試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 I	2019 年 1 月 18 日	金	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが)。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2019 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

問題は二枚あることに注意せよ !!

0. **これは冒頭に書くこと。** レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす)。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. L を正の定数とする。辺の長さが L の正方形状の領域に閉じ込められた質量 m の自由粒子の定常状態のシュレディガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{1}$$

を考える。ただし、$0\le x\le L,\ 0\le y\le L$ であり、正方形の辺の上では $\varphi(x,y)=0$ という境界条件を取る。

(a) シュレディンガー方程式 (1) の解（つまり、エネルギー固有値とエネルギー固有状態）をすべて求めよ。エネルギー固有状態は規格化せよ。

(b) 基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求め、それぞれの縮退度を求めよ。

2. 一次元のシュレディンガー方程式でポテンシャルが座標の反転について対称（つまり偶関数）ならばエネルギー固有状態の波動関数は対称（偶関数）か反対称（奇関数）のいずれかに取れるという定理を講義で示した。しかし、$a>0$ を定数とし、$-a\le x\le a$ の範囲での自由粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x)=E\,\varphi(x) \tag{2}$$

を周期的境界条件（$\varphi(a)=\varphi(-a),\ \varphi'(a)=\varphi'(-a)$）のもとで考えると、エネルギー固有状態は

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{ikx} \tag{3}$$

と書ける。ここで、$k \neq 0$ なら $\varphi(x)$ は対称でも反対称でもない。これが最初に述べた定理と矛盾しないことを説明せよ。

3. a, b を $a > b$ を満たす正の定数、V_0 を正の定数とする。区間 $-a \leq x \leq a$ におけるポテンシャル

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a \leq x < -b \text{ または } b < x \leq a \text{ のとき} \\ V_0 & -b \leq x \leq b \text{ のとき} \end{cases} \tag{4}$$

の中の質量 m の粒子の定常状態（エネルギー固有状態）のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) + V(x)\,\varphi(x) = E\,\varphi(x) \tag{5}$$

を考える。境界条件は $\varphi(-a) = \varphi(a) = 0$ とする。

ここでは、$E > V_0$ を満たすエネルギー固有値と対応するエネルギー固有状態に注目する。

座標の反転について対称なエネルギー固有状態の波動関数は

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin(k(x+a)) & -a \leq x \leq -b \\ C\ \cos(\tilde{k}x) & -b \leq x \leq b \\ \sin(k(-x+a)) & b \leq x \leq a \end{cases} \tag{6}$$

と書ける。ただし $C, k, \tilde{k}$ は（これから決める）定数である。

(a) エネルギー固有値 E を $k, \tilde{k}$ それぞれを用いて表わせ。その結果を用いて k と $\tilde{k}$ を結ぶ（E を含まない）関係を書け。

(b) 波動関数の連続性の条件に注意して、k を決めるための条件を求めよ（条件に k 以外の未知の量をを含めないこと）。

座標の反転について反対称なエネルギー固有状態についても同様の考察をしよう。

(c) 上の (6) のように波動関数の一般的な形を書け。

(d) 波数 k を決めるための条件を求めよ（k 以外の未知の量をを含めないこと）。

(e) $E \gg V_0$ のとき (d) の条件を満たす k を近似的に求めよ。その結果を、$V_0 = 0$ とした問題と比較して考察せよ。

4. 1次元の1粒子の量子力学系を考え、$\hat{x}, \hat{p}$ をそれぞれ位置と運動量の演算子とする。講義でみたように

$$\hat{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\ \hat{x} + i\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega}}\ \hat{p} \tag{7}$$

と定義すると、調和振動子のハミルトニアンは $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ と書ける（$m > 0$ は粒子の質量、$\omega > 0$ は振動子の角振動数)。

(a) 交換関係 $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ を示せ。ただし、$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ を証明抜きで使ってよい。

$|\varphi_0\rangle$ を、$\hat{a}|\varphi_0\rangle = 0$ と $\langle\varphi_0|\varphi_0\rangle = 1$ を満たす状態とし、$|\varphi_1\rangle := \hat{a}^\dagger|\varphi_0\rangle$ という状態を定義する。

(b) $|\varphi_0\rangle, |\varphi_1\rangle$ は $\hat{H}$ の固有状態であることを示し、それぞれの固有値（つまり、固有エネルギー）を求めよ。$|\varphi_1\rangle$ が規格化されていることを示せ。

(c) $\langle\varphi_0|\hat{x}^2|\varphi_0\rangle, \langle\varphi_1|\hat{x}^2|\varphi_1\rangle, \langle\varphi_0|\hat{x}^3|\varphi_0\rangle, \langle\varphi_1|\hat{x}^3|\varphi_1\rangle$ を求めよ。