エッヂワース市場ゲームのコア

小 山 昭 雄

1 はじめに

さまざまなゲームを確率の問題として分析した歴史は確率論の歴史とともに古い。サイコロの類を用いて遊ぶゲームは古代からあったようであるが，結果の確率を初めて正しく計算したのは1500年代の初期であるといわれている。しかし，今日ゲームの理論といわれているものの内容は，利害の対立する場，競争のおこなわれる場における人間の行動の合理性を追求し，それに関する数学的理論を打ち建てることを意図したものであって，この意味でのゲームの理論の歴史は，まだ浅い。今日のゲームの理論でとりあげている問題で，部分的には素朴な形で1800年代に既に扱われていた問題もあるけれども，明確な問題意識のもとで体系的に考察されたのは，1928年のフォン・ノイマンの論文が最初であろう。その後，経済学者オスカー・モルゲンシュテルンが協力者として加わり，1944年にフォン・ノイマンとオスカー・モルゲンシュテルンの共著として〝ゲームの理論と経済行動″(Theory of Games and Economic Behavior.) と題する書物が世に出された。これは640頁にも及ぶ尨大な書物であって，その中には数多くの新しい考え方が登場し，当時の経済学をはじめとする社会科学の諸分野の研究者の間に大きなセンセーションを巻きおこしたのであった。その後一時ゲームの理論の研究が沈滞した時期があったけれども，ふたたび経済理論，政治学，心理学，社会学などの分野でこの理論の重要性が再認識されるようになって，最近では研究者の数もかなり増え，新しい成果が次々と生れてきている。

この論文で筆者がとりあげる問題は，エッヂワースの市場ゲーム (Edgeworth market game) に関わる問題である。エッヂワースが2財の交換に関する問題の解決に，いわゆるボックス・ダイアグラムを登場させ，解の集合として契約曲線とよばれるものを提示したことは経済学を学んだ人であるならば，知らない人はないだろう。そのモデルを一般化してゲーム論的な立場から考察しているのが，エッヂワースの市場ゲームとよばれるものである。

市場ゲームにおける財の配分様式はさまざまでありうるが，その中でもっとも安定した配分様式の集りをコアとよんでいる。そのコアについて1959年にシュービック (M. Shubik) が大へん面白い論文をかいている。彼の論文は，ノイマン・モルゲンシュテルンの理論の線に沿った手付けを許す協力 n 人ゲーム(cooperative n-person game with sidepayment) の理論の枠組の中で，完全競争の実現するプロセス，独占状態の実現するプロセスを，ゲーム論的に分析した最初の論文である。

その後，ゲームの理論も，手付けを認めない (without sidepayment) 協力ゲームの研究に発展し，コアの理論もその中で考察されるようになった。スカーフ (H. Scarf), デブリュー (G. Debreu), シャープレイ (L. S.

Sharpley）などによって，この種のコアの理論が，経済学における完全競争均衡の問題と結びつけられ，完全競争均衡解が，市場に登場するメンバーの数が限りなく増大した場合の市場ゲームのコアの極限の配分様式に一致するという，きわめて興味ある結果が得られている。ゲームのコアという概念と完全競争均衡解という概念は本来は別のものであるけれども，市場ゲームという舞台の上で，参加者が増大してゆく極限状態において両者が一致するということは，完全競争市場という，経済学では常に用いられている（いわば理想的な）状況の実現過程をゲーム論的に説明しているという意味で，大へん面白いし，また，重要な意味をもつのである。

これらの理論は，しかしながら，完全競争均衡，均衡価格の議論をまず前面に出して，完全競争均衡解はコアに属する，ということを証明することによって市場ゲームにコアがあることを示す，という手続きを踏んでいる。経済理論に主眼をおき，それの一環として市場ゲームを扱うという立場からすれば，この行き方が自然であろうし，またエレガントでもある。

この論文が上記の理論に多少ともつけ加える点があるとすれば，議論はすべて，手付けの授受を認める with sidepayment theory の枠組の中でおこなっているが，経済学における完全競争の理論とは一応切り離した形で，純粋にゲームの理論の枠組の中だけで，コアが常に存在することを示していることであろう。前記のシュービックの論文を読んでいて，そこの記述に少し不備な点があることに気付き，その点をはっきりさせようとしたことがこの論文の直接の動機であったことから，こういう行き方をしたのは当然のことである。完全競争均衡との関連は，得られた結果にあとから経済学的な意味付けをする，という形で，むしろ，副次的な意味で述べておいた。したがって，到達した結論は同じであっても，到達の過程は既に発表されている諸論文といささか異るように思えるし，純粋にゲーム論的な立場に立てば，筆者のたどった考え方の筋道も，それなりに興味はあろうと思うのである。読者の御意見をいただければ幸である。なお，第９節の独占の場合の極限定理である定理５は，シュービックの原論文に記されているものであるが，定理６とそれに続く記述，第10節の，寡占の場合についての記述はいままでの文献にはないように思うので，この点についても読者諸氏の御批判を期待するものである。

この種の議論はまだ一般には馴染みの薄いものであろうと思うので，かなり大まかではあるけれども，議論の展開の場をはっきりさせておく意味で，用いられる概念と関連する諸性質の説明はひととおり述べておくことにする。そのためには，協力n人ゲームの説明からスタートしなくてはならない。

2　特性関数形の協力 n 人ゲーム

n人のプレイヤーのいるゲームで，各プレイヤーはそれぞれいくつかずつの戦略をもち，彼等が各自の戦略を決めたとき，その帰結として１つのプレイがなされることになり，どういう形で終ったかによって，それぞれのプレイヤーの取り分（利得という）が決まる。これがn人ゲームの（標準形による）構造である。

ここで，通常の室内ゲームではあまり見られないことではあるが，各プレイヤーが自己の戦略の選択に先立って，プレイヤー相互の間での事前の相談，交渉等の話し合いをすることが自由に認められているものとする。このような場合を**協力ゲーム**（cooperative game）とよぶのである。各プレイヤーにとっては自己の利得が大きい方が望ましいわけで，より多くの利得をうるようにするために

はどういう戦略を用いるのがよいかに苦心するのである，プレイヤー間の事前の相談が許されるとなれば，いく人かが結託を結び，彼等が相談して自分達に有利なようにお互いの戦略を決めることもできるわけである。この場合，獲得した利得の合計を，その結託の内部で，お互いの話し合いによって分配することにすればよいのである。

こうなると，各プレイヤーにとっての関心事は，たんに自己の戦略の選択のみに止らず，だれと組めば有利になるか，という結託構成の問題もからんでくるし，さらに，結託に参加した場合に，その中での自分の取り分はどのくらいになるか，ということも重要な問題となろう。

結託内部での総利得の分配の問題はあとまわしにして，ともかくも何らかの結託ができたときには，彼らが**確実に**とれるのは最大限どのくらいであるか，それをまず考えてみる。

n人のプレイヤー全員の集合をIとかく。

$$I=\{1,2,\cdots\cdots,n\}$$

SをIの任意の部分集合とし，Sのメンバーが結託したときに，全体で確実にとれる最大の利得額を$V(S)$であらわす。Sにとって考えられる最悪の事態というのは，S以外のメンバー，それを$I-S$とかく，が結託して対抗してくる場合であろう。この場合には，実質的には結託Sと結託$I-S$との２人ゲームの様相を呈することになる。Sが多くの利得を得たいと思っても，それを$I-S$によって妨害される可能性があるわけだから，Sにとっては，$I-S$がどんな手を打ってこようとも，最小限これだけは確実にとれる，という額のみが関心の対象となる。これは，ゲームの理論の基本的行動基準である"ミニマックス行動基準"（minimax criterion）にしたがって各プレイヤーが，そしてさらに各結託も，行動するという行動仮説を前提としていることはいうまでもない。そのとき，$I-S$がどんな手を打ってこようとも，Sが確実にとることのできる最大の利得額を$V(S)$とするのである。このように定義される$V(S)$は次の性質をもつことが証明できる。

(i)　$V(\phi)=0$

(ii)　$S\cap T=\phi$ のとき $V(S\cap T)\geqq V(S)+V(T),\ S,T\subseteq I$

ここでϕは１人もメンバーを含まない空っぽの集合，空集合，をあらわす。空集合を結託と見做すのは一見不自然に思えるかもしれないが，論理的に矛盾を招かない限り，空集合を１つの結託と見做しておくのは，いろいろと都合が良いのである。１人もメンバーのいない結託が得る利得がゼロであるのは，いわば当然のことであって，それが（i）にほかならない。（ii）の方は，結託Sと結託Tが，共通のメンバーを含まないとき，――それを$S\cap T=\phi$であらわす――SのメンバーとTのメンバーが一緒になってつくった大きな結託$S\cup T$の獲得する総利得$V(S\cup T)$は，S, Tが個別に獲得する総利得の合計$V(S)+V(T)$を下まわることはない，ということを主張している。この（ii）の性質を，しばしば**優加法性**（super additivity）とよんでいる。

（i），（ii）の性質をもつ$V(S)$を，ゲームの**特性関数**（characteristic function）とよぶが，これは文字通り，与えられた協力n人ゲームを特徴付ける関数なのである。そして，ゲームの分析はすべて，この特性関数にもとづいておこなわれることになる。

ゲームが与えられれば特性関数は決まるが，逆に，（i）（ii）をみたすような関数$V(S)$が与えられれば，それを特性関数としてもつゲームをつくることができる。

なお，優加法性の条件（ii）において，つねに$V(S\cup T)=V(S)+V(T)$が成り立つようなゲームは，結託を構成することが何

らのメリットをもたらさないゲームであって，このようなゲームは**非本質的**（inessential）であるという。それに対して，$V(S \cup T) > V(S) + V(T)$ となるS，T の組が1つでもあれば，ゲームは**本質的**（essential）であるという。

特性関数 $V(S)$ が

すべての $S \subseteq I$ に対して $V(S) + V(I - S) = V(I)$

という性質をもつとき，このゲームは**定数和ゲーム**（constant sum game）であるといい，そうでないとき**変動和ゲーム**（variable sum game）という。後に述べる理由により，コアの議論は変動和ゲームに対してのみ，意味をもつ。

特性関数 $V(S)$ はゲームを特徴付けるから，特性関数によってゲームは表現されると考えてよい。これが，協力n人ゲームの特性関数による表現といわれるものである。

3　ゲームの解（安定集合）

各プレイヤーにとっての最大の関心事は，最終的にどれだけの利得が得られるか，という点にあることはいうまでもない。さまざまな結託がつくられるのは，いずれも，利得を最大にしようとする最終目的のための中間的な努力にすぎない。そこで各プレイヤーにとってどのような利得配分が好ましいかという，利得配分の間の比較の問題が生じてくる。

プレイヤーiが，他のすべてのプレイヤーの結託を敵にまわして戦ったときに確実に得られる最大利得を $V(\{i\})$であらわす。このような事態はプレイヤーにとって最悪の事態であり，そのときに確実に獲得できる$V(\{i\})$は，彼にとっての最小の利得である。これは特性関数 $V(S)$ において$S = \{i\}$となった場合の値である。

第iプレイヤーの最終利得をx_iであらわしたときのベクトルを

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

とかくが，これに対しては次の2つの条件がみたされることをわれわれは要求する。

（i）すべてのiに対して　$x_i \geqq V(\{i\})$

（ii）　$\sum_{i=1}^{n} x_i = V(I)$

条件（i）は，プレイヤーiが独力で獲得できる利得 $V(\{i\})$ より少い利得しか割り当てられない配分方式は，彼は拒否するであろうし，事実，そのような配分方式をくつがえすことができることを意味しており，この条件を**個別合理性**（individual rationality）の条件とよんでいる。もしも全員が結託すれば $V(I)$ だけの総利得がえられるわけで，これは最大の総利得であるから，利得の最大化を各プレイヤーが望む以上，できるだけ総利得を多くしておいてからそれを分配する方が，個々人の取り分も大きくなるであろうことは当然考えられることである。したがって各プレイヤーのなすべきことは，なによりもまず全員が結託して $V(I)$ だけは確保しておき，その後にお互いの交渉によって $V(I)$ を分配するのが賢明であり，その結果として各プレイヤーの利得の合計が $V(I)$ となるのは，当然の成りゆきであろう。それを条件として明示したのが(ii)であり，これを**集団合理性**（group rationality）の条件とよんでいる。

個別合理性，集団合理性の条件を共にみたしているn次元ベクトル$\boldsymbol{x}$を，ゲームの**配分**（imputation）とよんでいる。

どの配分が実現するかが各プレイヤーにとって最大の関心事であるから，ここで，配分間の比較をする場合の基準について考えてみる。

$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)$を2つの配分としよう。集団合理性の条件か

ら

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = V(I)$$

であるから，あるプレイヤーiにとって$x_i > y_i$であれば，他のプレイヤーiにとっては$x_j < y_j$となるだろう。だから，$\boldsymbol{x}$の方を望むプレイヤーのグループと，$\boldsymbol{y}$の方を望むプレイヤーのグループがあるのは当然である。そこで，いま，プレイヤーのグループ$S \subset I$があって，Sのメンバーにとっては$\boldsymbol{x}$の方が好ましく，しかも，Sは結託することによって$\boldsymbol{x}$の保証する利得を獲得できる力をもっているものとしよう。すなわち

（i）$i \in S$に対しては　$x_i > y_i$

(ii)　$V(S) \geqq \sum_{i \in S} x_i$

であるとしよう。（i）は，Sのメンバーiにとっては$\boldsymbol{x}$の保障する利得x_iは$\boldsymbol{y}$で与えられる利得y_iより大きいことを意味し，(ii) は，Sのメンバーの$\boldsymbol{x}$における利得の和が，Sが結託して得られる最大利得$V(S)$をこえないことを意味している。(ii) が成り立たないならば，Sが$\boldsymbol{x}$の方を好ましいと思っても，それを実現する力が伴わないことになって，$\boldsymbol{x}$は，Sにとって，望んでも得られないものになってしまうのである。（i）（ii）が成り立つとき

$$\boldsymbol{x} \underset{S}{\succ} \boldsymbol{y}$$

とかいて，$\boldsymbol{x}$はSを通じて$\boldsymbol{y}$に**優越** (dominate) するという。Sを，この優越関係における**有効集合**（effective set）とよんでいる。ただ1人の集合$\{i\}$，および全員の集合Iは有効集合にはなりえないことは容易に証明できる。

$\boldsymbol{x} \underset{S}{\succ} \boldsymbol{y}$となる$S$が存在する場合に，たんに

$$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$$

とかいて，$\boldsymbol{x}$は$\boldsymbol{y}$に**優越する**あるいは$\boldsymbol{x}$は$\boldsymbol{y}$を**支配する**という。これは，$\boldsymbol{y}$よりも$\boldsymbol{x}$を好むグループがある，ということを示す記号である。だから，S以外のグループで$\boldsymbol{y}$を$\boldsymbol{x}$よりも好むものがあれば，$\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$もまた成り立つわけで，$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$と$\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{x}$が両立することはありうるし，また，$\boldsymbol{x} \succ \boldsymbol{y}$かつ$\boldsymbol{y} \succ \boldsymbol{z}$かつ$\boldsymbol{z} \succ \boldsymbol{x}$といった3すくみの状態も可能である。

優越関係は配分間の順序関係と考えることができるが，上に述べたような事情があるために，通常の数の大小関係とくらべると，かなりルーズな順序関係である。しかし，この優越関係が，ゲームの理論においては基本的な重要性をもつのである。

ゲームの数多くの配分の中で，最終的にどの配分が実現するかは一概には何ともいえないが，しかし，何らかの安定性をもったものが最終的にはえらばれることになるだろう。配分$\boldsymbol{x}$が呈示されても，それに優越する他の配分$\boldsymbol{y}$があれば，$\boldsymbol{x}$は$\boldsymbol{y}$にとって代られるかもしれない。すぐに他にとって代られるような配分は安定した配分とはいえないだろう。優越する配分が他に存在しないような配分が得られるなら，それがもっとも安定していて好ましいといえるだろうし，当然，実現の可能性は高い。しかし，そのような配分はいつでもあるとは限らない。したがって，もっと弱い安定性の条件として，次の2つの条件を設定する。

Ωをゲームの配分のある集合としたとき，

（i）　Ωに属する配分の間には，相互に他に優越するという関係はない（内部安定性)。

(ii)　Ωに属さない配分に対しては，それに優越する配分が必ずΩの中にある（外部安定性)。

Ωがこの2つの条件をみたす配分の集合であるとき，Ωをこのゲームの**解**（solution）あるいは**安定集合**（stable set）とよんでいる。

これら (i) (ii) の条件は，配分の安定性に関する最小限の要求であるが，一般にΩは数多くの配分から構成されており，Ωの中のどの配分が実現するかは各プレイヤーの交渉

能力その他に依存することであって，ゲームの理論の中にそれを決める機構は組みこまれていない。経済学上の重要な概念の１つであるパレート最適性が，まさに (i), (ii) と同様な意味を内包しているのであって，その意味からすれば，配分の集合の中で，優越関係にもとづくパレート最適な配分の全体が安定集合である，ということができよう。

4　ゲームのコア

前節で述べた安定集合は，ノイマン・モルゲンシュテルンが解と名付けたものなのだが，内部安定性，外部安定性をもっているとはいえ，安定集合に属する配分が安定集合に属さない配分によって優越されるということはありうるのであって，このことが，安定集合を，ノイマン・モルゲンシュテルンが解と名付けたにもかかわらず，それを解とよぶことに賛成しない人が数多くいる理由なのであり，安定集合のもつ１つの不安定性を示しているのである。

他の配分によっては絶対に優越されないような配分がもしあれば，そのような配分の集合をゲームの**コア** (core)（核ともいう）とよぶ。コアがもしあれば，それはゲームの解としてもっとも安定したものといえるであろう。そして，コアは，もしあれば，いかなる安定集合の中にも必ず含まれることになる。なぜなら，もしもある安定集合の中に含まれないのなら，安定集合の外部安定性の条件 (ii) によって，コアに属する配分がその安定集合に属する配分によって優越されてしまうからである。

解としてのきわめて望ましい性質をもつ配分の集合であるにもかかわらず，残念なことに，コアは多くのゲームに存在しない。とくに，**本質的定数和ゲームには，コアは存在しないことが証明できる。**本質的定数和ゲームでは，どんな配分に対しても，それに優越する配分が必ず存在するからである。したがってコアが問題になるのは変動和ゲームにおいてだけであるが，どのような条件があればコアが存在するかを知ることは重要である。この点について，次の定理が成立する。

定理１　変動和n人ゲームの配分$\boldsymbol{x}$がコアに属するための必要かつ十分な条件は，すべての$S\subseteq I$に対して

$$(1)\qquad \sum_{i\in S} x_i \geq V(S)$$

が成り立つことである。

（証明）まず，（１）をみたす配分$\boldsymbol{x}$は他の配分によって優越されないことを示す。そのために$\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{x}$となる$\boldsymbol{y}$があると仮定しよう。このことは，ある$S\subset I$に対して$\boldsymbol{y}\underset{S}{\succ}\boldsymbol{x}$となることを意味するが，その内容は

(i)　すべての$i\in S$に対して$y_i>x_i$

(ii)　$\sum_{i\in S} y_i \leqq V(S)$

ということである。ところが$\boldsymbol{x}$は（１）をみたすのだから$\sum_{i\in S} x_i \geq V(S)$であり，これと上記 (i) (ii) から

$$V(S) \geqq \sum_{i\in S} y_i > \sum_{i\in S} x_i \geqq V(S)$$

すなわち$V(S)>V(S)$という矛盾が導かれる。したがって$\boldsymbol{y}\succ\boldsymbol{x}$となる$\boldsymbol{y}$は存在せず，$\boldsymbol{x}$はコアに属することになる。

次に，$\boldsymbol{x}$が他の配分によって優越されないならば$\boldsymbol{x}$は (1) をみたすことを示す。そのためには，(1) をみたさない配分$\boldsymbol{y}$は必ず他の配分によって優越されること，したがってコアには含まれないこと，をいえばよい。$\boldsymbol{y}$を (1) をみたさない配分とする。そのときある$S\subset I$に対して

$$\sum_{i\in S} y_i < V(S)$$

が成立する。そこで

$$\alpha = V(S) - \sum_{i \in S} y_i$$

とおくと$\alpha > 0$であり，さらに

$$\beta = V(I) - V(S) - \sum_{i \in I-S} V(\{i\})$$

とおくと，特性関数の優加法性により$\beta \geqq 0$となる。Sのメンバーの数をsとして，$\overline{\boldsymbol{y}} = (\overline{y}_1, \overline{y}_2, \cdots\cdots, \overline{y}_n)$を

$$\overline{y}_i = \begin{cases} y_i + \dfrac{\alpha}{s}, & i \in S\text{のとき} \\ V(\{i\}) = \dfrac{\beta}{n-s}, & i \notin S\text{のとき} \end{cases}$$

で定義すると

すべてのiについて$\overline{y}_i \geqq V(\{i\})$であり，しかも$\sum_{i \in I} \overline{y}_i = V(I)$となることは容易に確かめることができる。よって$\overline{\boldsymbol{y}}$は1つの配分であり，そして明らかにすべての$i \in S$について$\overline{y}_i > y_i$となっているから，$\overline{\boldsymbol{y}} \succ_S \boldsymbol{y}$である。

したがって$\boldsymbol{y}$に優越する$\overline{\boldsymbol{y}}$があるから$\boldsymbol{y}$はコアには属さない。（証明終）

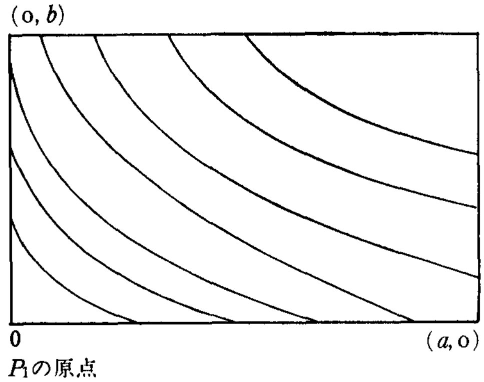
この定理は，以後の議論で重要な役割を果す。

5　エッヂワースの市場ゲーム，2人の交換の場合

エッヂワースの市場ゲームは，2財の交換のモデルをボックス・ダイアグラムを使って分析した有名なエッヂワースの理論をゲーム論的視点から考察しなおすことから始まる。

P_1, P_2の2人がいて，P_1はA財をa単位もっており，P_2はB財をb単位もっている。P_1はB財を欲しがっておりP_2はA財を欲しがっている。そこで2人は手持の財の交換をおこなう。2人の各財の保有量を2次元ベクトルで表わすと，P_1の初期保有量は$(a, 0)$，P_2のそれは$(0, b)$であり，交換の結果P_1の保有量が(x, y)となったとすればP_2の保有量は$(a-x, b-y)$となる。両者の効用関数（したがって効用の無差別曲線）が与えられたとき，どういう結果に落着くかを，次のようにして分析する。図1のような長方形をかき，横軸にA財の量をとり，縦軸にB財

図1　P_1の無差別曲線



の量をとる。P_1の財保有量は左下隅を原点とする座標であらわす。P_1の効用の無差別曲線は図1のようになるだろう。同様にして，右上隅を座標の原点としてP_2の無差別曲線を描いたのが図2である。左下隅を原点とするP_1の財保有量(x, y)と右上隅を原点とするP_2の財保有量$(a-x, b-y)$とが図1あるいは図2では同一の点であらわされることに注意してほしい。図1と図2を重ね合せたのが図3であって，これがボックス・ダイアグラムといわれるものであり，両者の無差別曲

図2　P_2の無差別曲線

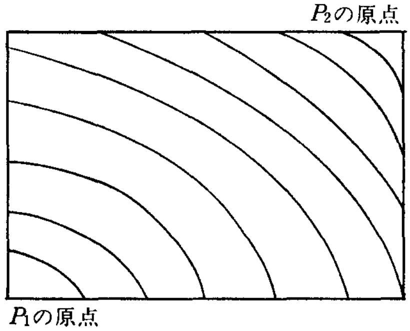
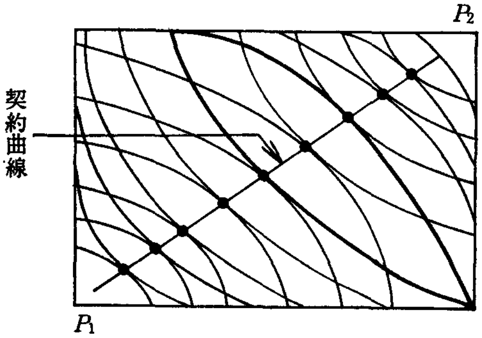


図3 ボックス・ダイアグラム



線の接する点の軌跡が図3の左下から右上へ引かれた曲線で示されている。この曲線上にあって初期保有量のもたらす効用よりも高い効用を両者に与える部分が，この曲線上の太線の部分で示されていて，この部分を**契約曲線** (contract curve) とよぶのである。最終的に落着く点は契約曲線上のどこかになるのである。

このモデルをゲーム論の立場から見直してみよう。そのために，P_1, P_2 の効用関数を指定する必要がある。議論を簡単化するために財ベクトル (x, y) に対する効用は P_1, P_2 共に同じであると仮定し，それを $u(x,y)$ とかく。$u(x,y)$ について次の仮定をおく。

(i) $u(x, y)$ は x, y について増加関数であり，しかも，強い意味の凹関数である。

(ii) $\lim_{x\to\infty} u(x,y)<\infty$, $\lim_{y\to\infty} u(x,y)<\infty$

(iii) $u(x,y)$ は x, y について連続な2階の偏導関数をもつ。

(i) は限界効用（あるいは限界代替率）逓減という，通常の仮定の言いかえにすぎないし，(ii), (iii) も，分析の便宜のためにおかれたものであるとはいえ，ごく自然な仮定であろう。

エッヂワースの交換のモデルをゲーム論的に記述すれば，プレイヤーは P_1, P_2 の2人で，各プレイヤーの利得はそれぞれの効用であり，特性関数は

$$V(\{1\}) = u(a,0)$$
$$V(\{2\}) = u(0,b)$$
$$V(\{1,2\}) = \max_{(x,y)}(u(x,y) + u(a-x, b-y)) = 2u\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

で与えられることになる。したがって，このゲームの配分の集合は

$$(2)\quad \begin{aligned} &x_1 \geqq u(a,0),\ x_2 \geqq u(0,b) \\ &x_1 + x_2 = 2u\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) \end{aligned}$$

で与えられるベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ の全体になる。このゲームの安定集合はすべての配分から成るものが唯1つあるだけであり，しかも，どの配分も他の配分によって優越されることはないから，これはまた，コアにもなっている。それぞれの配分によって示される財保有量をあらわす点は，契約曲線の一部分になっている。

6 エッヂワースの市場ゲーム，一般の場合

前節の交換モデルを次のように一般化する。

A 財のみ a 単位保有するプレイヤーは m 人いる。そのプレイヤーの集合を M とする。B 財のみ b 単位保有するプレイヤーが n 人いて，その集合を N とする。財ベクトル (x,y) に対する効用関数 $u(x,y)$ はすべてのプレイヤーに対して同じであるとし，$u(x,y)$ に対しては前節と同じ仮定をおく。

$I = M \cup N$ とし，$m+n$ 人のプレイヤーから成る市場で A 財と B 財の交換をおこなうのであるが，ここで1つの結託 S がつくられたとしよう。S には M から m_s 人が参加し，N から n_s 人が参加しているものとする。$s = m_s + n_s$ とおく。S 全体としては，したがって A 財は $m_s a$ 単位，B 財は $n_s b$ 単位あるわ

けで，彼等はこれらA財，B財をS全体としての総利得が最大になるようにSのメンバーの間で分けることになる。Sの各メンバーが同一の効用関数$u(x, y)$をもち，しかも$u(x, y)$が強い意味の凹関数であることから，総利得（総効用）を最大にする分け方は，皆で等分することであることが証明できる。したがってSが全体として獲得できる最大の総利得$V(S)$は

$$(3)\quad V(S)=s\,u\left(\frac{m_s a}{s},\ \frac{n_s b}{s}\right),$$
$$s=m_s+n_s$$

で与えられる。この市場交換モデルは$m+n$人のプレイヤーから成る変動和ゲームと考えることができるが，そのとき(3)の$V(S)$は，このゲームの特性関数になっている。それを確かめておく。

$V(\phi)=0$は明らかであろう。優加法性

$$V(S\cup T)\geqq V(S)+V(T),\quad S\cap T=\phi$$

は次のようにして証明できる。

結託Tの人数をt，そのうちでMに属するメンバーの数をm_t，Nをに属するメンバーの数をn_tとする。$t=m_t+n_t$とおく。

$u(x, y)$が凹関数であることを使うと

$$V(S)+V(T)=su\left(\frac{m_s a}{t},\ \frac{n_s b}{t}\right)$$
$$+tu\left(\frac{m_t a}{s},\ \frac{m_t b}{s}\right)$$
$$=(s+t)\left(\frac{s}{s+t}u\left(\frac{m_s a}{s},\ \frac{n_s b}{s}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{t}{s+t}u\left(\frac{m_t a}{t},\ \frac{n_t b}{t}\right)\right)$$
$$\leqq(s+t)\,u\left(\frac{m_s+m_t}{s+t}a,\ \frac{n_s+n_t}{s+t}b\right)$$
$$=V(S\cup T)$$

こうして$V(S)$は特性関数の性質をもつことが示された。この$V(S)$を特性関数としてもつゲームを，**ゲーム〔m, n〕**とかくことにする。前節で述べたのは，ゲーム〔1,1〕である。

7 ゲーム〔m, n〕のコアと極限定理

任意の正の整数m，nについてゲーム〔m, n〕を考える。

$$\alpha=\frac{m}{m+n},\quad \beta=1-\alpha=\frac{n}{m+n}$$

とおく。メンバー全員が結託して得る最大の利得$V(I)=V(M\cup N)$は，(3)により

$$V(I)=(m+n)\,u\left(\frac{ma}{m+n},\ \frac{nb}{m+n}\right)$$
$$=(m+n)\ u(\alpha a,\ \beta b)$$

となる。

$$u^*=u(\alpha a,\ \beta b)$$

とおく。

$u(x, y)$が強い意味の凹関数であることと，連続な2階の偏導関数をもつことから，

$$f(\lambda)=u(\lambda a,\ (1-\lambda)\,b)$$

はλの関数として強い意味の凹関数となり，したがって

$$f''(\lambda)<0$$

である。よって

$$(4)\quad f''(\lambda)=a^2\frac{\partial u}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$
$$+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0$$

が点$(\lambda a,\ (1-\lambda)\,b)$において成立する。この不等式(4)は，後で重要になる。

ゲーム〔m, n〕がコアをもつかどうかが

まず問題になるが，これについて考えてみよう。

Mに属するm人は同じ初期保有量（a, 0）をもち，しかも同じ効用関数をもつのだから，市場における彼等の立場は同じであると考えてよい。同様に，Nに属するn人も，市場においては同じ立場にある。そこで，同じ立場にあるメンバーには同じ利得を与えるような配分についてまず考えてみようというのは，自然な発想であろう。

こういった考え方にもとづいて，Mのメンバーの利得はすべて同じであり，またNのメンバーの利得もすべて同じであるような配分を考えてみる。すなわち，

$$M=\{1, 2, \cdots\cdots m\},$$

$$N=\{m+1, m+2, \cdots\cdots, m+n\}$$

としたとき

$$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_m,\quad x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots\cdots=x_{m+n}$$

である配分

$$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\cdots, x_{m+n})$$

を考えてみる。そして，この形の配分でゲーム〔m, n〕のコアに属するものがあるかどうかを調べてみるのである。

最大の平均利得$u^*=u(\alpha a, \beta b)$を中心にしてx_iをあらわすことにすれば，上記の性質をもつ配分は，ωをパラメータとして

$$(5)\quad \begin{cases} x_i(\omega)=u^*+\beta\omega & i\varepsilon M のとき \\ x_j(\omega)=u^*-\alpha\omega & j\varepsilon N のとき \end{cases}$$

とおくことができる。

$$\sum_{i\varepsilon I} x_i(\omega)=(m+n)\,u^*$$

であることから，$i\varepsilon M$に対して

$$x_i(\omega)=u^*+\beta\omega$$

とおけば，$j\varepsilon N$に対しては

$$x_j(\omega)=u^*-\alpha\omega$$

とならざるをえないのである。

（5）であらわされる配分

$$\boldsymbol{x}(\omega)=(u^*+\beta\omega, \cdots\cdots, u^*+\beta\omega, u^*-\alpha\omega, \cdots\cdots, u^*-\alpha\omega)$$

がコアに入るようにωを決めることができるかどうかを考えてみる。

$\boldsymbol{x}(\omega)$がコアに含まれる配分であるための必要十分条件は，配分である条件として

（i）　$x_i(\omega)\geqq V(\{i\})\quad i\varepsilon I$

（ii）　$\sum x_i(\omega)=V(I)$

であり，かつ，コアに入る条件として定理1から

（iii）　すべての$S\subset I$に対して

$$\sum_{i\varepsilon S} x_i(\omega)\geqq V(S)$$

であった。このうちで（i）は（iii）の特殊の場合にすぎないし，$\boldsymbol{x}(\omega)$が（5）をみたしていることから（ii）はみたされている。したがって，（iii）だけを考慮すればよいことになる。

$S\subset I$を任意にえらぶ。Sのメンバーの数をs, SのメンバーでMに属するものの数をm_s, Nに属するものの数をn_sとする。$s=m_s+n_s$であることはいうまでもない。

$V(S)$を$u^*=(\alpha a, \beta b)$の近傍でテーラー展開する。

$$V(S)=s\,u\left(\frac{m_s a}{s}, \frac{n_s b}{s}\right)=s\,u\left(\alpha a+\left(\frac{ms}{s}-\alpha\right)a, \beta b+\left(\frac{n_s}{s}-\beta\right)b\right)$$

において，$m_s+n_s=s$, $\alpha+\beta=1$を考慮すると

$$\frac{n_s}{s}-\beta=-\frac{m_s}{s}+\alpha$$

となるから，点 $(\alpha a, \beta b)$ の近傍で

$$V(S) = s\,u\left(\alpha a + \left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)a, \beta b - \left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)b\right)$$

$$= s\left[u(\alpha a, \beta b) + \left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)\left(a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)^2 R(\theta)\right]$$

ここで $R(\theta)$ はいわゆるラグランジュの剰余であって

$$R(\theta) = a^2\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial x^2} - 2ab\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial x\,\partial y} + b^2\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial y^2}$$

となる。ξ, η は，ある $0 < \theta < 1$ に対して

$$\xi = \alpha a + \theta\left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)a,$$

$$\eta = \beta b - \theta\left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)b$$

となっている。この ξ, η の a, b の係数の和は1であるから，(ξ, η) は $(\lambda a, (1-\lambda)b)$ の形をしており，したがって (4) により

$$(6) \qquad R(\theta) < 0$$

である。

一方，(5) から

$$\sum_{i \varepsilon s} x_i(\omega) = m_s(u^* + \beta\omega) + n_s(u^* - \alpha\omega)$$

$$= su^* + (m_s\beta - n_s\alpha)\omega$$

$$= su^* + (m_s - s\alpha)\omega$$

となるから

$$V(S) - \sum_{i \varepsilon s} x_i(\omega) = (m_s - s\alpha)\left[\left(a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \omega\right] + \frac{s}{2}\left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)^2 R(\theta)$$

となる。右辺の最後の項は (6) により非正となるから，〔 〕の中がゼロになるように ω の値をえらんでおけば右辺はつねに非正になる。そこで

$$(7) \qquad \omega^* = a\frac{\partial u}{\partial x} - b\frac{\partial u}{\partial y}$$

とおけば，$\omega = \omega^*$ のとき

$$V(S) - \sum_{i \varepsilon s} x_i(\omega^*) = \frac{s}{2}\left(\frac{m_s}{s} - \alpha\right)^2 R(\theta) \leqq 0$$

となるから

$$V(S) \leqq \sum_{i \varepsilon s} x_i(\omega^*)$$

が成立し，$x(\omega^*)$ はコアに属することがわかる。ここで $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ は点 $(\alpha a, \beta b)$ における値であることはいうまでもない。以上により，次の定理が得られた。

定理2　ゲーム $[m, n]$ において

$$\frac{m}{m+n} = \alpha, \quad \frac{n}{m+n} = \beta$$

$$u^* = u(\alpha a, \beta b)$$

$$\omega^* = a\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial x} - b\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial y}$$

とおけば

$$x_i^* = x_i(\omega^*) = u^* + \beta\omega^* \qquad i \varepsilon M$$

$$x_j^* = x_j(\omega^*) = u^* - \alpha\omega^* \qquad j \varepsilon N$$

で定義される配分

$$x^* = (u^* + \beta\omega^*, \cdots\cdots, u^* + \beta\omega^*, u^* - \alpha\omega^*, \cdots\cdots, u^* - \alpha\omega^*)$$

はゲーム $[m, n]$ のコアに属する。

定理2系

$$u^* = u(\lambda^* a, (1-\lambda^*)b) = \max_{0 \leqq \alpha \leqq 1} u(\lambda a, (1-\lambda)b)$$

となる λ^* が

$$\frac{m}{m+n}=\lambda^*$$

をみたすものとすれば，すべての $x_i=u^*$ である配分

$$x^*=(u^*, u^*, \cdots\cdots, u^*)$$

はゲーム［m, n］のコアに属する。

（証明）点（$\lambda^* a$,（$1-\lambda^*$）b）において $u(\lambda a, (1-\lambda)b)$ は最大値をとるから，λ についての導関数の値はこの点でゼロになる。したがって $f(\lambda)=u(\lambda a, (1-\lambda)b)$ とおけば

$$f'(\lambda^*)=a\frac{\partial u}{\partial x}-b\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

となるから，定理2の ω^* はゼロになるのである。（証明終）

ゲーム［m, n］のコアは定理2の x^* 以外の配分をも含んでいる。しかし，m, n が一定の比率を保ちながら増大してゆくときには，コアは x^* に収縮してゆくことが示される。

$m:n$ が一定の比率で増大してゆくのだから，以下の議論においては α, β は一定に保たれている。

$$\frac{m}{m+n}=\alpha, \quad \frac{n}{m+n}=\beta$$

となる最小の m, n の値を m^0, n^0 とすれば，

$$m=k\,m^0, \quad n=k\,n^0$$

であって，ここで $k\to\infty$ となる場合を考えるのである。この場合，ゲーム［m, n］のコアについて次の補題が成立する。

補題　$m=km^0$, $n=kn^0$, $k\geqq 2$ のとき $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots\cdots, x_{m+n})$ がゲーム［m, n］のコアに属している配分であれば，M に属している i について x_i の値はすべて同じであり，N に属している j について x_j の値はすべて同じである。すなわち

$$(8)\quad \begin{aligned} &x_1=x_2=\cdots\cdots=x_m,\\ &x_{m+1}=x_{m+2}=\cdots\cdots=x_{m+n}\end{aligned}$$

である。

（証明）（8）が成り立たないような x はコアに属さないことを示せばよい。（8）が成り立たない x をとる。x_i, $i\in M$ のうちの小さい方から m^0 個えらび，その添字の集合を $\overline{M}$ とする。同様に，x_j, $j\in N$ のうちの小さい方から n^0 個をえらび，その添字の集合を $\overline{N}$ とする。$S=\overline{M}\cup\overline{N}$ とおいて，結託 S を考える。S のメンバーの数は m^0+n^0 で

$$V(S)=(m^0+n^0)\,u\,(\alpha a, \beta b)=(m^0+n^0)\,u^*$$

であるが，このとき

$$(9)\qquad V(S)>\sum_{i\in S}x_i$$

でなくてはならない。なぜなら，M の $\overline{M}$ に属さない（$k-1$）m^0 人のメンバーを，x_i の値の小さい方から順に m^0 人ずつえらんで $k-1$ 個の組にわけ，同様に $\overline{N}$ に含まれない N の（$k-1$）n^0 人についても，x_j の値の小さい方から順に n^0 人ずつの $k-1$ 個の組にわける。こうしてえらんだそれぞれの組を，さらにえらんだ順に組合せて，m^0+n^0 人から成る結託を $k-1$ 個つくる。さきにつくった $S=\overline{M}\cup\overline{N}$ を S_1 として，いまつくった $k-1$ 個の結託を，つくった順に S_2, $S_3\cdots\cdots$, S_k とする。これらについては

$$(10)\quad V(S_1)=V(S_2)=\cdots\cdots=V(S_k)=(m^0+n^0)\,u^*$$

である。また，そのつくり方から

$$(11)\quad \sum_{i\in S_1}x_i\leqq\sum_{i\in S_2}x_i\leqq\cdots\cdots\leqq\sum_{i\in S_k}x_i$$

であるが，x_i が同じではないのだから，ここで少くとも1カ所の不等号は強い意味の不等号＜になっている。そこで，もしも

$$V(S)=V(S_1)\leqq\sum_{i\varepsilon S_1}x_i$$

となっていたとすれば，(10)，(11) から，すべての j に対して

$$V(S_j)\leqq\sum_{i\varepsilon S_j}x_i$$

となり，しかも，少くとも 1 つの j について強い不等式になっている。したがって，この不等式を j について加えると，$\boldsymbol{x}$ が配分であるから

$$\sum_{j=1}^{k}V(S_j)<\sum_{i\varepsilon I}x_i=V(I)$$

が成立するが，左辺は $k(m^0+n^0)u^*=V(I)$ であるから，結局，$V(I)<V(I)$ となって矛盾が生ずる。よって (9) が成り立たなくてはならないのである。そして，(9) が成り立つということは，定理 1 により，$\boldsymbol{x}$ がコアに属さないことを意味している。（証明終）

この補題の証明の中では $k\geqq 2$ であることを使っていることに注意されたい。したがって m と n が互いに素である場合には，ここの証明は成り立たない。

この補題により，コアに属する配分はすべて，ε をパラメータとして

$$(12)\quad \begin{aligned} x_i(\varepsilon)&=u^*+\beta\omega^*+\beta\varepsilon \quad i\varepsilon M\\ x_j(\varepsilon)&=u^*-\alpha\omega^*-\alpha\varepsilon \quad j\varepsilon N\end{aligned}$$

を成分とするベクトル $\boldsymbol{x}(\varepsilon)$ によってあらわすことができる。

われわれの目的は次の定理を証明することである。

定理 3　$m=km^0$，$n=kn^0$ で $k\to\infty$ のとき，ゲーム [m,n] のコアは定理 2 の $\boldsymbol{x}^*$ に収縮する。

（証明） (12) で定義された $\boldsymbol{x}(\varepsilon)$ は，$\varepsilon\neq 0$ のときに，十分大きなすべての k に対してコアには含まれないことを示せばよい。

はじめに，$\varepsilon>0$ の場合を考える。M のうちの 1 人を除いた $m-1$ 人と N の全員とから成る結託を S とする。S は $m+n-1$ 人のメンバーを含むから，$V(S)$ を $(\alpha a,\beta b)$ の近傍でテーラー展開すると

$$\begin{aligned}V(S)&=(m+n-1)\,u\left(\frac{(m-1)a}{m+n-1},\ \frac{nb}{m+n-1}\right)\\
&=(m+n-1)\,u\left(\alpha a-\frac{\beta a}{m+n-1},\ \beta b-\frac{\beta b}{m+n-1}\right)\\
&=(m+n-1)\left[u^*+\frac{\beta}{m+n-1}\left(-a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{1}{2}\frac{\beta^2}{(m+n-1)^2}R(\theta)\right]\\
&=(m+n-1)u^*-\beta\omega^*+\frac{\beta^2}{2(m+n-1)}R(\theta)\end{aligned}$$

ここで $R(\theta)=a^2\dfrac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial x^2}-2ab\dfrac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial x\partial y}+b^2\dfrac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial y^2}$

$$\xi=\left(\alpha-\frac{\theta\beta}{m+n-1}\right)a,$$

$$\eta=\left(\beta-\frac{\theta\beta}{m+n-1}\right)b$$

となり，他方

$$\begin{aligned}\sum_{i\varepsilon S}x_i(\varepsilon)&=(m-1)\ (u^*+\beta\omega^*+\beta\varepsilon)+(u^*-\alpha\omega^*-\alpha\varepsilon)\\
&=(m+n-1)\,u^*+(m\beta-n\alpha)\ (\omega^*+\varepsilon)\\
&\quad-\beta(\omega^*+\varepsilon)\end{aligned}$$

$$=(m+n-1)u^*-\beta\omega^*-\beta\varepsilon,$$

$(m\beta-n\alpha=0$ による)

となる。よって

$$V(S)-\sum_{i\varepsilon S}x_i(\varepsilon)=\frac{\beta^2}{2(m+n-1)}R(\theta)+\beta\varepsilon$$

となるが，$k\to\infty$すなわち$m, n\to\infty$のとき右辺の第1項はゼロに収束し，第2項は$\beta\varepsilon>0$であるから，十分大きなすべてのm, n，すなわち十分大きなすべてのkに対して右辺は正となり，したがって$V(S)>\sum_{i\varepsilon S}x_i(\varepsilon)$となる。これは，定理1により，$x(\varepsilon)$がコアには属さないことを示している。

$\varepsilon<0$のときは，Mの全員とNの$n-1$人とから成る結託をSとして同様な計算をすれば，$x(\varepsilon)$がコアに属さないことが示される。（証明終）

8　極限定理と完全競争均衡

前節の定理2，定理3のもつ経済学的意味を考えてみよう。ゲーム$[m, n]$はメンバー間でのリベート（手付けとよんでいる）の授受を認める形のゲーム（game with side payment）である。すなわち，各メンバーは，ゲームのルールにもとづいて得られる利得のほかに，結託交渉を通じて手付けを獲得（または譲渡）する。その合計が各人の最終利得となり，最終利得ベクトルが配分なのである。

この観点から定理2のx^*を解釈すれば，まずすべてのメンバーに平等に$(\alpha a, \beta b)$という財ベクトルを与え，それによって各メンバーに最大の平均利得を獲得させる。それがu^*である。これは，全体としての総利得を最大にする（分けるべきパイをできるだけ大きくしておく）ための知恵である。然る後に，MのメンバーとNのメンバーの市場における立場の相違（立場の強さの度合い）に応じた手付けの授受をおこなう。その分がMのメンバーについては$\beta\omega^*$，Nのメンバーについては$-\alpha\omega^*$となるのであり，その結果としての最終利得表が配分x^*になるのである。

そこで，手付け$\beta\omega^*$，$-\alpha\omega^*$はどういう意味をもっているか考えてみよう。まず

$$\beta\omega^*=\beta a\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial x}-\beta b\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial y}$$

$$=(a-\alpha a)\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial x}$$

$$-\beta b\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial y}$$

であるが，ここで各メンバーはA財，B財の1単位に対してどれだけの価値を認めているかを考えてみれば，$(\alpha a, \beta b)$だけの財ベクトルを保有している時には，各財の限界1単位のもたらす効用の大きさ，すなわち限界効用，がその評価の値になると考えるのは自然であろう。そこで，各財の1単位の価値をそれぞれの限界効用で計って

$$(13)\quad p_A=\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial x},\quad p_B=\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial y}$$

とおくことにすれば

$$\beta\omega^*=(a-\alpha a)p_A-\beta bp_B$$

$$=ap_A-(\alpha ap_A+\beta bp_B)$$

となる。これは，A財，B財の各1単位の価格をp_A，p_Bとしたときに，Mのメンバーが$(\alpha a, \beta b)$を獲得するために必要な支出額$\alpha ap_A+\beta bp_B$を，初期保有財の総価値ap_Aから差し引いた残りをあらわすことになる。したがって，Mのメンバーが，初期保有量aの代りに初期保有金額ap_Aを持って市場で$(\alpha a, \beta b)$を購入したと考えれば，$\beta\omega^*$は財購入後の現金残高をあらわすことになる。こうして$i\varepsilon M$に対して

$$x_i{}^* = u^* + \beta\omega^* = u(\alpha a, \beta b) + \beta a p_A - \beta b p_B$$

は，メンバー i が ap_A の資金によって（αa, βb）を購入したときの，購入した財のもたらす効用と現金残高の和，すなわち総効用，をあらわすことになる。N のメンバーについてもまったく同様に考えることができて，$j\varepsilon N$ のとき

$$xj^* = u^* - \alpha\omega^* = u(\alpha a, \beta b) + (bp_B - \alpha a p_A - \beta b p_B)$$

は（αa, βb）のもたらす効用と現金残高の和としての総効用になる。

ところで，M のメンバーが ap_A の資金をもって市場で A 財を ξ 単位，B 財を η 単位購入したとすれば，そのときの彼の総効用は

$$u(\xi, \eta) + ap_A - (\xi p_A + \eta p_B)$$

となるが，これと（αa, βb）を購入したときの総効用 $u^* + \beta\omega^*$ とを比較してみよう。

まず，効用関数$u(x, y)$ が強い意味の凹関数であることから，$0 < \lambda < 1$ となる λ に対して次の不等式が成立することに注意しよう。

$$u(\lambda\xi + (1-\lambda)\alpha a, \lambda\eta + (1-\lambda)\beta b) > \lambda u(\xi, \eta) + (1-\lambda) u(\alpha a, \beta b)$$

右辺の $u(\alpha a, \beta b)$ を左辺に移項して

$$u(\alpha a + \lambda(\xi - \alpha a), \beta b + \lambda(\eta - \beta b)) - u(\alpha a, \beta b) > \lambda(u(\xi, \eta) - u(\alpha a, \beta b))$$

左辺に平均値の定理を適用すると

$$\lambda(\xi - \alpha a)\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda(\eta - \beta b)\frac{\partial u}{\partial y} > \lambda(u(\xi, \eta) - u(\alpha a, \beta b))$$

ここで$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial u}{\partial y}$は点$(\alpha a + \theta\lambda(\xi - \alpha a), \beta b + \theta\lambda(\eta - \beta b))$ における値である。両辺を λ で割って，$\lambda \to 0$ とすると

$$(\xi - \alpha a)\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial x} + (\eta - \beta b)\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial y} \geqq u(\xi, \eta) - u(\alpha a, \beta b)$$

がえられる。ξ, η を含んだ項を右辺にまとめると

$$u(\alpha a, \beta b) - \alpha a\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial x} - \beta b\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial y} \geqq u(\xi, \eta) - \xi\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial x} - \eta\frac{\partial u(\alpha a, \beta b)}{\partial y}$$

となる。よって，p_A，p_B の定義から

$$u(\alpha a, \beta b) - \alpha a p_A - \beta b p_B \geqq u(\xi, \eta) - \xi p_A - \eta p_B$$

がえられ，両辺に ap_A を加えると

$$u(\alpha a, \beta b) + \beta a p_A - \beta b p_B \geqq u(\xi, \eta) + ap_A - \xi p_A - \eta p_B$$

すなわち

$$u^* + \beta\omega^* \geqq u(\xi, \eta) + ap_A - (\xi p_A + \eta p_B)$$

がえられる。

この不等式は，価格 p_A，p_B のもとで M のメンバーの総効用を最大にする A 財，B 財の購入量が αa, βb であることを示している。N のメンバーについても，話はまったく同様である。

以上により，（13）で定義される価格 p_A，p_B のもとで各メンバーが（αa, βb）だけ購入すれば，それによって各メンバーの総効用は最大になり，しかも，$(m+n)\alpha a = ma$,（$(m+n)\beta b = nb$ であるから，市場全体としての財の需要と供給は一致することがわかった。

一般に，ある価格体系のもとで各人が自己の総効用の最大を実現する財の購入量が，市場全体としても財の需要と供給を一致させているならば，市場では**完全競争均衡**が成立しているといい，そのときの価格を**均衡価格**とよぶ。上に述べたことから，x^* は（13）の均衡価格 p_A，p_B のもとでの完全競争均衡をあらわす配分になっていることがわかる。

均衡価格は（13）の p_A，p_B が唯一のものであること，したがって x^* が唯一の完全競争均衡配分であることが証明できる。

それを示すために，q_A，q_B を任意の均衡価格とし，この価格のもとで M のメンバーの総効用を最大にする財購入量を（ξ_M, η_M）とし，N のメンバーのそれを（ξ_N, η_N）とする。q_A，q_B が均衡価格であるから，このときの市場全体としての財の需要と供給は一致していなくてはならない。すなわち

$$(14)\quad m\xi_M+n\xi_N=ma,\quad m\eta_M+n\eta_N=nb$$

でなくてはならない。ところで，市場全体のA財の総量ma, B財の総量nbを，各メンバーの効用の合計が最大になるように分ける分け方はすべてのメンバーに均等に分けることであり，そのときの各メンバーの効用の総和が $V(I)=(m+n)u^*$ であった。したがって，ma, nb を，M のメンバーにはそれぞれ ξ_M, η_M ずつ分け，N のメンバーにはそれぞれ ξ_N, η_N ずつ分けた場合の効用の和 $mu(\xi_M,\eta_M)+nu(\xi_N,\eta_N)$ は $V(I)$ より大きくなることはありえない。よって

$$(15)\quad mu(\xi_M,\eta_M)+nu(\xi_N,\eta_N)\leqq V(I)$$

でなくてはならない。

さて，価格 q_A，q_B のもとでは，M のメンバーにとっては（ξ_M, η_M）が，N のメンバーにとっては（ξ_N, η_N）が，それぞれに彼等の総効用を最大にしているのであるから，M のメンバーに対しては

$$(16)\quad \begin{aligned}&u(\xi_M,\eta_N)+aq_A-(\xi_Mq_A+\eta_Mq_B)\\&\qquad\geqq u(\alpha a,\beta b)+aq_A-(\alpha aq_A+\beta bq_B)\end{aligned}$$

が成り立ち，N のメンバーに対しては

$$(17)\quad \begin{aligned}&u(\xi_N,\eta_N)+bq_B-(\xi_Nq_A+\eta_Nq_B)\\&\qquad\geqq u(\alpha a,\beta b)+bq_B-(\alpha aq_A+\beta bq_B)\end{aligned}$$

が成り立っている。（16），（17）の不等式をメンバー全員について加えると，左辺の合計は，関係式（14）を使うと

$$\begin{aligned}&mu(\xi_M,\eta_M)+nu(\xi_N,\eta_N)+(ma-m\xi_M\\&\quad-n\xi_N)q_A+(nb-m\eta_M-n\eta_N)q_B\\&=mu(\xi_M,\eta_M)+nu(\xi_N,\eta_N)\end{aligned}$$

となり，右辺の合計は $(m+n)\,u(\alpha a,\beta b)$

$$=V(I)$$

となる。よって

$$mu(\xi_M,\eta_M)+nu(\xi_N,\eta_N)\geqq V(I)$$

がえられるが，これと（15）とから

$$mu(\xi_M,\eta_M)+nu(\xi_N,\eta_N)=V(I)$$

でなくてはならないことがわかる。

不等式（16），（17）をメンバー全員について加えた結果が等式になるのであるから，（16），（17）の不等式はいずれも等式でなくてはならない。このことと，（16），（17）の左辺がそれぞれ価格 q_A，q_B のもとでの M のメンバー，N のメンバーの総効用の最大値になっていることとから，（16），（17）の右辺もまた，価格 q_A，q_B のもとでのそれぞれのメンバーの総効用の最大値になっているはずである。したがって任意の（ξ, η）に対して

$$\begin{aligned}&u(\alpha a,\beta b)+aq_A-(\alpha aq_A+\beta bq_B)\\&\qquad\geqq u(\xi,\eta)+aq_A-(\xi q_A+\eta q_B)\end{aligned}$$

が成り立つことになる。両辺から aq_A を消去

して適当に移項すると

$$u(\xi,\eta)-u(\alpha a,\beta b) \leqq (\xi-\alpha a)q_A + (\eta-\beta b)q_B$$

がえられる。(ξ,η) は任意であったから，特に

$$\xi=\alpha a+h,\quad \eta=\beta b$$

とおくと

$$u(\alpha a+h,\beta b)-u(\alpha a,\beta b)\leqq hq_A$$

がえられ，ここで両辺を h で割って $h\to 0$ とすると，$h>0$ のときには

$$\frac{\partial u(\alpha a,\beta b)}{\partial x}\leqq q_A \quad \text{すなわち} \quad p_A\leqq q_A$$

となり，$h<0$ のときには

$$\frac{\partial u(\alpha a,\beta b)}{\partial x}\geqq q_A \quad \text{すなわち} \quad p_A\geqq q_A$$

となる。したがって $p_A=q_A$ でなくてはならない。同様にして $p_B=q_B$ であることも示される。

価格 p_A, p_B のもとでの財の最適配分はすべてのメンバーに均等に αa, βb ずつ分けることであったし，価格 q_A, q_B のもとでの最適配分は M のメンバーには ξ_M, η_M ずつ，N のメンバーには ξ_N, η_N ずつ分けることであった。したがって $p_A=q_A$, $p_B=q_B$ であることが示されたからには，同じ価格のもとでの最適な財配分は同じでなければならないから，$\alpha a=\xi_M=\xi_N$, $\beta b=\eta_M=\eta_N$ でなくてはならない。こうして，p_A, p_B が唯一の均衡価格であり，$\boldsymbol{x}^*$ が唯一の完全競争均衡配分であることがわかった。

$\boldsymbol{x}^*$ に対してこのような経済学的意味が与えられれば，定理3はきわめて興味深い内容を含んでいることになる。m, n が一定の比率を保ちながら増大してゆくときにゲーム $[m,n]$ のコアは唯一の完全競争均衡配分に収縮してゆく，という定理3の主張は，もともとは別個の概念であるゲームのコアと完全競争均衡とが市場ゲームという場において密接に結びつくことを示すものであって，完全競争という経済理論の（1つの理想的な）慣用の前提がゲーム論的視点から漸近的に構成されてゆく過程を示すものと考えることができよう。

$m:n$ の比率はさまざまでありうるし，それぞれの比率に対して均衡価格が決まり，それにもとづいて手付けによる決済がなされる。定理2の系で示されたケースは，$m:n$ の比が各メンバーの効用関数に照して最適になっている場合，すなわち効用面から見て財に過不足のない場合であって，このときはすべてのメンバーの市場における立場は同等になり，したがって手付けによる決済が不用になるのである。

9 ゲーム〔1, n〕のコア，独占の場合

A 財保有者が唯1人であるゲーム $[1,n]$ では，A 財保有者は独占的な優位性をもつことになる。定理2によれば，$M=\{1\}$, $N=\{2,3,\cdots\cdots,n+1\}$ として

$$\text{(18)}\quad \begin{aligned} x_i^* &= u^*+\frac{n}{n+1}\omega^*,\\ x_j^* &= u^*-\frac{1}{n+1}\omega^*,\\ &\qquad j=2,3,\cdots\cdots,n+1 \end{aligned}$$

ここで

$$u^*=u\left(\frac{a}{n+1},\ \frac{nb}{n+1}\right)$$

$$u^*=\left(a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)u\left(\frac{a}{n+1},\ \frac{nb}{n+1}\right)$$

である配分 $\boldsymbol{x}^*$ はゲーム $[1,n]$ のコアに属する。

このゲームで$n\to\infty$の場合を考えてみよう。定理3では$m:n$の比が一定であるようにm, nが増大する場合を扱ったわけだが，ここでは$m=1$であるから，$m:n=1:n$はnの増加と共に変り，したがって定理3をそのまま適用することはできない。

A財をもっているのはメンバー1だけだから，彼が独占者の優位性を最大限に利用して，他のすべてのメンバーが可能な最小限の利得しか得られないような配分を提案したとしよう。この配分を$\boldsymbol{x}^0=(x_1{}^0, x_2{}^0, \cdots\cdots, x^0{}_{n+1})$とすると

$$x_2{}^0=x_3{}^0=\cdots \quad =x^0{}_{n+1}=u(0,b)$$

であるから

$$x_1{}^0=V(I)-nu(0,b)$$

となる。これについて，次の定理が成り立つ。

定理4　配分

$\boldsymbol{x}^0=(V(I)-nu(0,b),\ u(0,b),\ u(0,b),\ \cdots\cdots,\ u(0,b))$はゲーム〔$1,n$〕のコアに属する。

（証明）ある配分$\boldsymbol{x}$に対して$\boldsymbol{x}\underset{s}{\succ}\boldsymbol{x}^0$となったとしよう。このとき有効集合$S$はメンバー1を含むことはない。なぜなら，$x_1{}^0=V(I)-nu(0,b)$はメンバー1のとりうる最大の利得であるから，$x_1>x_1{}^0$ということはありえないからである。したがって$S$は$B$財を保有するメンバーのみの結託となるが，$i\in S$に対しては$x_i>x_i{}^0=u(0,b)$であるから，$S$のメンバーの数を$s$とすると

$$(19)\qquad \sum_{i\in S}x_i>su(0,b)$$

となる。一方$V(S)=su(0,b)$であり，$\boldsymbol{x}\underset{s}{\succ}\boldsymbol{x}^0$であるから

$$(20)\qquad V(S)=su(0,b)\geqq\sum_{i\in S}x_i$$

でなくてはならない。(19)と(20)とから

$$su(0,b)\geqq\sum_{i\in S}x_i>su(0,b)$$

となるが，これは不合理である。よって$\boldsymbol{x}\underset{s}{\succ}\boldsymbol{x}^0$となる$S$は存在せず，したがって$\boldsymbol{x}^0$に優越する配分はない。よって$\boldsymbol{x}^0$はコアに属する。（証明終）

定理4の配分$\boldsymbol{x}^0$について，次の極限定理が成立する。

定理5　任意の$\varepsilon>0$に対してゲーム〔$1,n$〕の$x_1=x_1{}^0-\varepsilon$である配分を$\boldsymbol{x}$とすれば，十分大きなすべてのnに対して，$\boldsymbol{x}$はコアには含まれない。

（証明）$\boldsymbol{x}^0$の第1成分$x_1{}^0=V(I)-nu(0,b)$はメンバー1が獲得できる最大の配分であり，このとき他のメンバーの利得は必然的に$u(0,b)$になってしまう。したがって$\boldsymbol{x}^0$以外の配分ではメンバー1の利得x_1は$x_1{}^0$よりは小さくなる。そこで，$\boldsymbol{x}^0$以外の任意の配分を$\boldsymbol{x}$とすれば，ある$\varepsilon>0$に対して

$$x_1=x_1{}^0-\varepsilon=V(I)-nu(0,b)-\varepsilon$$

となっており，$x_2, x_3, \cdots\cdots, x_{n+1}$は，メンバー1が譲歩した$\varepsilon$だけの利得を$n$人で適宜に分けて$u(0,b)$に加えたものになっている。このとき，メンバー2から$n+1$までの中には

$$x_j\geqq u(0,b)+\frac{\varepsilon}{n}$$

となるjが少くとも1人はいる筈である。そこで，このようなjを除いたn人の結託を$S=I-\{j\}$とし，$V(S)$を点$(0,b)$の近傍でテーラー展開する。

$$V(S)=nu\left(\frac{a}{n},\ \frac{(n-1)b}{n}\right)$$

$$=nu\left(0+\frac{a}{n},\ b-\frac{b}{n}\right)$$

$$=n\Bigl(u(0,b)+\frac{1}{n}\Bigl(a\frac{\partial u(0,b)}{\partial x}$$

$$-b\frac{\partial u(0,b)}{\partial y}\Big)+\frac{1}{2n^2}\Big(a^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x^2}$$

$$-2ab\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial y^2}\Big)$$

$$+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\Big)$$

$$=nu(0,b)+a\frac{\partial u(0,b)}{\partial x}-b\frac{\partial u(0,b)}{\partial y}$$

$$+\frac{1}{2n}\Big(a^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x\partial y}$$

$$+b^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial y^2}\Big)+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

同様に $V(I)$ を $(0,b)$ の近傍でテーラー展開すると

$$V(I)=(n+1)\,u\Big(\frac{a}{n+1},\ \frac{nb}{n+1}\Big)$$

$$=(n+1)\Big(u(0,b)+\frac{1}{n+1}\Big(a\frac{\partial u(0,b)}{\partial x}$$

$$-b\frac{\partial u(0,b)}{\partial y}\Big)+\frac{1}{2(n+1)^2}$$

$$\Big(a^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x\partial y}$$

$$+b^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial y^2}\Big)+o\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\Big)$$

$$=(n+1)\,u(0,b)+a\frac{\partial u(0,b)}{\partial x}$$

$$-b\frac{\partial u(0,b)}{\partial y}+\frac{1}{2(n+1)}$$

$$\Big(a^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x\partial y}$$

$$+b^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial y^2}\Big)+o\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

また

$$\sum_{i\varepsilon s}x_i=V(I)-x_j\leqq V(I)-u(0,b)-\frac{\varepsilon}{n}$$

であるから，上述のテーラー展開式を使うと

$$V(S)-\sum_{i\varepsilon s}x_i\geqq V(S)-V(I)+u(0,b)$$

$$+\frac{\varepsilon}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)\Big(a^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x^2}$$

$$-2ab\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x\partial y}+b^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial y^2}\Big)$$

$$+o\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\varepsilon}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\Big(\frac{R}{2(n+1)}+\varepsilon+\delta_n\Big)$$

ここで

$$R=a^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x\partial y}$$

$$+b^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial y^2}$$

は定数であり，δ_n は $n\to\infty$ のときゼロに収束する量であるから，$\varepsilon>0$ であることを考慮すると，十分大きなすべての n に対して

$$\frac{R}{2(n+1)}+\varepsilon+\delta_n>0$$

となる。よって，十分大きなすべての n に対して

$$V(S)-\sum_{i\varepsilon s}x_i>0\ \text{すなわち}\ V(S)>\sum_{i\varepsilon s}x_i$$

が成立する。これは，定理1により，配分 $\boldsymbol{x}$ がコアに属さないことを示している。

以上により，$x_1=x_1^0-\varepsilon$, $\varepsilon>0$ であるどんな配分も，十分大きなすべての n に対して，ゲーム〔$1,n$〕のコアには含まれないことが示された。（証明終）

定理3の極限定理では，$\boldsymbol{x}^*$の各成分は m,n

には依存しない一定の値をもっていた。したがって$m, n \to \infty$のときコアが$\boldsymbol{x}^*$に収縮する，という表現をしたのだが，定理5の極限定理では，$\boldsymbol{x}^0$の成分のうちの第1成分$x_1{}^0 = V(I) - nu(0, b)$は$n$と共に変化する。したがって，コアが$\boldsymbol{x}^0$に収縮するという表現はこの場合は適切ではないだろう。そこで，$n \to \infty$のとき$\boldsymbol{x}^0$がどういうベクトルに近づいてゆくかを調べてみる。まず$x_2{}^0 = x_3{}^0 = \cdots\cdots = x^0{}_{n+1} = u(0, b)$で，これは$n$には依存しない。

$$
\begin{aligned}
x_1{}^0 &= V(I) - nu(0, b) \\
&= (n+1)\, u\left(\frac{a}{n+1}, \ \frac{nb}{n+1}\right) - nu(0, b) \\
&= u(0, b) + \left(a\frac{\partial u(0, b)}{\partial x} - b\frac{\partial u(0, b)}{\partial y}\right) \\
&\quad + \frac{R}{2(n+1)} + o\left(\frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}
$$

であるから，$n \to \infty$のとき，$x_1{}^0$は

$$
u(0, b) + a\frac{\partial u(0, b)}{\partial x} - b\frac{\partial u(0, b)}{\partial y}
$$

に収束することがわかる。そこで

$$
\overline{\boldsymbol{x}} = (\overline{x_1}, \ \overline{x_2}, \ \cdots\cdots, \ \overline{x_{n+1}})
$$

を

$$
(21) \quad
\begin{aligned}
&\overline{x_1} = u(0, b) + a\frac{\partial u(0, b)}{\partial x} - b\frac{\partial u(0, b)}{\partial y} \\
&\overline{x_2} = \overline{x_3} = \cdots\cdots = \overline{x_{n+1}} = u(0, b)
\end{aligned}
$$

で定義すれば，定理5は，より具体的に次の形に述べることができる。

定理6　ゲーム〔$1, n$〕のコアは，$n \to \infty$のとき，(21)で定義されるベクトル$\overline{\boldsymbol{x}}$に収縮する。

ここで注意しておきたいことは，どのnに対しても，$\overline{\boldsymbol{x}}$の成分の和は$V(I)$にはならない（したがって集団合理性をみたさない）ために，$\overline{\boldsymbol{x}}$はゲーム〔$1, n$〕の配分にはなっていない，ということである。しかし，$n \to \infty$となるにつれて，$\overline{\boldsymbol{x}}$はいくらでも配分に近くなってゆく。

ゲーム〔$1, n$〕の核は配分$\boldsymbol{x}^0$のほかにも，(18)で定義される配分$\boldsymbol{x}^*$をも含んでいる。(18)から明らかなように，$n \to \infty$のとき，$\boldsymbol{x}^*$も$\overline{\boldsymbol{x}}$に収束する

定理6の経済学的意味を考えてみよう。

効用関数$u(x, y)$は凹関数であり，したがって限界効用は逓減する。x, yの動く範囲は$0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$である。このことから

$$
(22) \quad
\begin{aligned}
&\frac{\partial u(0, b)}{\partial x} = \max_{0 \leqq x \leqq a} \frac{\partial u(x, b)}{\partial x}, \\
&\frac{\partial u(0, b)}{\partial y} = \min_{0 \leqq y \leqq b} \frac{\partial u(0, y)}{\partial y}
\end{aligned}
$$

である。そこで，第8節の所論にならって財の価格を限界効用によって評価することにして

$$
p_A = \frac{\partial u(0, b)}{\partial x}, \quad p_B = \frac{\partial u(0, b)}{\partial y}
$$

によってA財，B財の単位当り価格を定義すれば，(21)の$\overline{x_1}$は

$$
\overline{x_1} = u(0, b) + p_A a - p_B b
$$

となる。(22)により，p_AはA財に与えられる最高の価格と考えられ，p_BはB財に与えられる最低の価格と考えられる。そうすると，$p_A a - p_B b$は，a財を最高の価格（独占価格）で売ってb財を最低の価格で買ったときの現金残高，すなわち考えられる最大の独占利潤をあらわすものと考えてよいだろう。そうすると，定理6は，ゲーム〔$1, n$〕のもっとも安定した配分様式であるコアが，$n \to \infty$とと

もに，増大してゆく独占利潤を独占者に与える形をとりながら完全独占体制へ近づいてゆく必然性を示しているものと考えることができるだろう。

究極的には完全な独占形態 $\overline{x}$ に近づくという点では同じであっても，x^* が $\overline{x}$ に近づく過程と x^0 が $\overline{x}$ に近づく過程との間には多少の相違がみられる。

（18）の配分 x^* が $\overline{x}$ に収束してゆく過程を考えてみると，（18）では，価格は，限界効用で評価するから

$$p_A{}^{(n)}=\frac{\partial}{\partial x}u\left(\frac{a}{n+1},\ \frac{nb}{n+1}\right),$$

$$p_B{}^{(n)}=\frac{\partial}{\partial y}u\left(\frac{a}{n+1},\ \frac{nb}{n+1}\right)$$

と考えられるが，この場合は

$$x_1{}^*=u^*+\frac{n}{n+1}(ap_A{}^{(n)}-bp_B{}^{(n)})$$

$$x_j{}^*=u^*-\frac{1}{n+1}(ap_A{}^{(n)}-bp_B{}^{(n)})$$

$$>u(0,b)$$

であるから，配分 x^* では独占者は独占利潤 $ap_A{}^{(n)}-bp_B{}^{(n)}$ を独り占めしているわけではなく，そのうちの幾分かを他のメンバーに分け与えている。しかし，$n\to\infty$ となるにつれて，$p_A{}^{(n)}$ は増大し $p_B{}^{(n)}$ は減少するから，$ap_A{}^{(n)}-bp_B{}^{(n)}$ は増大し，しかも独占者のとる割合も増える。そして究極的には全部を独り占めにしてしまうのである。

x^0 で与えられる配分が $\overline{x}$ に収束する過程では，独占者が利潤をつねに独り占めしている。そして利潤額が n と共に増大してゆく形になっている。

x^0 の方が x^* の場合よりも独占者が強く振る舞っているけれども，n が大きいときは，その差はたいしたことはない。x^0 も x^* もともにきわめて安定な配分であるから，この配分形態を変えるのは容易でない。少くとも，各メンバーがルールに従って行動している限りは変更は不可能であろう。現実の事態に照して考えると，まことに興味ある結果といえるだろう。

10 ゲーム〔m,n〕で m が一定で n → ∞ のとき．寡占の場合

前節の独占のゲーム〔1, n〕を一般化して，ゲーム〔m, n〕において，m が一定で n が大きくなる場合について考えてみよう。これは寡占の場合と考えることができるだろう。

この場合も $m:n$ の比は一定ではないから，定理 3 の結果は使えない。

定理 2 によれば，$M=\{1, 2, \cdots\cdots, m\}, N=\{m+1, \cdots\cdots, m+n\}$ として

$$x_i{}^*=u^*+\frac{n}{m+n}\omega^* \qquad i\varepsilon M$$

$$x_j{}^*=u^*-\frac{m}{m+n}\omega^* \qquad j\varepsilon N$$

ここで

$$u^*=u\left(\frac{ma}{m+n},\ \frac{nb}{m+n}\right)$$

$$\omega^*=\left(a\frac{\partial}{\partial x}-b\frac{\partial}{\partial y}\right)u\left(\frac{ma}{m+n},\ \frac{nb}{m+n}\right)$$

で与えられる配分 x^* はゲーム〔m, n〕のコアに属する。ここで m を一定と考え，$n\to\infty$ とすると $u^*\to u(0,b)$，$\omega^*\to a\dfrac{\partial u(0,b)}{\partial x}-b\dfrac{\partial u(0,b)}{\partial y}$ となるから

$$\omega^0=a\frac{\partial u(0,b)}{\partial x}-b\frac{\partial u(0,b)}{\partial y}$$

とおけば x^* の各成分は

$$
(23)\quad \begin{aligned} \overline{x_i} &= u(0,b)+\omega^0 \qquad i\varepsilon M \\ \overline{x_j} &= u(0,b) \qquad j\varepsilon N \end{aligned}
$$

を成分としてもつベクトル $\overline{x}$ の成分にいくらでも近づいてゆく。

この場合も，定理6と同様の極限定理が成立することが示される。それを見てみよう。

まず，$\overline{x}$ における M のメンバーの $\overline{x_i}$ の和は $m(u(0,b)+\omega^0)$ であるが，配分 x における M のメンバーの利得の和が $m(u(0,b)+\omega^0)$ より小さいときは，十分大きな n に対して x はコアには属さないことを示す。

配分 $x=(x_1, \cdots\cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots\cdots, x_{m+n})$ において

$$
\sum_{i\varepsilon M} x_i = m(u(0,b)+\omega^0)-\varepsilon,\quad \varepsilon>0
$$

とする。このとき，$V(I)$ のテーラー展開を用いて

$$
\sum_{j\varepsilon N} x_j = V(I)-(mu(0,b)+m\omega^0)+\varepsilon
$$

$$
= nu(0,b)+\frac{m^2R}{2(m+n)}+o\left(\frac{1}{n}\right)+\varepsilon
$$

ここで

$$
R = a^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x^2} - 2ab\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial x\partial y}
$$

$$
+ b^2\frac{\partial^2 u(0,b)}{\partial y^2}
$$

となるが，n を十分大きくとれば

$$
\left|\frac{m^2R}{2(m+n)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}
$$

とすることができるから

$$
\sum_{j\varepsilon N} x_j \geqq nu(0,b)+\frac{\varepsilon}{2}
$$

が成立する。したがって，少くとも1人の $j\varepsilon N$ について

$$
(24)\qquad x_j \geqq u(0,b)+\frac{\varepsilon}{2n}
$$

が成り立つ。このような j を除いた $I-\{j\}=S$ とおくと

$$
V(S) = (m+n-1)u(0,b)+m\omega^0
$$

$$
+\frac{m^2R}{2(m+n-1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)
$$

$$
\sum_{i\varepsilon S} x_i = V(I)-x_j \leqq V(I)-u(0,b)-\frac{\varepsilon}{2n}
$$

$$
= (m+n-1)u(0,b)+m\omega^0
$$

$$
+\frac{m^2R}{2(m+n)}+o\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\varepsilon}{n}
$$

したがって，十分大きな n に対して

$$
V(S)-\sum_{i\varepsilon S} x_i \geqq \frac{m^2R}{2}\left(\frac{1}{m+n-1}-\frac{1}{m+n}\right)
$$

$$
+o\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\varepsilon}{2n}
$$

$$
= \frac{m^2R}{2}\,\frac{1}{(m+n)(m+n-1)}
$$

$$
+o\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{\varepsilon}{n}
$$

となるが，はじめの2つの項は $1/n$ よりも高位の無限小であるから，十分大きなすべての n に対して，この式の符号は正になる。したがって

$$
V(S) > \sum_{i\varepsilon S} x_i
$$

となって，定理1により，x はコアには含まれない。

上記の論証の過程を検討すれば明らかなよ

うに，nが大きくなったときに$\boldsymbol{x}$がコアに含まれなくなるのは，(24)をみたすような$j\varepsilon N$があることによるのである。このことから，どんなに小さく$\varepsilon>0$をとっても

$$x_j \geqq u(0, b)+\varepsilon$$

であるような$j\varepsilon N$が1つでもあれば，$\boldsymbol{x}$は$(n\to\infty)$のときにコアには含まれなくなる。したがって，コアに含まれるどんな配分をとっても，すべての$j\varepsilon N$に対して，$n\to\infty$のときに，メンバーjの利得は，いくらでも$u(0, b)$に近いものにならなくてはいけないのである。

次にMのメンバーiの利得x_iについて考えてみよう。Mのメンバーの少くとも1人，たとえばメンバー1，の利得x_1が，$\varepsilon>0$に対して

$$x_1 \leqq u(0, b)+\omega^0-\varepsilon$$

であり，さらに$j\varepsilon N$については，すべて

$$x_j = u(0, b)$$

であるような配分$\boldsymbol{x}$を考えてみる。メンバー1とNの全員とから成る結託を$S=\{1\}\cup N$とすると

$$V(S)=(n+1)\,u\left(\frac{a}{n+1},\ \frac{nb}{n+1}\right)$$

$$=(n+1)\,u(0, b)+\omega^0+\frac{R}{2(n+1)}$$

$$+\,o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{i\varepsilon S} x_i \leqq (n+1)\,u(0, b)+\omega^0-\varepsilon$$

であるから，十分大きなすべてのnに対して

$$V(S)-\sum_{i\varepsilon S} x_i \geqq \frac{R}{2(n+1)}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$+\varepsilon>0$$

となり，したがって$\boldsymbol{x}$はコアには含まれない。

こんどはMのメンバーの中に$u(0, b)+\omega^0$より多い利得を得る者がいる場合を考えてみよう。$\varepsilon>0$に対して

$$x_1 \geqq u(0, b)+\omega^0+\varepsilon$$

$$x_j = u(0, b), \qquad j\varepsilon N$$

である配分$\boldsymbol{x}$を考えると，$V(I)$のテーラー展開から

$$V(I)-nu(0, b)-x_1 \leqq (m-1)\,(u(0, b)$$

$$+\omega^0)+\frac{m^2R}{2(m+n)}+o\left(\frac{1}{n}\right)-\varepsilon$$

となるが，右辺の第2第3項は$n\to\infty$のときゼロに収束するから，十分大きなnに対して

$$\left|\frac{m^2R}{2(m+n)}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right|<\frac{\varepsilon}{2}$$

となり，したがってこのとき

$$V(I)-nu(0, b)-x_1 \leqq (m-1)\,(u(0, b)$$

$$+\omega^0)-\frac{\varepsilon}{2}$$

となる。この不等式の左辺はメンバー1を除くMのメンバー全員の利得の合計であるから，この不等式から，少くとも1人の$i\varepsilon M$について

$$x_i \leqq u(0, b)+\omega^0-\frac{\varepsilon}{2(m-1)}$$

が成り立つことがわかる。ここで$\varepsilon/2(m-1)$は正の定数であるから，これは，すぐまえに考察したケースと同じ場合であって，そこで用いたのと同じ論法によって，$\boldsymbol{x}$がコアには含まれないことが示される。

こうして，$i\varepsilon M$に対するx_iが$u(0,b)+\omega^0$よりも多くても少くても，そのような配分は$n\to\infty$のときコアには含まれなくなる。したがって，コアに含まれる配分については，Mのメンバーiの利得x_iは，nが大きくなるにつれて，$u(0,b)+\omega^0$にいくらでも近づいてゆくのでなくてはならない。

以上により，次の定理が得られる。

定理 7　ゲーム〔m,n〕において，mを一定として$n\to\infty$とすれば，コアに含まれる配分の各成分は，(23) で定義されるベクトル$\bar{x}$の対応する各成分にいくらでも近づいてゆく。すなわち，ゲーム〔m,n〕のコアは$\bar{x}$に収縮する。

定理7の経済学的意味は定理6の独占の場合とほとんど同じと考えてよい。独占の場合と同様に

$$p_A=\frac{\partial u(0,b)}{\partial x},\quad p_B=\frac{\partial u(0,b)}{\partial y}$$

で価格p_A, p_Bを定義すれば，

$$\omega^0=ap_A-bp_B$$

はMの各メンバーが獲得する最大の現金残高であり，nが増大するにつれて，Mのメンバーは，独占の場合と同様に優位性を増してゆくのである。

定理7は定理6の一般化と考えられるが，同じように，ゲーム〔$1,n$〕の場合の定理4がゲーム〔m,n〕の場合に一般化できるかどうかについて考えてみたい。定理4をゲーム〔m,n〕の場合に一般化するとしたら，対応する主張は次のような形になるであろう。

$m\geqq 2$のときに

$$x_i^0=\frac{V(I)-nu(0,b)}{m},\quad i\varepsilon M$$

$$x_j^0=u(0,b),\quad j\varepsilon N$$

で定義される配分x^0は，ゲーム〔m,n〕のコアに含まれるだろうか，ということである。

$S\subset I$を任意の結託とし，Sに含まれるMのメンバーの数をm_s, Nのメンバーの数をn_sとする。$s=m_s+n_s$とおく。$V(S)$を点$(0,b)$の近傍でテーラー展開すると

$$V(S)=su\left(\frac{m_sa}{s},\ \frac{n_sb}{s}\right)$$

$$=su\left(0+\frac{m_sa}{s},\ b-\frac{m_sb}{s}\right)$$

$$=s\left[u(0,b)+\frac{m_s}{s}\omega^0+\frac{m_s^2}{2s^2}R_1(\theta)\right]$$

$$=su(0,b)+m_s\omega^0+\frac{m_s^2}{2s}R_1(\theta)$$

ここで

$$\omega^0=a\frac{\partial u(0,b)}{\partial x}-b\frac{\partial u(0,b)}{\partial y}$$

$$R_1(\theta)=a^2\frac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial x\partial y}$$

$$+b^2\frac{\partial^2u(\xi,\eta)}{\partial y^2}$$

$$\xi=\frac{\theta m_sa}{s},\quad \eta=b-\frac{\theta m_sb}{s}$$

一方，$V(I)$のテーラー展開を使って

$$\sum_{i,s}x_i^0=\frac{m_s(V(I)-nu(0,b))}{m}+n_su(0,b)$$

$$=\frac{m_s}{m}\left[(m+n)u\left(\frac{ma}{m+n},\ \frac{nb}{m+n}\right)\right.$$

$$\left.-nu(0,b)\right]+n_su(0,b)$$

$$=\frac{m_s}{m}\left[(m+n)\left(u(0,b)+\frac{m}{m+n}\omega^0\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{m^2}{2(m+n)^2}R_2(\theta)\right)-nu(0,b)\right]$$

$$+n_s u(0,b)$$

$$=su(0,b)+m_s\omega^0+\frac{m_s m}{2(m+n)}R_2(\theta)$$

ここで

$$R_2(\theta)=a^2\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial x^2}-2ab\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial x\partial y}$$

$$+b^2\frac{\partial^2 u(\xi,\eta)}{\partial y^2}$$

$$\xi=\frac{\theta ma}{m+n},\quad \eta=b-\frac{\theta nb}{m+n}$$

したがって

$$V(S)-\sum_{i\in S}x_i{}^0=\frac{m_s}{2}\left(\frac{m_s}{2}R_1(\theta)\right.$$

$$\left.-\frac{m}{m+n}R_2(\theta)\right)$$

となる。ここで右辺の括弧内がつねに非正であれば x^0 がコアに属することになるが，それは一般にはいえない。したがって x^0 はコアに属するとはいえないが，m は一定で $n\to\infty$ とすると，括弧内の第２項はゼロにいくらでも近づくから，$R_1(\theta)<0$ であることを考慮すると，括弧内は負になる。したがって，S をまず指定して，然る後に $n\to\infty$ とする，すなわち，B 財保有者をどんどんふやす，とすれば，$V(S)\leqq\sum_{i\in S}x_i$ がえられることになる。しかし，n をどんなに大きくしたとしても，n をまず決めて，それから S をきめるとすると，駄目になってしまう。

以上のようなことから，独占の場合の定理４は，寡占の場合へそのまま一般化することはできないことになる。しかし，$n\to\infty$ のときに x^0 の各成分が $\bar{x}$ の対応する各成分にいくらでも近づいてゆくことの確認はできるから，x はコアの外から，コアにいくらでも近づいてゆく配分である。

経済学的にこのことを解釈してみると，定理４の x^0 は，独占者が独占の優位性をつねに最大限に獲得している，いわば専制君主的横暴さをもって振舞っている形の配分であるが，$m\geqq2$ の場合になると，寡占の優位さはあるにしても，少数者がつねに最大限の優位性を保持できるとは限らなくなる。少数者同士の間で相互に牽制しあってお互いの力を弱めるという面が現れてくるからである。現実に見られるこのようなことが，上記の分析の結果からうかがうことができるのも，興味深いことといえよう。独占の場合にくらべて寡占の場合の方が理論化しにくいという事情も，うなずけるような気がする。

参考文献

鈴木光男著「ゲームの理論」勁草書房

G．オーエン著．宮沢光一訳「ゲームの理論」東洋経済新報社

鈴木光男編著「ゲーム理論の展開」東京図書

M. Shubik. "Edgeworth Market Games" Annals of Mathematics Studies. No. 40. Contribution to the Theory of Games. Ⅳ 1959.

G. Debren and H. Scarf "A Limit Theorem on the Core of an Economy" International Economic Review. Vol. 4. 1963.

L. S. Shapley and M. Shubik, "Pure Competition, Coalition Power and Fair Division" International Economic Review, Vol. 10. 1969.

H. Scarf, "The Core of an N-person Games" Econometrica. Vol. 35. No. 1. 1967.