バネでつながれた粒子の落下運動

少し面白い応用として、バネでつながれた複数の粒子が一様重力中で落下する問題を扱ってみよう。ここでも重力加速度を g とする。

質量 m の二つの粒子が、自然長 ℓ_0 でバネ定数 k の質量の無視できるバネでつながれている。始め、一方の粒子（こちらを粒子 1 と呼ぶ）を手で持って固定し、バネともう一つの粒子（こちらは粒子 2）は垂れ下がって静止した状態にしておく。このときのバネの長さを ℓ とする。粒子 2 には下向きに mg の重力が働き、上向きにバネの引っ張る力 $k(\ell-\ell_0)$ が働く。これらがつり合うことから、バネの長さは $\ell=\ell_0+(mg/k)$ とわかる。

ここで、粒子 1 を静かに放して（初速度ゼロで）落下させたときの運動を考えよう。これまでは一般解を求めることにこだわってきたが、ここでは、この特別な初期条件のもとでの運動だけを考える（それが面白い）。重力の働く向きを x 軸の正の方向に取り、時刻 t での粒子 1 と粒子 2 の位置をそれぞれ $x_1(t)$, $x_2(t)$ とする。以下では、つねに $x_1(t)<x_2(t)$ となる、つまり粒子 2 の方が下にあるとして問題を解くことにする（この条件は自然長 ℓ_0 を長く取ればいつでも成り立つ）。よって、二つの粒子が衝突することを心配しなくてもいい。

粒子 1 の初期の位置を $x_1(0)=0$ とすれば、上で見たことから粒子 2 の初期の位置は $x_2(0)=\ell_0+(mg/k)$ である。また、始めはどちらの粒子も静止していたから、速度についての初期条件は $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ である。

粒子の運動を決めるニュートン方程式を書こう。それぞれの粒子に働く力を考えて、連立の運動方程式を立てる必要がある。手を放したあとでは、粒子に働く力は重力 mg とバネからの力だけだ。時刻 t でのバネの長さは $x_2(t)-x_1(t)$ だから、自然長からの伸びは $x_2(t)-x_1(t)-\ell_0$ である。自然長に戻ろうとする力が働くことを考えると、運動方程式は

$$m\ddot{x}_1(t)=mg+k\{x_2(t)-x_1(t)-\ell_0\} \tag{5.3.101}$$

$$m\ddot{x}_2(t)=mg-k\{x_2(t)-x_1(t)-\ell_0\} \tag{5.3.102}$$

となる。絵を描いて力の向きを考えて納得しておこう。

これから連立常微分方程式 (5.3.102) を解くわけだが、さすがに、解を直感でみつけるのは難しそうだ。しかし、こういう場合には力学でも頻繁（ひんぱん）に使うことになる常套手段（じょうとうしゅだん）がある。二つの粒子の位置を平均した重心座標

$$x_{\mathrm{CM}}(t):=\frac{x_1(t)+x_2(t)}{2} \tag{5.3.103}$$

とバネの伸び

$$y(t):=x_2(t)-x_1(t)-\ell_0 \tag{5.3.104}$$

を使って方程式を書き換えるのだ[*1]。まず、これらの初期条件を求めておく。$x_1(0)$ と $x_2(0)$

[*1] 二つの粒子の位置の差（相対座標）$x_2(t)-x_1(t)$ を使うことが多いが、ここではバネの自然長を引いておいた

を単に代入すれば、$x_{\rm CM}(0)=\{\ell_0+(mg/k)\}/2$ および $y(0)=mg/k$ である。速度については、もちろん $\dot{x}_{\rm CM}(0)=0$ および $\dot{y}(0)=0$ だ。

$x_{\rm CM}(t)$ と $y(t)$ が従う微分方程式を求めるには、単に (5.3.103) と (5.3.104) を t で二回微分すればいい。$\ddot{x}_{\rm CM}(t):=\{\ddot{x}_1(t)+\ddot{x}_2(t)\}/2$ および $\ddot{y}(t)=\ddot{x}_2(t)-\ddot{x}_1(t)$ となるので、元の微分方程式 (5.3.102) を代入して少し計算すれば、

$$\ddot{x}_{\rm CM}(t)=g \tag{5.3.105}$$

$$\ddot{y}(t)=-\frac{2k}{m}y(t) \tag{5.3.106}$$

が得られる。元の微分方程式 (5.3.101), (5.3.102) では二つの未知関数が「絡み合って」いたから困ったわけだが、ここではその絡み合いが「ほどけて」いる。(5.3.105) と (5.3.106) をそれぞれ別個に解けばいい。(5.3.105) は (5.3.4) でみた（というより高校時代から知っている）一定の外力の問題、(5.3.106) は (5.3.29) でみた単振動の方程式だ。どちらの微分方程式もすでに解いた形だから初期条件に合わせることだけを考えればいい。重心座標 $x_{\rm CM}(t)$ は、一般解が (5.3.7) だから、

$$x_{\rm CM}(t)=\frac{1}{2}\Bigl(\ell_0+\frac{mg}{k}\Bigr)+\frac{g}{2}t^2 \tag{5.3.107}$$

となる。バネの伸び $y(t)$ についても一般解 (5.3.37) を参照すれば、

$$y(t)=\frac{mg}{k}\,\cos\Bigl(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\Bigr) \tag{5.3.108}$$

となる。

微分方程式が解けたからこの結果から二つの粒子の位置を求めよう。(5.3.103) と (5.3.104) を連立させて解けば

$$x_1(t)=x_{\rm CM}(t)-\frac{y(t)}{2}-\frac{\ell_0}{2} \tag{5.3.109}$$

$$x_2(t)=x_{\rm CM}(t)+\frac{y(t)}{2}+\frac{\ell_0}{2} \tag{5.3.110}$$

だから、(5.3.107) と (5.3.108) を代入すれば、

$$x_1(t)=\frac{mg}{2k}+\frac{g}{2}t^2-\frac{mg}{2k}\,\cos\Bigl(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\Bigr) \tag{5.3.111}$$

$$x_2(t)=\ell_0+\frac{mg}{2k}+\frac{g}{2}t^2+\frac{mg}{2k}\,\cos\Bigl(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\Bigr) \tag{5.3.112}$$

となる。指定された初期条件での解が完全に求められた。

方が便利である。

解 (5.3.111), (5.3.112) を眺めていても、二つの粒子が振動しながら等加速度運動で落下していくということがわかるだけで、実際の運動の様子はピンと来ない。特に、ごく初期の時刻（正確にいえば $0 < \sqrt{2k/m}\,t \ll 1$ となる時刻）での振る舞いに注目することにして、コサインの無限級数表示（あるいはテイラー展開）(3.2.111) で θ^2 までを残して、$\cos(\sqrt{2k/m}\,t) \simeq 1 - (\sqrt{2k/m}\,t)^2/2 = 1 - (k/m)t^2$ と近似してみよう。まず、この近似式を (5.3.111) に代入すると、定数項は全て消えて、

$$x_1(t) \simeq gt^2 \tag{5.3.113}$$

が得られる。慣れ親しんだ自由落下の形だけれど係数の 1/2 がないので、普通の二倍の加速度で落ちていくということになる。同じコサインの近似式を (5.3.112) に代入すると、今度は t^2 に比例する項が消えて、

$$x_2(t) \simeq \ell_0 + \frac{mg}{k} \tag{5.3.114}$$

となる。なんと、時間が経過しても粒子 2 は初期の位置から動かない!?

実際には粒子 2 は全く動かないというわけではない。コサインの近似が甘かったから動かないという結果が出たのだ。コサインの無限級数 (3.2.111) で次の θ^4 までを取り入れた $\cos(\sqrt{2k/m}\,t) \simeq 1 - (\sqrt{2k/m}\,t)^2/2 + (\sqrt{2k/m}\,t)^4/24$ という近似式を (5.3.112) に代入すれば、

$$x_2(t) \simeq \ell_0 + \frac{mg}{k} + \frac{g}{12}\frac{k}{m}\,t^4 \tag{5.3.115}$$

となる。確かに粒子 2 も落下していく。ただし、落下距離は t^4 に比例しているから、普通の落下に比べればものすごくゆっくりだ。（普通の倍の加速度で）落下していく粒子 1 に比べたら粒子 2 はほとんど止まっていると言ってもいい[*2]。

これらの結果は、背後にある「物理」を考えれば、連立微分方程式を解かなくても理解できる。この教科書ではこれまで出てこなかった、ちょっと「雑な」議論になるが、重要な考え方なので説明しよう。自分で図や式をかきながらゆっくりと読んで消化してほしい。

まず粒子 1 の運動を考えよう。はじめ、粒子 1 を手で持っているとき、粒子 1 には下向きに重力 mg とバネの引っ張る力が働いている。バネの力は（それで粒子 2 を引っ張っているのだから）ちょうど mg で、結局、下向きの力の合計は $2mg$ である。これを手が加える上向きの力で打ち消している。よって、$t = 0$ に手を放した直後には粒子 1 には $2mg$ の下向きの力が働く。加速度は $2g$ だから、普通の倍の加速度で落下していくという (5.3.113) が得られる。

[*2] $x_2(t)$ を計算するのに t^4 まで含めた近似式を使ったから、$x_1(t)$ にも同じ近似式を使って (5.3.113) よりも精度の高い式を求めるべきだと思うかもしれない。もちろん、そうやっても何も悪いことはない。ただ、(5.3.113) では粒子 1 の動きの主要な部分はわかっているから、ここに t^4 に比例する項を加えても運動の様子についての微妙な補正が得られるだけだ。一方、(5.3.114) だけからは「粒子 2 は動かない」という結論が出てしまうから、ここで t^4 に比例する補正を考えることには本質的な意味がある。

次に問題の粒子 2 だ。まず、粒子 1 を手で持っているときには、粒子 2 も静止していて、下向きの重力 mg と上向きにバネが引っ張る力 mg がちょうどつり合っている。$t=0$ で手を放した直後を考えると、もちろん重力は変わらないし、バネの長さも（一瞬では）変わらないのでバネが引く力も変わらない。つまり、粒子 2 に働く力の合計は相変わらずゼロなのだ。これで、「粒子 2 は動かない」という (5.3.114) が理解できる。

この調子でもう少し進めよう。手を放した直後にはバネの長さは変わらないわけだが、その後は粒子 1 が落下してくるのでバネの長さは縮んでいく。ごく初期の時刻 t ではバネの長さは gt^2 だけ縮むとしてよい[*3]。すると、バネの張力は kgt^2 だけ小さくなるから、その分だけ重力が勝って、結局、粒子 2 には下向きに kgt^2 の力が働くことになる。運動方程式は $m\ddot{x}_2(t) \simeq kgt^2$ となる。これは (5.3.3) で見たタイプの微分方程式で、t について二回積分すれば解けてしまう。解は係数を含めて (5.3.115) と一致する。簡単に結果が出るだけでなく、落下距離が t^4 に比例する理由も直観的に理解できるだろう。

この話はもっと面白くなる。粒子の個数を増やして、同じ質量 m の粒子 N 個を同じバネで一列にずらりとつなぐ。粒子には、端から粒子 1, 粒子 2, ..., 粒子 N と名前をつけておく。そして、やはり粒子 1 を手で持ち、残りを下にだらんと垂らして静止させる。時刻 $t=0$ で粒子 1 を放したらどういう運動をするだろうか？　真面目にやるとなると N 個の粒子の運動を記述する連立微分方程式を解くことになる。念のために（気になる人のために）微分方程式を書いておくと、

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_1(t) &= mg + k\{x_2(t) - x_1(t) - \ell_0\} \\
m\ddot{x}_j(t) &= mg - k\{x_j(t) - x_{j-1}(t) - \ell_0\} + k\{x_{j+1}(t) - x_j(t) - \ell_0\} \\
m\ddot{x}_N(t) &= mg - k\{x_N(t) - x_{N-1}(t) - \ell_0\}
\end{aligned}
\tag{5.3.116}
$$

となる（ここで、$j = 2, \ldots, N-1$）。これを解くのはなかなか大変だ。しかし、上のように、ごく初期の時刻での振る舞いを知るだけなら簡単に答えが出せる[*4]。

まず、手で持っているとき、粒子 1 には重力 mg とバネの張力 $(N-1)mg$ が働いている（バネは残りの $N-1$ 個の粒子を引っ張っていることに注意）。手を放した直後には下向きの力 Nmg が働くので、加速度は Ng となる。よって粒子 1 の落下距離は $(Ng/2)t^2 + O(t^4)$ とわかる。次は粒子 2 だ。やはり手を放した直後に働く力はゼロ。しかし、粒子 1 が落ちてくるため、バネの長さが $(Ng/2)t^2 + O(t^4)$ だけ縮み、結果として下向きに $(kNg/2)t^2 + O(t^4)$ の力が働く。上と同じようにこれを二回積分することで、粒子 2 の落下距離は $Ng(k/m)t^4/4! + O(t^6)$

[*3] より正確に書けば $gt^2 + O(t^4)$ ということ。すでに粒子 2 の落下距離が $O(t^4)$ だということがわかっているので、これで厳密である（ここで $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が t の偶関数であることをこっそりと使った。この事実は微分方程式と初期条件から簡単に示せる）。

[*4] 以下の議論はさらに「雑」になっているのでそのつもりで気楽に読んでほしい。しかし、その気になれば、ここでの議論は全て数学的に厳密にできる（以下の方法で近似解（の候補）を構成した後でそれが実際に近似解になっていることを示すというのが一つの方針）。

とわかる（こういう計算をするときには必ず $N=2$ として前の結果と一致することをチェックすること)。粒子 3 についても同じ考えが使える。時刻 $t=0$ では働く力は打ち消し合ってゼロだが、粒子 2 が落ちてくるのでバネが縮んで、結果的に下向きに $kNg(k/m)t^4/4!+O(t^6)$ の力が働く。よって、$m\ddot{x}_3(t)=kNg(k/m)t^4/4!+O(t^6)$ という微分方程式を解くことになるが、これも積分だけで解けて、$x_3(t)=x_3(0)+Ng(k/m)^2t^6/6!+O(t^8)$ が得られる。なんと、上から三番目の粒子の落下距離は t^6 に比例する！　この話がずっと続けられるのは明からだろう。すでに一般の形は見えてきていると思うが、粒子 n の位置の短時間での振る舞いは

$$x_n(t)=x_n(0)+Ng\Bigl(\frac{k}{m}\Bigr)^{2(n-1)}\frac{t^{2n}}{(2n)!}+O(t^{2(n+1)}) \tag{5.3.117}$$

となる。

つまり、仮に 100 個のボールをバネでつないだら、一番上のボールは普通の 100 倍の $980\,\mathrm{m/s^2}$ の加速度で落下し、一方、一番下のボールのは落下距離が t^{200} に比例するという、ものすごくゆっくりとした動きをするということだ！！　「時刻 t の 200 乗」などという関数形が（それほど無理のない）物理的な設定で登場したのを見たことがあるだろうか？　（ぼくはこれ以外には知らない。)

実は、この話には「元ネタ」がある。やわらかいバネの先端を手で持って、バネを下にだらりと垂らして静止させておく（これは現実のバネなのでバネ自身が質量を持っていることに注意！)。そして、手を放したときにバネがどういう風に落下するかを観察するのだ。インターネットに多くの動画が上がっているが、YouTube で “Slinky fall” や “Slinky drop” といったキーワードで検索するといいだろう[*5]。例えば、

`https://www.youtube.com/watch?v=mAA613hqqZ0`

などは（ちょっと長いけれど）楽しいし英語に慣れるのにもいいかもしれない。

動画をご覧になればわかるように、手を放すと、バネの上の端は素早く落下していくが、バネの下の端は見事なほどにピタリと止まったままでいる（ように見える)。まるで、「手を放したことに気づかないのでそのまま宙に浮いている」といった風情（ふぜい）だ。このような振る舞いは、ここで調べた（質量のない）バネでつないだ粒子の運動から（だいたいは）理解できる。質量を持ったバネは、大雑把には、粒子の個数 N が大きい「(質量のない）バネでつないだ粒子」に対応すると考えられる。そうすると、ごく短い時間の間は、一番下の粒子の落下距離は t の極めて大きなベキ乗に比例するから、ほとんど動かないということだ。

動画を見ていると、バネの下端はその後もしばらくは（ほぼ）静止しており、上端が近づいてきた頃になって、ようやく落下し始める。まるで、「手を放したことを教えてもらって慌て

[*5] スリンキーというのはバネのおもちゃの名称。ぼくが子供の頃はトムボーイという名前で呼ばれていた気がする。

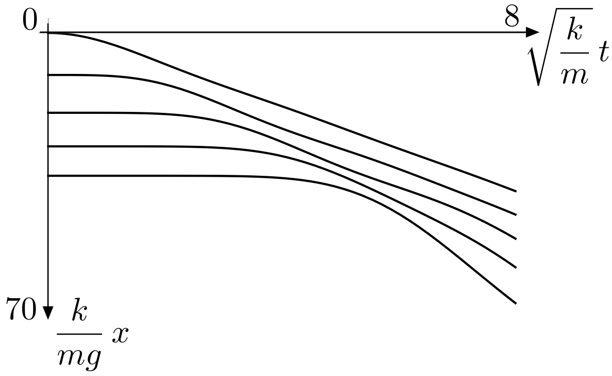

図 5.1　5 個の粒子をつないだ場合の粒子の位置の時間変化。連立常微分方程式 (5.3.116) で $N=5$ としたものを数値的に解いて描いた。横軸は時刻、縦軸は位置だが、どちらも無次元量をプロットしている。バネの自然長を $\ell_0 = 6mg/k$ と選んで粒子どうしが衝突しないようにした（これはかなりわざとらしい)。
こんな簡単なモデルでも、一番下の粒子は最初のうちはほとんど動かず、上から押されて「手を放したことを教えてもらって慌てて落ち始める」様子が見られる。

て落ち始めた」ように見える。残念ながら、このような振る舞いを上の結果だけで説明することはできない。上で調べたのはあくまで t が極めて小さいときの運動だったからだ。ただし、N が大きいときの運動方程式を計算機で解いて運動の様子を見ると、YouTube のビデオで見るのにかなり近い振る舞いが再現される。図 5.1 に 5 粒子の場合の簡単な数値計算の結果を示した。簡単なモデルでも現象の一側面は捉えているということだ[*6]。理論的には、ニュートン方程式を連立させて解くよりも質量のあるバネを偏微分方程式でモデル化したほうが見通しがよいのだが、そこまでは今は書けないですね（この本で偏微分方程式を扱ってその応用でこの問題を取り上げられれば楽しいのだが)。

[*6] ただ、実際のバネの落下の様子を見ていると、途中でバネが完全に縮みきった状況が生じているようだ。そうすると、粒子どうしが衝突するようなモデルを考えた方がより現実的ということになる。