

「悪魔」との取り引き — エントロピーをめぐる

田崎 晴明

(学習院大学理学部物理学科 171-8588 東京都豊島区目白 1-5-1 e-mail: hal.tasaki@gakushuin.ac.jp)

シャノンと『悪魔』 — 20世紀の半ば、シャノン (C. Shannon) は「ランダムな文字列をどこまで圧縮できるか」の限界を示す量 H を発見した¹。 H を使えば、文字列の持つ「情報量」を定量化できる。情報理論の出発点だった。

シャノンは H をどう名付けるか悩んでいた。「情報」は使い古されている。「不確定性」? フォンノイマン (J. von Neumann) — 言うまでもなく、『悪魔²』と畏怖された20世紀最高の頭脳の持ち主だ — と議論すると、 H をエントロピーと呼ぶべきだという答が返ってきた。「熱統計力学で同じ量が使われている。もう名前があるんだよ。」

エントロピーは、19世紀の半ばにクラウジウス (R. Clausius) が熱力学の文脈で導入した。熱についての非凡な洞察から発見されたエントロピーは、突き詰めれば、「どのような断熱操作が可能か」の限界を示す量である¹⁾。熱力学第2法則を体現する物理量と言ってもいい。熱の出入りのない系では、エントロピーは決して減少することはない。

19世紀の後半から20世紀初頭にかけて、ミクロな原子・分子の存在を前提にしてマクロ系の性質に光をあてる統計力学が急激に発展する。ボルツマン (L. Boltzmann) そしてギブス (J. W. Gibbs) は、エントロピーを物理系のミクロな記述に基づいて表現する本質的な表式に到達した。特に、ギブスによる表式は、フォンノイマンが言うように、シャノンが見出した H と全く同じ形をしていた。

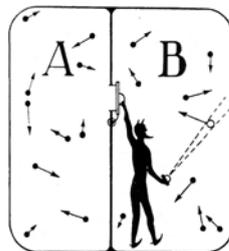
マクスウェルの悪魔 — 再び19世紀の半ば。マクスウェル (J. C. Maxwell) が熱力学第2法則をミクロな視点から吟味する中で魅惑的な思考実験に到達したことは多くの読者がご存知だろう^{2, 3)}。断熱された箱の中に一樣な温度の気体を入れる。箱の中央に仕切り壁をいれ、小さな開閉可能なドアをつける。ドアの傍らには小さな番人 — 後にケルビン卿 (Lord Kelvin) が悪魔³と呼んだ — がいて、左側から高速の分子がやってきたとき、あるいは、右側から低速の分子がやってきたときだけ、ドアをそっと開けて分子を通す。悪魔はドアを開閉するだけなので気体に仕事をしないが、この作業を続ければ、箱の左側の温度は下がり、右側の温度は上がる。エントロピーが減ってしまう!

マクスウェルの悪魔について、その後、様々な理論的研究が進められ^{2, 3)}、具体的な装置を使って「悪魔」を実装しようとする必ず何らかの不具合が生じることが確認され

¹ Ω 種類の文字があり、文字 i の出現確率が p_i だとする。 N 文字からなるランダムな文字列の情報量は $H = -N \sum_{i=1}^{\Omega} p_i \log_2 p_i$ である。

² demigod なので「神人」とでも言うべきなのだろうが。

³ 英語は demon だが、ケルビン卿は daemon (ギリシア神話の守護霊の意味で用いた²⁾)。



た。高速の分子が衝突したときに自動的に開くような軽いドアを作ったとしてもドアそのものが熱運動を始めて使い物にならない、分子の速度を測るために光をあてればそれで分子にエネルギーを与えることになる …

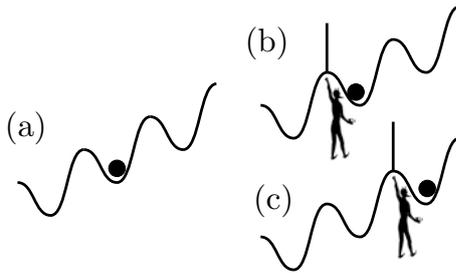
だが、20世紀に入ってからシラード (L. Szilárd)、ランダウアー (R. Landauer)、ベネット (C. H. Bennett) らの研究によって、「悪魔」が系の状態を測定する方法を工夫すればこれらの困難を解消しうることが示された。可逆的な測定を行えば、原理的には「悪魔」はエネルギーを消費せず系のエントロピーを下げるができるのだ。

エントロピーを下げる断熱過程が本当に可能なら、熱浴から熱を奪いそれを有用な仕事に転換する熱機関、第2種永久機関が作れる。もしそうなら、「エネルギー問題」も直ちに解決することになってしまう。

コンピューター製の「悪魔」 — ごく最近、鳥谷部祥一、沙川貴大、上田正仁、宗行英朗、佐野雅己は、「悪魔」の介入を受けながら熱浴から受け取ったエネルギーを仕事に転換する物理系を実際に構築してみせた⁴⁾。位相差のある振動電場でトルクを作り出す技術をベースに、この実験のために開発した高精度のフィードバック制御系である。

かれらの「永久機関」の原理を理想化したモデルで見よう。マクスウェルの扱った気体ではなく、図 (a) のような右上がりの勾配をもった波型のポテンシャル中を熱浴からのランダムな力を受けて運動する古典粒子を考える。熱ゆらぎのエネルギーはポテンシャル障壁よりもやや小さい。粒子はほとんどの場合、ポテンシャルの極小の周辺でランダムな運動をしており、まれに強いランダム力を受けてポテンシャルを越えていく。ポテンシャルの低い方に動く確率が高いから、粒子は平均すると左方向に移動していく。

ここに「悪魔」 — 実際は光学顕微鏡やコンピューターを組み合わせたフィードバック制御系 — が介入する。「悪魔」は粒子の位置を測定し、ポテンシャルの極小の周辺にいることを確認すると、そのすぐ左側のポテンシャルの山の上



にさらに高いポテンシャル障壁を付け加える (b)。粒子はポテンシャルの底にいたので、障壁を追加しても粒子には仕事をしない⁴。粒子は新しいポテンシャルの中で熱運動を行なうわけだが、今度は左側に高い障壁があるから、高い確率で右側に移動する。

そこに再び「悪魔」が介入し、粒子の新たな位置に応じてポテンシャルを改変する (c)。これをくり返せば、粒子は着々と右方向へ移動し、ポテンシャルの坂を登っていくはずだ。十分に時間が経てば、粒子のポテンシャルエネルギーは有意に増加するから、それを仕事として取り出すことができる。「悪魔」は仕事をしていないから、エネルギー源となったのは熱浴である。まさしく第2種永久機関だ！

鳥谷部らの実際の実験はより複雑だが、本質は上のモデルに尽きる。二つのポリスチレン製ビーズからなる回転系は、「悪魔」が適切に機能すると、外から加えられたトルクに逆らって回転し始める。エネルギー収支をみれば、確かに、熱浴（周囲の水）から受け取ったエネルギーを外（周囲の振動電場）に仕事として出力していることがわかる⁵。

悪魔と情報 — シラード、ランダウアー、ベネットらはマクスウェルの悪魔の働きには「情報」が本質的な役割を果たすことを見抜いていた。系のエントロピーを下げるためには、悪魔は系の状態についての情報を — いったん記憶してから — 利用しなくてはならない。そのため、活動が続けるにつれ悪魔が記憶している情報はどんどん増えていく。実は、この情報のもつエントロピーまで考慮すると、第2法則がみごとに復活するのだ！ **蓄積された情報のシャノンエントロピーの増加は⁶、系のエントロピーの減少分よりも必ず大きい**のである。このように情報の寄与を取り入れた拡張第2法則はいくつかの形で定式化されているが、最近、沙川と上田は一般的な定式化とミクロな物理学からの導出を与えた⁵。フォンノイマンがシャノンにすすめた「エントロピー」という名称は、おそらくかれ自身が考えていたよりもはるかに本質的だったのである。

⁴障壁を作るための仕事は原理的にはいくらでも小さくできる。

⁵さらに、「悪魔」の働きを明瞭に定量化する Jarzynski-沙川-上田関係式が実験で確認されたことは重要な意味をもっている。

⁶ただし、単位をそろえるためシャノンエントロピーを $k_B \log 2$ 倍しておく。厳密にいうと、「系についての情報」を測るにはエントロピーではなく相互情報量を用いる必要がある⁵。

それでは、永久機関は？ 本物の悪魔は地獄あたりに無尽蔵の記憶スペースを所有しており、どれだけ情報を蓄積しても苦にならないに違いない。このような悪魔の力を借りれば、（地獄の情報エントロピーを増やす代わりに）地上での物理系のエントロピーを減らすことができる。地獄でおきていることに目をつぶるなら、「第2種永久機関」は可能だと言っていだらう⁷。

一方、地上の物理系で作った「悪魔」の記憶容量には限りがある。働き続けるためには定期的にメモリーを消費するわけだが、ここに熱力学が関わってくる！「悪魔」をどう設計しようと、**温度 T の環境下で「系に関する情報を1ビット蓄え⁸、そして、それを消去する」ためには最低でも $k_B T \log 2$ の仕事が必要**なことがミクロな力学に基づいて示されているのだ。メモリーの操作と熱力学の関連を明確に指摘したのはランダウアーだが、より包括的なこの結論は沙川と上田による⁶。

メモリー操作のための仕事 $k_B T \log 2$ は「永久機関」が出力する仕事をちょうど打ち消してしまう。こうして、熱力学第2法則は守られる。「悪魔」の情報処理も考慮すれば、この世界の中で第2種永久機関を作ることは決してできないという — 常識的で、ちょっと残念な — 最終結論が得られることになる。

シャノンとの議論の中でフォンノイマンは H を「エントロピー」と呼ぶべき理由をもう一つ挙げている。かれがより重要だという二つ目の理由は、「エントロピーが何なのか分かっていない人なんていない。だから、エントロピーと言っておけば、君は議論で有利になれる」だった。

21世紀初頭、われわれは、熱力学のエントロピーが「できることと、できないこと」を区別する本質的な量であることを知っているし¹⁾、シャノンの情報エントロピーとギブスの統計力学エントロピーの一致が単なる偶然ではないことも学んだ^{2, 3, 5, 6)}。さらに、二つのエントロピーの結びつきを介して、系に関する情報が仕事に転換される⁹様子さえ目にして⁴⁾。そろそろフォンノイマンの二つ目の理由の「魔力」が消える頃合いかも知れない。

参考文献

- 1) 田崎晴明「熱力学：現代的な視点から」(培風館, 2000)
- 2) H. S. Leff, A. F. Rex, *Mawell's Demon 2* (IOP, 2003)
- 3) K. Maruyama et al., *Rev. Mod. Phys.* **81**, 1 (2009)
- 4) S. Toyabe et al., *Nature Phys.* **6**, 988-992 (2010)
- 5) T. Sagawa, M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 080403 (2008)
- 6) T. Sagawa, M. Ueda, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 250602 (2009)

⁷ビーズの微小系を「地上」、中央大の実験室を「地獄」と読み替えれば、これがまさに鳥谷部らの実験で実現されたことである。

⁸ここでも、「系に関する情報」は相互情報量で特徴づける。

⁹鳥谷部らの論文⁴⁾のタイトルにある「情報をエネルギーに転換」は「情報を自由エネルギー（あるいは仕事）に転換」と読むべきである。