cdots+\alpha_{nr}^{(r)}u_{nr}^{(1)}=0$$

がえられる。そして$u_1^{(l)}$, $u_2^{(l)}$, $\cdots$, $u_{nr}^{(l)}$はK_1の基底の一部分であるから1次独立であり，したがって$\alpha_1^{(r)}=\alpha_2^{(r)}=\cdots=\alpha_{nr}^{(r)}=0$でなくてはならない。それゆえ(16)式は

$$\alpha_1^{(r-1)}u_1^{(r-1)}+\cdots+\alpha_{n1}^{(1)}u_{n1}^{(1)}=0$$

となるが，帰納法の仮定により，$u_1^{(r-1)}$から$u_{n1}^{(1)}$まではK_{r-1}の基底であるから

$$\alpha_1^{(r-1)}=\alpha_2^{(r-1)}=\cdots\alpha_{n1}^{(1)}=0$$

である。よって1次独立性が示された。

次に，K_rの任意のベクトルは$u_1^{(1)}$から$u_{nr}^{(r)}$までの1次結合となることを示さなくてはならない。そこで$v\varepsilon K_r$を任意にえらぶ。K_rはK_{r-1}と$u_1^{(r)}$, $\cdots$, $u_{nr}^{(r)}$で生成されるベクトル空間であったから，適当な$w\varepsilon K_{r-1}$により

$$v=w+\alpha_1^{(r)}u_1^{(r)}+\cdots+{}_{knr}^{(r)}u_{nr}^{(r)}$$

とかくことができる。$w_1\varepsilon K_{r-1}$であるから，帰納法の仮定により$w\varepsilon$は$u_1^{(1)}$, $\cdots, u_{nr-1}^{(r-1)}$の1次結合になる。よってvは$u_1^{(1)}$から$u_{nr}^{(r)}$までの1次結合になる。

以上により，$u_1^{(1)}$から$u_{nr}^{(r)}$までがK_rの基底となることが示された。$r=l$の場合を考

本論文目次

えれば，(2•16)のベクトルの全体が$R=K_l$の基底になることがわかった。これらの基底ベクトルのうち，左端の縦に並んだ l 個の$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_1^{(l-1)}$, …, $\boldsymbol{u}_1^{(1)}$は，そのつくり方から

$$\boldsymbol{u}_1^{(l-1)}=(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_1^{(l)},\ \boldsymbol{u}_1^{(l-2)}=(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_1^{(l-1)},\ \dots,\ \boldsymbol{u}_1^{(l)}=(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_1^{(2)}$$

という関係で結ばれている。むろん $(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_1^{(l-1)}=\boldsymbol{0}$であり，かつ，$\boldsymbol{u}_1^{(l)}\neq\boldsymbol{0}$であるから，これらは長さ l の特性系列になっている。同様に，(2•16)の一番上の行の各$\boldsymbol{u}_1^{(l)}$, $\boldsymbol{u}_2^{(l)}$, …, $\boldsymbol{u}_{n_l}^{(l)}$から始まる$n_l$個の縦のベクトル系列は，いずれも長さ l の特性系列になっている。続いて，(2•16)の左からn_l+1列目から始まる$n_{l-1}-n_l$ 個のベクトル系列は，いずれも長さ $l-1$ の特性系列になっている。一般に，$r=1$, 2, …, lに対して，(2•16)の左から$n_{r+1}+1$番目の列から始まるn_r-n_{r+1}個のベクトル系列は，いずれも長さrの特性系列になっている。(2•16)のベクトルの総数は，$n_1+n_2+\dots+n_l$であるが，これらがベクトル空間Rの基底を構成するのであるから，$n_1+n_2+\dots+n_l=m$でなくてはならない。

さて，ここで，(2•16)の基底を逆の順序に並べかえる。すなわち，(2•16)の右下隅から順次に左へ，長さ1の特性系列を構成するn_1-n_2個の$\boldsymbol{u}_n^{(1)}$, …, $\boldsymbol{u}_{n2+1}^{(1)}$を$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_{n1-n2}$とかきかえる。次いでn_2-n_3個の長さ2の特性系列に移り，それらを各列ごとに下から上へととってゆき，上まで行ったらその左に移って，また下から上へととってゆく。こうして，長さ2の特性系列が終ったら，長さ3の特性系列に移り，やはり，各特性系列ごとに下から上へととってゆく。こうして，すべての$\boldsymbol{u}_j^{(r)}$を並べかえたものを

$$\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \dots,\ \boldsymbol{p}_m \tag{2•18}$$

とする。これらのうちの

$$\boldsymbol{p}_{i+1},\ \boldsymbol{p}_{i+2},\ \dots,\ \boldsymbol{p}_{i+r}$$

が長さrの特性系列になっているとしよう。これに対しては，特性系列であることから

$$\begin{aligned} A\boldsymbol{p}_{i+1}&=\lambda\boldsymbol{p}_{i+1}\\ A\boldsymbol{p}_{i+2}&=\boldsymbol{p}_{i+1}+\lambda\boldsymbol{p}_{i+2}\\ A\boldsymbol{p}_{i+3}&=\qquad\boldsymbol{p}_{i+2}+\lambda\boldsymbol{p}_{i+3}\\ &\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\ A\boldsymbol{p}_{i+r}&=\qquad\qquad\boldsymbol{p}_{i+r-1}+\lambda\boldsymbol{p}_{i+r} \end{aligned}$$

が成り立つから，これを行列の形でかくと

$$A(\boldsymbol{p}_{i+1},\ \boldsymbol{p}_{i+2},\ \dots,\ \boldsymbol{p}_{i+r})=(\boldsymbol{p}_{i+1},\ \boldsymbol{p}_{i+2},\ \dots,\ \boldsymbol{p}_{i+r})\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \text{\Large 0} \\ & & \lambda & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ \text{\Large 0} & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

となり，これを(2•9)と比較すると，Bの中の対応する部分が

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \text{\Large 0} \\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ \text{\Large 0} & & & \lambda \end{pmatrix} \tag{2•19}$$

となっていることがわかる。この形を**ジョルダン区画**とよぶ。基底(2•18)は，その最初のn_1-n_2 個は1つ1つが長さ1の特性系列であり，次の2(n_2-n_3)個は長さ2の特性系列がn_2-n_3個並んだものであり，同様にして，最後の$l(n_{l-1}-n_l)$個は長さlの特性系列が$n_{l-1}-n_l$個並んだものである。そして，各特性系列に対応して(2•19)の形のジョルダン区画が生ずるから，結局，Rの基底として(2•18)を採用すれば，行列Bは次の形をとることになる。

$$\begin{pmatrix} \boxed{\lambda} & & & & & \\ & \boxed{\lambda} & & & & \text{\Large 0} \\ & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{matrix}} & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1\\ 0 & \lambda\end{matrix}} & & \\ & \text{\Large 0} & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda & 1 & & 0\\ & \lambda & 1 & \\ & & \ddots & 1\\ 0 & & & \lambda\end{matrix}} & \end{pmatrix} \tag{2•20}$$

以上の結果を各B_jに適用することにより，次の定理がえられる。

定理 2•9 (Jordan の定理) 行列Aの相異る固有値をλ_1, λ_2, …, λ_kとし，固有多項式

本論文目次

における それらの重複度をそれぞれm_1, m_2, …, m_k, 最小多項式におけるそれらの重複度を l_1, l_2, …, l_k とする。各λ_jに対して

$$(A-\lambda_j I)^{l_j}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

をみたす$\boldsymbol{x}$の集合をR_jとすれば，R_jはn次元ベクトル空間R^nのm_j次元の部分空間であって，R^nは

$$R^n=R_1+R_2+\cdots+R_k$$

と直和分解される。各R_jの基底として，λ_jに対応するAの特性系列をとることができ，それらを特性系列の長さの短い順に並べたものを

$$\boldsymbol{p}_1^{(j)},\ \boldsymbol{p}_2^{(j)},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{mj}^{(j)}$$

とする。$j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ に対するこれらのベクトルをすべて並べた

$$\boldsymbol{p}_1^{(1)},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{m1}^{(1)},\ \boldsymbol{p}_1^{(2)},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{m2}^{(2)},\ \cdots,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_1^{(k)},\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_{mk}^{(k)}$$

はR^nの基底を構成する。そして，これらのつくる行列をPとすれば

$$J(A)=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

となり，ここで各B_jは(2•20)の形をとる。

この形の$J(A)$を，Aの**ジョルダンの標準形**というのである。

Aをジョルダン標準形にするには基底行列Pを求めなくてはならないが，Pの各列ベクトルは各λ_jに対応する特性系列になっている。したがって，特性系列を求めることができれば，ジョルダン標準形がえられる。

固有値の重複度がすべて1のときは，すなわち，n個の固有値がすべて相異るときは，ジョルダン標準形は，固有値を対角要素にもつ対角行列になる。このときのPは，各固有値λ_jに対応する固有ベクトル$\boldsymbol{p}_j$から成る行列$P=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n)$である。

〔例〕

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

のジョルダン標準形を求めてみる。Aの固有方程式は $(t-1)^3=0$ となるから，固有値1は3重根である。これに対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である。

一方，最小多項式は$(t-1)^3$の因数であるから，$(t-1)^r (r\leqq 3)$の形をとるが，ここでtをAとおくと$r=1$のときは

$$A-I=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$r=2$のときは

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって最小多項式は$(t-1)^2$ であり，$l=2$であって，特性系列の長さは最大限2である。

$(A-\lambda I)^l\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$となる$\boldsymbol{x}$の全体は，いまの場合，$(A-I)^2=O$だから，3次元ベクトル空間全体$R^3$になる。すなわち，$K_2=R^3$である。$K_1$は$(A-I)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ となる$\boldsymbol{x}$の全体だから，固有ベクトル $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される部分空間になる。K_2に含まれ，K_1に含まれないベクトル$\boldsymbol{u}_1^{(2)}$として，明らかに $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ がとれる。

これは次数2のベクトルであって，これから長さ2の特性系列がつくられる。それは，

$$\boldsymbol{u}_1^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{と} \boldsymbol{u}_1^{(1)}=(A-\lambda I)\boldsymbol{u}_1^{(2)}=$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

とから成る。$\boldsymbol{u}_1^{(1)}\varepsilon K_1$であるが，$\boldsymbol{u}_1^{(1)}$と$K_0=\boldsymbol{0}$で生成されるベクトル空間は K_1 と一致しないから，K_1に含まれ，かつ，$\boldsymbol{u}_1^{(1)}$と$K_0=\boldsymbol{0}$で生成される空間に含まれないベクトルとして

$$\boldsymbol{u}_2^{(1)}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$ をとれば，$\boldsymbol{u}_1^{(1)}$ と$\boldsymbol{u}_2^{(1)}$ はK_1

本論文目次

を生成する。そして，長さ2の特性系列$\boldsymbol{u}_1^{(2)}$，$\boldsymbol{u}_1^{(1)}$と，いま求めた$\boldsymbol{u}_2^{(1)}$が，$K_2=R^3$の基底を構成する。そこで

$$\boldsymbol{p}_1=\boldsymbol{u}_2^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{u}_1^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{p}_3=\boldsymbol{u}_1^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

とおくと

$$P=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\\0&3&0\end{pmatrix},$$

$$P^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&3&-2\\0&0&1\\3&0&0\end{pmatrix}$$

となり，これを用いて

$$J(A)=P^{-1}AP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&3&-2\\0&0&1\\3&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&2&0\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

となる。

Aが実数行列で，λがm重の複素数の固有値であれば，共役複素数$\overline{\lambda}$もm重の固有値で，λに対応する長さrの特性系列$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_r$に対して，それの共役複素ベクトル$\overline{\boldsymbol{p}_1}$，$\overline{\boldsymbol{p}_2}$，…，$\overline{\boldsymbol{p}_r}$は，$\overline{\lambda}$に対応する長さ$r$の特性系列となっている。

3　定数係数線型連立微分方程式の解

ここでは，xの未知関数y_1，y_2，…，y_nに関する連立微分方程式

$$\begin{aligned}y_1''&=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n\\ y_2'&=a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n\qquad(3\cdot1)\\ &\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\ y_n'&=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\cdots+a_{nn}y_n\end{aligned}$$

の解の一般形を求める問題を考える。ここでy_i'は関数y_iのxについての導関数をあらわす。a_{ij}は所与の定数である。未知関数のベクトルをy，係数行列をAとかく。

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{y}'=\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\\vdots\\y_n'\end{pmatrix},$$

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}\,a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21}\,a_{22}\cdots a_{2n}\\\cdots\quad\cdots\\a_1a_{n2}\cdots a_{nnn}\end{pmatrix}$$

そうすると，微分方程式(3•1)は簡単に

$$\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}\qquad(3\cdot2)$$

とかくことができる。

微分方程式(3•2)の解に関する基本的な性質をはじめに列挙しておこう。まず，$\boldsymbol{y}$が(3•2)の解であれば，任意の定数αに対して$\alpha\boldsymbol{y}$もまた(3•2)の解となるし，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$が共に(3•2)の解であれば，$\boldsymbol{y}_1+\boldsymbol{y}_2$もまた(3•2)の解となることは，すぐ確かめられる。一般に，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_k$がいずれも(3•2)の解であれば，それらの定数係数の1次結合はすべて(3•2)の解となる。

定理3•1　$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$を微分方程式(3•2)のn個の解ベクトルとすれば，それらを並べて得られる行列の行列式

$$D(x)=|\,\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n\,|$$

は恒等的にゼロになるか，あるいは決してゼロにならないかのいずれかである。

証明，$\boldsymbol{y}_1=\begin{pmatrix}y_{11}\\y_{21}\\\vdots\\y_{n1}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{y}_2=\begin{pmatrix}y_{12}\\y_{22}\\\vdots\\y_{n2}\end{pmatrix}$，…，

$$\boldsymbol{y}_n=\begin{pmatrix}y_{1n}\\y_{2n}\\\vdots\\y_{nn}\end{pmatrix}$$

とおけば

$$D(x)=\begin{vmatrix}y_{11}&y_{12}&\cdots&y_{1n}\\y_{21}&y_{22}&\cdots&y_{2n}\\&\cdots\cdots\cdots&&\\y_{n1}&y_{n2}&\cdots&y_{nn}\end{vmatrix}$$

となる。そこで$D(x)$のみたすべき微分方程式を求めてみよう。そのために$D(x)$の導関数$D'(x)$を計算する。

$$D'(x)=\begin{vmatrix}y'_{11}&y'_{12}&\cdots&y'_{1n}\\y_{21}&y_{22}&\cdots&y'_{2n}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots&&\\y_{n1}&y_{n2}&\cdots&y_{nn}\end{vmatrix}+$$

本論文目次

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y'_{21} & y'_{22} & \cdots & y'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{n1} & y'_{n2} & \cdots & y'_{nn} \end{vmatrix}$$

であるから，この式の右辺の各行列式を変形してみる。各$\boldsymbol{y}_j$が（3•2）すなわち（3•1）の解であることから，$\boldsymbol{y}_j$ の第 $\boldsymbol{i}$ 成分y_{ij} の導関数y'_{ij}は（3•1）により

$$\boldsymbol{y}'_{ij}=a_{i1}y_{11}+a_{i2}y_{2j}+\cdots a_{i}y_{nin}=\sum_{k-1}^{n}a_{ik}\boldsymbol{y}_{kj}$$

をみたすはずである。したがって

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y'_{i1} & y'_{i2} & \cdots & y'_{nn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{11} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{22} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{ik}y_{k2} & \cdots & \sum_{k-1}^{n} a_{ik}\boldsymbol{y}_{kn} \\ & & \cdots & \\ & & \cdots & \\ y_{n1} & y_{n1} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\sum_{n=1}^{n} a_{ik} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \\ y_{k1} & y_{k2} & \cdots & y_{kn} \\ \cdots & & \cdots & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii} \begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{12} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdots & & & \\ y_{i1} & y_{i2} & \cdots & y_{in} \\ \cdots & & & \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = a_{ii}D(x)$$

となる。よって

$$D'(x)=a_{11}D(x)+a_{22}D(x)+\cdots+a_{22}D(x)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}D(x)$$

となる。$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\alpha$とおけば，$D'(x)=\alpha D(x)$

すなわち

$$D'(x)-\alpha D(x)=0$$

となる。両辺に$e^{-\alpha x}$をかけると，左辺は$D'(x)$ $e^{-\alpha}-\alpha e^{x-\alpha x}D(x)=[D(x)e^{-\alpha x}]'$ となるから

$[D(x)e^{-\alpha x}]'=0$　　$\therefore D(x)e^{-\alpha x}=C$（定数）

すなわち

$$D(x)=Ce^{\alpha x}$$

となる。よって，$C\neq 0$なら，$D(x)$はxの値の如何にかかわらず，決してゼロにはならないし，$C=0$ならば，xは何であっても，$D(x)$は恒等的にゼロになる。（証明終）

$D(x)=|\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2\cdots\boldsymbol{y}_n|$ が決してゼロにならないとき，（3•2）の解の組$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$を，1組の**基本解**という。

定理 3•2　$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$を（3•2）の1組の基本解とすれば，（3•2）の任意の解$\boldsymbol{y}$は，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$…，$\boldsymbol{y}_n$の定数係数の1次結合としてあらわされる。

証明　仮定により任意のxに対して$D(x)=|\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2\cdots\boldsymbol{y}_n|\neq 0$であるから，各$x$に対して，ベクトル$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$は1次独立であり，これらはいずれも$n$次元ベクトルであるから，$n$次元空間の基底を構成する。したがって，$n$次元ベクトル$\boldsymbol{y}$は，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$の1次結合になる。各$x$に対して$\boldsymbol{y}$は$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$の1次結合になるが，結合の係数は一般に$x$に依存するかもしれない。そのことを考慮に入れて

$$\boldsymbol{y}=\alpha_1(x)\boldsymbol{y}_1+\alpha_2(x)\boldsymbol{y}_2+\cdots+\alpha_n(x)\boldsymbol{y}_n$$

とかくことができる。この式の両辺を微分すると

$$\boldsymbol{y}'=\alpha_1(x)\boldsymbol{y}_1'+\alpha_2(x)\boldsymbol{y}_2'+\cdots+\alpha_n(x)\boldsymbol{y}_n' \\ +\alpha_1'(x)\boldsymbol{y}_1+\alpha_2'(x)\boldsymbol{y}_2+\cdots+\alpha_n'(x)\boldsymbol{y}_n$$

となるが，右辺の前半は，$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$が（3•2）の解であるから

$$\alpha_1(x)\boldsymbol{y}_1'+\alpha_2(x)\boldsymbol{y}_2'+\cdots\alpha_n(x)\boldsymbol{y}_n' \\ =\alpha_1(x)A\boldsymbol{y}_1+\alpha_2(x)A\boldsymbol{y}_2+\cdots\alpha_n(x)A\boldsymbol{y}_n \\ =A(\alpha_1(x)\boldsymbol{y}_1+\alpha_2(x)A\boldsymbol{y}_2+\cdots\alpha_n(x)A\boldsymbol{y}_n=A\boldsymbol{y}$$

となる。一方$\boldsymbol{y}$も（3•2）の解であるから，左辺も$A\boldsymbol{y}$である。よって，すべてのxに対して

$$\alpha_1'(x)\boldsymbol{y}_1+\alpha_2'(x)\boldsymbol{y}_2+\cdots+\alpha_n'(x)\boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{0}$$

である。$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_n$はすべてのxに対して1次独立であるから，したがって，$\alpha_1'(x)$

本論文目次

$=\alpha_2'(x)=\cdots=\alpha'_n'(x)=0$ でなくてはならない。よって $\alpha_1(x)=C_1$, $\alpha_2(x)=C_2$, …, $\alpha_n(x)=C_n$, 各C_iは定数，である。すなわち

$$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{y}_1+C_2\boldsymbol{y}_2+\cdots+C_n\boldsymbol{y}_n$$

とかくことができる。(証明終)

定理3•2 により，微分方程式(3•2)のすべての解を求めるためには，1組の基本解を求めればよいことがわかった。そこで，(3•2)の基本解を求めることを考えてみよう。

そのために，いま

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{p}e^{tx}=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} e^{tx}$$

とおいて，この $\boldsymbol{y}$が(3•2)の解となるように t と $\boldsymbol{p}$の値を決めることを考える。この $\boldsymbol{y}$を(3•2)に代入すると，$\boldsymbol{y}'=(\boldsymbol{p}e^{tx})'=t\boldsymbol{p}e^{tx}$であるから，$\boldsymbol{y}'=A\boldsymbol{y}$は $t\boldsymbol{p}e^{tx}=A\boldsymbol{p}e^{tx}$ となるが，両辺をe^{tx}で割ると

$$t\boldsymbol{p}=A\boldsymbol{p}$$

という関係式がえられる。この関係は，t が Aの固有値であり，$\boldsymbol{p}$ が対応する固有ベクトルであることを示している。すなわち，行列Aの固有値λと，対応する固有ベクトル$\boldsymbol{p}$に対してで$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{p}e^{\lambda x}$を定義すれば，この$\boldsymbol{y}$は(3•2)の解を与えるのである。

Aの固有値を λ_1, λ_2, …, λ_nとし，対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_n$とする。ここで場合をわけて考えよう。

(a) λ_1, λ_2, …, λ_n がすべて相異る場合

第2節の最初に述べた定理2•1 により，この場合は，固有値 λ_1, λ_2, …, λ_n に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_n$ は1次独立である。そして，n 個の解ベクトルの組

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{p}_1e^{\lambda_1 x},\ \boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{p}_2e^{\lambda_2 x},\ \boldsymbol{y}_n=\boldsymbol{p}_ne^{\lambda_n x}$$

は1組の基本解になる。なぜなら，行列式

$$D(x)=|\boldsymbol{y}_1\boldsymbol{y}_2\cdots\boldsymbol{y}_n|$$
$$=|\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n|\,e^{(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)x}$$

は，$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_n$の1次独立性から，決してゼロにはならないからである。したがって，この場合，(3•2)の解の一般形は，定理3•2 により

$$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{p}_1e^{\lambda_1 x}+C_2\boldsymbol{p}_2e^{t2x}+\cdots+C_n\boldsymbol{p}_ne^{nx}$$

で与えられる。

(b) λ_1, λ_2, …, λ_n のなかに重根がある場合。この場合を扱うのに，第2節で述べたジョルダンの標準形が必要になる。行列Aの相異る固有値を λ_1, λ_2, …, λ_k とし，それらの重複度をm_1, m_2, …, m_k とする。このとき，第2節の結果により，適当に正則行列 P をえらんで，A をジョルダンの標準形

$$J(A)=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} B_1 & & & 0 \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & B_k \end{pmatrix}$$

にすることができる。ここでB_jは固有値λ_jに対応するm_j次の正方行列で，つぎの形をもつ。

$$B_j=\begin{pmatrix} \boxed{\lambda_j} & & & & & & & & 0 \\ & \boxed{\lambda_j} & & & & & & & \\ & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_j & 1 \\ 0 & \lambda_j\end{matrix}} & & & & & & \\ & & & \boxed{\begin{matrix}\lambda_j & 1 & & 0 \\ & \lambda_j & 1 & \\ & & \ddots & \lambda_j\ 1 \\ 0 & & & \lambda_j\end{matrix}} \\ 0 & & & & & & & & \end{pmatrix}$$

B_jの対角線上に並んでいる各ジョルダン区画は，対角線上にλ_jが並び，その右隣りに斜めに1が並び，その他の要素はすべてゼロである。

行列Aの m 重の固有値λに対応する上記の m 次の行列Bの中の1つのジョルダン区画をCとし，その大きさをrとする。

$$C=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

$J(A)=P^{-1}AP$ の第i行から第$i+r$行まで，第i列から第$i+r$列までの要素から成る r 次の小行列が上記のCであるとし，行列Pの第i列から第$i+r$列までの列ベクトルを$\boldsymbol{p}_i$, $\boldsymbol{p}_{i+1}$, …, $\boldsymbol{p}_{i+r}$ とすれば

$$AP=PJ(A)$$

本論文目次

の両辺の第 i 列から第 $i+r$ 列までを比較することによって

$Ap_i=\lambda p_i, Ap_{i+1}=\lambda p_{i+1}+p_i\cdots, Ap_{i+r}=\lambda p_{i+r}+p_{i+r-1}$ が成立していることがわかる。これは第2節で述べた P のつくり方から，当然のことであり，p_i, p_{i+1}, …, p_{i+r} は固有値 λ に対応する長さ r の特性系列になっている。これに対して，次の定理が成立する。

定理 3•3 A の固有値 λ 対応する長さ r の特性系列の1つを p_1, p_2, p_r とし，これらを用いて関数ベクトル $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_r(x)$ を

$$u_1(x)=p_1$$
$$u_2(x)=p_1x+p_2$$
$$u_3(x)=\frac{1}{2!}p_1x_2+p_2x+p_3$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_r(x)=\frac{1}{(r-1)!}p_1x^{r-1}+\frac{1}{(r-2)!}p_2x^{r-2}+\cdots+p_{r-1}x+p_r$$

で定義すれば，r 個の関数ベクトル

$$y_j=u_j(x)e^{\lambda x},\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

はいずれも微分方程式 (3•2) の解になっている。

(証明) まず，$u_j(x)$ の形から

$$u_j'(x)=u_{j-1}(x)$$

となることはすぐわかる。また，p_1, p_2, …, p_r が λ に対応する長さ r の特性系列であるから

$$Ap_1=\lambda p_1$$
$$Ap_2=\lambda p_2+p_1$$
$$\cdots\cdots$$
$$Ap_r=\lambda p_r+p_{r-1}$$

という関係が成立っている。これから

$$\begin{aligned}Au_j(x)&=\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}Ap_1+\frac{x^{j-2}}{(j-2)!}Ap_2+\cdots+xAp_{j-1}+Ap_j\\&=\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}\lambda p_1+\frac{x^{j-2}}{(j-2)!}(\lambda p_2+p_1)+\cdots+x(\lambda p_{j-1}+p_{j-2})+\lambda p_j+p_{j-1}\\&=\lambda\left(\frac{x^{j-1}}{(j-1)!}p_1+\cdots+xp_{j-1}+p_j\right)+\left(\frac{x^{j-2}}{(j-2)!}p_1+\cdots+xp_{j-2}+p_{j-1}\right)\\&=\lambda u_j(x)+u_{j-1}(x)\end{aligned}$$

という関係がえられる。これらを使うと，$y_j=u_j(x)e^{\lambda x}$ が (3•2) の解であることはすぐわかる。実際

$$y_j'=u'_j(x)e^{\lambda x}+\lambda u_j(x)e^{\lambda x}=u_{j-1}(x)e^{\lambda x}+\lambda u_j(x)e^{\lambda x}=(\lambda u_j(x)+u_{j-1})x))e^{\lambda x}=Au_j(x)e^{\lambda x}=Ay_j$$

となるからである。(証明終)

行列 A の相異る固有値を λ_1, λ_2, …, λ_k とし，それらの重複度を m_1, m_2, …, m_k とすれば，ジョルダン標準形 $J(A)=P^{-1}A'P$ における固有値 λ_j に対応する各ジョルダン区画に対して，その区画の大きさが r のとき，P の対応する r 個の列ベクトルが長さ r の特性系列になり，上記定理 (3•3) により，それらの列ベクトルを用いて，r 個の解ベクトル y をつくることができる。λ_j に対応するすべての特性系列の長さの合計は λ_j の重複度 m_j に等しいから，定理 3•3 の方法により，λ_j に対応する m_j 個の解ベクトルをつくることができる。各 λ_j に対してえられる m_j 個の解ベクトルは，全体でその個数は $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$ 個になるが，これら n 個の解ベクトルは微分方程式 (3•2) の1組の基本解を構成する。なぜなら，これら n 個の解ベクトルを順次 $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, $y_n(x)$ とすれば，各 $y_j(x)$ の形から明らかに $y_j(0)=p_j$ であり，P の正則性から

$D(0)=|y_1(0),\ y_2(0),\ \cdots,\ y_n(0)|=|p_1p_2\cdots p_n|=|P|\neq 0$ であって，したがって定理 3•1 により，すべての x に対して $D(x)\neq 0$ となるからである。そして，定理 3•2 により，一般解 y は，C_1, C_2, …, C_n を任意定数として

$$y=C_1y_1+C_2y_2+\cdots+C_ny_n$$

の形で与えられるのである。以上を定理としてまとめておく。

定理3・4　微分方程式(3・2)の係数行列 A の相異る固有値を λ_1, λ_2, …, λ_k とし，それらの重複度を m_1, m_2, …, m_k とする。A をジョルダン標準形 $J(A)=P^{-1}AP$ に変換する正則行列 P の各列ベクトルを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_n$ とする。これらは順次 λ_1, λ_2, …, λ_k に対応する特性系列を形成するが，そのうちの最初の m_1 個が λ_1 に対応する特性系列であり，次の m_2 個が λ_2 に対応する特性系列であり，以下同様にして，最後の m_k 個が λ_k に対応する特性系列になっているものとする。λ_j に対応する m_j 個の特性系列は，さらに，長さがそれぞれ 1，2，…，l_j（ここで l_j は最小多項式中の λ_j の重複度である）であるものをいくつかずつ含むが，それらのうちで長さが r であるものからは，定理3・3の方法により，r 個の解ベクトルをつくることができる。こうして，まず λ_1 の各特性系列ごとに，全体で m_1 個の解ベクトルがえられるから，それらを順次

$$\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_{m1}$$

とする。次いで λ_2 に対して同様にして m_2 個の解ベクトル

$$\boldsymbol{y}_{m1+1},\ \boldsymbol{y}_{m1+2},\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_{m1+m2}$$

をつくり，同様に続けて，すべての λ_1, λ_2, …, λ_k に対して求めた解ベクトルの全体を

$$\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n$$

とすれば，これらは微分方程式(3・2)の1組の基本解を構成し，一般解は，これらの定数係数の1次結合として

$$C_1\boldsymbol{y}_1+C_2\boldsymbol{y}_2+C_n\boldsymbol{y}_n$$

で与えられる。

この定理にもとづいて，例題をやってみよう。

〔例1〕 $\begin{cases} y'_1=y_1 \\ y'_2=2y_1+y_2 \\ y'_3=3y_1 \qquad +y_3 \end{cases}$

行列形でかくと

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

係数行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ は，第2節の例として考察したものである。そこで示したように，A の固有値は1で，その重複度は3であり，行列

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

を用いて，A をジョルダン標準形にすることができる。

$$J(A)=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

行列 P の第1列 $\boldsymbol{p}_1$ は長さ1の特性系列であり，第2列 $\boldsymbol{p}_2$ と第3列 $\boldsymbol{p}_3$ は長さ2の特性系列であるから

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{p}_1e^x,\ \boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{p}_2e^x,\ \boldsymbol{y}_3=(\boldsymbol{p}_2x+\boldsymbol{p}_3)e^x$$

とおくと，これらは1組の基本解を与える。よって一般解 $\boldsymbol{y}$ は

$$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{y}_1+C_2\boldsymbol{y}_2+C_3\boldsymbol{y}_3$$

$$=C_1\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^x+C_2\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}e^x+C_3\begin{pmatrix} 1 \\ 2x \\ 3x \end{pmatrix}e^x$$

で与えられる。すなわち

$$y_1= \qquad C_3e^x$$
$$y_2=(C_1+2C_2+2C_3x)e^x$$
$$y_3= \qquad (3C_2+3C_3x)e^x$$

が求める解である。

〔例2〕 $\begin{cases} y'_1=y_1+y_2 \\ y'_2=-y_1+3y_2 \end{cases}$

右辺の係数行列 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ の固有値は2で2重根である。$\lambda=2$ に対して

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},(A-\lambda I)^2$$
$$=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であるから最小多項式は $(t-2)^2$ であり，したがって特性系列の長さは2である。固有ベクトルは $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ という形をもつから $\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とおく，次いで $(A-\lambda I)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$ から $\boldsymbol{p}_2$ を求めると，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ は条件に合う。

$$P=(\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

本論文目次

とおくと，Aのジョルダン標準形は

$$J(A)=P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}$$

となり，ジョルダン区画はサイズ2のものが唯1つである。$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$が長さ2の特性系列になるから

$$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{p}_1e^{2x},\quad \boldsymbol{y}_2=(\boldsymbol{p}_1x+\boldsymbol{p}_2)e^{2x}$$

が1組の基本解となり，一般解$\boldsymbol{y}$は

$$\boldsymbol{y}=C_1\boldsymbol{y}_1+C_2\boldsymbol{y}_2=C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{2x}+C_2\begin{pmatrix}x\\x+1\end{pmatrix}e^{2x}$$

すなわち

$$y_1=(C_1+C_2x)e^{2x}$$

$$y_2=(C_1+C_2+C_2x)e^{2x}$$

となる。

定理3•2の方法で一般解を求めるには，係数行列Aの各固有値に対応する特性系列をすべて求めなくてはならない。上記の〔例1〕，〔例2〕のように行列のサイズが小さいときは，それはあまりむずかしいことではないが，行列のサイズが大きくなると，一般に，かなり面倒になる。

4　定数係数連立線型差分方程式の解

前節で微分方程式に対して展開した理論は，ほんの少しの変更を加えるだけで，ほとんどそのまま，差分方程式に対して当てはめることができる。

ここでは，整数値をとる変数xの未知関数$y_1(x)$，$y_2(x)$，…，$y_n(x)$に関する連立差分方程式

$$\begin{aligned}y_1(x+1)&=a_{11}y_1(x)+a_{12}y_2(x)+\cdots+a_{1n}y_n(x)\\y_2(x+1)&=a_{21}y_1(x)+a_{22}y_2(x)+\cdots+a_{2n}y_n(x)\\&\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\\y_n(x+1)&=a_{n1}y_1(x)+a_{n2}y_2(x)+\cdots+a_{nn}y_n(x)\end{aligned}\tag{4•1}$$

の解の一般形を求める問題を考える。前節と同様なベクトル，行列記号を用いて，(4•1)は

$$\boldsymbol{y}(x+1)=A\boldsymbol{y}(x)\tag{4•2}$$

とかくことができる。ここで，係数行列Aは正則であると仮定する。すなわち$|A|\neq 0$と仮定する[註]。

（註）$|A|=0$のときは，Aの行ベクトルは1次従属となるから，$y_1(x)$，$y_2(x)$，…$y_n(x)$のうちのあるものは，他の$y_j(x)$の1次結合となってしまうから，未知関数の個数を減らすことができる。

定理3•1に対応して次の定理が成立する。

定理4•1　$\boldsymbol{y}_1(x)$，$\boldsymbol{y}_2(x)$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)$を差分方程式(4•2)のn個の解ベクトルとすれば，それらを並べて得られる行列の行列式

$$D(x)=|\,\boldsymbol{y}_1(x),\ \boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(x)\,|$$

はすべてのxに対してゼロになるか，あるいは決してゼロにならないかのいずれかである。

証明　$\boldsymbol{y}_j(x)$，$J=1,\ 2,\ \cdots,\ n$はいずれも(4•2)の解であるから，$\boldsymbol{y}_j(x+1)=A\boldsymbol{y}_j(x)$である。これを用いて

$$\begin{aligned}D(x+1)&=|\,\boldsymbol{y}_1(x+1),\ \boldsymbol{y}_2(x+1),\ \cdots,\\&\qquad \boldsymbol{y}_n(x+1)\,|\\&=|\,A\boldsymbol{y}_1(x),\ A\boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\\&\qquad A\boldsymbol{y}_n(x)\,|\\&=|A|\ |\,\boldsymbol{y}_1(x),\ \boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\\&\qquad \boldsymbol{y}_n(x)\,|\\&=|A|\,D(x)\end{aligned}$$

すなわち，$D(x)$は1階の線型差分方程式

$$D(x+1)-|A|\,D(x)=0$$

をみたす。ここで，仮定により$|A|\neq 0$であるから，上式の両辺を$|A|^{x+1}$で割ると

$$\frac{D(x+1)}{|A|^{x+1}}-\frac{D(x)}{|A|^{x}}=0$$

すなわち

$$\Delta\left(\frac{D(x)}{|A|^{x}}\right)=0$$

である。ここでΔは差分記号である。よって

$$\frac{D(x)}{|A|^{x}}=C\qquad \text{すなわち}$$

$$D(x)=C\,|A|^{x}$$

となる。ここでCは定数である。この形から明らかなように，$C\neq 0$ならば$D(x)$は決してゼロにはならないし，$C=0$ならば，つねにゼロである。（証明終）

本論文目次

$D(x)=|\boldsymbol{y}_1(x),\ \boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(x)|$が決してゼロにならないとき，解の組$\boldsymbol{y}_1(x)$，$\boldsymbol{y}_2(x)$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)$を１組の**基本解**という。

定理3•2に対応して，次の定理が成立する。

定理4•2　$\boldsymbol{y}_1(x)$，$\boldsymbol{y}_2(x)$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)$を(4•2)の１組の基本解とすれば，(4•2)の任意の解$\boldsymbol{y}(x)$は，これら$\boldsymbol{y}_1(x)$，$\boldsymbol{y}_2(x)$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)$の定数係数の１次結合としてあらわすことができる。

証明　仮定により，各xに対して$D(x)=|\boldsymbol{y}_1(x),\ \boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(x)|\neq 0$であるから，ベクトル$\boldsymbol{y}_1(x)$，$\boldsymbol{y}_2(x)$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)$は各$x$に対して１次独立であり，しかも，これらはいずれも$n$次元ベクトルであるから，$n$次元空間の基底を構成する。したがって，任意の解であるn次元ベクトル$\boldsymbol{y}(x)$は，各xに対して，$\boldsymbol{y}_1(x)$，$\boldsymbol{y}_2(x)$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)$の１次結合になる。しかし，結合の係数はxに依存するかもしれないから，そのことを考慮して

$$\boldsymbol{y}(x)=\alpha_1(x)\boldsymbol{y}_1(x)+\alpha_2(x)\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+\alpha_n(x)\boldsymbol{y}_n(x) \qquad (4•3)$$

とかくことができる。これはすべてのxについて成り立つ関係式であるから，xを$x+1$でおきかえて

$$\boldsymbol{y}(x+1)=\alpha_1(x+1)\boldsymbol{y}_1(x+1)+\alpha_2(x+1)\boldsymbol{y}_2(x+1)+\cdots+\alpha_n(x+1)\boldsymbol{y}_n(x+1)$$

がえられるが，ここで，$\boldsymbol{y}(x)$，$\boldsymbol{y}_j(x)$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$はいずれも(4•2)の解であることを考慮すると

$$A\boldsymbol{y}(x)=\alpha_1(x+1)A\boldsymbol{y}_1(x)+\alpha_2(x+1)A\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+\alpha_n(x+1)A\boldsymbol{y}_n(x)$$
$$=A(\alpha_1(x+1)\boldsymbol{y}_1(x)+\alpha_2(x+1)\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+\alpha_n(x+1)\boldsymbol{y}_n(x))$$

がえられる。Aは正則だから，両辺にAの逆行列を左からかけて

$$\boldsymbol{y}(x)=\alpha_1(x+1)\boldsymbol{y}_1(x)+\alpha_2(x+1)\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+\alpha_n(x+1)\boldsymbol{y}_n(x)$$

がえられる。これと(4•3)式を比較すると

$$\alpha_1(x+1)\boldsymbol{y}_1(x)+\alpha_2(x+1)\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+\alpha_n(x+1)\boldsymbol{y}_n(x)=\alpha_1(x)\boldsymbol{y}_1(x)+\alpha_2(x)\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+\alpha_n(x)\boldsymbol{y}_n(x)$$

となる。移項して

$$(\alpha_1(x+1)-\alpha_1(x))\boldsymbol{y}_1(x)+(\alpha_2(x+1)-\alpha_2(x))\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots(\alpha_n(x+1)-\alpha_n(x))\boldsymbol{y}_n(x)=0$$

そして，各xに対して$\boldsymbol{y}_1(x)$，$\boldsymbol{y}_2(x)$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)$が１次独立であるから，各xに対して

$$\alpha_1(x+1)=\alpha_1(x),\ \alpha_2(x+1)=\alpha_2(x),$$
$$\alpha_n(x+1)=\alpha_n(x)$$

でなくてはならない，すなわち，$\alpha_1(x)$，$\alpha_2(x)$…，$\alpha_n(x)$はxに依存しない定数である。それをC_1，C_2，…，C_nとおけば，(4•3)は

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\boldsymbol{y}_1(x)+C_2\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+C_n\boldsymbol{y}_n(x)$$

となる。(証明終)

定理4•2により，差分方程式(4•2)のすべての解を求めるためには，それの１組の基本解を求めればよいことがわかった。そこで(4•2)の基本解を求めることを考えてみよう。

そのために，ここで

$$\boldsymbol{y}(x)=\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} t^x=\boldsymbol{p}t^x$$

とおいて，この$\boldsymbol{y}(x)$が(4•2)の解となるようにtと$\boldsymbol{p}$を決めることを考える。この$\boldsymbol{y}(x)$を(4•2)に代入すると$\boldsymbol{p}t^{x+1}=A\boldsymbol{p}t^x$となるが，両辺を$t^x$で割って

$$t\boldsymbol{p}=A\boldsymbol{p}$$

がえられる。これは，前節と同じく，tがAの固有値であり，$\boldsymbol{p}$が対応する固有ベクトルであることを示している。仮定により$|A|\neq 0$であるから，Aの固有値はゼロを含まない。Aの固有値をλ_1，λ_2，…，λ_nとし，対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}$，…，$\boldsymbol{p}_n$とすれば，$\lambda_j\neq 0$，$j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$であって，$\boldsymbol{y}_1(x)=\boldsymbol{p}_1\lambda_1{}^x$，$\boldsymbol{y}_2(x)=\boldsymbol{p}_2\lambda_2{}^x$，…，$\boldsymbol{y}_n(x)=\boldsymbol{p}_n\lambda_n{}^x$はいずれも(4•2)の解を与えるのである。ここで場合をわけて考える。

(a)　λ_1，λ_2，…，λ_nがすべて相異る場合

この場合は固有ベクトル$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_n$は１次独立になるから，n個の解ベクトルの組

本論文目次

$\boldsymbol{y}_1(x)=\boldsymbol{p}_1\lambda_1{}^x$, $\boldsymbol{y}_2(x)=\boldsymbol{p}_2\lambda_2{}^x$, …, $\boldsymbol{y}_n(x)=\boldsymbol{p}_n\lambda_n{}^x$

は1組の基本解になる。なぜなら

$$D(x)=|\,\boldsymbol{y}_1(x),\ \boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(x)\,|=|\,\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2\cdots\boldsymbol{p}_n\,|\,\lambda_1{}^x\lambda_2{}^x\cdots\lambda_n{}^x\neq 0$$

となるからである。よって(4•2)の一般解 $\boldsymbol{y}(x)$ は

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\boldsymbol{p}_1\lambda_1{}^x+C_2\boldsymbol{p}_2\lambda_2{}^x+\cdots+C_n\boldsymbol{p}_n\lambda_n{}^x$$

で与えられる。

(b) λ_1, λ_2, …, λ_nのなかに重根のある場合

この場合を一般的に扱うためには，特性系列を使わなくてはならない。

A の固有値 λ に対応する長さ r の特性系列の1つを $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_r$ とする。これらは1次独立なベクトルであって，関係式

$A\boldsymbol{p}_1=\lambda\boldsymbol{p}_1$, $A\boldsymbol{p}_2=\lambda\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1$, …, $A\boldsymbol{p}_r=\lambda\boldsymbol{p}_r+\boldsymbol{p}_{r-1}$ をみたす。これに対して，定理3•3に対応して次の定理が成立する。

定理 4•3　上記の特性系列を用いて

$$\boldsymbol{u}_1(x)=\boldsymbol{p}_1$$
$$\boldsymbol{u}_2(x)=x^{[1]}\boldsymbol{p}_1+\lambda\boldsymbol{p}_2$$
$$\boldsymbol{u}_3(x)=\frac{x^{[2]}}{2\ !}\boldsymbol{p}_1+\lambda x^{[1]}\boldsymbol{p}_2+\lambda^2\boldsymbol{p}_3$$
$$\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots$$
$$\boldsymbol{u}_r(x)=\frac{x^{[r-1]}}{(r-1)\ !}\boldsymbol{p}_1+\frac{x^{[r-2]}}{(r-2)\ !}\lambda\boldsymbol{p}_2+\cdots+\frac{x^{[2]}}{2\ !}\lambda^{r-3}\boldsymbol{p}_{r-2}+x^{[1]}\lambda^{r-2}\boldsymbol{p}_{r-1}+\lambda^{r-1}\boldsymbol{p}_r$$

によって $\boldsymbol{u}_1(x)$, $\boldsymbol{u}_2(x)$, …, $\boldsymbol{u}_r(x)$を定義し，これを用いて

$\boldsymbol{y}_1(x)=\boldsymbol{u}_1(x)\lambda^x$, $\boldsymbol{y}_2(x)=\boldsymbol{u}_2(x)\lambda^x$, …, $\boldsymbol{y}_r(x)=\boldsymbol{u}_r(x)\lambda^x$

とおけば，$\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, …, $\boldsymbol{y}_r(x)$ は連立差分方程式

$$\boldsymbol{y}(x+1)=A\boldsymbol{y}(x)$$

の1次独立な r 個の解になる。ここで $x^{[k]}$は階乗関数（x の k 階乗）$x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)$ をあらわす。

証明　まず $\boldsymbol{y}_j(x)=\boldsymbol{u}_j(x)\lambda^x$ が解になることを示す。

$$A\boldsymbol{u}_j(x)=\frac{x^{[j-1]}}{(j-1)\ !}A\boldsymbol{p}_1+\frac{x^{[j-2]}}{(j-2)\ !}\lambda A\boldsymbol{p}_2+\frac{x^{[j-3]}}{(j-3)\ !}\lambda^2A\boldsymbol{p}_3+\cdots+x^{[1]}\lambda^{j-2}A\boldsymbol{p}_{j-1}+\lambda^{j-1}A\boldsymbol{p}_j$$

$$=\frac{x^{[j-1]}}{(j-1)\ !}\lambda\boldsymbol{p}_1+\frac{x^{[j-2]}}{(j-2)\ !}\lambda(\lambda\boldsymbol{p}_2+\boldsymbol{p}_1)+\frac{x^{[j-3]}}{(j-3)\ !}\lambda^2(\lambda\boldsymbol{p}_3+\boldsymbol{p}_2)+\cdots+x^{[1]}\lambda^{j-2}(\lambda\boldsymbol{p}_{j-1}+\boldsymbol{p}_{j-2})+\lambda^{j-1}(\lambda\boldsymbol{p}_j+\boldsymbol{p}_{j-1})$$

$$=\left(\frac{x^{[j-1]}}{(j-1)\ !}+\frac{x^{[j-2]}}{(j-2)\ !}\right)\lambda\boldsymbol{p}_1+\left(\frac{x^{[j-2]}}{j(-2)\ !}+\frac{x^{[j-3]}}{(j-3)\ !}\right)\lambda^2\boldsymbol{p}_2+\cdots+(x^{[1]}+1)\lambda^{j-1}\boldsymbol{p}_{n-1}+\lambda^j\boldsymbol{p}_j$$

$$=\frac{(x+1)^{[j-1]}}{(j+1)\ !}\lambda\boldsymbol{p}_1+\frac{(x+1)^{[j-2]}}{(1-2)\ !}\lambda^2\boldsymbol{p}_2+\cdots+(x+1)^{[1]}\lambda^{j-1}\boldsymbol{p}_{j-1}+\lambda^j\boldsymbol{p}_j=\lambda\boldsymbol{u}_j(x+1)$$

すなわち

$$A\boldsymbol{u}_j(x)=\lambda\boldsymbol{u}_j(x+1)$$

が成り立つ。よって

$$\boldsymbol{y}_j(x+1)=\boldsymbol{u}_j(x+1)\lambda^{x+1}=A\boldsymbol{u}_j(x)\lambda^x=A\boldsymbol{y}_j(x)$$

となるから，$\boldsymbol{y}_j(x)$は解である。

次に$\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$, …, $\boldsymbol{y}_r(x)$が1次独立であることを示そう。そのために

$$\alpha_1\boldsymbol{y}_1(x)+\alpha_2\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{y}_r(x)=\boldsymbol{0}$$

とおく。左辺の各$\boldsymbol{y}_j(x)$に$\boldsymbol{u}_j(x)\lambda^x$を代入し，$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_r$ について整理すると，次の関係式がえられる。

$$\lambda^x\left(\alpha_1+\alpha_2x^{[1]}+\alpha_3\frac{x^{[2]}}{2\ !}+\cdots+\alpha_r\frac{x^{[r-1]}}{(r-1)\ !}\right)\boldsymbol{p}_1+\lambda^{x+1}\left(\alpha_2+\alpha_3x^{[1]}+\alpha_4\frac{x^{[2]}}{2\ !}+\cdots+\alpha_r\frac{x^{[r-2]}}{(r-2)\ !}\right)\boldsymbol{p}_2+\cdots+\lambda^{x+r-2}(\alpha_{r-1}+\alpha_rx^{[1]})\boldsymbol{P}_{r-1}+\lambda^{x+r-1}\alpha_r\boldsymbol{p}_r=\boldsymbol{0}$$

ベクトル$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, …, $\boldsymbol{p}_r$ は1次独立であるから，各$\boldsymbol{p}_j$の係数はゼロでなくてはならない。よって，$\lambda\neq 0$ であるから

$$\alpha_1+\alpha_2x^{[1]}+\alpha_3\frac{x^{[2]}}{2\ !}+\cdots+\alpha_r\frac{x^{[r-1]}}{(r-1)\ !}=0$$

本論文目次

$$\alpha_2+\alpha_3{}^{[1]}x+\alpha_4\frac{x^{[2]}}{2\,!}+\cdots+\alpha_r\frac{x^{[r-2]}}{(r-2)\,!}=0$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$\alpha_{r-1}+\alpha_r x^{[1]}=0$$

$$\alpha_r=0$$

である。最後の式から$\alpha_r=0$であり，これを最後から２番目の式に入れて$\alpha_{r-1}=0$，以下同様にして$\alpha_1=\alpha_2=\cdots\alpha_r=0$となって，１次独立性が示された。（証明終）

この定理から，定理3•4に対応して，次の定理がえられる。

定理 4•4　差分方程式(4•2)の係数行列Aの相異る固有値をλ_1, λ_2, …, λ_kとし，それらの重複度をm_1, m_2, …, m_kとする。各固有値の特性系列の全体を

$$\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n$$

とし，このうちの最初のm_1個がλ_1に対応する特性系列でありつぎのm_2個がλ_2に対応する特性系列であり，以下同様にして，最後のm_k個がλ_kに対応する特性系列になっているものとする。λ_jに対応する特性系列から成るm_j個のベクトルは，さらに，長さが1, 2, …, l_jである特性系列をいくつかずつ含む。そのうちの長さがrであるものに対して，前定理により，r個の１次独立な解が対応する。

λ_1に対応する各特性系列ごとに前定理の方法で関数$\boldsymbol{u}(x)$を定め，それを用いて$\boldsymbol{y}(x)$を定義する。それらを

$$\boldsymbol{y}_1(x),\ \boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_{m1}(x)$$

とする。次にλ_2に対して，同様にして

$$\boldsymbol{y}_{m1+1}(x),\ \boldsymbol{y}_{m1+2}(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_{m1+2m}(x)$$

を定め，このようにしてすべてのλ_j, $j=1$, 2, …, kに対して定めた$\boldsymbol{y}_j(x)$の全体を

$$\boldsymbol{y}_1(x),\ \boldsymbol{y}_2(x),\ \cdots,\ \boldsymbol{y}_n(x)$$

とすれば，これらは(4•2)の１組の基本解であって，一般解$\boldsymbol{y}(x)$はこれらの定数係数の１次結合として

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\boldsymbol{y}_1(x)+C_2\boldsymbol{y}_2(x)+\cdots+C_n\boldsymbol{y}_n(x)$$

とあらわすことができる。

〔例〕
$$\begin{cases} y_1(x+1)=5y_1(x)-3y_2(x) \\ y_2(x+1)=3y_1(x)-\ y_2(x) \end{cases}$$

係数行列　$A=\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$の固有値は２で，２重根である。$A$の最小多項式は$(t-2)^2$であるから$A$の特性系列は長さ２のものが１つあるだけである。固有ベクトルは$C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$の形になるから$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$とおくと，$\boldsymbol{p}_2$は$(A-\lambda I)\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{p}_1$から求められる。$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$とえらぶことができるから，この$\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$を使って

$$\boldsymbol{u}_1(x)=\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{u}_2(x)=x\boldsymbol{p}_2+\lambda\boldsymbol{p}_1=x$$

$\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}+2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$とおき，$\boldsymbol{y}_1(x)=\boldsymbol{u}_1(x)2^x$, $\boldsymbol{p}_2(x)=\boldsymbol{u}_2(x)2^x$で$\boldsymbol{y}_1(x)$, $\boldsymbol{y}_2(x)$を定義すれば，これが１組の基本解になる。よって一般解$\boldsymbol{y}(x)$は

$$\boldsymbol{y}(x)=C_1\boldsymbol{y}_1(x)+C_2\boldsymbol{y}_2(x)=C_1\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}2^x+C_2\begin{pmatrix} 3x+2 \\ 3x \end{pmatrix}2^x$$

すなわち

$$y_1(x)=(3C_1+2C_2+3C_2x)2^x$$
$$y_2(x)=(3C_1+3C_2)2^x$$

が求める一般解である。

5　お わ り に

第３節，第４節で扱った微分方程式，差分方程式は，いずれも，いわゆる同次方程式である。非同次方程式は，同次方程式の基本解が求まれば，たとえば，定数変化法などの方法により，解を求めることができる。

社会科学で現れる微分方程式，差分方程式では，解は実数値関数であることが要求される。固有値が複素数であり，対応する固有ベクトルが複素ベクトルである場合には，互に共役な関数の組が現れるから，それらを組み合せることにより，実関数の解をつくることができる。

本論文目次

ここで採り上げた形の微分方程式，差分方程式を解く際に，通常用いられる簡便法は，未知関数を消去して単一の未知関数の高階線型微分方程式をつくり，それらを解いて，その一般解の形を原方程式に代入して，任意定数間の関係を求める，というものである。この方法は，多くの本にその説明が載っているので，ここでは言及しなかった。ここで述べた方法は，ジョルダン標準形および関連する特性系列という，いささか面倒な概念に基づくものであるだけに，必ずしも実践的な方法とはいえないかもしれないが，解の理論的構造を明確にする，という点では，大へん美しい論理構成になっていると思う。

なお，定理 3•1，3•2，4•1，4•2， は定数係数でなくても成立する性質であることを指摘しておく。

参考文献

1 「経済数学」岡本・蔵田・小山編，有斐閣
2 「常微分方程式」ポントリヤーギン，千葉訳，共立出版

本論文目次