数学 II

2019 年 7 月 26 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n = 1, 2, 3, 4$）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。試験後、答案を受け取りにくること。2019 年 10 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

0.　これは 1 枚目の冒頭に書くこと。レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければレポートは提出していないとみなす）。レポートは返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1.　m, ω, f_0 を実定数とする（ただし m と ω は正）。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0\,\sin(\omega t) & 0 \le t \le \pi/\omega \\ 0 & t \ge \pi/\omega \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2.　γ, α, β を正の定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = -\gamma\,x(t) + \alpha\,e^{\beta\,t} \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\alpha = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t) = A\,e^{\beta\,t}$ と書けるものを求めよ（A は求めるべき定数）。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

α, β を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(d) では $x(t) > 0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$\text{(d)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha + \beta t^2}{x(t)} \qquad \text{(e)}\quad \frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\beta\,t)\left(1 + \{x(t)\}^2\right) \tag{2}$$

3.　α, β, ω を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\,\cos(\omega t)\,x(t) + \beta\,t\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\,\exp[\,\frac{\alpha}{\omega}\,\sin(\omega t)]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、もとの微分方程式の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

A, B を任意の行列、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を任意の列ベクトルとする。行列のエルミート共役について以下の性質を証明せよ。

(c) $(\mathsf{AB})^\dagger = \mathsf{B}^\dagger\,\mathsf{A}^\dagger$

(d) $\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \left\langle \mathsf{A}^\dagger \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \right\rangle$

4.　x および z 軸の回りの θ の回転を表わす行列はそれぞれ以下の通り。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ と } \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) 点 $(a, b, c)^{\mathrm{t}}$ を x 軸回りに $\pi/4$ 回転した点を求めよ。

(b) (a) で求めた点をさらに z 軸回りに $\pi/4$ 回転した点を求めよ。

以下の計算をせよ。

(c) $\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5}\,i \\ \sqrt{5}-i \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5}\,i \\ \sqrt{5}+2\,i \end{pmatrix}$　(d) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 9 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$　(f) $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$