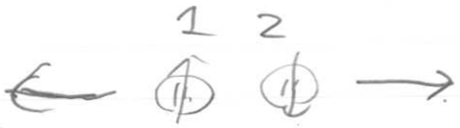
§ エンタングルメントと超光速通信

① 基本的な例：設定

エンタングルしている

スピン$\frac{1}{2}$をもった2つの（異った粒子）1, 2



スピン部分はsinglet

座標部分

$$\text{全状態} = \underbrace{|\varphi_1\rangle_1}_{\text{左に進む}} \otimes \underbrace{|\varphi_2\rangle_2}_{\text{右に進む}} \otimes \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right\}}_{=\,|\Phi_0\rangle} \qquad (1.1)$$

AとBがそれぞれ粒子1と粒子2をうけとる

この設定でいくつかの思考実験

（同じ状態をたくさん用意して
実験をくり返すこともできる）

(III) エンタングルした状態の測定

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$$

・Aが粒子1の$\hat{S}_z$を測定

$$\begin{cases} \hat{S}_z^{(1)}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 \\ \hat{S}_z^{(1)}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 \end{cases} \quad (2.1)$$

より

	測定結果		測定後の状態
確率$\frac{1}{2}$で	$\uparrow$ $(\frac{\hbar}{2})$	$\longrightarrow$	$|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	$\downarrow$ $(-\frac{\hbar}{2})$	$\longrightarrow$	$|\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2$

(2.2)

・ここでBが粒子2の$\hat{S}_z$を測ると、その結果は確定している.

Q1: Aが測定した瞬間にBの手元の状態が変化するのか?

相対論に反する?

どの座標系で?

⋮

これは「よい問い」ではない $\longrightarrow$ 状態の定義などに依存.

$\boxed{\text{Q2: Aが測定したことによってAからBに情報が伝わるのか?}}$

超光速通信??

• Bが粒子2の $\hat{S}_z$ を測定する.

(1) Aの測定のあと

	Aの測定結果	Aの測定後	Bの測定結果
確率 $\frac{1}{2}$ で	$\uparrow$	$\lvert\uparrow\rangle_1 \lvert\downarrow\rangle_2$	$\downarrow$
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	$\downarrow$	$\lvert\downarrow\rangle_1 \lvert\uparrow\rangle_2$	$\uparrow$

(2.3)

(2) Aの測定の前

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$$

	Bの測定結果
確率 $\frac{1}{2}$ で	$\downarrow$
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	$\uparrow$

(2.4)

$\boxed{\text{Bにとっては (2.3) も (2.4) も変わらない}}$

• Aが粒子1の $\hat{S}_z$ を, Bが粒子2の $\hat{S}_z$ を測定

$$|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$$

確率 $\frac{1}{2}$ で	Aは $\uparrow$	Bは $\downarrow$
〃 $\frac{1}{2}$ で	Aは $\downarrow$	Bは $\uparrow$

1回の実験ならこのどちらか. くり返せば両者がほぼ半分ずつ

• どちらが先に測定しても同じ

• AとBの測定結果に相関はあるが情報は伝わっていない!

四 測定する物理量を変える「通信」

$\hat{S}_x$ の固有状態

$$\left\{\begin{aligned} |\rightarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\} \\ |\leftarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\} \end{aligned}\right. \tag{4-1}$$

$$\hat{S}_x|\rightarrow\rangle = \frac{\hbar}{2}|\rightarrow\rangle, \quad \hat{S}_x|\leftarrow\rangle = -\frac{\hbar}{2}|\leftarrow\rangle \tag{4-2}$$

これをつかうと

$$\begin{aligned} |\Psi_0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\{|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2\} \end{aligned} \tag{4-3}$$

よって $|\Psi_0\rangle$ で A が $\hat{S}_x$ を測定すると

		測定結果	測定後の状態
確率 $\frac{1}{2}$ で	$\longrightarrow$	$(\frac{\hbar}{2})$	$|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2$
〃 $\frac{1}{2}$ 〃	$\longleftarrow$	$(-\frac{\hbar}{2})$	$|\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2$

(4-4)

- これを利用して、AからBへ 1bitの情報を一瞬で伝える。
  ↳ yes or no

			Bの状態
yes → Aは $\hat{S}_z$ を測定		$\longrightarrow$	$|\uparrow\rangle_2$ or $|\downarrow\rangle_2$
no → Aは $\hat{S}_x$ 〃		$\longrightarrow$	$|\rightarrow\rangle_2$ or $|\leftarrow\rangle_2$

(4-5)

これを区別すれば、Bはyes/noがわかる! 超光速通信!!

・Bが粒子2の$\hat{S}_z$を測ると…

yesのとき　　　　　　　　Bのけっか

かくりつ$\frac{1}{2}$　$|\uparrow\rangle_2$ ⟶ ↑

〃　$\frac{1}{2}$　$|\downarrow\rangle_2$ ⟶ ↓　　(5-1)

noとのとき　　　　　　　　Bのけっか

かくりつ$\frac{1}{2}$　$|\rightarrow\rangle_2$ → かくりつ$\frac{1}{4}$ … ↑
　　　　　　　　　→ 〃 $\frac{1}{4}$ … ↓

かくりつ$\frac{1}{2}$　$|\leftarrow\rangle_2$ → かくりつ$\frac{1}{4}$ … ↑
　　　　　　　　　→ 〃 $\frac{1}{4}$ … ↓　　(5-2)

けっきょく，どちらでも　かくりつ$\frac{1}{2}$ ↑
　　　　　　　　　　　〃 $\frac{1}{2}$ ↓　　(5-3)

この測定では区別できない…（→ 他のものを測ったら…（あとで））

もしBが測定前の状態をそのままコピーできれば…

yes → $|\uparrow\rangle_2$ → $|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle|\uparrow\rangle$ … $|\uparrow\rangle$ → $\hat{S}_z$を次々と測定するといつも↑

no → $|\rightarrow\rangle_2$ → $|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle|\rightarrow\rangle$ … $|\rightarrow\rangle$ → $\hat{S}_z$を次々と測定すると↑か↓がランダムに．

区別ができる！

しかし　このような量子状態のコピーは不可能
　　クローン禁止定理

▷ 一般的な設定と結果

$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上の任意の状態 $|\Psi_0\rangle$

Aが扱える　Bが扱える

エンタングルした粒子のペアたち
様々なしかけ
⋮

- 状態 $|\Psi_0\rangle$
- Aは $\mathcal{H}_1$ 上の物理量 $\hat{A}$ を測定
- Bは $\mathcal{H}_2$ 〃 $\hat{B}$ を測定

→ これを何度もくり返す

> <u>結果</u> 任意の $\hat{B}$ について，Bの測定結果の期待値 $\langle \hat{B} \rangle$ は $\hat{A}$ に依存しない

先ほどの結果の一般化

規格化されている　縮退なし

証明　$\hat{A}$の固有状態　$\hat{A}|\Phi_j\rangle_1 = a_j|\Phi_j\rangle_1$ (7.1)

$\hat{P}_j = |\Phi_j\rangle_1 {}_1\langle\Phi_j|$, $\tilde{P}_j = \hat{P}_j \otimes \hat{\mathbb{1}}_2$ (7.2)

きかくかされている

$|\Phi_0\rangle$で $\hat{A}\otimes\hat{\mathbb{1}}_2$を測定して$a_j$が得られる確率

$$P_j = \|\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle\|^2 = \langle\Phi_0|\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle \quad (7.3)$$

a_jが得られたあとの状態

$$|\Phi_j\rangle = \frac{\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle}{\|\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle\|} = \frac{\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle}{\sqrt{P_j}} \quad (7.4)$$

(状態$|\Phi_j\rangle$で $\hat{\mathbb{1}}_1\otimes\hat{B} = \tilde{B}$ を測定した期待値
$\langle\Phi_j|\tilde{B}|\Phi_j\rangle$)

よって Bの測定の期待値

$$\langle\hat{B}\rangle = \sum_j P_j\langle\Phi_j|\tilde{B}|\Phi_j\rangle = \sum_j\langle\Phi_0|\tilde{P}_j\tilde{B}\tilde{P}_j|\Phi_0\rangle$$

$$= \sum_j\langle\Phi_0|\tilde{P}_j\tilde{B}|\Phi_0\rangle = \langle\Phi_0|\tilde{B}|\Phi_0\rangle$$

$$= \langle\Phi_0|(\hat{\mathbb{1}}_1\otimes\hat{B})|\Phi_0\rangle \quad (7.5)$$

$\hat{A}$によらない!

//