

# 銀行規制当局による最適介入プログラムについて

江上 雅彦, 細野 薫\*

## 概要

この論文では、規制当局が銀行のオペレーションに介入する早期是正措置のモデルを提示する。社会的な介入費用は銀行の資本レベルに依存し、銀行の保護観察期間が短期間にすむならばその費用はより小さくなる。規制当局は、社会的な介入費用を最小化するように、介入を始める銀行資本レベルを設定する。この問題を解くため、我々は、銀行の初期資本レベルに応じて介入を始める最適な銀行資本を算出する。この結果、初期のレベルがより高いと、それだけ介入を引き起こす最適停止のレベルがより高くなることが明らかになる。また本論文では介入された銀行に政府が供給する助成金額と自己資本比率のレベルによってどのように社会的厚生費用が変化するかを示す。

## 1 はじめに

金融危機は、しばしば規制当局の介入が遅すぎる場合に生じる。他方、あまりにも早い介入は銀行利益を押し下げる可能性が高い。この論文の目的は銀行介入の最適なタイミングを分析することである。

多くの国々において、規制当局は最小自己資本比率を設定して、もし銀行資本が最小自己資本比率以下になると、銀行オペレーションに介入する。この介入はしばしば早期是正措置(PCA)と呼ばれる。第2節で日本のPCAの実際を詳細に紹介するように、規制当局がどのようなタイミングでPCAを実行するかは問題銀行の介入後のパフォーマンスと、最終的には銀行の整理あるいは再建と関連した社会的費用に影響を与える。

最小自己資本比率規制と同様、早期是正処置の重要性にもかかわらず、既存の研究の大部分が前者にだけ焦点を合わせている。そのため本論文では、最小自己資本比率規制は所与として最適な介入タイミングを分析する。

このモデルでは、規制当局は社会的介入費用を最小にするよう、介入を始める銀行資本レベルを設定する。ただしその社会的介入費用は銀行資本に依存し、なおかつその介入は保護観察期間ができるだけ短くなるように意図されたものである。もし規制当局が介入するなら、介入

---

\* ) 初稿：平成23年2月11日；本稿：平成25年1月21日。本研究は科学研究費補助金(B)No. 22330098の助成を受けたものである。

がなかった時よりも銀行資産は低成長、低ボラティリティーとなる。この最適停止問題を解くことによって、銀行の初期資本レベルに応じて介入を始める最適な銀行資本を算出する。この結果、最初のレベルが高い方が、介入を引き起こすレベルがより高くなることが明らかになった。これは現実の PCA システムではどの銀行に対しても同じ自己資本比率が早期は正措置を引き起こすようになっているのとは対照的である。我々の結果は、当局が銀行資本のレベルに加えて、その変化を考慮に入れるべきことを示唆する。

早期是正措置について既存の研究は不足している。関連した研究として、Kocherlakota and Shim [5] と Shim [7] は動学的契約モデルを開発し、銀行が助成金なしでオペレーションを継続できないと分かった時、規制当局が問題銀行を清算すべき、もしくは生き残るために助成金を与えるべき（救済措置あるいは猶予）条件について分析した。早期の清算は現実の PCA の一側面であるものの、現実の PCA は資本増強や営業分野の縮小などのより幅広い介入を含んだものである<sup>1)</sup>。本論文も銀行清算を考慮に入れているが、銀行ポートフォリオを考慮した介入として PCA をモデリングしているため、本論文の手法では現実の PCA の幅広い側面をとらえることができる。すなわち保護観察期間には、銀行は低成長と低ボラティリティーの資産を保有することを強制される。Aggarwal and Jacques [1] は PCA の導入の後に、アメリカの銀行が信用リスクの増加を伴わずに自己資本比率を増やしたことを発見している。介入は銀行が低リスク低リターンの資産を保有することを促進するという我々の仮定は、彼らの実証結果と整合的である。

論文は以下のように構成されている。第2節で、日本での PCA の実際を説明する。第3節では、モデルを提示して、分析する。第4節で結論を出す。

## 2 早期是正措置：日本のケース

PCA は、資本が不十分で経営状態の悪い銀行を取り扱うためのルールブックであり、最初に1991年にアメリカの連邦預金保険公社改善法の制定によって導入された。PCA は、銀行の自己資本比率が下落したときに、規制当局によって行われる強制的なかつ裁量的な是正措置である<sup>2)</sup>。

日本は1998年4月に PCA を導入した。日本ではリスク調整済みの自己資本比率によって PCA に4つの区分がある。リスク調整済みの自己資本比率がより小さいとき、当局がいつでも厳しい処置を施す。例えば、自己資本比率が国際基準において8%、国内基準において4%に達しないとき、第1区分に分類される。第1区分における措置は、原則として資本の増強に係る措置を含む経営改善計画の提出および実行命令である。自己資本比率が国際基準において4%、国内基準において2%に達しないとき、第2区分に分類される。第2区分における措置は、自己資本の充実、配当または役員賞与の禁止または抑制、総資産の圧縮あるいは増加の抑制などの提案と導入を含む。自己資本比率が国際基準においては2%、国内基準においては1%に達しないとき、第2区分の2に分類される。第2区分の2における措置は、自己資本の

---

1) Shim [7] は彼のモデルにおける確率的清算がすべての将来のキャッシュフローを縮小する部分的な清算と等しいことを示している。

2) 米国の PCA の概要については、Shim [7] を参照されたい。

充実，大幅な業務の縮小，合併または銀行業の廃止を含む。自己資本比率が0%に達しないとき，第3区分に分類される。第3区分は若干の特別な場合を除き業務の一部分または全部の停止命令を含む。

日本の当局は1999年5月から2006年4月までの銀行危機の間に14の銀行にPCAを実行した。14の銀行に対する当局の介入のうち，5つの銀行が履行後4カ月以内に破綻し，8つの銀行が民間の第三者への新株割当てあるいは政府によって増資された<sup>3)</sup>。日本の経験は介入のタイミングが重要であることを示唆している。

表1：日本における早期是正措置とその結果：1999年5月－2006年4月

銀行名	PCA 区分	PCA 発動日	資本増強 / 破綻	資本増強 / 破綻日
幸福銀行	2-2	99年5月14日	破綻	99年5月21日
北海道銀行	1	99年5月21日	公的資金導入	00年3月
東京相和銀行	1	99年5月31日	破綻	99年6月12日
新潟中央銀行	1	99年6月11日	破綻	99年10月2日
なみはや銀行	2	99年6月28日	破綻	99年8月7日
千葉興業銀行	NA	00年4月28日	民間資本増強	00年9月
泉州銀行	NA	00年9月28日	民間資本増強	00年9月28日
福島銀行	NA	01年12月25日	民間資本増強	02年3月
中部銀行	1	01年12月28日	破綻	02年3月8日
りそな銀行	NA	03年5月17日	公的資金導入	03年5月
りそなホールディングス 大阪銀行	1	03年10月10日	民間資本増強	NA
りそなホールディングス 奈良銀行	1	03年10月10日	民間資本増強	NA
豊和銀行	NA	06年4月28日	民間資本増強	06年8月

### 3 モデル

ある完備な確率空間  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$  に標準ブラウン運動  $\mathbf{W} = \{W_t; T \geq 0\}$  を定義する。銀行の自己資本プロセス  $X$  を幾何ブラウン運動によってモデル化する：

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad \text{and} \quad X_0 = x. \quad (3.1)$$

銀行の自己資本があるレベル  $q > 0$  を下まわった時点で，規制当局は銀行のオペレーションに介入する。この時点を以下の式で示す。

$$T := \inf\{t > 0 : X_t = q\}$$

ここで  $q < x = X_0$ ，規制当局はこの  $q$  の他に，2つの閾値  $a$  と  $b$ （後述）を設定するものとする。これらは  $0 < a < q < b$  の関係がある。規制当局の介入の下で，銀行は（自分たちが選択した）オリジナルのパラメータとは異なったドリフト  $\underline{\mu}$  と  $\underline{\sigma}$  でオペレーションを行わなければならないとする：

$$\underline{\mu} < \mu \quad \text{and} \quad \underline{\sigma} < \sigma. \quad (3.2)$$

すなわち，銀行は低リスク，低リターン資産プロファイルでのオペレーションを強制される。

3) 残り一つの銀行に関する詳細情報は得られなかった。

銀行の自己資本がレベル  $a$  あるいは  $b$  どちらか最初に到達するまで、この「保護観察」期間は続く。時間  $T$  以降の自己資本プロセスを  $\hat{X}$  で表わすことにしよう：

$$d\hat{X}_t = \mu\hat{X}_t dt + \sigma\hat{X}_t dW_t$$

この  $\hat{X}$  は銀行が当局の監督下に入る時点において点  $q$  からスタートするので  $\hat{X}_T = q$  となる。

さて管理下における銀行が、その後  $a, b$  どちらに先に到達するかという時点を以下のように定義する。

$$H := H_{ab} = \inf\{t > T : \hat{X}_t = a \text{ or } \hat{X}_t = b\}. \quad (3.3)$$

レベル  $a$  は銀行の清算閾値であり、他方レベル  $b$  に到達することは  $\hat{X}_H = b$  となる時間  $H$  で規制当局の介入が終了することを意味する。銀行はその後（資本プロセスが再びレベル  $q$  に達するまで）自分自身で選択したリスクリターンプロファイルに戻るものとする。

### 3.1 最適介入点

上記の仮定の下で、規制当局は以下のような介入に関連する社会的費用の最小化を図るものとする。

$$\begin{aligned} J(x, q) := J(x; q, a, b) &= \mathbb{E}^x [e^{-\alpha T} f(X_T)] \\ &\quad - \xi \mathbb{E}^x \left[ A e^{-\int_T^H 1_{[a, q]}(\hat{X}_s) ds}; \hat{X}_H = a, T < \infty \right] \\ &\quad - \xi \mathbb{E}^x \left[ B e^{-\int_T^H 1_{[a, q]}(\hat{X}_s) ds}; \hat{X}_H = b, T < \infty \right] \end{aligned} \quad (3.4)$$

ここで、 $0 < A < B$  はある定数である。このパフォーマンス尺度の解釈は次の通りである：

社会的費用を数量化する正の関数を  $f$  とする。銀行が規制当局の監督下に置かれるということは（つまり  $T$  となる事象）は経済に大きい損失が生じたことを意味する（市場の混乱およびその波及、不良債権処理のため国庫から支出、預金保険機構からのペイオフ等）。その費用は適切なレート  $\alpha \geq 0$  によって割引かれる。しかし、銀行が  $b > q$  あるいは  $a < q$  に到達するかどうかによって、この費用はいくぶんか減少するであろう。この点を詳細に見てみよう。ランダムな量

$$S := \int_T^H 1_{[a, q]}(\hat{X}_s) ds$$

はプロセス  $\hat{X}$  がレベル  $q$  以下になり時間  $T$  から、 $H$  まで費やした時間を示す。これは銀行が「健全な」自己資本レベル  $q$  以下で、当局の介入を受けその管理下でオペレーションをしていた期間である。社会的（＝規制当局の）観点からは、 $S$  がより小さいことは好ましい。プロセス  $X$  が  $a$  あるいは  $b$  のどちらに最初に到達するかに依存する費用  $A$  あるいは  $B$  はこのレートによって、割引かれるべきである。したがってデュレーション  $S$  が大きい場合、量  $A$  あるいは  $B$  がより大きく割引かれるべきである。それ故、 $Ae^{-S}$  と  $Be^{-S}$  はより小さな値となるはずであり、結果として社会的費用の減少も、より小さくなる（2番目と3番目の期待値の前にマイナス記号があることに注意）。 $A < B$  は、もし銀行が最初に  $B$  に到達することによって、首尾よく保護観察期間から抜け出すなら、社会的費用の減少がより大きくなるべきであることを意味していることを想起されたい。最後に、 $\xi > 0$  はこの費用減少をどの程度、換算するべきであるかを数量化するために適用されるウェイトである。結果として、問題は以下のとおりとなる。

$$v(x) = \inf_{q>0} J(x, q). \quad (3.5)$$

もし  $q$  が大きければ, 時間  $T$  は早期に訪れるが, 一方  $X_H = b$  となる確率もまた大きいと考えられるので, 最適な  $q$  が  $(0, \infty)$  の内点にあることが期待できる。

(3.4) 式での量は Borodin and Salminen [3], pp 629-630 によって解析的に扱える。(3.1) 式の解は,

$$X_t = xe^{\sigma^2 \nu t + \sigma W_t}$$

となる。ここで  $\nu = \frac{\mu}{\sigma^2} - \frac{1}{2}$ , 最初の項は

$$\mathbb{E}^x [e^{-\alpha T} f(X_T)] = f(q) \mathbb{E}^x [e^{-\alpha T}; T < \infty] = f(q) \left(\frac{q}{x}\right)^{\sqrt{\nu^2 + 2\alpha/\sigma^2} + \nu}.$$

第2 (同様に第3) 項に対しては,  $T$  は到達時間であり  $H = T + H \circ \theta(T)$  と表記できるので ( $\theta$  はシフトオペレータ) 時点  $T$  での  $X$  の強マルコフ性を使って, 以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[ e^{-\int_T^H 1_{[a,q]}(\hat{X}_s) ds}; \hat{X}_H = a, T < \infty \right] &= \mathbb{E}^x \left[ \mathbb{E}^x \left[ e^{-\int_0^H 1_{[a,q]}(\hat{X}_{T+t}) ds}; \hat{X}_H = a, T < \infty | \mathcal{F}_T \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ \mathbb{E}^x \left[ e^{-\int_0^{H \circ \theta(T)} 1_{[a,q]}(\hat{X}_{T+t}) dt}; \hat{X}_{H \circ \theta(T)} = a, T < \infty | \mathcal{F}_T \right] \right] \\ &= \mathbb{E}^x \left[ \mathbb{E}^{X_T} \left[ e^{-\int_0^H 1_{[a,q]}(\hat{X}_t) dt}; \hat{X}_H = a \right] \right]. \end{aligned}$$

$X_T = q$  であるため, 内側の期待値 (したがって期待値全体) は以下ようになる。

$$= \left(\frac{a}{q}\right)^{\nu} \frac{2\gamma_1 \{(b/q)^{\gamma_0} - (q/b)^{\gamma_0}\}}{\gamma_0 \{(b/q)^{\gamma_0} + (q/b)^{\gamma_0}\} \{(q/a)^{\gamma_1} - (a/q)^{\gamma_1}\} + \gamma_1 \{(b/q)^{\gamma_0} - (q/b)^{\gamma_0}\} \{(q/a)^{\gamma_1} + (a/q)^{\gamma_1}\}},$$

ここで,  $\gamma_0 = \sqrt{\nu^2 + 2/\sigma^2}$  および  $\gamma_1 = \sqrt{\nu^2}$  である。同様に以下が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^x \left[ e^{-\int_T^H 1_{[a,q]}(\hat{X}_s) ds}; \hat{X}_H = b, T < \infty \right] \\ = \left(\frac{b}{q}\right)^{\nu} \frac{2\gamma_0 \{(q/a)^{\gamma_1} - (a/q)^{\gamma_1}\}}{\gamma_0 \{(b/q)^{\gamma_0} + (q/b)^{\gamma_0}\} \{(q/a)^{\gamma_1} - (a/q)^{\gamma_1}\} + \gamma_1 \{(b/q)^{\gamma_0} - (q/b)^{\gamma_0}\} \{(q/a)^{\gamma_1} + (a/q)^{\gamma_1}\}}. \end{aligned}$$

上記の項の分母を  $D(q, a, b)$  と表記すると, 関数 (3.4) は明示的に以下ようになる。

$$\begin{aligned} J(x, q, a, b) &= f(q) \left(\frac{q}{x}\right)^{\sqrt{\nu^2 + 2\alpha/\sigma^2} + \nu} \\ &\quad - \frac{2\xi}{D(q, a, b)} \left( A\gamma_1 \left(\frac{a}{q}\right)^{\nu} \{(b/q)^{\gamma_0} - (q/b)^{\gamma_0}\} + B\gamma_0 \left(\frac{b}{q}\right)^{\nu} \{(q/a)^{\gamma_1} - (a/q)^{\gamma_1}\} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

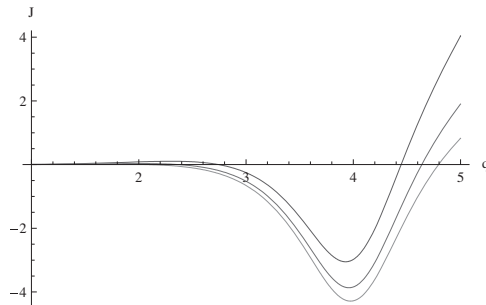


図1 : いくつかの初期自己資本レベル  $x$  に対する最適介入タイミング  $q^*$

さて、具体的に数値を得るために  $f(x)=x$  と仮定し、パラメータにも数値を与える。 $\xi = 0.5$ ,  $a = 0.1, A = 0.01, B = 10$  は共通とし、初期の資産プロファイル  $\mu = 0.15, \sigma = 0.3$  は規制上の介入の後に  $\underline{\mu} = 0.05, \underline{\sigma} = 0.15$  へ変化するとする。この場合、以下の結果が得られる。最初に  $a = 0.01$  と  $b = 4$  を固定して、関数  $J(x, q, 0.01, 4)$  がどのように変化するかを見よう。 $q$  の関数である3つの曲線、上の式からそれぞれ  $x = 5, x = 6$  と  $x = 7$  を図1に示す。明らかに、それぞれの初期のレベル  $x$  に対して、(3.6) 式の極小点を与える  $q^*(x)$  が存在する。この表現は値  $q^*$  が初期レベル  $x$  に依存することを強調している。この例では、 $q^*(5) = 3.9282, q^*(6) = 3.95864, q^*(7) = 3.97403$  である。規制から脱却するレベル  $b$  を固定するとき、最初の自己資本レベルがより大きいと、それだけ最適介入水準  $q^*$  がより大きくなる。可能な経済的解釈は、「銀行がうまくやっているように見える ( $x$  のレベルが高い) としても、手遅れにならないようにするために介入を早く始めるべきである (=  $q$  のレベルを高く設定する)」ということになるだろう。その他分かることは、初期レベルがより大きいと、それだけより社会的費用 (= 関数値) が小さくなるということである。この結果は合理的に思われる。

次に、社会的費用は銀行がどれほど長い期間、規制当局の管理下にあるかに依存すると考えられるため、点  $a$  よりも点  $b$  に早く到達することを所与とした場合、当局の監督下にある期間 (の期待値) を計算することは興味深い。 $b$  に到達するまでのデュレーション  $H^*$  は以下のように計算される。

$$\mathbb{E}^x[H^*] = \frac{2[S(b) - S(x)]}{[S(b) - S(a)]S(x)} \int_a^x \frac{S(\zeta)[S(\zeta) - S(a)]}{\underline{\sigma}^2 \zeta^2 S(\zeta)} d\zeta + \frac{2[S(x) - S(a)]}{S(x)[S(b) - S(a)]} \int_x^b \frac{S(\zeta)[S(b) - S(\zeta)]}{\underline{\sigma}^2 \zeta^2 S(\zeta)} d\zeta,$$

ここで

$$S(y) = \begin{cases} -\frac{y^{-2\nu}}{2\nu}, & \nu \neq 0, \\ \log y, & \nu = 0, \end{cases} \quad \text{and} \quad s(y) = S'(y).$$

Karlin and Taylor [4] の pp.264 を参照されたい。上の例では、 $x = 5$  のとき、 $q(5) = 3.9282$  であったが、 $b$  点に復帰することを所与とした場合、管理下に置かれる期間の期待値は 8.88456 となる。(上式の  $x$  を  $q(x)$  で置き換えることで計算できる。) 初期値レベル  $x$  が増加すると  $q(x)$  も増加し、それに応じて  $b$  と  $q(x)$  の間の距離はより小さくなるため、この期間は短くなるといえる。例えば、 $x = 6$  ( $q(6) = 3.95864$  を意味する) のとき、期間は 5.16963 となり、 $x = 7$  ( $q(7) = 3.97403$  を意味する) のとき、3.26249 となる。興味深いことに、 $q(x)$  の値がお互いに近いにもかかわらず、この期待管理期間の値は相違が大きいことが分かった。

### 3.2 銀行の観点

規制によって制約を受ける銀行の収益性を組み込むことによってモデルを拡張する。銀行は期待割引利潤を最大化するように試みると仮定しよう。既に述べたように規制の存在する場合、(点  $a$  に到達するまで) 自己資本額が点  $q$  と  $b$  を通る度に、銀行は、 $(\mu, \sigma) = (\underline{\mu}, \underline{\sigma})$  の間で、何度も切り替えなければならないかもしれない。すなわち、銀行はその自己資本額によって資産のリスクリターンプロファイルを切り替えることを強制される。ここでインデックス 0 と 1 を用いて、規制保護観察下  $(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$  の状態と保護観察がない状態  $(\mu, \sigma)$  をそれぞれ区別しよう。

このように切り替えを考慮した自己資本プロセス  $X$  を一つの式で表わすと

$$dX_t = \mu(X_t, I(t))dt + \sigma(X_t, I(t))dW_t, \quad X_0 = x,$$



となり, 右連続のスイッチングプロセス  $I$  は以下で定義される。

$$I(t) := I_0 1_{\{t < \tau_1\}} + I_1 1_{\{\tau_1 \leq t < \tau_2\}} + \cdots + I_n 1_{\{\tau_n \leq t < \tau_{n+1}\}} + \cdots,$$

ここで, すべての  $i \in \mathbb{N}$  に対して,  $I_i \in \{0, 1\}$  および  $I_{i+1} = 1 - I_i$  である。数列  $(\tau_n)_{n \geq 1}$  は状態が 0 と 1 の間で切り替わる時刻であり,  $\mathcal{F}$  停止時刻の増加列である。ある切替時刻の列  $T$

$$T = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n, \dots)$$

に対応する利益の割引価値  $v^T(x)$  が以下の式で与えられるものと仮定する。  $x$  は前節同様, 自己資本の初期値である。

$$v^T(x, i) := \mathbb{E}^{x, i} \left[ \int_0^{\tau_a} e^{-\alpha s} h(X_s, I_s) ds - \sum_j e^{-\alpha \tau_j} H(X_{\tau_j}, I_{j-1}, I_j) \right],$$

ここで,  $H : (a, \infty) \times \{0, 1\}^2 \mapsto \mathbb{R}$  は  $I_{j-1}$  から  $I_j$  への即時的切り替え利益 / 費用である。短期においては, 利潤関数  $h$  は銀行が  $(\mu, \sigma)$  あるいは  $(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$  の下でオペレーティングしているかどうかによらないと考えても差し支えないので以下の式を仮定する

$$h(x, 1) = h(x, 0) = h(x) = c \cdot x^\gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1.$$

確率的最適化の文献では, この問題は最適スイッチ問題に分類される。Pham and Ly Vath [6] と Bayraktar and Egami [2] を参照されたい。しかしながら, 本論文の文脈では, 我々は最適スイッチング戦略を見いださなくてもよい: 銀行は状態のスイッチについて裁量を持っておらず, ただ点  $q$  と  $b$  の間で規制に従うだけである。例えば, 当初銀行がハイリスク, ハイリターンのプロファイル  $(\mu, \sigma)$  である状態 1 にあると仮定する。それから  $\tau_1 = \inf\{t \geq 0 : X_t \leq q\}$  および  $\tau_2 = \inf\{t > \tau_1 : X_t = b\}$  等々というように,  $X$  がレベル  $a$  に到達するまで切替が行われる。

即時的裁定を避けるために, 一般的な最適スイッチング問題では通常以下の式を仮定する。

$$H(x, 0, 1) + H(x, 1, 0) > 0.$$

本論文の文脈では, 銀行が保護観察下に入る, すなわち状態 1 から 0 になったとき, 公的資金 (大規模な金額) がしばしば注入されるため,  $H(x, 1, 0) < 0$  となる。つまりこの条件が満たされないケースが想定される。しかしながら, 銀行は裁量を持って切替ができないという設定であるため, この条件を緩めることができる。前節で既出のパラメータはそのまま使用し, 新しいパラメータの数値を以下のとおりに置きことにしよう。

$$c = 1, \quad \gamma = 0.25, \quad H(x, 0, 1) = 0.7, \quad H(x, 1, 0) = -2.0.$$

簡単化のため,  $q(5) = 3.9282$  で  $q$  のレベルを固定しよう。  $v^T(x, i), i = 0, 1$  は初期値  $x$  と初期の状態  $i$  の関数として, 切替戦略  $T$  を採った場合の銀行価値として計算される。規制のもとで, 「 $q$  と  $b$  の間で  $a$  に到達するまでリスク-リターンプロファイルを切り替える」という政策  $T$  に関連する  $v$  の値を計算すると以下の通りになる。もし銀行が状態 1, よってプロファイル  $(\mu, \sigma)$  で始めた場合, 以下の式が得られる。

$$v^T(x, 1) = \begin{cases} \beta_0 \left( \psi_0(x) - \frac{\psi_0(a)}{\varphi_0(a)} \varphi_0(x) \right) + g(x, 0) - H(x, 1, 0), & x \in (a, q], \\ \beta_1 \varphi_1(x) + g(x, 1), & x \in (q, \infty), \end{cases} \quad (3.7)$$

ここで,  $\beta_0$  および  $\beta_1$  は決定されるべき係数である。また

$$g(x, 1) := \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\infty e^{-\alpha t} h(X_t, 1) dt \right] = \frac{c}{\alpha - m} x^\gamma$$

ここで,  $m := (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2$  であり, 同様に

$$g(x, 0) := \mathbb{E}^x \left[ \int_0^\infty e^{-\alpha t} h(X_t, 0) dt \right] = \frac{c}{\alpha - \underline{m}} x^\gamma$$

ただし,  $\underline{m} := (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\gamma + \frac{1}{2}\sigma^2\gamma^2$  である。さらに幾何ブラウン運動である  $X$  に対しては,

$$\psi_0(x) := x^{p_1} \quad \text{and} \quad \varphi_0(x) := x^{-p_2}$$

と計算できる。ただし  $p_1 > 1$  and  $-p_2 < 0$  は  $\frac{1}{2}\sigma^2 p(p-1) + p\mu - \alpha = 0$  の2つの根である。また

$$\varphi_1(x) := x^{-p}$$

である。ただし  $-p$  は  $\frac{1}{2}\sigma^2 p(p-1) + p\mu - \alpha = 0$  の負の根である。

さて (3.7) は以下のように理解される。もし初期資本  $x$  が  $(q, \infty)$  にある場合, 銀行は資本が  $q$  に到達するまで状態1でオペレーションを続け,  $q$  に達したあと銀行は状態0 (すなわち, リスク-リターンプロファイル  $(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$ ) にスイッチし,  $a$  あるいは  $b$  に到達するまでその状態にとどまる。この政策と関連した  $v^T(x, 1)$  の値は (3.7) の2つ目の式で表現される。他方, もし初期資本  $x$  が  $(a, q)$  の区間にあるなら, 銀行はすぐにリスク-リターンプロファイルをスイッチしなければならない。このときの  $v^T(x, 1)$  の値は (3.7) の1つ目の式で表現される。

あまり実際的ではないが, もし銀行が状態0から始める場合の  $v^T(x, 0)$  値は, 参考までに以下の通りである。

$$v^T(x, 0) = \begin{cases} \beta_0 \left( \psi_0(x) - \frac{\psi_0(a)}{\varphi_0(a)} \varphi_0(x) \right) + g(x, 0), & x \in (a, b), \\ \beta_1 \varphi_1(x) + g(x, 1) - H(x, 0, 1), & x \in [b, \infty). \end{cases}$$

図2は, 規制下にある銀行について, それぞれ状態0と状態1から始まる銀行価値 (利益の割引期待値)  $v^T(x, 0)$  と  $v^T(x, 1)$  の値を示している。上のグラフが状態1から始まる場合の価値  $v^T(x, 1)$  である。  $\beta_0, \beta_1$  はそれぞれ1.5909および961.596と計算される。グラフは  $q$  点の前後で関数の形状が変化していることに注意されたい。初期資本  $x$  が  $q$  点以上にいるときはグラフの赤い実線部分 ( $x \geq q$ ) が  $x$  に対応する銀行価値であり, 初期資本が  $q$  以下の場合, 銀行はすぐに  $(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$  に切り替えなければならないが, このときの銀行価値が赤い破線 ( $x < q$ ) の部分である。下のグラフが状態0から始まる場合の銀行価値  $v^T(x, 0)$  である。同様の解釈が当てはまる。

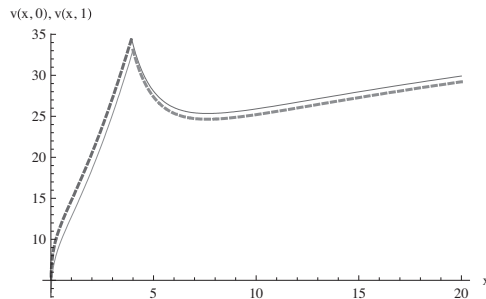


図2：規制された銀行に関する割引期待利益：上のグラフは状態1から始まる銀行価値  $v^T(x, 1)$  である。グラフは  $q$  点の前後で関数の形状が変化していることに注意されたい。初期資本  $x$  が  $q$  点以上にいるときはグラフの赤い実線部分 ( $x \geq q$ ) が  $x$  に対応する銀行価値である。初期資本が  $q$  以下の場合, 銀行はすぐに  $(\underline{\mu}, \underline{\sigma})$  に切り替えなければならないが, このときの銀行価値が赤い破線 ( $x < q$ ) の部分である。下のグラフが状態0から始まる銀行価値  $v^T(x, 0)$  である。初期資本が  $b$  点より小さい場合は, 青い実線部分 ( $x < b$ ) が銀行価値である。  $b$  に達するまで状態0でオペレートしなければならない。



監督されていない銀行の価値を上の結果と比較するのは興味深いであろう。規制がなかったと仮定すると，銀行は自己資本がレベル  $a$  に到達するまで自由に， $(\mu, \sigma)$  でオペレーションを続けることになる。標準的な計算を使えば，以下が得られる。

$$\hat{v}(x) = g(x) - \mathbb{E}^x[e^{-\alpha\tau}g(X_\tau)] = g(x) - g(a)\frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}.$$

ここで  $g(x) = g(x, 1)$  である。ただし  $\tau$  は，最初に  $a$  に到達する時刻である。

図3 (a) の上の曲線は  $v^T(x, 1)$  を単に再現したものであり，下の曲線は  $\hat{v}(x)$  である。 $x$  が十分に大きいとき，その領域で  $q$  に到達する確率は極めて低いので2つの関数値はお互い近いことが分かる。しかしながら，もし初期値  $x$  が低いならば，監督された銀行の価値は公的資金  $H(x, 1, 0)$  の存在により点  $q$  の近傍では  $\hat{v}(x)$  より大きくなるかもしれない。領域  $x \in (a, q]$  (破線部分) において，銀行は公的資金を受け取ることによって，状態0 (保護観察) に直ちに切り替えることを強られる。他方， $v^T(x, 0)$  と  $\hat{v}(x)$  を比較する図3 (b) を参照されたい。この場合，もし銀行の資本が  $b$  を下回ると (青の実線部分： $x < b$ )，規制されている銀行は他の状態ほど収益を上げない状態0でオペレーションを続ける必要がある。このため， $x$  が小さい領域では  $\hat{v}(x) > v^T(x, 0)$  となっている。

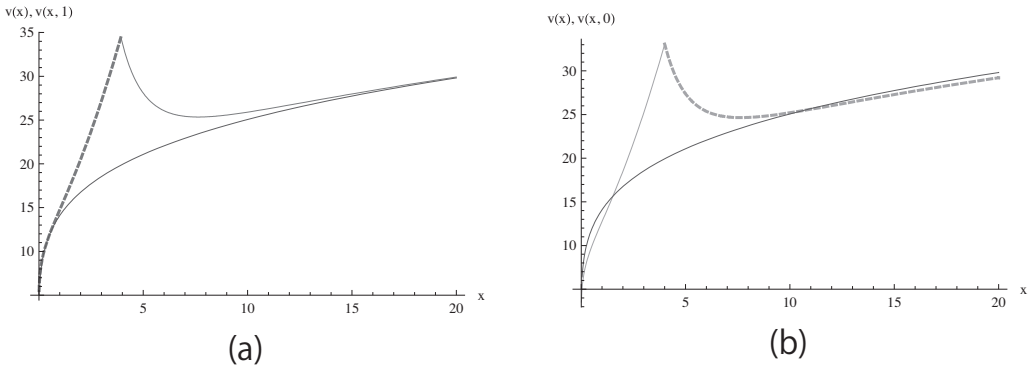


図3：監督された銀行と監督されていない銀行の比較： $H(x, 1, 0) = -2$ のケース

ここから分かることは，公的資金が十分な量提供されたとしたら，規制は必ずしも銀行の利潤に悪い影響を与えるとは限らないということである。かといって，もちろん政府が公的資金の発動を決めるとき，社会厚生が考慮されるべきであることは言うまでもない。さらに規制を受けない銀行の価値  $\hat{v}(x)$  が，領域  $x \in [a, q]$  の大部分で，規制をうける銀行の価値  $v^T(x, 0)$ ， $v^T(x, 1)$  より大きいことを確認するために，より小さい公的資金  $H(x, 1, 0) = -1.0$  を仮定した場合の図4を参照されたい。

加えて，規制要件と関連した監視費用が無視できないということを念頭におくべきである。それ故，規制される銀行の利潤関数  $h$  の設定を行うときこの点を考慮に入れるべきである。また公的資金に関してはモラルハザードの問題を包含したモデルを構成する必要があることを付言しておく。

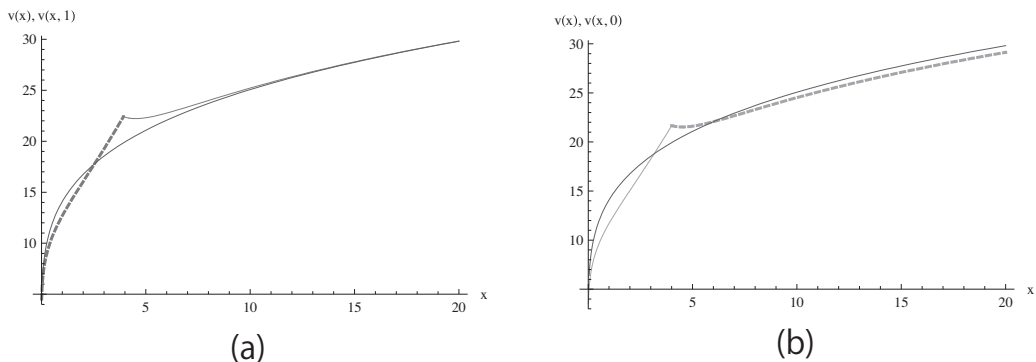


図4：監督された銀行と監督されていない銀行の比較： $H(x, 1, 0) = -1$ のケース

### 3.3 社会厚生

前節までの議論を組み合わせることによって、銀行を含めた全般的な社会厚生を論じることができる。銀行の自己資本のダイナミクスである (3.1) 式のドリフト係数と拡散係数 (3.2) を固定しよう。外生的な清算閾値レベル  $a$ 、回復レベル  $b$ 、およびスイッチングコスト / 公的資金による助成 ( $H(x, 0, 1)$ ,  $H(x, 1, 0)$ ) を所与とすれば、初期資本  $x$  の関数として  $q(x)$  と規制に関連した銀行の価値  $v^T(x, 1)$  を計算することができる。そのうえで全体的な社会的費用は以下で定義されるとする。

$$R(x) := \kappa J(x; q, a, b) - H(x, 1, 0) - (v^T(x, 1) - \hat{v}(x)) \quad (3.8)$$

ここで  $\kappa$  は適切な倍率であり、 $J(x; q, a, b)$  は、(3.4) 式で定義された銀行を保護観察下におくコストであり、 $H(x, 1, 0) < 0$  は銀行に払われる公的資金である。そして最後の項は主にこの公的資金による銀行価値の向上分 ( $v^T(x, 1) - \hat{v}(x)$ ) である。次に、どのように値  $R$  をコントロールすることができるかを見るために  $b$  あるいは  $H(x, 0, 1)$  を動かしてみよう。3.1 節で見たように、最適な介入点  $q(x)$  は  $x$  に依存するが、簡単化のために  $q$  を固定する、その理由は設定されたパラメータにおいて  $q(x)$  は  $x$  の変化に非感応的であることを同節で確認できているからである。なお、この分析においては  $J(x; q, a, b)$  の計算においては、重複カウントを避ける

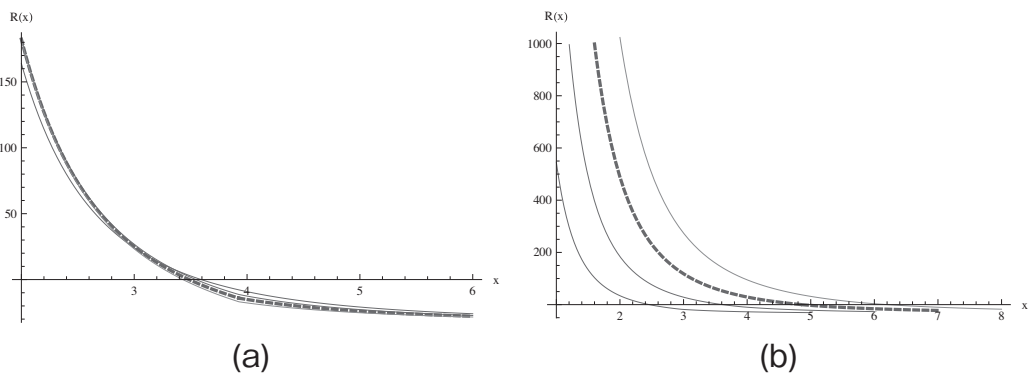


図5：助成金が変わる場合と閾値レベルが変わる場合の総社会費用：グラフを見やすくするため、左の図 (a) の原点は  $(2, 0)$  に設定されている。

ため公的資金  $H(x, 1, 0)$  を加えてはならない。

まず、公的資金  $H(x, 1, 0)$  を変化させてみる。この場合、 $J(x; q, a, b)$  は変化しないため、異なった  $H(x, 1, 0)$  の値に対して (3.8) の第2項、第3項の変化によって  $R(x)$  がどう変化するかを考えることになる。 $\kappa = 7$  とすると、 $R(x)$  の値は図5-(a) となる。4つのグラフは  $H(x, 1, 0) = -1.75$  (水色)、 $-1.5$  (破線)、 $-1.25$  (赤色) そして  $-1.0$  (青色) の場合であるが、ウェイトをつけた  $J(x; q, a, b)$  の値が十分に大きいため、社会全体のコストに差異が認められない。

次に、 $H(x, 1, 0) = -1.0$  と固定して、 $b$  (介入から解放されるレベル) を変化させてみよう。 $b = 3, 4, 5, 6$  を設定して、その場合の  $q$  を式 (3.5) の解として求めたものの中から、2.96997, 3.9282, 4.87269, 5.79815 を選ぶ (この値は上述のとおり  $x$  の値に対して非感応)。全体の社会的費用 (3.8) は図5-(b) である。 $H$  を変化させる場合と異なり、コストに差異がみられる。4つのグラフは下から  $b = 3$  (青色)、 $b = 4$  (赤色)、 $b = 5$  (破線)、 $b = 6$  (水色) である。 $b = 6$  のときコストは最大となり、 $b = 3$  のときコストは最小になる。 $b$  が小さいとき、 $q$  は小さくなるので、規制当局が銀行を管理下におくレベル  $q$  を低く設定するとき、社会的費用がより小さくなることを意味する。つまり、社会が公的資金の額を  $H(x, 1, 0) = -1.0$  で決めたとして、規制当局が非常に用心深いなら、悪化している銀行をより早期に見つけるために、 $b = 6$  の高いレベル (これは高い  $q$  を意味する) を設定することを望むかもしれない。しかしながら、このときはスケール  $\kappa = 7$  を所与とすると、経済全体にかかる総費用は、いっそう寛大なレベル (例えば  $b = 3$ ) のケースと比較して、より大きくなるかもしれないということである。もちろん、ここにおける結論は、どのようにウェイト  $\kappa$  を決定し、どのように関数  $J$  をモデル化するかに依存するので、軽率な結論を引き出すことはできない。ただ本論文のモデルにより政策決定のための種々の情報を提供することができること、特に最後の感応分析は、銀行破綻を避けたいという強い欲求とそれを防ぐための基準に関連する社会的費用の間にはトレードオフがあるという事実を捉えていることを強調したい。

## 4 結論

本論文では、規制当局が銀行オペレーションに介入する早期是正処置のモデルを提示した。規制当局は、もし銀行がより資本増強され、そしてより早く保護観察期間から抜け出せることが予想されるならより小さくなる、社会的な介入費用を最小化するために、介入を始める銀行資本のレベルを設定する。この最適停止問題を解くことにより、銀行の初期資本レベルに応じて介入を始める最適銀行資本を見出した。この結果、初期のレベルがより高いと、それだけ介入を引き起こすレベルが高いことが明らかになった。本論文では同じく政府が介入する銀行に提供される助成金額と資本要件レベルに依存して社会厚生がどのように変化するかを示した。

早期是正措置に関する先行研究はまだ少ないため、本論文では銀行介入の単純なモデルを構築した。本論文のモデルで考慮されず、介入の最適なタイミングに潜在的に影響を与える一つの重要な銀行業務はローン証券化と他の資産売却である。我々は将来最適介入の枠組みにおける資産売却を導入することを計画している。

## 参考文献

- [1] R. Aggarwal and K. T. Jacques. The impact of fiducia and prompt corrective action on bank capital and risk: Estimates using a simultaneous equations model. *Journal of Banking and Finance*, 25:1139–1160, 2001.
- [2] E. Bayraktar and M. Egami. On the one-dimensional optimal switching problem. *Mathematics of Operations Research*, 35 (1) :140–159, 2010.
- [3] A. N. Borodin and P. Salminen. *Handbook of Brownian Motion - Facts and Formulae, Second Edition*. Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin, 2002.
- [4] S. Karlin and H. M. Taylor. *A Second Course in Stochastic Processes*. Academic Press, San Diego, 1981.
- [5] N. R. Kocherlakota and I. Shim. Forbearance and prompt corrective action. *Journal of Money, Credit and Banking*, 39:1107–1129, 2009.
- [6] H. Pham and V. Ly Vath. Explicit solution to an optimal switching problem in the two-regime case. *SIAM J. Control Optim.*, 46 (2) :395–426, 2007.
- [7] I. Shim. Dynamic prudential regulation: Is prompt corrective action optimal? *Journal of Money, Credit and Banking*, 43:1625–1661, 2011.