

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学 2	2003 年 7 月			田崎

答えだけではなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。

1. 熱力学においては、Helmholtz の自由エネルギー F が

$$-\frac{\partial}{\partial T} F = \frac{U - F}{T} \quad (1)$$

という関係を満たすことが本質的に重要だった（これがエントロピーに等しい）。 U はエネルギーである。

平衡統計力学のカノニカル分布の形式でも、自由エネルギー F が同じ関係を満たすことを一般に示せ。ミクロに見た状態を $i = 1, 2, \dots, N$ と指定でき、対応するエネルギーが E_i であるような量子系を扱うこと。

2. ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ 中の質量 m の粒子 N 個からなる理想気体の分配関数は、

$$Z(\beta) = \frac{1}{N!} \left(\frac{m}{2\pi\hbar^2\beta} \right)^{3N/2} \left\{ \int d^3\mathbf{r} e^{-\beta V(\mathbf{r})} \right\}^N \quad (2)$$

である。

x, y, z を三次元の直交座標とし、 $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, h_0 \leq z \leq h_1$ で指定される箱の中に閉じこめられた、質量 m の粒子 N 個からなる理想気体を考える。粒子には、

$$V(x, y, z) = mgz \quad (3)$$

というポテンシャルで表される外力（つまり、一様な重力）が働いている。この系が逆温度 β の平衡状態にある。

- (a) 分配関数 $Z(\beta)$ を求め、自由エネルギー $F(\beta; L, h_0, h_1)$ を求めよ。
 (b) 容器の底面と上面での圧力は、それぞれ、

$$p_0 = \frac{1}{L^2} \frac{\partial F(\beta; L, h_0, h_1)}{\partial h_0}, \quad p_1 = -\frac{1}{L^2} \frac{\partial F(\beta; L, h_0, h_1)}{\partial h_1} \quad (4)$$

と書ける。この事実を熱力学の立場から説明せよ。

- (c) p_0, p_1 を求めよ。
 (d) 二つの圧力の差を求め、その意味を述べよ。

3. スピン $2N$ 個からなる系がある。系の中では、スピンの2つずつ組を作り、互いに相互作用している。異なった組の間には相互作用はない。この系に一様な磁場 H が加わったときのエネルギーは、

$$E(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{2N}) = J \sum_{j=1}^N \sigma_{2j-1} \sigma_{2j} - \mu H \sum_{i=1}^{2N} \sigma_i \quad (5)$$

で与えられる。 $\mu > 0$ は電子の磁気モーメントである。 $J > 0$ は相互作用の大きさを表す定数である。また、スピンに $i = 1, 2, \dots, 2N$ と番号を付け、 i 番目のスピンの状態を表すスピン変数を $\sigma_i = \pm 1$ とした。



この系が逆温度 β の熱浴と平衡にある。

(a) 系の分配関数を求めよ。

(b) エネルギー（エネルギーの期待値ではなく、(??) 式のエネルギーそのもの）を最低にする状態はどのようなものか？ $J > |H|$ か $J < |H|$ かに応じて答えが変わるので注意。

(c) 磁化

$$m = \frac{\mu}{2N} \sum_{i=1}^{2N} \langle \sigma_i \rangle \quad (6)$$

を求めよ。逆温度 β を一定にしたときの m の h 依存性の概形をグラフにかけ。