試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2019 年 1 月 30 日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0 番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2019 年 9 月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. **これは冒頭に書くこと。**レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案といっしょに提出すること。

1. 角運動量の合成の問題だが去年までとは出題方法が違うので注意すること（当然ですが過去問の答を書いても評価しません）。

大きさ 1 の角運動量を持った量子系において、角運動量の z 成分の固有状態を講義と同様に $|1\rangle, |0\rangle, |-1\rangle$ と書く。大きさ 1 の角運動量を持った系が二つあるとし、それぞれでの角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}}^{(1)}, \hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$、全系の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とする。$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値を $J(J+1)$ と、$\hat{J}_{\mathrm{z}}$ の固有値を J_{z} と書き、対応する規格化された同時固有状態を $|\Phi_{J,J_{\mathrm{z}}}\rangle$ とする。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、J_{z} の取りうる値を求めよ（結果だけでよい）。

(b) $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = 4\hbar^2 + \hat{J}^{(1)}_+ \hat{J}^{(2)}_- + \hat{J}^{(1)}_- \hat{J}^{(2)}_+ + 2\hat{J}^{(1)}_{\mathrm{z}} \hat{J}^{(2)}_z$ であることを示せ。

(c) $|\Phi_{2,2}\rangle = |1\rangle|1\rangle$ および $|\Phi_{0,0}\rangle = (|1\rangle|-1\rangle + |-1\rangle|1\rangle + |0\rangle|0\rangle)/\sqrt{3}$ であることを定義に基づいて示せ（すぐ上で示した関係を使う）。

角運動量の固有状態についての以下の一般公式を証明なしで用いてよい。

$$\hat{J}_\pm |\psi_{j,m}\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\, |\psi_{j,m\pm 1}\rangle \tag{1}$$

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

1 次元の区間 $[0, L]$ での自由粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi''(x) = E\,\varphi(x) \tag{2}$$

を考える。周期的境界条件 $\varphi(x+L) = \varphi(x)$ を課す。

この系の基底状態 $\varphi_0(x)$ と二重に縮退した第一励起状態 $\varphi_+(x), \varphi_-(x)$ は、

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \varphi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i2\pi x/L}, \quad \varphi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i2\pi x/L} \tag{3}$$

で与えられる。

(a) 上の問題の基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ（エネルギー固有状態の意味を知っていればすごく簡単）。

v_0 を正の定数とする。

(b) 摂動ポテンシャル $V(x) = v_0\,\delta\left(x - \dfrac{L}{2}\right)$ が加わった際の基底状態と第一励起状態のエネルギーを摂動の一次までの範囲で求めよ。縮退が解けるなら、両方のエネルギーを書き、新たなエネルギー固有状態を示せ。

3. スピン 1/2 の粒子二つからなる系を扱う。z 方向の上向き・下向きのスピン状態を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ と書き、

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \right\}, \tag{4}$$

という状態における測定について以下に答えよ。

(a) 粒子 1 の $\hat{S}_\mathrm{z}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(b) 粒子 1 の $\hat{S}_\mathrm{z}$ を測定したら $\hbar/2$ が得られた。このあと粒子 2 の $\hat{S}_\mathrm{z}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(c) 粒子 1 の $\hat{S}_\mathrm{x}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(d) 粒子 1 の $\hat{S}_\mathrm{x}$ を測定したら $\hbar/2$ が得られた。このあと粒子 2 の $\hat{S}_\mathrm{x}$ を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

ヒント：（使わなくてもいいです）$S = 1/2$ のスピン演算子の行列表示は、

$$\hat{S}_\mathrm{x} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{y} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_\mathrm{z} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

である。