量子力学 III

2023 年 1 月 25 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n=1,2,3$）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。試験後、答案を受け取りにくること。2023 年 9 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。
問題用紙は 2 枚あり、問題は第 3 問まである。

1. 大きさ 1 の角運動量を持った粒子を考える。角運動量の z 成分の固有状態を講義と同様に $|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle$ と書く。

大きさ 1 の角運動量を持った粒子が二つある。それぞれの粒子の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}}^{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とし、全系の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{J}}^{(1)} + \hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とする。$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値を $J(J+1)\hbar^2$ と、$\hat{J}_\mathrm{z}$ の固有値を $M\hbar$ と書き、対応する規格化された同時固有状態を $|\Phi_{J,M}\rangle$ とする。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、M の取りうる値を求めよ（結果だけでよい）。

(b) $\hat{\boldsymbol{J}}^2 = 4\hbar^2 + \hat{J}_+^{(1)}\hat{J}_-^{(2)} + \hat{J}_-^{(1)}\hat{J}_+^{(2)} + 2\hat{J}_\mathrm{z}^{(1)}\hat{J}_z^{(2)}$ であることを示せ。

(c) 状態 $|\Psi\rangle = |+\rangle|+\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi\rangle$ と $\hat{J}_\mathrm{z}|\Psi\rangle$ を計算せよ。$|\Psi\rangle$ を $|\Phi_{J,M}\rangle$ の形に書いた場合の J と M の値を答えよ。

(d) 状態 $|\Psi_1\rangle = |+\rangle|0\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_1\rangle$ と $\hat{J}_\mathrm{z}|\Psi_1\rangle$ を計算せよ。状態 $|\Psi_2\rangle = |0\rangle|+\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_2\rangle$ と $\hat{J}_\mathrm{z}|\Psi_2\rangle$ を計算せよ。

(e) **上の結果を用いて** $|\Psi_1\rangle$ と $|\Psi_2\rangle$ の線型結合によって同時固有状態 $|\Phi_{J,M}\rangle$ を作れ（もちろん、J, M を明記すること）。独立なものを複数作れるならばすべて求めること。

角運動量の固有状態についての以下の一般公式を証明なしで用いてよい。

$$\hat{J}_\pm|\psi_{j,m}\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|\psi_{j,m\pm1}\rangle \tag{1}$$

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

2 次元空間での調和振動子を扱う。非摂動のシュレディンガー方程式は

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

である（難しそうに見えるかも知れないが、単に独立な 1 次元調和振動子が二つあるだけ)。質量 m と角振動数 ω は正の定数。この系の基底状態はただ一つで、その波動関数は

$$\varphi_{0,0}(x,y)=\sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\,\exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{3}$$

である。また第 1 励起状態は 2 重に縮退しており、それらの波動関数は、たとえば、

$$\varphi_{1,0}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,x\,\exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{4}$$

$$\varphi_{0,1}(x,y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{m\omega}{\hbar}\,y\,\exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{5}$$

と取れる。上の三つの状態は規格化されている。

(a) 非摂動の系 (2) の基底エネルギー E_0 と第 1 励起エネルギー E_1 を求めよ（これは結果の暗記を問う問題ではないし、シュレディンガー方程式を解くことを要求している問題でもないことに注意)。

この系に $V(x,y)=v\,xy$ というポテンシャルを摂動として加える（v は定数)。

(b) 基底エネルギーの変化を摂動の 1 次の計算で求めよ。

(c) 第 1 励起エネルギーの変化を摂動の 1 次の計算で求めよ。

ガウス積分の公式を導出なしで用いてよい（ここで $a>0$ は定数)。

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{-a\,x^2}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}\qquad\int_{-\infty}^{\infty}dx\,x^2\,e^{-a\,x^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\,a^{3/2}} \tag{6}$$

3. 二つのスピン $\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{S}}^{(2)}$ からなる系を考え、ハミルトニアンを

$$\hat{H} = J\big(\hat{S}_{\mathrm{z}}^{(1)} - \tfrac{\hbar}{2}\big)\big(\hat{S}_{\mathrm{x}}^{(2)} - \tfrac{\hbar}{2}\big) \tag{7}$$

とする。J は正の定数である。以下では時刻を t と書き、ハミルトニアン (7) による時間発展を考察する。

スピン演算子とそれらの固有状態についての記号はすべて講義と同じである ($|{\uparrow}\rangle$, $|{\downarrow}\rangle$ が $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ の固有値 $\hbar/2$, $-\hbar/2$ の固有状態、$|{\rightarrow}\rangle$, $|{\leftarrow}\rangle$ が $\hat{S}_{\mathrm{x}}$ の固有値 $\hbar/2$, $-\hbar/2$ の固有状態)。

(a) 初期状態を $|\psi_1(0)\rangle = |{\uparrow}\rangle_1|{\rightarrow}\rangle_2$ とする。時刻 t での状態 $|\psi_1(t)\rangle$ を求めよ。

(b) 状態 $|\psi_1(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{x}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(c) 状態 $|\psi_1(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{z}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(d) 初期状態を $|\psi_2(0)\rangle = |{\downarrow}\rangle_1|{\leftarrow}\rangle_2$ とする。時刻 t での状態 $|\psi_2(t)\rangle$ を求めよ。

(e) 状態 $|\psi_2(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{x}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(f) 状態 $|\psi_2(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{z}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(g) 初期状態を $|\psi_3(0)\rangle = |{\downarrow}\rangle_1|{\uparrow}\rangle_2$ とする。時刻 t での状態 $|\psi_3(t)\rangle$ を求めよ。

(h) 状態 $|\psi_3(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{x}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(i) 状態 $|\psi_3(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{z}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。