

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	熱学・統計力学 3	2010 年 1 月 20 日	水	1	田崎

以下の問題から二問選択して解答せよ。答案用紙一枚目の上部の余白に何番を選択したかをはっきりと書け。答えだけでなく、考え方の筋道を簡潔に書くこと。

答案は必ず受け取りにくること。試験日から一年たったら答案を予告なく廃棄する。

1. 長さが L の 1 次元的な領域に閉じ込められた質量 m の点粒子の量子力学を考える。粒子には外力は働かないとする。この領域の座標を x ($0 \leq x \leq L$) と表す。

- (a) ひとつの粒子の定常状態（エネルギーの固有状態）を表す波動関数 $\varphi(x)$ の満たす Schrödinger 方程式を書け。
- (b) 上の方程式を解き、互いに独立な定常状態の波動関数（規格化しなくてもよい）と、対応する固有エネルギーを全て求めよ。

ただし波動関数に対する境界条件は、 $\varphi(0) = \varphi(L) = 0$ とする。

同じ領域に N 個の質量 m の同種粒子がある場合を、量子力学的に扱う。粒子には外力は働かず、粒子間の相互作用もないとする。

- (c) 粒子がボゾンの場合に、基底状態のエネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。（個々の粒子のエネルギーではなく、全系のエネルギー。）
- (d) 粒子がフェルミオンの場合に、基底状態のエネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。この場合のフェルミエネルギーを求めよ。

上のような自由粒子の系が、逆温度 β 、化学ポテンシャル μ を持つ大きな系と接して平衡にある場合を考察する。

- (e) 粒子がボゾンである場合、フェルミオンである場合それぞれについて、系の全エネルギーを表す式を書け。

和や積分を具体的に評価する必要はない。また、ボーズおよびフェルミ分布関数を導く必要はない。

2. 単位体積あたりの一粒子状態密度が $\nu(\epsilon)$ である理想フェルミ気体を考える。定数 $\epsilon_0 > 0$ があり、 $\epsilon < 0$ あるいは $\epsilon > 2\epsilon_0$ では $\nu(\epsilon) = 0$ であり、また、任意の ϵ について $\nu(\epsilon) = \nu(2\epsilon_0 - \epsilon)$ が成り立つとする（つまり関数 $\nu(\epsilon)$ は ϵ_0 に関して対称）。この系で可能な最大の密度は、 $\rho_{\max} = \int_0^{2\epsilon_0} d\epsilon \nu(\epsilon)$ である。ここでは、密度が $\rho = \rho_{\max}/2$ の場合を考える。

(a) 化学ポテンシャルを $\mu = \epsilon_0$ と選べば、任意の β において、上の密度が実現されることを示せ。

簡単な例として、

$$\nu(\epsilon) = \frac{\rho_{\max}}{2} \left\{ \delta(\epsilon - \epsilon_1) + \delta(\epsilon - \{2\epsilon_0 - \epsilon_1\}) \right\} \quad (1)$$

という場合を考える。ここで ϵ_1 は $0 < \epsilon_1 < \epsilon_0$ を満たす定数である。

(b) この系の平衡状態での、エネルギー密度と単位体積あたりの比熱を求めよ。

3. 単位体積あたりの一粒子状態密度が定数 $c > 0$, a によつて $\nu(\epsilon) = c\epsilon^a$ と書ける理想フェルミ気体を考える（3次元の自由粒子なら $a = 1/2$ だが、ここでは一般の指数を考える）。この系が、逆温度 β 、化学ポテンシャル μ の平衡状態にある。この系の圧力 P と単位体積あたりのエネルギー u が比例することを示し、その比例係数を求めよ。

大分配関数 Ξ によつて圧力が $P = (\beta V)^{-1} \log \Xi$ と書けること、理想フェルミ気体の大分配関数は

$$\Xi(\beta, \mu) = \prod_{j=1}^{\infty} \{1 + e^{-\beta(\epsilon_j - \mu)}\} \quad (2)$$

と書けること（ j は一粒子エネルギー固有状態の名前で ϵ_j は一粒子エネルギー固有値）を用いてよい。圧力を積分で表示し、内部エネルギーの積分表示と見比べるといいだろう。

4. 単位体積あたりの一粒子状態密度 $\nu(\epsilon)$ が、 ϵ の小さいところで $\nu(\epsilon) \simeq c\epsilon^a$ と書けるような、理想ボース気体を考える。ここで c は正の定数、 a は定数である。

この系の粒子数一定の平衡状態を考えたとき、 $a > 0$ ならばボース・アインシュタイン凝縮が生じ、 $a \leq 0$ ならばボース・アインシュタイン凝縮は生じないことを示せ。

5. 調和振動子型のポテンシャル中に原子集団を閉じこめた場合のボース・アインシュタイン凝縮について見よう。

一粒子状態密度が、定数 $\alpha > 0$ によって $D(\epsilon) = \alpha\epsilon^2$ と書けるような、理想ボース気体がある（ここでは、単位体積あたりの一粒子状態密度ではなく、一粒子状態密度そのものを考えていることに注意）。全粒子数を N とし、逆温度 β での平衡状態を考える。

まず、ボース・アインシュタイン凝縮が生じる可能性を考えずに、この系の化学ポテンシャル μ を決定する関係式を書き下せ。その際、

$$\tilde{\eta}(x) := \int_0^\infty du \frac{u^2}{e^{-x}e^u - 1} \quad (3)$$

という関数を用いよ。

$\tilde{\eta}(0) \simeq 2.4$ が有限であることに注意し、十分に低温では、この系でボース・アインシュタイン凝縮が生じることを示せ。この系が相転移をおこす点を求め、凝縮状態の密度を表す式を書け。

6. N 個の分子が直線上に並んでつながっている系を考える（簡単のため周期境界条件を取る）。各々の分子は A, B という二つの状態をとることができる。それぞれのエネルギーを ϵ_A, ϵ_B とする。

また、隣り合う分子の（強い）相互作用のため、「ある分子が状態 B をとるとき、その両隣の分子はかならず状態 A をとる」という拘束条件があるとしよう（それ以外の拘束はない）。

この系の分配関数を求めよ。

上の結果を利用して、「ある分子が状態 B をとるとき、その両隣の分子はかならず状態 A をとる」という拘束条件を満たす配置の総数を求めよ。このような「場合の数」の計算に統計力学と共通の手法が使えるのは面白いことだ。

7. イジング模型で、逆温度を臨界点に固定し、磁場 h を小さくしていくときにも、臨界現象がみられる。たとえば、磁化は

$$m(\beta_c, h) \approx h^{1/\delta} \quad (4)$$

のように、 h に特異な依存性を示して 0 に近づく。平均場近似を用いて、この臨界現象を議論し、臨界指数 δ を求めてみよう。

講義と同様、もっとも標準的なイジング模型を考える。つまり、 d 次元立方格子の各々の格子点 i にスピン変数 $\sigma_i = \pm 1$ がのっており、スピン配位 $(\sigma_1, \dots, \sigma_N)$ に対応するエネルギーは、

$$E_{(\sigma_1, \dots, \sigma_N)} = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \sigma_i \sigma_j - \mu_0 H \sum_{i=1}^N \sigma_i \quad (5)$$

である。

- (a) 講義と同様にして、この系の平均場近似をおこない、自己整合方程式を作れ。
- (b) $\beta = 1/(2dJ)$ の転移点上で、磁場 H が 0 でないが小さいときの自己整合方程式の解を求め、臨界指数 δ を求めよ。