

演繹推論法によるブラック＝ショールズ方程式の導出

白田 由香利¹⁾

要旨

経済数学問題を解くためには、人は、演繹、帰納、アブダクションなどを総合的に駆使して推論を行っていると考えられる。その思考の過程においては、アブダクションによって仮説を立てて一歩先を予測しながら、文章題の Unknown から Given Data 方向にむかって、逆方向に演繹推論を適応して、問題を解いているのではないかと、筆者は考える。この逆向き推論方式の有効性を評価するため、本稿では、難解と言われるブラック＝ショールズ方程式の導出を文章題として解くことを推論方式で行ってみた。結果として、この導出に関しては、期待値から株価の関数形を求める、株価の関数からその確率密度関数形を求める、という2つの大筋の部分は、逆向き推論がアブダクションとして行われている。しかし、部分目標の推論部分では、前向き推論も部分的に行われている。こうした逆向き推論方式で、ブラック＝ショールズ方程式の導出を教えると、モデル作成の前提条件に懐疑的になり、複数の候補となる仮説からその仮説を選択した理由を推察することで、さらに深くその公式を理解できるようになる。

1. 始めに

経済数学の諸問題を解く場合、既知の公式及びセオリーをどのように組み合わせて、未知数を求めるか、プロセスが重要である。経済数学問題を解くためには、人は、演繹、帰納、アブダクションなどを総合的に駆使して推論を行っていると考えられる。そのような論理的な推論能力を開発することが数学教育の第一目的であると我々は考え、演繹推論法による数学教育を実践してきた。養成したいスキルは、(1) 正しい公式の組合せである解法プロセスを理解すること(自分で解けなくても、解き方を理解する)、(2) 独力でその解法プロセスを思いつけること、である。この2種類のスキル養成のため、我々は web: VisualEconoMath というシステムを開発し、実際の経営数学の講義で活用している [1-3]。

先の白田の論文においては、「その思考の過程においては、アブダクションによって仮説を立てて一歩先を予測しながら、文章題の Unknown から Given Data 方向にむかって、逆方向に演繹推論を適応して、問題を解いているのではないかと論じた [4, 5]。この逆向き推論方式の有効性を評価するため、本稿では、難解と言われるブラック＝ショールズ方程式の導出

1) 学習院大学経済学部経営学科、東京都豊島区目白1-5-1, yukari.shirota@gakushuin.ac.jp

を文章題として解くことを推論方式で行う。次節では、ブラック＝ショールズ方程式の導出のための演繹推論では、逆向き推論をどのように行っているか、株価の収益率のモデル化のアイデアも含めて、全体の考え方の流れを論じる。第3節では、ブラック＝ショールズ方程式導出には、どのような公式が知識として必要であるか、換言すると、どの公式を教えればいいかを論じて、使う公式を分類整理する。第4節では、この逆向き推論方式で教えた効果について論じる。第5節はまとめである。

2. 逆向き推論

本節では、ブラック＝ショールズ方程式の導出を、逆向き推論によって考える。ブラック＝ショールズ方程式は1973年にフィッシャー・ブラック (Fischer Black) とマイロン・ショールズ (Myron Scholes) が共同で発表した理論であり、その公式を厳密に証明したロバート・マートン (Robert C. Merton) とともに3人で1973年にノーベル経済学賞を受賞した [6]。ブラック氏らが公式を思いついた際に、どのような推論を行ったかの実際は不明である。以降では、著者の勝手な推察で、その推論過程を推察していく。

ブラック＝ショールズ方程式とは、コールオプションと呼ばれる金融商品の期待値を求める公式である。本稿では、ヨーロピアン・コールオプションのみを対象とする。他の種類のプットオプションなどは、このオプションの公式を理解すれば、類似の考え方で解くことが可能である。各種のオプションの説明及び、ブラック＝ショールズ方程式の導出の数学的解説については、金融工学及び確率過程のテキストを参照して頂きたい [7-9]。また、白田のブラック＝ショールズ方程式に関する論文もシミュレーション及びグラフィクスを使って説明しているので、本論文が扱っている問題の理解に役立つ [10]。

2-1. Given Data と Unknown

オプションの期待値を計算する文章題として、問題を設定し、その Given Data と Unknown (期待金額, 期待値) の間をつなぐ、推論過程を図1に示した。1枚の図に収まらないので、図1aと図1bに分けてある。推論のスタート時点で、出発点である Given Data と Unknown を認識することが重要である。演繹推論を行う過程が、上から下に描かれている。図1のトップに Given Data をリストアップしてある。Unknown は利潤の期待値であるが、最終的にそれは31.6135円と求められる。

その演繹の際に利用している公式およびセオリーが右側に示されている (図1参照)。ブラック＝ショールズ方程式の導出を教えていて感じることは、導出プロセスが非常に長いので、Unknown が期待値であることに気付かない学生が多いことである。教える側も、期待値を求めることが目標であることを強調すべきであろう。

アブダクションは、パース (Charles Sanders Peirce) が提唱した。パースはアブダクションの推論形式を、以下のように定式化している [11] :

驚くべき事実 C が観察される,

しかしもし H が真であれば, C は当然の事柄であろう,

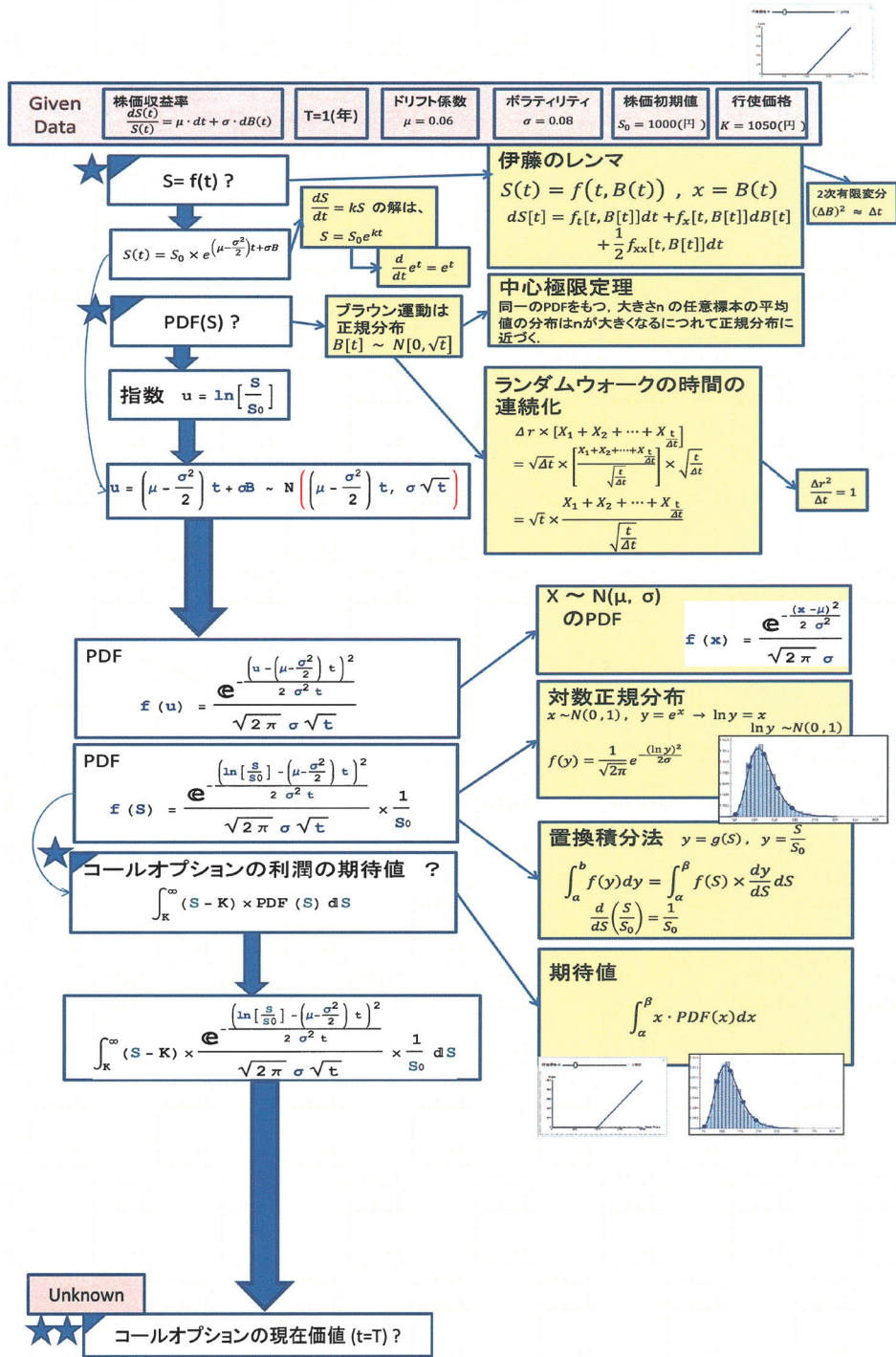


図 1 a: ブラック＝ショールズ公式による期待値導出のための推論図

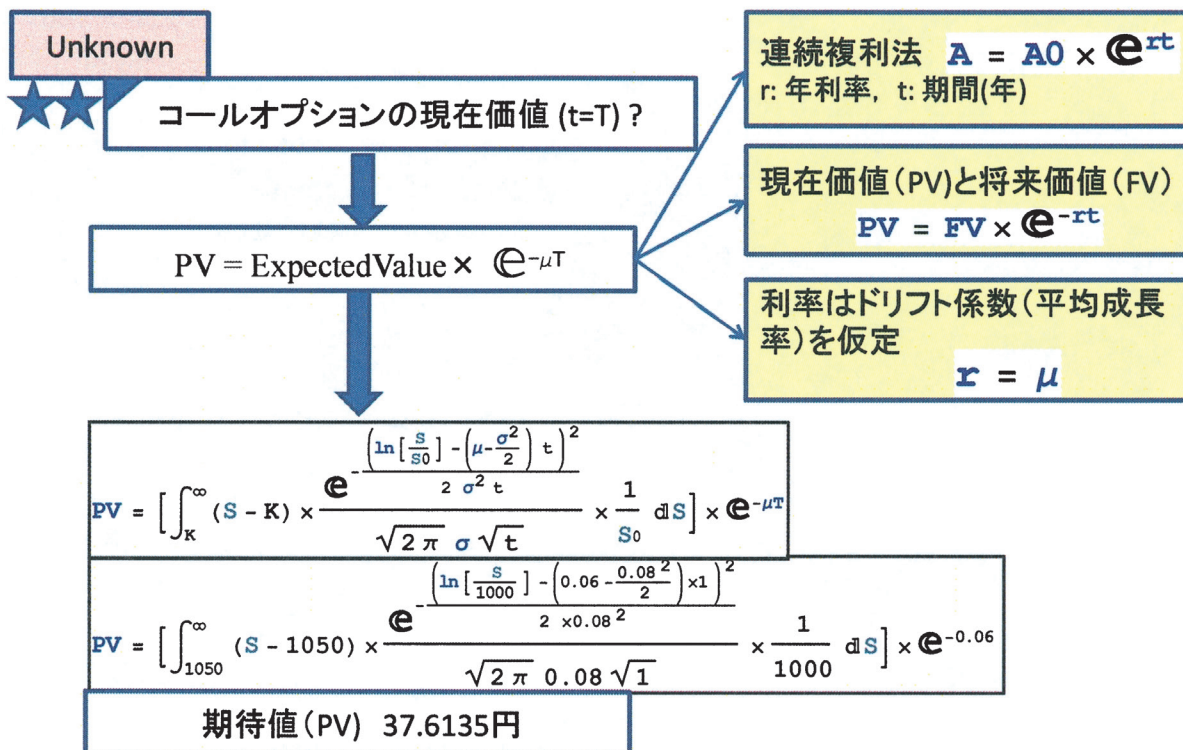


図 1 b: ブラック=ショールズ公式による期待値導出のための推論図 (続き)

よって、H が真であると考えられるべき理由がある。

C とは、我々の疑念と探究を引き起こすある意外な事実または変則性のことであり、H は C を説明するために考えられた仮説である。

アブダクションによって、提案される仮説としてこの問題を解釈すると、「オプションによる利潤の期待値が計算できるならば、確率変数 X (株価) の関数形および、X の確率密度関数が計算できることは当然の事柄であろう」が出発の仮説 H に対応する。こうして、以下の 2 つの部分目標が作られる。

- 株価の関数形が求められる
- 株価の確率密度関数 (PDF: Probability Density Function) が求められる

以下ではこの部分目標をゴールとする推論過程を論じていく。

2-2. 前提

株価の変動をモデル化するために、株価の微小変動はブラウン運動を用いて表現することは前提とした。ブラウン運動 (厳密にはウィーナーの確率過程) を表す記号として、 $B(t)$ を用いている。

株価収益率の確率微分方程式 $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dB(t)$ は、Given Data として与えられる、とした。左辺 $\frac{dS(t)}{S(t)}$ は株価収益率を表す。ドリフト係数 μ は、平均成長率を表す。ボラティリティ

σ は標準偏差である。ブラック＝ショールズ方程式のモデルでは μ および σ は定数と仮定している。この方程式の左辺では、 $\mu \cdot dt$ が平均的成長を表し、 $\sigma \cdot dB(t)$ は予期せぬ微小変動をブラウン運動により表している。

また、ヨーロピアン・コールオプションの仕組みも知っていることを前提とした。このオプションの場合、契約時に行使価格 K を決定する。 K は定数である。満期時に株価 S が使価格を上回るときのみ、オプションによる利潤が発生する。株価が行使価格を下回る場合は、利潤は 0 となる。数式で書くと、以下のようなになる。

$$\text{コールオプションの利潤} = \max(0, S - K)$$

このグラフィクスは白田の論文 [10] を参照して頂きたい。

上記の式が、確率変数の関数である。確率変数を $S - K$ とする。 K は定数であるので、 S に関して期待値の定積分を行なえばよい。よって、 S のこれ以上の関数形を計算することは不要である。しかし、 $S - K$ の PDF を求めるためには、 S の時間 t に関する関数形を求める必要が出てくる。

そこで、「株価 S の関数形が計算できることは当然の事柄であろう」と問題設定し、 $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dB(t)$ を解いて $S(t)$ を求めようとする。

2-2. 株価の関数形

部分目標として、 $\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu \cdot dt + \sigma \cdot dB(t)$ を解いて $S(t)$ を求めることを目標設定する。

この確率微分方程式の特徴は、ブラウン運動を項として含む点である。解くべき微分方程式にブラウン運動（正確にはウィーナープロセス）の項 $dB(t)$ が含まれるので、通常の積分公式とは異なるは使えない。ブラウン運動 $B(t)$ は、どのような微小時間をとっても、その間で、 $\Delta B(t)$ の絶対値を積分すると、無限大に発散してしまう、扱いにくい関数である。

ブラック氏らは、この確率微分方程式を解くために、ブラウン運動に関する公式を順に調べていったのではないかと推察される。「 S の関数形が計算できるならば、公式 XX を使って、この確率微分方程式が解けることは当然の事柄であろう」という形式の仮説を設定し、複数の仮説の中から、最ももっともらしい仮説を選んでいったと考えられる。ブラック氏らは、その時点で与えられた株価データと計算済みデータ、および、知っている公式およびセオリーを駆使して推測したに違いない。

ブラック氏らは、仮説として、伊藤のレンマを暫定的に採択した。他にも可能性はあったと推察される。例えば、伊藤のレンマは 2 次以上の高次の項を無視したテイラー展開による近似

式であるが、なぜ、さらに高次の近似式を用いなかったのであるか、等々と考えることはできる。そして、もっともらしさ (plausibility), 検証可能性 (verifiability), 単純性 (simplicity), 経済性の面から検討して、伊藤のレンマを選択したのであろう。伊藤のレンマを採用すると、実験結果とよく合う。よって、伊藤のレンマを採用したことは正しい、と推論したのであろう。そのように、暫定的に採択された仮説のなかで、最も理に適った仮説を提案することがアブダクションである。

しかし、これは後件肯定である。後件肯定は論理的に妥当ではなく、後件肯定は誤りの可能性もある。他の公式でさらにもっともらしく説明が見つかる仮説が発見されれば、それを採用すべきである。

2-3. 株価の確率密度関数

次に株価の PDF をどうアブダクションするかについて考える。前提として、「ブラウン運動により到達する距離は、正規分布に従う」というセオリーは知っているものとする。ここでの推論は、「ブラウン運動の正規分布と株価の PDF を関係づける推論パスを発見する」という、上から下むきの演繹推論と、下から上向きへ伸びる逆向き推論の両方を同時に行っているように感じる。前提条件により、候補となる仮説の数を絞りこんだ後、仮説を検討しているように感じる。つまり、「S の PDF が計算できるならば、公式 XX を使って、指数 U の正規分布 PDF と関連付けられることは当然の事柄であろう」という形式の仮説を設定し、複数の仮説の中から、最ももっともらしい公式 XX を選んでいったと考えられる。

最終的にブラック氏は、対数正規分布を採用した。対数正規分布の概念の採用は、伊藤のレンマの採用に比較して、必然性が高い。演繹推論で、上から下向きに、自然な流れで導出できそうに感じる。しかし、株価の実データの検証という実験を多数行って、結果としてこの対数正規分布の採用を決定したのと考えられる。検証は容易ではなかったと考えられる。

以上、ブラック=ショールズ方程式の導出はどのように推論されたかを、逆向き推論方式でたどってみた。「逆方向に演繹推論を適応して、問題を解いている」という大筋としては、(S-K) の期待値の計算 → S の PDF → S の関数形、という流れがある。その思考の過程においては、アブダクションによって、仮説を立てて一歩先を予測しながら、Unknown から Given Data 方向にむかって、逆方向に演繹推論を適応して、問題を解いているのではないかと考える。

もちろん、確率微分方程式を解き S の関数形を求める過程においては、ある部分については前向き推論が行われている。「伊藤のレンマを適応すれば、このように S の関数形が求まる」という前向き推論である。また、S の PDF を求める過程においても、ある部分については前向き推論が行われている。「指数 U はブラウン運動つまり PDF は正規分布なので、S の PDF は対数正規分布となる」という前向き推論である。

最も理に適った仮説を選択しようとする際、どのような推論が行われているかは、実際のところ複雑過ぎて不明である。しかし、全体の方法として、「逆方向に演繹推論を適応して、問題を解いている」という考えは、ブラック=ショールズ方程式の導出の過程においても、正しいと考えられる。

3. 公式の分類

本節では、ブラック＝ショールズ方程式導出の演繹推論過程を、理解するための公式群を分類する。図1の推論過程で使う公式についてまず述べる。各公式ごとに、数学の分野および、その学生にとっての難易度を示す。また、講義で教えた経験から、学生に理解させるためのポイントについて述べる。

① 伊藤のレンマ：確率過程，高難度

伊藤のレンマは2変数関数のテイラー展開による近似であるが、2次有限変分の式 $(\Delta B)^2 \approx \Delta t$ がベースとなっている。これを証明することは難しいので、シミュレーションにより、時間の分割を細かくするにつれて、 Δt に収束していくようすを見せて、証明に代えている（[10]参照）。また、方程式を解く際、この解がeを底とする指数関数となることを不思議に感じて質問されることがある。これは微分方程式を解いた経験がないと、理解しづらい箇所であるかもしれない。 $\frac{dS}{dt} = kS$ の解は $S = S_0 e^{kt}$ しかないことを、 $\frac{d}{dt} e^t = e^t$ の微分公式をグラフィクスで見せながら説明している [12]。

② ブラウン運動の到達距離は正規分布：統計一般，高難度

このセオリーは、中心極限定理を使って証明する。よって中心極限定理を正しく理解していないと、結果として、正規分布を導出する過程が曖昧になる。ブラック＝ショールズ方程式導出でこの定理を使う際は、以下のような平均値に関する記述をするほうが、理解が容易である。

中心極限定理

平均値 μ ，標準偏差 σ の母集団（正規分布でなくてもよい）から大きさ n の任意標本を抽出したとき、標本平均値 \bar{S}_n の分布は n が大きくなるにつれて、正規分布 $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ に近づく。

$$\bar{S}_n = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$$

また、中心極限定理を理解するために、大きさ n の増加のようすをシミュレーションで見せると効果的である（図2参照）。図2では、シンプルランダムウォーク・モデルの離散型確率変数のPDFを用いて、大きさ n を1から4まで増加する様子を示している。ランダムウォーク・モデルでは、取り得る値は+1と-1であるが、ツールの都合上、0と1としている。大きさ n を増加させると、平均値の分布が正規分布に近づく様子が見て取れる。図3では一様分布、指数分布の場合でも、正規分布に近づく様子を示した。この正規分布に近づく様子は、スライダーにより大きさ n を実際に動かして見ると、本当によく理解できる。

また、ランダムウォークの時間の連続化を理解するためには、 $\frac{\Delta r^2}{\Delta t} = 1$ の証明が必要となる。

この式の証明が、ブラウン運動が正規分布であるポイントとなるが、現在の著者の講義では、 Δr と Δt の収束の速度の説明は省略してしまっている。経済学部講義においては、本格的な確率論の証明はできないが、それを感覚として理解可能とするような簡潔な説明法を創案すべきであり、これは課題と考えている。

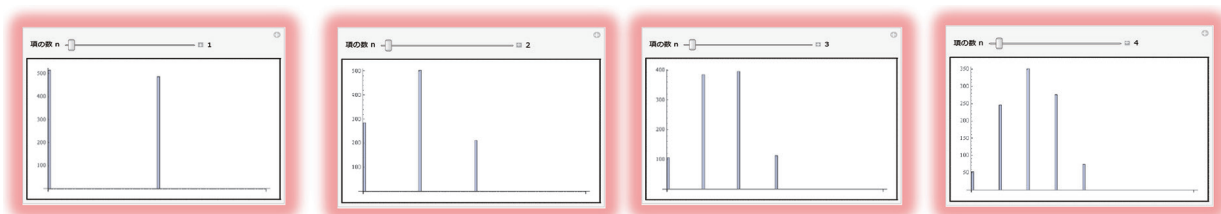


図2：中心極限定理のグラフィクス。ランダムウォークの確率分布（0と1の値としてある）の母集団に対して、大きさnを変化させて、度数分布をシミュレーションしたようす（事象の繰り返し回数は1000回）。左端のn=1では、ランダムウォークの確率分布そのままの分布となる。

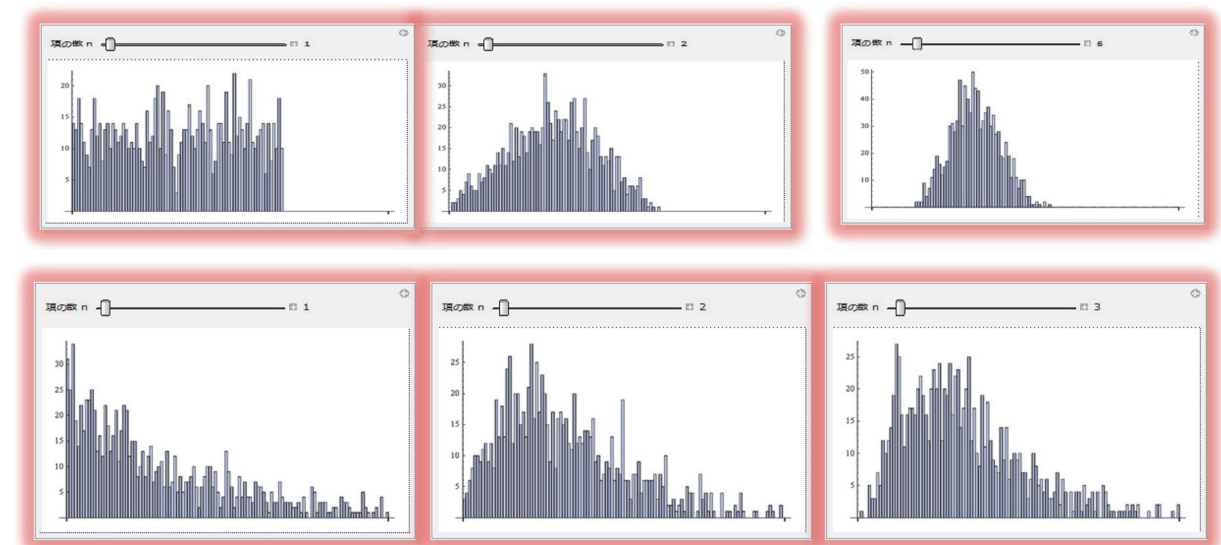


図3：中心極限定理の説明のためのシミュレーション。上が一様分布，下が指数分布を使っている。どのようなPDFを仮定しても、大きさnを増やすと正規分布に近づくことが見て取れる。いずれも、左端n=1の場合、元のPDFに近い分布が得られる。

- ③ 正規分布のPDF：統計一般，中難度
- ④ 対数正規分布：統計一般であるが，金融数学，中難度

- ⑤ 置換積分法：基礎数学，低難度
- ⑥ 連続型確率変数の期待値：統計一般，低難度
- ⑦ 連続複利法：金融数学，低難度
- ⑧ 現在価値へのディスカウント：金融数学，低難度

期待値が求まった後で、もうひとつすべき処理が、この、現在価値に割り引く処理である。先に求めた期待値は、満期 $t=T$ のときの価値であるので、現在からみれば、将来価値である。よって、割り引く必要がある。全体の演繹推論の流れから言えば、子葉末節の部分であり、金融分野の人にとっては、慣れ親しんでいる処理と言える。連続複利、現在価値などの金融数学についてのグラフィクスによる解説は [12] を参照して頂きたい。

以上が、確率変数 S に関する公式の導出で用いる公式である。しかしながら、ブラック＝ショールズの公式は、株価 S ではなく、指数 u を積分変数としている。

$$u = \ln \left[\frac{S}{S_0} \right]$$

よって、株価 S の PDF ではなく、確率変数 u の PDF を用いて、期待値の定積分を行う。

$$\int_{\ln \left[\frac{K}{S_0} \right]}^{\infty} (S_0 e^u - K) \times \frac{e^{-\frac{\left(u - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right)^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi} \sigma \sqrt{t}} du$$

この期待値を求める定積分であるが、解析的に積分を計算するのではなく、 e の指数部分をまとめて（加算である）、変数 u に関する 2 次式を作り、それを平方完成し、異なる正規分布の PDF に変形する。解析的に解いているのではない。最終的に標準正規分布のライブラリーを参照する形式にする。以下の式がブラック＝ショールズの公式である。式中、 $N(a)$ は標準正規分布で確率変数が a 以上の値をとる確率を表す関数である。

以下にその公式を示す。

$$N \left(\frac{\ln \left[\frac{K}{S_0} \right] - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right) + K \times e^{-\mu T} \times N \left(\frac{\ln \left[\frac{K}{S_0} \right] - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T}{\sigma \sqrt{T}} \right)$$

図 4 に、確率変数を u としたブラック＝ショールズ方程式の導出のための推論過程を示す。前半は図 1 と同じである。以下にこの演繹推論を理解するために必要な公式をリストアップする。

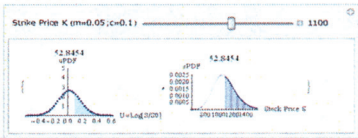
- ⑨ 自然対数の公式：基礎数学，低難度
- ⑩ 指数の公式：基礎数学，低難度
- ⑪ u の 2 次式の平方完成：基礎数学，低難度であるが、計算力が必要（図 5 参照）
- ⑫ 正規分布の標準化：統計一般，低難度であるが、計算力が必要



期待値？ (uバージョン)?

確率変数の置き換え $S \rightarrow u$?

$$u = \ln\left[\frac{S}{S_0}\right]$$



$$\int_{\ln\left[\frac{K}{S_0}\right]}^{\infty} (S_0 e^u - K) \times \frac{e^{-\frac{(u - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t)^2}{2\sigma^2 t}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{t}} du$$

指数の公式 $e^a \times e^b = e^{a+b}$

u の2次式の平方完成
 $au^2 + bu + c = a(u-d)^2 + f$

$$\int_{\ln\left[\frac{K}{S_0}\right]}^{\infty} S_0 e^{\mu T} \times \frac{e^{-\frac{(u - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} du + \int_{\ln\left[\frac{K}{S_0}\right]}^{\infty} K \times \frac{e^{-\frac{(u - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} du$$

Unknown

コールオプションの現在価値 (t=T) ?

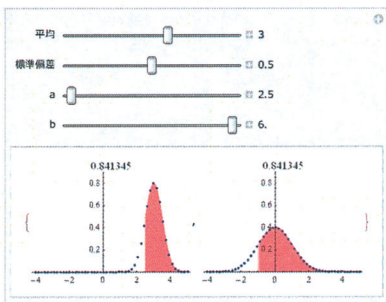
$$e^{-\mu T} \int_{\ln\left[\frac{K}{S_0}\right]}^{\infty} S_0 e^{\mu T} \times \frac{e^{-\frac{(u - (\mu + \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} du + \int_{\ln\left[\frac{K}{S_0}\right]}^{\infty} K \times \frac{e^{-\frac{(u - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})T)^2}{2\sigma^2 T}}}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}} du$$

$$N\left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

$$N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \sigma\sqrt{T}\right)$$

正規分布の標準化

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$



ブラック=ショールズ方程式

$$N\left(\frac{\ln\left[\frac{K}{S_0}\right] - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) + K \times e^{-\mu T} \times N\left(\frac{\ln\left[\frac{K}{S_0}\right] - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

図4：変数uによるブラック=ショールズ方程式の導入のための演繹推論

$$u - \frac{1}{2\sigma^2 T} \left[u - \left(u - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 \quad (6)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[-2\sigma^2 T u + u^2 - 2u \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T^2 \right] \quad (7)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[u^2 - 2u \left[\sigma^2 T + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right] + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T^2 \right] \quad (8)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[u^2 - 2u \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T^2 \right] \quad (9)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[\left(u - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)^2 - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T^2 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)^2 T^2 \right] \quad (10)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[\left(u - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right)^2 - 2\mu\sigma^2 T^2 \right] \quad (11)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2 T} \left[u - \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) T \right]^2 + \mu T \quad (12)$$

図5：uの2次式の平方完成

4. 考察

複雑な推論過程の例としてブラック＝ショールズ方程式の導出問題を扱った。こうした教え方の利点は、以下のようなものである。

- (1) 使う公式が明確になる。

また、自分がどの公式について理解していないかが明確となり、その部分を学習すればよいことが分かる。

- (2) 逆向き推論をすることで、アブダクションにおいてどうしてその公式を選択したかを考察することで、導出過程の理解が深まる。

ブラック＝ショールズのモデルでは、株価変動モデルとしてブラウン運動を用いることを前提としている。ブラウン運動を採用することは、正規分布を仮定することである。しかし、昨今の経済物理学においては、ベキ分布へとモデル拡張が行われている。その先駆けとなったものは、マンデルブロの一連のベキ分布の研究である。マンデルブロは「禁断の市場」[13]の

中で、述べている：「いろいろな市場の価格の変化を細かく調べてみると、正規分布よりも裾野がずっと長いベキ分布に注目が集まってきました。（途中略す） 価格変化は正規分布ではなく過去のデータと独立でもないという私の主張は、今では何百人ものエコノミストや市場アナリストがその妥当性を文章にして認めています。」

こうして、現在の金融数学その他の分野においては、ベキ分布が広く使われるようになった[14-18]。しかし、正規分布を仮定していても殆どのマーケットの場合はいま機能する。問題が起こるのは稀に起こる大変動の場合である。このように、アブダクションにおいて、最ももらしい仮説を検証していくという作業は、連続と続く作業であり、一人の研究者の人生だけで完結するものではない。前提となるモデル自体が、拡張されるべきである、ということもあることを心に留めつつ、つまり、前提条件を懐疑的に見る態度を養うことも、ブラック＝ショールズ方程式の導出の推論過程を教材に学べると、考える。こうしたモデル構築の例として、ブラック＝ショールズは簡潔で扱いやすい公式であるので、金融数学の教材として適している。

実際に、演繹推論法でブラック＝ショールズ方程式を講義したときの学生の反応について述べる。2013年7月22日、島根大学総合理工学部で、大学院生を対象に1時間半で、ブラック＝ショールズ方程式の導出を講義した。経済数学は初めてという理工系大学院生である。逆向き推論を印象付けるため、はじめに「上司からオプションの価格をいくりにすべきか、期待値を評価してほしい、と言われました。あなたは、どのように期待値を計算していきますか？」という仮定の問い掛けを行った。これは自分で推論を行うトリガーとなると考える。

講義の後、ヒアリングした結果、以下のような感想を得た。「学部のとき学んだ内容もありグラフィクスでの復習はわかりやすかった。演繹推論法は話の流れがわかりやすく、自分も使ってみてみたいと思った」「演繹推論法はとても分かり易いと思った。元々の知識不足で付いていけないだろうと考えていたが、何とか理解できた。目で見て考えることができたので、理解が進んだと思う」

グラフィクスによる数学定理の説明の分かり易さ、演繹推論法の話の流れの分かり易さに対して、肯定的な評価が得られた。演繹推論法を使うことにより、経済数学の経験のない理工系大学院生にも、ブラック＝ショールズ方程式を理解してもらうことができる、という手ごたえを得ることができた。

5. まとめ

経済数学問題解決の演繹過程を求めるためには、演繹、帰納、アブダクションのすべてを複合的に駆使して思考が行われていると、我々は考えている。その思考の過程においては、アブダクションによって、仮説を立てて一歩先を予測しながら、Unknown から Given Data 方向にむかって、逆方向に演繹推論を適応して、問題を解いているのではないかと考える。その仮説を検証するために、ブラック＝ショールズ方程式の導出を例にとり、その推論過程を検証した。ある部分については前向き推論が行われている。しかし、全体の方法として、「逆方向に演繹推論を適応して、問題を解いている」という考えは、ブラック＝ショールズ方程式の導出の過程においても、大筋に関しては正しいと考えられる。また、こうした具体的な例を記録することで、推論の研究者に実際の事例を提供できれば幸いである。

経済数学の問題では、どのようなモデルを作るかが重要となる。既存のモデルに懐疑的になり、モデルを拡張することで、よりよい計算結果が得られる。その意味でも、暫定的に仮説を採用し、複数の仮説の中から最良のものを選んでいくアブダクションのプロセスを、追跡することは、教育的効果が高いと考えられる。今後とも、推論法に基づく数学問題解法過程の研究を進めていきたい。

参考文献

- [1] P. Stanworth and Y. Shirota, "Review of the "Web: How 2 SolveIt" Website," *Gakushuin Economics Papers*, vol. 50, pp. 1-18, 2013.
- [2] Y. Shirota, T. Hashimoto, and P. Stanworth. *Knowledge Visualization of Deductive Reasoning for Word Problems in Mathematical Economics. Lecture Notes in Computer Science (LNCS) series (DNIS 2013 Vol. LNCS 7813)*, 2013.
- [3] 白田由香利, 橋本隆子, "経営数学問題解法のための演繹推論支援教材作成ツール", *学習院大学経済論集*, vol. 48, pp. 303-311, 2011.
- [4] 白田由香利, "経営数学問題解法における演繹推論に関する考察", *学習院大学経済論集*, vol. 49, pp. 85-98, 2012.
- [5] Y. Shirota and T. Hashimoto, "Plausible Deductive Reasoning Plan for Business Mathematics Learners - Solution Plan Graph Generator -," *Proc. of 2nd Uncertainty Reasoning and Knowledge Engineering (URKE2012)*, Jakarta, August 14-15, pp. 5-8, 2012.
- [6] A. Brown and P. Mehrling, *Fischer Black and the Revolutionary Idea of Finance* Wiley, 2011.
- [7] N. Chriss, *Black Scholes and Beyond: Option Pricing Models*: McGraw-Hill, 1996.
- [8] 松原望, *入門確率過程*: 東京図書, 2003.
- [9] 松原望, *松原望の確率過程超！入門*: 東京図書, 2011.
- [10] 白田由香利, "ブラック＝ショールズ方程式に関するシミュレーションとグラフィクスによる考察," *学習院大学経済論集*, vol. 49, pp. 251-260, 2013.
- [11] 米盛裕二, *パースの記号学*: 勁草書房, 1981.
- [12] 白田由香利, 橋本隆子, 飯高茂, *感じて理解する数学入門 (e-Book)*: オライリー・ジャパン, 2012.
- [13] ベノワ・B・マンデルブロ, リチャード・L・ハドソン, 高安秀樹 (監訳), *禁断の市場 フラクタルでみるリスクとリターン*: 東洋経済, 2008.
- [14] D. Sornette, *Why Stock Markets Crash - Critical Events in Complex Financial Systems -*: Princeton University Press, 2003.
- [15] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences - Chaos, Fractals, Selforganization and Disorder: Concepts and Tools -*: Springer, 2003.
- [16] P. Ball, *Why Society is a Complex Matters - Meeting Twenty-first Century Challenges with a New Kind of Science -*: Springer, 2003.
- [17] 青山秀明, 家富洋, 池田裕一, 相馬亘, 藤原義久, *経済物理学*: 共立出版, 2008.
- [18] 青山秀明, 家富洋, 池田裕一, 相馬亘, 藤原義久, *パレート・ファームズ—企業の興亡とつながりの科学—*: 日本経済評論社, 2007.