『学習院大学　経済論集』第39巻　第４号（2003年２月）

経済指標の変化の信憑性を考える
―プロージビリティ測度―

竹内 俊子　新居 玄武

1．はじめに

一般に，サーヴェイ・データから何らかの指標を作成し，その時系列変化やクロスセクションにおける類型別の差を見ようとするとき，データのもとになる集団の背後にある分布を想定して統計的な検証をせず，指標の僅かな動きから結論を下しているように見受けられる。竹内・新居［４］では，「変化の信頼係数」という尺度を導入し，パラメトリックな分布を仮定する場合においてこの点を考察した。そこでは，所得データから計算されたジニ係数により，所得分配構造の変化を捉えたが，その変化の信憑性を相対尤度の概念として得ることができた。本稿では，同様に，対象とするデータを所得分布とし，指標としてジニ係数を用い，所得分配構造の変化の信憑性を別の角度から考察する。

所得分布がどのような分布に従うかをデータから判定できない場合，あるいは最初から分布を全く仮定しない場合はどのような方法で指標の信憑性を捉えたらよいだろうか。単なる記述統計量として求めたジニ係数に対しては前述の「変化の信頼係数」はもはや求められない。そこで，新たに「プロージビリティ測度」という尺度の導入を考える。

2．プロージビリティ測度

得られたデータの分布型は一般には未知であり，私たちが持っている情報は，比較すべき２集団（時系列，あるいはクロスセクション）のデータのみである。その際，データから何らかの指標を推定するとしよう。その結果，データから求められた２つの指標に大小関係が存在し，かつその差が僅かであったならば，どう結論すべきだろうか。そこで，この大小関係の信憑性を判定する尺度をブートストラップ法を用いて作成する。

たとえば，所得データとして，$x_1,\cdots,x_n$ が得られたとする。そして，そのデータを用いて記述統計量としてのジニ係数を

$$\hat{G}=\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|x_i-x_j\right|}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

とする。

仮にその場合，データから求められた2つのジニ係数の大小関係が $\hat{G}_1 < \hat{G}_2$ であり，かつその差が僅かであった場合，この不等号の信憑性を判定する尺度をブートストラップ法によって定義する。そこで，時系列比較の場合は2時点，あるいはクロスセクションの場合は2類型のデータからそれぞれジニ係数の推定値 $\hat{G}_1$，$\hat{G}_2$ が得られたとする。もとの分布がどのような分布型であろうとも，真のジニ係数 G_1，G_2 の大小関係が $G_1 < G_2$ という関係を満たしているならば，推定値の大小関係も $\hat{G}_1 < \hat{G}_2$ であることが期待される。しかし，いつもそうなることが保証されているだろうか。データによっては，$\hat{G}_1 \geq \hat{G}_2$ と符号が逆転する確率は常に存在し，ジニ係数の大小関係について間違った結論を下すこともあり得る。

そこで，得られた2集団のデータ $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ から計算したジニ係数の推定値の大小関係が $\hat{G}_1 < \hat{G}_2$ となった場合，その不等号の信憑性をブートストラップ法を適用することによって調べる。たとえば，ブートストラップ標本数を2,000とする。得られた2集団のデータそれぞれからジニ係数のブートストラップ複製[1]を各2,000（$\hat{G}_1^{*i}$，$\hat{G}_2^{*i}$；$i=1,\cdots,2{,}000$）計算する。そして，そのブートストラップ複製の大小関係を総当り（$2{,}000^2=4{,}000{,}000$個の組合せ）で比較する。もし，推定値の大小関係 $\hat{G}_1 < \hat{G}_2$ の信憑性が高いなら，ブートストラップ複製によるジニ係数の推定値の大小関係も保存されるであろう。しかし，符号が逆転するブートストラップ複製もあり得る。そこで，たとえば $\hat{G}_1^{*i} < \hat{G}_2^{*j}$ ともとの不等号を満たすブートストラップ複製のケースが3,600,000あれば，もとの不等号の信憑性の大きさを0.9とする。ブートストラップ標本数である2,000の2乗に対する，$\hat{G}_1^{*i} < \hat{G}_2^{*j}\,(i, j=1,\cdots,2{,}000)$ となる個数の比率を「プロージビリティ測度」と呼ぶことにする。すなわち，

$$\text{プロージビリティ測度} = \frac{\hat{G}_1^{*i} < \hat{G}_2^{*j}\text{となったブートストラップ標本数}}{\text{ブートストラップ標本数の2乗}} \quad ; \; i, j = 1,\cdots,2{,}000$$

である。したがって，最も信憑性がうすい場合，$\hat{G}_1^{*i} < \hat{G}_2^{*j}$となるブートストラップ複製と$\hat{G}_1^{*i} \geq \hat{G}_2^{*j}$となるブートストラップ複製がほぼ同割合で出現するため，プロージビリティ測度は0.5となる。

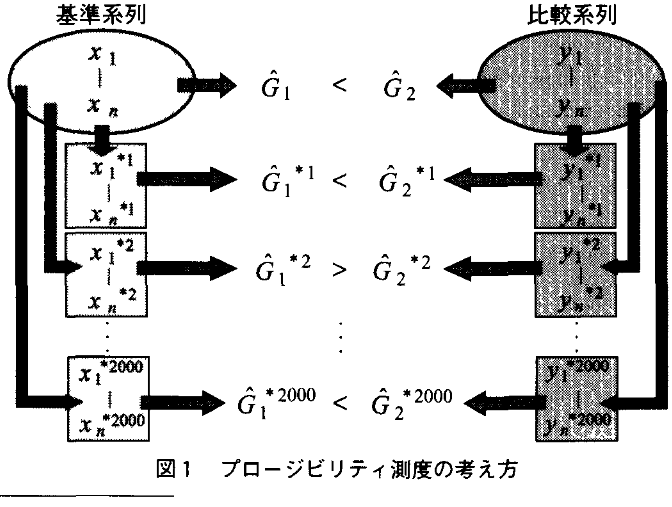

図1　プロージビリティ測度の考え方

1　ブートストラップ複製は＊をつけて表す。

これは，背後にある分布を仮定した場合において定義される「変化の信頼係数」（竹内・新居[4]）とは異なった尺度である。しかし，この値を見ることによって，変化の信頼係数と同様に，所得分配構造の変化に対してある程度の結論を下すことができるだろう。

3．擬似データによる数値例

いま，所得分布として，パレート分布を考える。パレート分布の密度関数は，

$$f(x)=ak^a x^{-(a+1)} \qquad k>a,\ a>0,\ x\geq k$$

である。この場合，ジニ係数の理論値は，

$$G=\frac{1}{2a-1}$$

である。そこで，この分布から乱数を発生させ，それをあたかも現実のデータとみなし，ジニ係数を計算し，プロージビリティ測度の性質を見てみることにする。

比較の基準となる集団の真のジニ係数を0.25，及び0.30と固定し，比較する集団の真のジニ係数を0.25～0.26，及び0.30～0.31の間で動かす。ジニ係数の理論値0.25～0.26，及び0.30～0.31のそれぞれに対応するパレート分布のパラメータ $a=2.50$～2.42，及び $a=2.17$～2.11に対し，パレート分布に従う乱数を各10,000個[2]ずつ発生させた。以下の分析では，その固定させたデータにおいてブートストラップ法を適用する。ブートストラップ標本数を2,000とし，ジニ係数（$\hat{G}$）を求め，$\hat{G}_1<\hat{G}_2$ のプロージビリティ測度を求めた。比較の基準となる集団の真のジニ係数が0.25，0.30の場合に，比較する集団の真のジニ係数を0.001ずつ増加させていったときのプロージビリティ測度をまとめたのが表1である。

	ジニ係数の増分										
ジニ係数	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.25	0.50	0.53	0.56	0.61	0.66	0.71	0.77	0.81	0.87	0.91	0.93
0.30	0.50	0.52	0.53	0.59	0.62	0.68	0.73	0.78	0.80	0.87	0.91

表1　プロージビリティ測度

たとえば，表1において，基準となる集団の真のジニ係数G_1が0.25のとき，真の増分が0.006，すなわち $G_2=0.256$のとき，標本から計算された $\hat{G}_1$，$\hat{G}_2$ の大小関係が $\hat{G}_1<\hat{G}_2$ であるときのプロージビリティ測度は0.77であることを示している。多少，ゆらぎはあるものの，推定値間の差が大きくなるほどプロージビリティ測度も大きくなっている様子がわかる。また，基準となる集団のジニ係数0.25と0.30を比較すると，0.30のときのプロージビリティ測度の方が低い値になっている。これをグラフに表したのが図2である。

2　これは「家計調査」の標本数を意識してのものである。

本論文冒頭

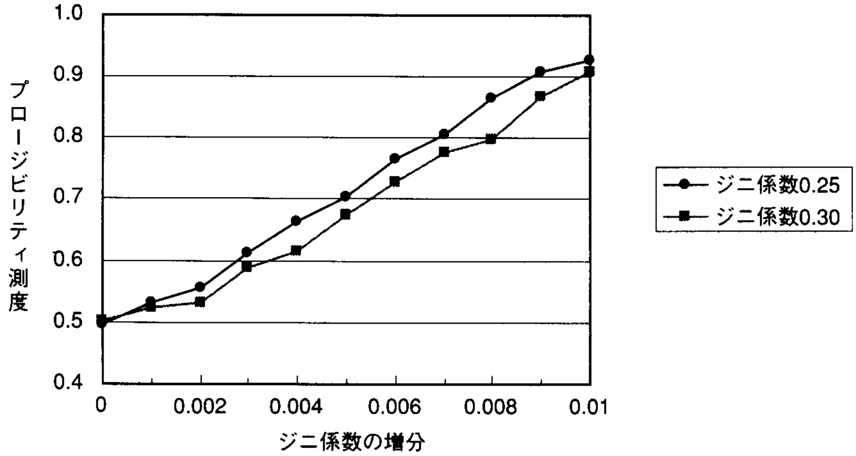

図2　プロージビリティ測度

プロージビリティ測度は，背後にどのような分布を仮定しようとも，基準となる集団のジニ係数を固定した場合には，比較する集団のジニ係数との差が大きくなるほどプロージビリティ測度は高くなり，差を固定した場合には，基準となる集団のジニ係数が大きくなるほどプロージビリティ測度が低くなるという構造を持っている。

4. プロージビリティ測度の感度

擬似データに摂動を加えることによりプロージビリティ測度がどの位変化するかという，プロージビリティ測度への影響を確認し，プロージビリティ測度の意味するところを考えてみよう。

4.1　分布構造の変化による影響

仮に，2集団から全く同じデータが得られた場合，2集団のジニ係数は全く同じ，すなわち，$\hat{G}_1 = \hat{G}_2$となり，ブートストラップ法を用いて求めたプロージビリティ測度も0.5となることが期待される。しかし，比較する集団の標本を直感的に分布構造に変化があるように摂動を加えた場合，プロージビリティ測度はどう変わるだろうか。

基準となる集団に対して比較する集団の方が明らかにジニ係数が大きくなるように，標本に摂動を加え，効果を見る。最初に，標本10,000個のうち最も大きいものから1つずつ順番にその値を1割増加させ（$x' = 1.1x$），記述統計量としてジニ係数を求め，さらに，ブートストラップ法によりプロージビリティ測度を求める。変更した標本の個数とジニ係数の値，プロージビリティ測度の関係をまとめたのが表2[3]である。

3　ブートストラップ標本数2,000

変更した標本数	0	1	2	3	4	5	10	20	30
ジニ係数	0.2509	0.2511	0.2513	0.2514	0.2515	0.2516	0.2520	0.2526	0.2532
プロージビリティ測度	0.50	0.51	0.51	0.52	0.53	0.53	0.56	0.59	0.62

表2　分布構造の変化とプロージビリティ測度の関係（$x' = 1.1x$）

表2を見ると，変更した標本の数が0個のとき，すなわち，分布構造に変化がなかった場合における$\hat{G}_1 < \hat{G}_2$のプロージビリティ測度は期待通り0.5である。標本を3個変更し，$\hat{G}_1 = 0.2509 < \hat{G}_2 = 0.2514$ のときのジニ係数の差は0.0005と僅かであり，プロージビリティ測度も0.52と0.5に近い。したがって，分布構造に変化があったとは言えないだろう。

次に，同様な方法で標本10,000個のうち最も大きいものから1つずつ順番にその値を2倍にしていくことを考える（$x' = 2.0x$）。分布の上位のスソを大きく伸ばす摂動である。そこで，記述統計量としてジニ係数を求め，さらに，ブートストラップ法によりプロージビリティ測度を求める。変更した標本の個数とジニ係数の値，プロージビリティ測度の関係をまとめたのが表3である。

変更した標本数	0	1	2	3	4	5	10	20	30
ジニ係数	0.2509	0.2529	0.2541	0.2553	0.2561	0.2570	0.2610	0.2677	0.2725
プロージビリティ測度	0.50	0.60	0.65	0.70	0.74	0.77	0.88	0.97	0.99

表3　分布構造の変化とプロージビリティ測度の関係（$x' = 2.0x$）

表3を見ると，標本を10個変更し，$\hat{G}_1 = 0.2509 < \hat{G}_2 = 0.2610$ のとき，ジニ係数の差は約0.01，プロージビリティ測度も0.88と大きく，前の場合と比べると変化の信憑性が高まることがわかる。

表2及び表3における，変更した標本の個数とプロージビリティ測度の関係をグラフにしたのが図3である。

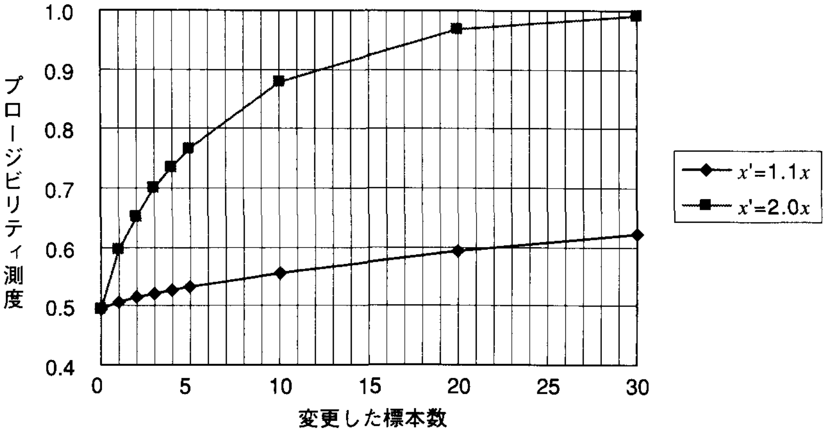

図3　プロージビリティ測度の変化（$x' = 1.1x$, $x' = 2.0x$）

本論文冒頭

図3を見ると，プロージビリティ測度は，変更した標本の個数に依存して変化することがわかる。データを $x'=1.1x$ として新しく比較集団を生成した場合，プロージビリティ測度は10個変更しても0.56で分布構造に変化があったとは言えない。しかし，データを $x'=2.0x$ として新しく比較集団を生成した場合はプロージビリティ測度は0.88となり，かなり高い信憑性で分布構造に変化があったと言えるだろう。

また，データの生成方法 $x'=ax$ の a をいろいろ変化させて，変更した標本の個数とプロージビリティ測度の変化を表とグラフにした。

データの生成方法： a ($x'=ax$)	1.0	1.1	1.5	2.0	3.0	4.0	5.0
変更した標本数 1	0.50	0.51	0.55	0.60	0.66	0.71	0.74
変更した標本数 3	0.50	0.52	0.61	0.70	0.81	0.87	0.90
変更した標本数 5	0.50	0.53	0.66	0.77	0.88	0.93	0.96

表4　プロージビリティ測度の変化（$x'=ax$）

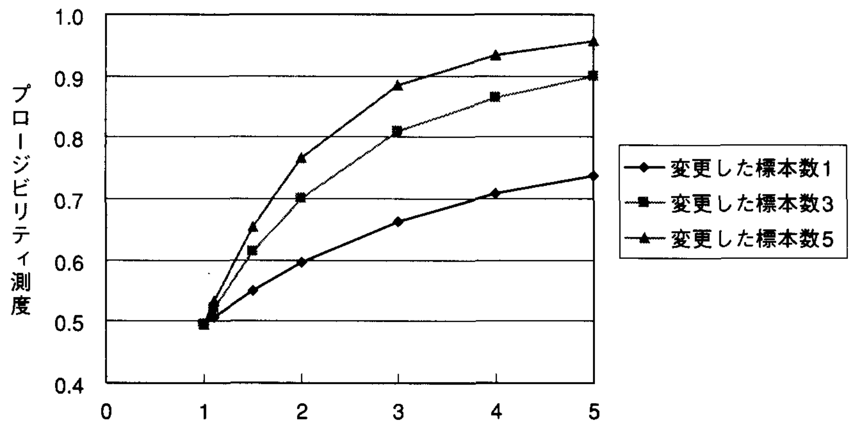

図4　プロージビリティ測度の変化（$x'=ax$）

ジニ係数の変化が小さい場合（データの変化が小さい場合）は構造変化が検出しづらく，ジニ係数の変化が大きい場合（データの変化が大きい場合）には構造変化が検出できることがこの例からわかり，プロージビリティ測度は整合性のある指標といえる。ただし，これは1つの摂動パターンについて調べたものである。すでにいくつかの摂動パターンについては確認しているが，さらに研究を進める必要があろう。

4.2 ブートストラップ標本数による影響

ブートストラップ法を適用する際，どの位のブートストラップ標本数を確保したら，プロージビリティ測度は安定するだろうか。ブートストラップ標本の大きさによる影響を見てみよう。ここでは，標本数10,000，基準となる集団のジニ係数が0.25，比較されるジニ係数が0.25～0.26の場合について，ブートストラップ標本数を100，1,000，2,000として，プロージビリティ測度を求め，表とグラフにした。

本論文冒頭

	ジニ係数の増分										
ブートストラップ標本数	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
100	0.45	0.57	0.56	0.62	0.69	0.71	0.76	0.82	0.86	0.89	0.91
1,000	0.51	0.55	0.57	0.62	0.66	0.70	0.77	0.82	0.86	0.91	0.93
2,000	0.50	0.53	0.56	0.61	0.66	0.71	0.77	0.81	0.87	0.91	0.93

表 5　ブートストラップ標本数による変化

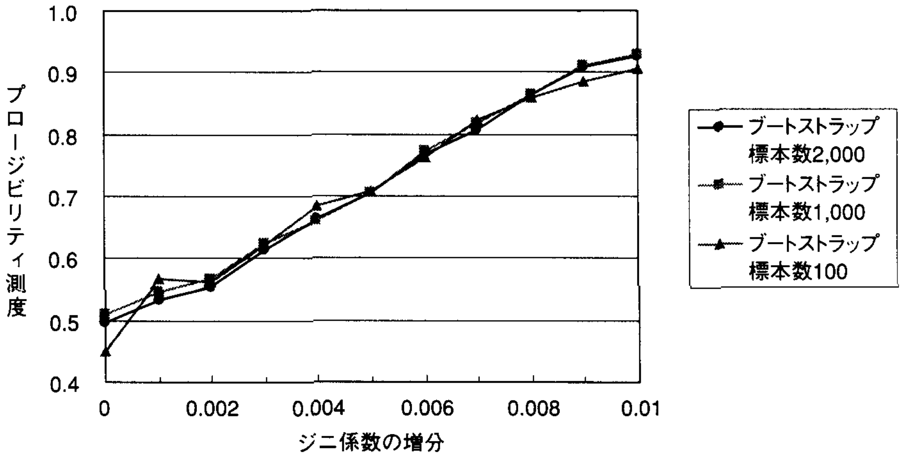

図 5　ブートストラップ標本数による変化

ブートストラップ標本数100ではまだゆらぎが見られる。ブートストラップ標本数1,000と2,000では，プロージビリティ測度はほとんど同じ値である。したがって，ブートストラップ標本数は1,000でよいと思われる。しかし，本稿では安全のため，ブートストラップ標本数2,000とした。

4.3　標本の大きさによる影響

得られた2集団の標本数が少なければ，プロージビリティ測度の値が不安定になることは当然であろう。では，どの位の標本数があれば，プロージビリティ測度は安定するのだろうか。ここでは，標本数が100，1,000，10,000の場合について，ブートストラップ標本数2,000，基準となる集団のジニ係数が0.25の場合における標本の大きさによる変化を見てみる。

	ジニ係数の増分										
標本数	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
1,000	0.48	0.49	0.50	0.53	0.55	0.57	0.58	0.59	0.62	0.64	0.67
10,000	0.50	0.53	0.56	0.61	0.66	0.71	0.77	0.81	0.87	0.91	0.93

表 6　標本の大きさによる変化

本論文冒頭

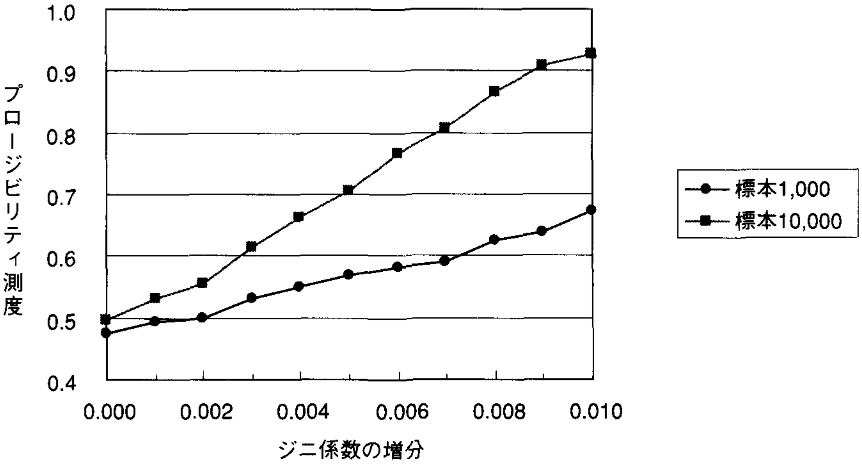

図6　標本の大きさによる変化

標本の大きさ1,000と10,000では，プロージビリティ測度は1,000の方が小さくなっている。標本数が少ないとプロージビリティ測度も低くなる傾向があり，2つの集団から計算されたジニ係数の差が同じでも標本数が大きい方がプロージビリティ測度は高くなる。

5．プロージビリティ測度の妥当性

プロージビリティ測度の妥当性を調べるために，パラメトリックな分布を仮定した場合において分布構造の変化を測る指標である「変化の信頼係数」と対比させてみよう。

最初に，簡単にジニ係数の「変化の信頼係数」の概念について述べる。真のジニ係数の関係が $G_1 < G_2$ である2つの集団があり，その集団それぞれから推定されたジニ係数の関係が $\hat{G}_1 < \hat{G}_2$ であるとする。真のジニ係数が既知の場合，ジニ係数の推定値の大小関係も真のジニ係数の大小関係と等しい確率 $P(\hat{G}_1 < \hat{G}_2 \mid G_1 < G_2)$は解析的に求めることができる。しかし，実際には真のジニ係数は未知であり，私たちが知りたいのはジニ係数の推定値の大小関係が得られた場合，その関係が真のジニ係数の大小関係と等しい可能性である。しかし，それはもはや確率ではない。そこで，推定値の関係が $\hat{G}_1 < \hat{G}_2$ である場合に真の値の関係も $G_1 < G_2$である尤度 $L(G_1 < G_2 \mid \hat{G}_1 < \hat{G}_2)$を考える。$G_1$，$G_2$が全領域をとる尤度を1と基準化し，$R(G_1 < G_2 \mid \hat{G}_1 < \hat{G}_2)$と表す。これは全領域を1とした場合の $G_1 < G_2$ の尤度であるので，相対尤度となっている。この相対尤度が「変化の信頼係数」である。

たとえば，所得分布にパレート分布を仮定した場合，ジニ係数の変化の信頼係数は，比較の基準となるジニ係数の推定値 $\hat{G}_1$ と標本数 n_1，比較するジニ係数の推定値 $\hat{G}_2$ と標本数 n_2 を用いて，次の式で与えられる。

$$R(G_1 < G_2 \mid \hat{G}_1 < \hat{G}_2) = 1 - \int_0^{\frac{1+\frac{1}{\hat{G}_2}}{1+\frac{1}{\hat{G}_1}}} \frac{(2n_1)^{n_1}(2n_2)^{n_2}}{B(n_1, n_2)} \frac{x^{n_1-1}}{(2n_2 + 2n_1 x)^{n_1+n_2}} dx$$

ここで，　$B(u,v)=\int_0^1 x^{u-1}(1-x)^{v-1}dx$　はベータ関数である。（竹内・新居［4］）

変化の信頼係数を上の式から求める。3節の擬似データによる数値例で求めたプロージビリティ測度と同様に，標本数を10,000とし，比較の基準となる集団のジニ係数を0.25，及び0.30と固定し，比較する集団のジニ係数を0.25～0.26，及び0.30～0.31とする。比較の基準となる集団のジニ係数が0.25，0.30の場合に，比較する集団の真のジニ係数を0.001ずつ増加させていったときの変化の信頼係数を計算し，まとめたのが表7である。これをわかりやすく見るために，グラフに表したのが図7である。

	ジニ係数の増分										
ジニ係数	0.000	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009	0.010
0.25	0.50	0.59	0.67	0.75	0.82	0.87	0.91	0.94	0.96	0.98	0.99
0.30	0.50	0.57	0.64	0.71	0.76	0.82	0.86	0.89	0.92	0.95	0.96

表7　変化の信頼係数

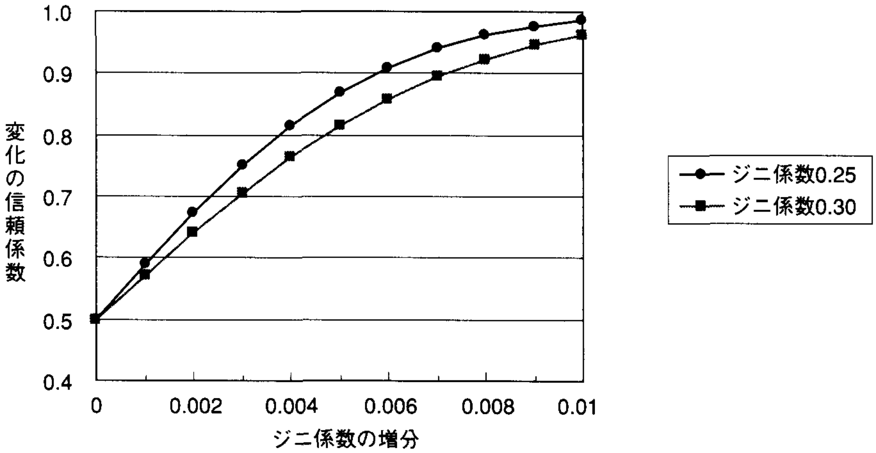

図7　変化の信頼係数

プロージビリティ測度の図2と，この変化の信頼係数の図7を比べてみよう。プロージビリティ測度はブートストラップ法を用いているため，図2には多少のゆらぎが見られ，また，分布の情報がない分，変化の信頼係数より低い値になっている。右上がりの曲線で，基準となる集団のジニ係数が0.30の場合より，0.25の場合の方が低い値となっていて，図7における変化の信頼係数と同じような動きをしていることがわかる。したがって，プロージビリティ測度は変化の信頼係数と類似の尺度であり，分布構造の変化を測る指標として妥当性があると考えられる。

6．結論

経済分析において，対象とする集団から得られたデータの分布型を特定化することは難しい。

しかし，分布構造に変化があると判断するためには，何らかの指標を求め比較する必要がある。さらに，その指標の信憑性を調べる必要がある。

本稿では，ブートストラップ法を用いて，所得分布を例にとり，変化の信頼性を示す指標であるプロージビリティ測度を導入した。このプロージビリティ測度は，分布を特定する必要もなく，2集団のデータ（時系列，またはクロスセクション）を比較する際に分布型が等しい必要もない。プロージビリティ測度により，分布構造を示す指標の変化，あるいは差について，その信憑性をふまえて結論を導くことは有用であろう。

参考文献

[1] Efron, B. (1979). "Bootstrap methods : another look at the jackknife", Annals of Statistics, 7, 1-26

[2] Efron, B. and Tibshirani (1993). An Introduction to the Bootstrap, Chapman & Hall

[3] 竹内俊子，新居玄武 (2000).「ジニ係数の変化を判断する尺度について」，『第68回日本統計学会講演報告集』

[4] 竹内俊子，新居玄武 (2001).「ジニ係数の変化を判断する尺度について」，『学習院大学経済論集』，37, 3・4, 199-213

本論文冒頭