

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2011年1月19日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2011年9月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. これは冒頭に書くこと。レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日の答案にはさんで提出すること。

1. 角運動量の合成の問題。大きさ2と大きさ1/2の角運動量を合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を  $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$  とする。 $(\hat{\mathbf{J}})^2$  の固有値を  $J(J+1)$  と書き、 $\hat{J}_z$  の固有値を  $J_z$  と書く。また、対応する同時固有状態を  $\Phi_{J, J_z}$  と書く。

(a)  $J$  のとりうる値を求めよ。また各々の  $J$  について、 $J_z$  のとりうる値を求めよ。

(b)  $\Phi_{5/2, 5/2}$  と  $\Phi_{5/2, 3/2}$  と  $\Phi_{3/2, 3/2}$  を、合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと  $z$  成分が確定した状態）を使って表わせ。

なお、角運動量の固有状態についての一般公式

$$\varphi_{j, m-1} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m-1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_- \varphi_{j, m} \quad (1)$$

を証明なしで用いてよい。

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

周期境界条件を課した一次元の区間  $[0, L]$  上の自由粒子の問題を考える。非摂動のハミルトニアンは、

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \quad (2)$$

である。この系の基底状態はただ一つで、その波動関数は

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (3)$$

である。また第1励起状態は2重に縮退しており、それらの波動関数は、たとえば、

$$\varphi_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right), \quad \varphi'_2(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{2\pi}{L}x\right) \quad (4)$$

と取れる。

- (a) 非摂動ハミルトニアン(2)の基底エネルギー  $E_1$  と第1励起エネルギー  $E_2$  を求めよ。

非摂動ハミルトニアン(2)に

$$V_1(x) = \begin{cases} v & 0 \leq x \leq L/2 \text{ のとき} \\ 0 & L/2 < x < L \text{ のとき} \end{cases} \quad (5)$$

というポテンシャルを摂動として加える ( $v$  は定数)。

- (b) 基底エネルギーの変化を摂動の1次の計算で求めよ。  
(c) 第1励起エネルギーの変化を摂動の1次の計算で求めよ。

今度は、非摂動ハミルトニアン(2)に

$$V_2(x) = \begin{cases} v & 0 \leq x \leq L/4 \text{ のとき} \\ 0 & L/4 < x < L \text{ のとき} \end{cases} \quad (6)$$

というポテンシャルを摂動として加える ( $v$  は定数)。

- (d) 第1励起エネルギーの変化を摂動の1次の計算で求めよ。

**3.** スピン1/2を持つ二つの互いに区別できる粒子1, 2がある。 $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ をいつも通り、スピンのz方向の上下を向いた状態とする。

二つの粒子は、スピンの「からみあった状態

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 \right\} \quad (7)$$

にある。

- (a) 粒子1のz方向のスピンを測定したところ、 $\uparrow$ が得られた。このとき、粒子2のz方向のスピンを測定すると、どのような結果が得られるか？  
(b) 粒子1のx方向のスピンを測定したところ、 $\uparrow$ が得られた。このとき、粒子2のz方向のスピンを測定すると、どのような結果が得られるか？  
(c) 粒子1のx方向のスピンを測定したところ、 $\uparrow$ が得られた。このとき、粒子2のx方向のスピンを測定すると、どのような結果が得られるか？