



量子力学の知識はまったく使わない

大学の数学の記法を使う

付録 Bell-CHSH 不等式 の導出

田崎 晴明

基本的な隠れた変数の理論

基本的な隠れた変数

唯一の仮定 各々の実験において、 A_1, A_2, B_1, B_2 を測定した際に得られる（はずの）測定結果は事前に確定している

▶ 隠れた変数 $\lambda \in \{1, 2, \dots, 16\}$ により測定結果を指定

λ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$a_1(\lambda)$	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
$a_2(\lambda)$	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1	+1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	-1
$b_1(\lambda)$	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1	+1	+1	-1	-1
$b_2(\lambda)$	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1	+1	-1

▶ N 回の実験 \longrightarrow 隠れた変数の列 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$

列は完全に任意

確率的である必要はない

$$N(\lambda) = \sum_{j=1}^N \delta_{\lambda, \lambda_j} \quad \text{列の中に } \lambda \text{ が現れた回数} \quad \sum_{\lambda=1}^{16} N(\lambda) = N$$

$$r(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{N} \quad \text{列の中に } \lambda \text{ が現れた頻度} \quad \sum_{\lambda=1}^{16} r(\lambda) = 1$$

測定量の選択と相関関数

▶ A, B が測定する量をランダムに選ぶ

各々の $j = 1, \dots, N$ について、他のすべての事象と独立に、
確率 $\frac{1}{4}$ で $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$ のいずれかを選ぶ

$S_{\alpha,\beta}$: (α, β) が選ばれた j の集まり

$$\{1, 2, \dots, N\} = S_{1,1} \cup S_{1,2} \cup S_{2,1} \cup S_{2,2}$$

$N_{\alpha,\beta}$: $S_{\alpha,\beta}$ の要素の個数 ((α, β) が選ばれた回数)

$$N = N_{1,1} + N_{1,2} + N_{2,1} + N_{2,2}$$

$$N_{\alpha,\beta} = \frac{N}{4} + O(\sqrt{N})$$

等確率だから 

相関関数の表式

▶ 相関関数

$$\langle A_\alpha B_\beta \rangle = \frac{1}{N_{\alpha,\beta}} \sum_{j \in S_{\alpha,\beta}} a_\alpha(\lambda_j) b_\beta(\lambda_j) = \frac{1}{N_{\alpha,\beta}} \sum_{\lambda=1}^{16} a_\alpha(\lambda) b_\beta(\lambda) N_{\alpha,\beta}(\lambda)$$

$$N_{\alpha,\beta}(\lambda) = \sum_{j \in S_{\alpha,\beta}} \delta_{\lambda, \lambda_j}$$

$S_{\alpha,\beta}$ の中に λ が現れた回数
 $\lambda_j = \lambda$ のときに (α, β) が選ばれた回数

$$N_{\alpha,\beta}(\lambda) = \frac{N(\lambda)}{4} + O(\sqrt{N})$$

$$N_{\alpha,\beta} = \frac{N}{4} + O(\sqrt{N})$$

等確率だから 

$N \gg 1$ のとき任意の (α, β) について $\frac{N_{\alpha,\beta}(\lambda)}{N_{\alpha,\beta}} \simeq \frac{N(\lambda)}{N} = r(\lambda)$

相関関数の表式

$$\langle A_\alpha B_\beta \rangle = \sum_{\lambda=1}^{16} a_\alpha(\lambda) b_\beta(\lambda) r(\lambda)$$

Bell-CHSH 不等式

Bell 1964, Clauser, Horne, Shimony, Holt 1969

任意の $\lambda = 1, \dots, 16$ について

$$\begin{aligned} & a_1(\lambda) b_1(\lambda) + a_2(\lambda) b_1(\lambda) - a_1(\lambda) b_2(\lambda) + a_2(\lambda) b_2(\lambda) \\ &= \{a_1(\lambda) + a_2(\lambda)\} b_1(\lambda) - \{a_1(\lambda) - a_2(\lambda)\} b_2(\lambda) \\ &= \pm 2 \end{aligned}$$

$$a_1(\lambda), a_2(\lambda), b_1(\lambda), b_2(\lambda) \in \{+1, -1\}$$

a_1	a_2	$a_1 + a_2$	$a_1 - a_2$
+1	+1	2	0
+1	-1	0	2
-1	+1	0	-2
-1	-1	-2	0

$$\langle A_\alpha B_\beta \rangle = \sum_{\lambda=1}^{16} a_\alpha(\lambda) b_\beta(\lambda) r(\lambda) \quad \sum_{\lambda=1}^{16} r(\lambda) = 1 \quad \text{より}$$

$$-2 \leq \langle A_1 B_1 \rangle + \langle A_2 B_1 \rangle - \langle A_1 B_2 \rangle + \langle A_2 B_2 \rangle \leq 2$$

より複雑な隠れた変数

基本的な隠れた変数に帰着させる

隠れた変数から測定値が決まる場合

- ◆ 各々の粒子に隠れた変数 Λ_1 および Λ_2 が書き込まれる
 - ◆ 隠れた変数は何らかの規則（決定的でも確率的でもよい）によって Λ'_1 および Λ'_2 に変化 ($\Lambda'_1, \Lambda'_2 \in \mathcal{V}$)
 - ◆ A が A_α を測定すると結果は必ず $\tilde{a}_\alpha(\Lambda'_1) \in \{+1, -1\}$
 - ◆ B が B_β を測定すると結果は必ず $\tilde{b}_\beta(\Lambda'_2) \in \{+1, -1\}$
- $$\tilde{a}_\alpha : \mathcal{V} \rightarrow \{+1, -1\} \quad (\alpha = 1, 2) \quad \tilde{b}_\beta : \mathcal{V} \rightarrow \{+1, -1\} \quad (\beta = 1, 2)$$



これと整合する一意的な $\lambda \in \{1, \dots, 16\}$ をとる

$$a_\alpha(\lambda) = \tilde{a}_\alpha(\Lambda'_1) \quad (\alpha = 1, 2) \quad b_\beta(\lambda) = \tilde{b}_\beta(\Lambda'_2) \quad (\beta = 1, 2)$$

測定値が確率的に決まる場合

- ◆ 各々の粒子に隠れた変数 Λ_1 および Λ_2 が書き込まれる
- ◆ 隠れた変数は何らかの規則（決定的でも確率的でもよい）によって Λ'_1 および Λ'_2 に変化 ($\Lambda'_1, \Lambda'_2 \in \mathcal{V}$)
- ◆ A が A_α を測定すると、確率 $p_\alpha(\Lambda'_1)$ で $+1$, 確率 $1 - p_\alpha(\Lambda'_1)$ で -1 が得られる
- ◆ B が B_β を測定すると、確率 $q_\beta(\Lambda'_2)$ で $+1$, 確率 $1 - q_\beta(\Lambda'_2)$ で -1 が得られる

$$p_\alpha : \mathcal{V} \rightarrow [0, 1] \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$q_\beta : \mathcal{V} \rightarrow [0, 1] \quad (\beta = 1, 2)$$



この確率に基づいて測定結果（の候補） a_1, a_2, b_1, b_2 を選び、それと整合する一意的な $\lambda \in \{1, \dots, 16\}$ をとる

$$a_\alpha(\lambda) = a_\alpha \quad (\alpha = 1, 2)$$

$$b_\beta(\lambda) = b_\beta \quad (\beta = 1, 2)$$