公開：2012 年 11 月 6 日
最終更新日：2012 年 11 月 6 日

「検出限界」とは何か？　— 統計学的仮説検定超入門[*1]

田崎晴明[*2]

「食品中の放射性物質の検査で『不検出 (ND)』とはどういう意味か？」、「検出限界は 3σ、定量限界は 10σ とは何を言っているのか？」といった質問が一般の人の口から出る時代になってしまった。

ここでは、「検出限界」や「定量限界」といった概念の背景にある統計の基本的な考え方を、なるべく初等的に（しかし、正確に）解説することを試みる。実際の放射線計測の話になると様々な複雑な要素が入ってくるので、話を単純化して（お馴染みの）回転式抽選機を例題にして議論を進める[*3]。

言うまでもないだろうが、ここに書いてあることを理解しただけでは、実際の放射線計測や解析を手がけることはできない。ただ、検査結果の数字や不等号は何を意味しているのか、また、検査結果を得るためにどういう解析が行なわれているか（あるいは、行なわれるべきか）についての一定の考えは得られると期待したい。

目次

[*1] 2012 年 9 月に開かれた連続講演会「放射線について『知って・測って・伝える』ために」の私が担当した第 1 回「放射線の基礎知識をめぐって — 科学的にわかること、わからないこと」で、「宿題」としてこの資料の原型を配布した。その後、読んでくれた人からの感想・意見を取り入れ、また、連続講演会の第二回の早野氏の講演 [1] で学んだ内容も反映させて、徹底的に書き直した（特に前半はまったく変わった）。

[*2] 学習院大学理学部、専門は数理物理学・統計物理学、連絡先：e-mail:hal.tasaki.h@gmail.com
なお、統計物理学と統計学とはほとんど関係がない。私は確率論については一定の知識を持っているが、統計学や統計的検定・推定に関しては素人である。また、（役に立たない理論を研究しているため）実験結果の解析を手がけることもないので、データ処理の実際にも疎い。この解説を書く際には多くの人に有益な助言をいただいた。お名前は挙げないが深く感謝したい。

[*3] これは別に「たとえ話」ではなくて、数学的な設定を明確にするための仕掛けである。

1 例題による丁寧な入門

具体的で（望むらくは、わかりやすい）例題を一つ定めて、検出限界、定量限界の意味を丁寧に説明しよう。わかりやすくとすると言っても、ごまかしは一切しないつもりなので、この節を丁寧に読むだけで基本的な考え方は理解できるはずだ。

この節の内容を理解したら、そのまま 3 節の応用編へ進んでもいい。

1.1 どういう問題を考えるか

■設定と問題　ワンパターンだが、商店街のクジ引きに使う回転式抽選機を考えよう[*4]。

抽選機の中には、白玉と赤玉が合わせて 100 個入っている。標準の（「汚染」のない）状態では、赤玉の個数は 25 個だった。

ここに、「汚染」の影響が入ってくる。誰かがやってきて、白玉を何個か抜いて、代わりに同じ個数の赤玉を入れていった可能性がある。全体の個数は 100 個のままだが、「抽選機の中の赤玉の個数」は増加したかもしれない。あるいは、実は「汚染」などはなく、赤玉は 25 個のままなのかもしれない。

ここでの問題は、

1. **果たして汚染はあるのか？**　言い換えれば、赤玉の個数は 25 個より増えたのか？
2. **汚染があるとして、「汚染度」はどの程度か？**　この例では赤玉が増えた個数を「汚染度」と呼んでいいだろう。つまり、赤玉が何個くらい増えたのだろうか？

の二つである。

[*4] 写真は Wikipedia より転載、katorisi による。

■実験のルール　もちろん、抽選機の蓋を開けて中の玉を出せば、赤玉の個数は簡単にわかる。あるいは、何度も抽選機をまわして、100 個の玉すべてを外に出してやっても、同じことだ。これでは面白くないので、そういうやり方は「禁じ手」にする。

ここでは、次のような、かなりわざとらしい方法を使う[*5]。まず、**抽選機をよく回して玉を 1 個だけ出す。その色（白か赤か）を確認したら、その玉をそのまま抽選機に戻す**（この一連の流れを「抽選」と呼ぶ）。そして、**次の抽選をする前には、抽選機をよく回して、中の玉を十分にバラバラにする**。このようにして**抽選を 100 回くり返して、赤玉が何回出たかを記録**する。

このような 100 回の抽選をまとめて「1 セットの実験」と呼ぼう。1 セットの実験をすることで、「100 回の抽選のうち、赤玉が何回出たか」という数値が得られる。これが、われわれの「実験データ」だ。われわれの目標は、実験データである「赤玉が出た回数」をもとにして、上に挙げた問題 1, 2 に答えることだ。

■現実の問題との対応　回転式抽選機を使ったのは、あくまで「例題」だ。もっと切実な問題と、この例題がどう対応するかを見ておこう。

まず、この解説の「影の主題」である食品中の放射性セシウムの測定との対応は以下の通り。

- **標準の状態の抽選機：**放射性セシウムに汚染されていない（カリウム 40 など自然の状態での放射性物質だけを含んだ）食品
- **汚染されたかもしれない抽選機：**自然な放射性物質以外に放射性セシウムを含んでいるかもしれない食品
- **1 セットの実験：**検査対象の食品から出る（特定のエネルギーの範囲の）ガンマ線の計測

米袋の中の放射性セシウムの量を流れ作業的に測定している様子をテレビなどで見たことがあるかもしれない。この場合、一つの米袋を装置に通すことが、一つの抽選機について 1 セットの実験をおこなうことに相当する。たくさんの米袋を次々と検査するのは、たくさんの抽選機を用意し、それぞれについて 1 セットの実験をおこなうことに対応している。食品中の放射性セシウムの検査については、3 節でも取り上げる。

あるいは、やはり重要な問題である被曝による癌死の影響の疫学的調査との対応は以下

[*5] これによって食品の放射線測定などとよく似た状況を作り出すことができる。そこから統計の考え方を学ぼうというプランだ。

の通り。ここでは、(あくまで「たとえ話」として）人は人生に一回かぎりの「癌の運命の抽選」をおこない、赤玉を出した人は癌で死亡し、白玉を出した人は癌以外の原因で亡くなると考えることにする[*6]。

- **標準の状態の抽選機：**事故による余分な被曝をしていない人が使う「癌の運命の抽選機」
- **汚染されたかもしれない抽選機：**余分な被曝をした人が使う「癌の運命の抽選機」
- **抽選：**ある一人が癌で亡くなるか、それ以外の原因で亡くなるかが判明すること
- **1 セットの実験：**調査の対象となる集団（この場合は 100 人の集団）の死亡原因を記録し、何人が癌で亡くなったかを調べること

疫学調査の目的は、被曝によって癌で死亡するリスク（確率）が高まるかどうかを調べることである。これは、「汚染されたかもしれない抽選機」の赤玉の個数が増えたかどうかを判定することに相当する。

1.2 「赤玉が出た回数」のゆらぎ

■素朴なアイディア　抽選機の中には、白玉と赤玉をあわせて 100 個の玉がある。そして、われわれはちょうど 100 回の抽選をする。すると、各々の玉は平均するとちょうど 1 回、抽選機から出てくることになる。

それならば、「1 セットの実験で赤玉が出た回数は、抽選機の中の赤玉の個数に等しい」ということになりそうだ。汚染がなくて赤玉の個数が 25 個なら、1 セットの実験で赤玉が 25 回出る。5 個分の汚染があって赤玉の個数が 30 個なら、赤玉が出る回数は 30 回。

われわれは、「赤玉が出た回数」をもとにして「汚染度（抽選機の中の赤玉が何個増えたか)」を知りたかったわけだから、

$$(\text{汚染度}) \stackrel{?}{=} (\text{赤玉が出た回数}) - 25 \tag{1.1}$$

という「公式」を使えば、目標がばっちり達成されるように思える（ただし、イコールの上に「?」をつけてあることからもわかると思うが、これは正確ではない)。

[*6] より詳しくは、私の書いた「やっかいな放射線と向き合って暮らしていくための基礎知識」4.6 節、
`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/radbookbasic/`
あるいは、web 上の解説「放射線って体に悪いの？」の「確率的影響についての考え方」
`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/housha/damage.html#4`
を参照。

このアイディアは、確かに、大筋ではいい線を行っているのだが、そのまま鵜呑みにはできない。もし抽選で出した玉を抽選機に戻さないのなら、「赤玉が出た回数」は「抽選機の中の赤玉の個数」と完全に等しい。だから、公式 (1.1) も正確な関係といえる。

しかし、われわれは抽選で出した玉を（わざわざ）元に戻すことにした。そうすると、100 回抽選しても、100 個の玉のそれぞれがちょうど 1 回ずつ出てくるというわけではない。実際、同じ抽選機を使っていても（つまり、「抽選機の中の赤玉の個数」が同じでも）1 セットの実験で赤玉が何回出るかは決まっていないのだ。すぐ後で具体的に詳しく見るが、1 セットの実験で赤玉が多めに出る場合もあるし少なめに出る場合もある。ちゃんとした予測はできないのだ。**「赤玉が出た回数」は確率的にしか決まらない**と言ってもいい。

■具体例　例として、抽選機の中に赤玉が 30 個入っているとしよう。

1 セットの実験をしたとき、赤玉は何回でるだろうか？　上の素朴なアイディアに従えば、30 回という答えになる。しかし、実際に 1 セットの実験を行なうと「赤玉が出た回数」はちょうど 30 回とは限らない。たとえば、33 回、35 回と多めにでることもあれば、28 回、25 回と少なめに出ることもある。このような状況を「『赤玉が出た回数』はゆらぐ」と表現する。ふらふらと気まぐれに値が変わるから「ゆらぐ」というのだ。

確率論の初歩を学ぶと、1 セットの実験で様々な「赤玉が出た回数」が観測される**確率**を計算できる（(2.1) を参照)。回数が 25 回から 35 回について、そうやって求めた確率を表にしておこう（これ以外の回数が観測される確率はもっと小さい)。

赤玉が出た回数	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
確率	0.050	0.061	0.072	0.080	0.086	0.087	0.084	0.078	0.069	0.058	0.047

確かに「赤玉が出た回数」が 30 回になる確率がもっとも大きい。そういう意味では、「『抽選機の中の赤玉の個数（今は、30 個)』と『赤玉が出た回数』は等しいはずだ」という素朴なアイディアには一理ある。ただし、確率が最大と言っても、たったの 0.087 だということに注意しよう。「赤玉がちょうど 30 回出る」のは、10 セットの実験のうちの 1 セットよりも少ないくらいなのだ。

さらに言えば、赤玉が 29 回出る確率も、31 回出る確率も、30 回出る確率とさして変わらない。25 回しか出ない確率だって 0.05 もある。20 セットの実験のうち 1 セットくらいでは、赤玉は 25 回しか出ないということだ。

同じ確率をグラフにしたのが図 1 だ。30 回の確率が最大だが、そのまわりの回数もそれなりに大きな確率があることが見て取れるだろう。

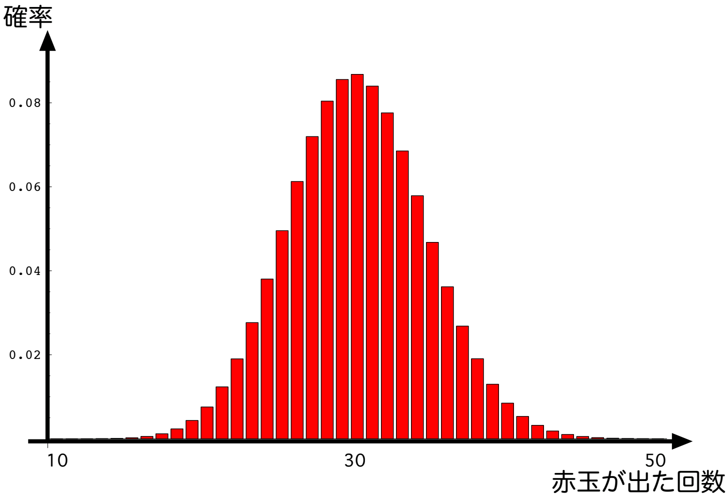

図 1　抽選機に赤玉が 30 個入っているとする。1 セットの実験（100 回の抽選）での「赤玉が出る」回数が横軸に示した値を取る確率を縦軸に示した。たしかに 30 回の確率がもっとも大きいが、その周辺の回数の確率もかなり大きいことがわかる。

■まとめ　この例からも明らかなように、公式 (1.1) で求めた量は本当の「汚染度」ではなかった。あくまで 1 セットの実験から得られた「汚染度の候補」に過ぎない。よって

$$(\text{実験で得られた汚染度}) = (\text{赤玉が出た回数}) - 25 \tag{1.2}$$

と書くべきだったのだ。

そして、「実験で得られた汚染度」と本当の汚染度は、

$$(\text{実験で得られた汚染度}) = (\text{汚染度}) \pm (\text{ゆらぎ}) \tag{1.3}$$

という関係で結ばれている。ここで、$\pm$ は $+$ と $-$ を縦に並べて書いた記号で「プラスマイナス」と読む。「ゆらぎ」が足される場合もあれば、引かれる場合もあるということを表現している。

このように「ゆらぎ」が邪魔をする状況で、どうやって「汚染」について信頼できる情報を引き出すのかが、この話のポイントである。

1.3　「汚染がある」ということ — 検出限界

まず一つ目の問題 — つまり、汚染はあるのか、赤玉の個数は 25 個より増えたのか — について詳しく見る。ここでの考え方が、この解説の中のもっとも重要な部分だと思う。

■話は簡単ではない　ある意味で上で見たことのくり返しになるのだが、「汚染がある」という判定は決して一筋縄ではいかないことを注意しておく。

ごく素朴には、

(1.2) の「実験で得られた汚染度」がゼロより大きければ「汚染がある」とみなす

という考え方があるだろう。実際、実験データとしてゼロでない汚染度が出てきたのをみれば、そのまま汚染があると思ってしまう人はとても多い。

しかし、言うまでもないだろうが、この考え方ではうまくいかない。「実験で得られた汚染度」には「ゆらぎ」が含まれているからだ。

この点を実感するために、今、抽選機は全く汚染されていなかったとしよう。つまり、赤玉の個数は「標準」のままで 25 個だった。

このとき、「赤玉が出た回数」が 20 回から 30 回のあいだの値を取る確率は、次の表のようになる。

赤玉が出た回数	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
確率	0.049	0.062	0.075	0.085	0.091	0.092	0.088	0.081	0.070	0.058	0.046

赤玉が出た回数が 25 回で「実験で得られた汚染度」がちょどゼロになる確率がもっとも高い。これならば、実験結果は正確ということになる。しかし、このように「正解」が得られる確率は 0.092 しかない。これは、10 セットの実験のうち 1 セットくらいだから、むしろ珍しいことだと言っていい。

一方、赤玉が 27 回出て「実験で得られた汚染度」が $27 - 25 = 2$ になる確率は 0.081 である。さらには、赤玉が 30 回も出て「実験で得られた汚染度」が $30 - 25 = 5$ になってしまう確率だって 0.046 もある。確率 0.046 というのは、だいたい、「20 セットの実験をすれば 1 セットくらいは、そうなってもおかしくない」という意味だから、実験を何セットもくり返すような場合には、まったく珍しくない。

本当の汚染度はゼロなのに、実際に実験をしてみると、「実験で得られた汚染度」は平気で 2 とか 5 とか、ゼロでない値になってしまうということだ*7。「『実験で得られた汚染度』がゼロより大きければ『汚染がある』とみなす」ということにしていたら、汚染のない抽選機に片っ端から「濡れ衣」を着せて「汚染あり」と判定してしまうことになる。こ

*7　「実験で得られた汚染度」がマイナスの数になることもある。

れではせっかくの実験（あるいは、食品の放射線測定）をする意味がない。

■「汚染がある」という判定法　「汚染がある」という判定を下す際には、汚染のない抽選機に「濡れ衣」を着せてしまう可能性が低くなるように工夫する。

そのために、以下のように考えるのが標準になっている。

- まず**「汚染がない」と仮定**して、実験結果を吟味する。
- その結果、
  - **実験結果が「明らかに珍し過ぎる」**と判断したら、**「汚染がある」とみなす**。
  - **実験結果が「明らかに珍し過ぎる」と言えない**ときには、**「不検出 (ND)」と宣言**する[*8]。

一見するとまわりくどいようだが、直接「汚染がある」ということを示そうとするのではなく、逆に、「汚染がない」という仮定から出発するのが賢いところだ[*9]。そして、「珍し過ぎる」実験結果が出てしまったときには、「ものすごく珍しいことがおきたぞ！」と考えるのではなく、「こんな結果が出るということは、『汚染がない』という仮定は間違いだったのではないか」と考えよう（そして、「汚染あり」と宣言しよう）ということだ。こういうやり方をすることで、最初に書いたように、実際には汚染がないのに「濡れ衣」で「汚染がある」と判定してしまう可能性が低くできるのだ[*10]。

大事なことなので、具体例を用いてくり返し説明しよう。

まず、われわれは「抽選機は汚染されていない」つまり「抽選機の中には赤玉が 25 個ある」と**仮定**する。その上で、1 セットの実験の結果を見る。

たとえば、赤玉が 28 回出ていたとしよう。これは、仮定した 25 個よりは大きいが、上の表を調べてみると、さほど珍しい出来事ではない。これならば「明らかに珍し過ぎる」とは言えないので、「汚染がある」とは言わず、「不検出」を宣言する。

一方、1 セットの実験の結果として、赤玉が 50 回出ていたらどうか？　直感的にも、(抽選機の中の赤玉が 25 個と考えているので）これが「珍し過ぎる」出来事だわかるだろう。後で詳しく説明するが、実際、(抽選機が汚染されていないときに）赤玉がこれほど

[*8] ND は not detected の頭文字

[*9] 「汚染がある」ことを示そうと思うと、汚染度などを事前に想定する必要があるが、(なにしろ、われわれは汚染について何の情報も持っていないのだから）それはなかなか難しい。一方、このやり方なら汚染の詳細については考える必要がない。

[*10] 正確に言えば、(すぐ後で詳しく説明するが）この「濡れ衣の可能性」をどれくらい低くするかを自分で選ぶことになる。放射性物質の測定の場合は、この可能性を千分の 1 程度に選ぶ。その場合には、千回に 1 回くらいは、汚染がないのに「汚染がある」と誤って判定されるケースが生じうるということだ。

何回も出る可能性はきわめて低い。よって、この実験結果は「明らかに珍し過ぎる」と判断することになる。そして、「抽選機は汚染されている」と宣言するというわけだ。

■「不検出」ということの意味　上で説明したように、「『汚染がない』と仮定して実験結果を吟味し、『明らかに珍し過ぎる』と言えなかった」場合には、「不検出 (ND)」を宣言する。つまり、「不検出」というのは、「この方法では『汚染がある』とは言い切れない」という意味であり、「汚染がない」という意味ではないのだ。

だから、たとえ汚染があっても、汚染度があまり大きくなければ、検査（実験）の結果「不検出」とされる可能性もある。この点については、次の 1.4 節でもう少し詳しく見る。

■検出限界　「『汚染がない』と仮定して実験結果を吟味し、『明らかに珍し過ぎる』」ときには「汚染がある」と判断することを説明した。この考え方を実際に使うためには、どういうときに「明らかに珍し過ぎる」と考えるかを決めておく必要がある。

これは相当に難しい問題である。理屈の上では、どんな小さな確率の出来事だろうと生じる可能性はある。だから、「確率がこの値より小さければ『明らかに珍し過ぎる』とみなしてよい」といった絶対的な基準などはない。各々の「業界」（より正確には、扱う問題のタイプ）に応じて、「この値より小さければ珍しいとみなそう」という「業界標準」が定められていて、それに従って判断を下すことになっている。

図 2 に、汚染のない抽選機で 1 セットの実験をおこなったとき、赤玉が出た回数が様々な回数をとる確率を棒グラフで表わした。25 回を中心に、両側に広がりをもったグラフになっている。

ここで、赤玉が出た回数が 34 回以上になる確率を計算してみると、約 0.028 になる[*11]。これはだいたい 40 分の 1 くらい。小さいと言えば小さいが、まだそれほど小さくないとも言える[*12]。

一方、赤玉が出た回数が 39 回以上になる確率は、グンと小さくなって、約 0.0014 になる。これは、だいたい千分の 1 だから、かなり小さい。放射線計測など、「3σ の流儀」といわれる基準（2.3 節を参照）を使う分野では、このあたりを「珍し過ぎる」境目として採用する。われわれも、これに従うことにして、「赤玉が 39 回以上も出るのは珍し過ぎる」と考えることにしよう。

[*11] (2.1) の表式を使い、赤玉が 34 回出る確率から、100 回出る確率までをすべて足しあげる。能率的な計算法はないので、数値計算した。

[*12] 疫学など、「2σ の流儀（この言葉の意味は、2.3 節まで読むとわかる）」といわれる基準を使う分野では、このあたりを「珍し過ぎる」境目として採用する。つまり、この例ならば「赤玉が 34 回以上も出るのは珍し過ぎる」と判断する。

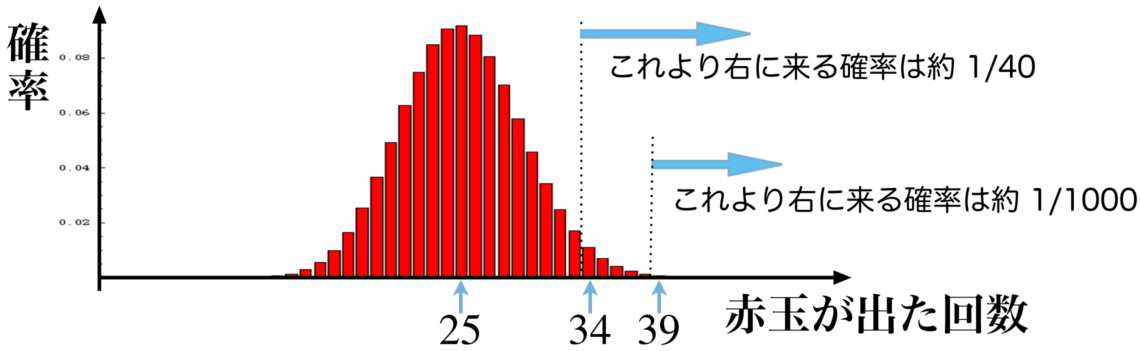

図 2　抽選機が汚染されていない（赤玉の個数は 25 個）とする。1 セットの実験（100 回の抽選）の後に「赤玉が出る」回数が横軸に示した値を取る確率を縦軸に示した。点線と矢印で表わしたように、「赤玉が出る回数」が 34 回以上になる確率は約 40 分の 1 であり、39 回以上になる確率は約千分の 1 である。

「赤玉が出る回数」が 39 回以上ということは、(1.3) で導入した「実験で得られた汚染度」は $39 - 25 = 14$ 以上ということになる。つまり、われわれの汚染の判定の基準は、1 セットの実験をおこなったとき、

- 「実験で得られた汚染度」が 14 以上なら「汚染あり」と判定
- 「実験で得られた汚染度」が 14 未満なら「不検出 (ND)」を宣言

ということになる。このように「汚染あり」と「不検出」の境目になる 14 を、（この例題での）汚染度の**検出限界**、あるいは、**検出下限**、**測定下限値**などと呼ぶ。

この言葉を使って一般的なルールを書いておけば、

> **「実験で得られた汚染度」が、「検出限界」以上なら「汚染あり」と判定し、「検出限界」未満なら「不検出」とする**

ということになる。

1.4　汚染が検出される確率

上の基準を使って実際に抽選機の汚染の判定をおこなったらどのような結果が得られるか、典型的な状況で考えてみよう。

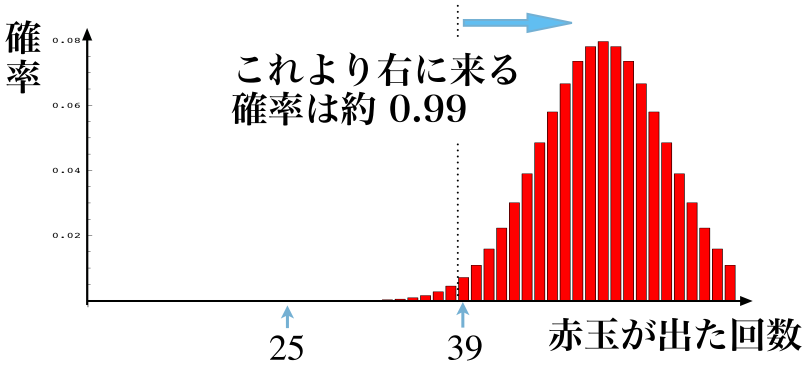

図 3　抽選機はたっぷりと汚染されていて、赤玉が 50 個入っている。1 セットの実験（100 回の抽選）の後に「赤玉が出る」回数が横軸に示した値を取る確率を縦軸に示した。点線と矢印で表わしたように、「赤玉出る回数」が 39 回以上になる確率は約 0.99 である。つまり、この抽選機で 1 セットの実験をおこなえば、99 パーセントの確率で「汚染あり」と判定される。

■汚染が大きい場合　まず、汚染がかなり大きい場合を見よう。たとえば、抽選機の中には赤玉が 50 個入っているとする。汚染度は $50 - 25 = 25$ と（検出限界の 14 と比べて）かなり大きい。

この抽選機について 1 セットの実験をおこなったとき、「実験で得られた汚染度」が検出限界の 14 以上になる（つまり、「赤玉の出た回数」が 39 回以上になる）確率は約 0.99 である（図 3 を見よ）。つまり、この抽選機は 99 パーセントの確率で「汚染あり」と（正しく）判定されるということだ。

言うまでもなく、抽選機の汚染度が高ければ高いほど「汚染あり」と判定される確率は高くなる。一般に、**汚染度が検出限界の 4 倍以上ならば、ほぼ確実に「汚染あり」と判定される**ことがわかっている。だから、ある汚染度以上のものを絶対に「見逃したくない」場合には、目標とする汚染度の 4 分の 1 以下の検出限界をもった測定器を用意する必要がある[*13]。

■汚染度が検出限界とほぼ等しい場合　次に、少し面白い場合として、抽選機の汚染度が検出限界（つまり、14）とちょうど等しい状況を考えてみよう。つまり、抽選機の中の赤

[*13] 一般食品の放射性セシウム検査では、検出限界が 25Bq/kg 以下の検出器を使うよう定められている。そうすれば、汚染が 100Bq/kg 以上の食品を「見逃してしまう」可能性はないと考えていいからだ。「汚染あり」と判定された食品については、より精度の高い測定をおこなって、汚染を正確に決定する。

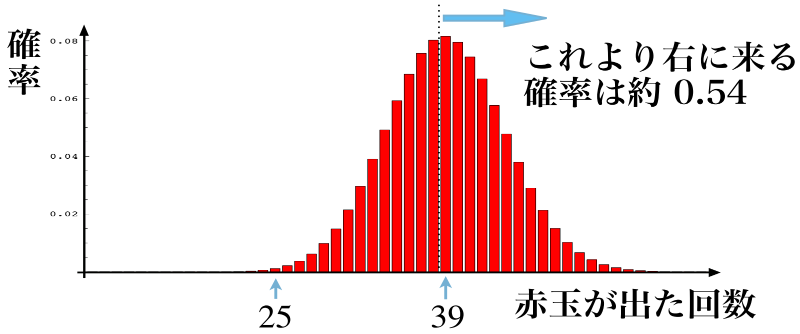

図 4　抽選機には赤玉が 39 個入っている。つまり、汚染度がちょうど検出限界と等しい状況である。1 セットの実験（100 回の抽選）の後に「赤玉が出る」回数が横軸に示した値を取る確率を縦軸に示した。点線と矢印で表わしたように、「赤玉出る回数」が 39 回以上になる確率は約 0.54 である。つまり、この抽選機で 1 セットの実験をおこなえば、ほぼ半々の確率で「汚染あり」あるいは「不検出」となる。

玉が 39 個ということだ。

ここでも、上と同様に、1 セットの実験をおこなったとき、「実験で得られた汚染度」が検出限界以上になる確率を計算すると、約 0.54 になる。つまり、ほぼ 1/2 である。

何がおきているのかは、図 4 を眺めてよく考えればわかると思う。この場合には、100 回の抽選のうち赤玉が 39 回出る確率がもっとも高い。ただし、「ゆらぎ」があるから、ほとんどの場合には「赤玉が出た回数」は 39 回からずれてしまう。「ゆらぎ」は回数を増やすこともあれば減らすこともあり、その割合はほぼ半々である。よって、「赤玉が出た回数」は、確率ほぼ 1/2 で 39 以上であり、確率ほぼ 1/2 で 39 未満になるということだ。

この例以外でも事情は同じだ。一般に、**汚染が検出限界とちょうど等しい場合には、ほぼ 1/2 の確率で、「汚染あり」あるいは「不検出」と判定される**。

汚染度が少し下がっても事情はほとんど変わらない。

たとえば、抽選機の汚染度が 13 だったとしよう。これは、検出限界の 14 よりも小さな値だ。しかし、この場合にも「赤玉の出る回数」の確率は図 4 とほとんど変わらない。赤玉が 38 回出る確率が最大になるので、（大ざっぱには）この図は左に 1 個分だけずらしたような形になる。実際、「汚染あり」と判定される確率を計算すると、約 0.46 になる。つまり、ほぼ 1/2 である。

「検出限界」あるいは「検出下限」という言葉を聞くと、「それよりも汚染が小さいものは、すべて『不検出』で素通りしてしまうのではないか」と思う人がいるようだが、そ

うではないのだ。

■汚染がない場合　最後に抽選機がまったく汚染されていない状況についてもう一度、考えておこう。

始めに説明したように、この場合、1 セットの実験をおこなったとき「赤玉が出た回数」が 39 回以上になる（つまり、「汚染あり」と判定される）確率は千分の 1 程度である。だから、実験を 1 セットあるいは数セットおこなう程度なら、「汚染あり」という判定が出る可能性は無視してしまってかまわない。

しかし、実験のセット数が多くなると話は変わってくる。たとえば、まったく汚染されていない抽選機が 1 万台あり、これら抽選機それぞれについて 1 セットずつの実験をおこなうとしよう。各々の抽選機が「汚染あり」と判定される確率はわずかに 1000 分の 1 だが、抽選機が 1 万台もあれば、そのうち 10 台くらいは「汚染あり」とされる計算だ。もちろん、抽選機はまったく汚染されていないから、これは純然たる「濡れ衣」である。

このような慎重な方法を用いても、「濡れ衣」を完全になくすことはできないのだ[*14]。

1.5　どれくらい汚染されているのかを知る — 定量限界

次に、二つ目の問題だった「汚染度」がどれくらいなのかを知ることについて、ごく簡単に見ておこう。

この問題について考えるための鍵になるのは (1.3) の関係だ。この式で ±(ゆらぎ) の部分を移項すると（大したことではないので、そういうのが好きでない人は気にしないでください）

$$(\text{汚染度}) = (\text{実験で得られた汚染度}) \pm (\text{ゆらぎ}) \tag{1.4}$$

という形になる。言葉で言えば、「本当の『汚染度』は、『実験で得られた汚染度』に『ゆらぎ』を足したり引いたりした範囲にある」ということだ。

「実験で得られた汚染度」が「ゆらぎ」と同じくらいの大きさだったら、「ゆらぎ」を足したり引いたりすると、値が倍近く変動してしまう。こういうときには、「実験で得られた汚染度」は数値としてはあまり意味はない。一方、「実験で得られた汚染度」が「ゆらぎ」よりもずっと大きければ、「ゆらぎ」を足したり引いたりしても大勢に影響はない[*15]。

[*14] ただし、「汚染あり」と判定された少数については、より精度の高い再測定をおこなえば、「濡れ衣」を晴らすことができる。

[*15] 仮に「ゆらぎ」が最大で 10 程度だったとしよう。「実験で得られた汚染度」が 20 なら、20 ± (ゆらぎ) は 10 から 30 の範囲を動く。20 と比べると、0.5 倍から 1.5 倍という大きな変動だ。一方、「ゆらぎ」が同じ 10 程度でも、「実験で得られた汚染度」が 100 なら、100 ± (ゆらぎ) が動く範囲は 90 から 110 で

つまり、**「実験で得られた汚染度」が「ゆらぎ」に比べて十分に大きければ、「実験で得られた汚染度」を「汚染度」の近似値として（ほどほどに）信頼してよい**ということになる。「『ゆらぎ』に比べて十分に大きい」ということの基準になる量を**定量限界**と呼んでいる。一般に定量限界は検出限界よりも大きい。定量限界を検出限界の $10/3 \fallingdotseq 3.3$ 倍に選ぶというのが一つの標準的なやり方のようだ。

定量限界という言葉を使って、上に書いたルールを書き直せば、

> **「実験で得られた汚染度」が「定量限界」以上であれば、「実験で得られた汚染度」を本当の「汚染度」の近似値とみなしてよい**

ということになる。

1.6　検出限界と定量限界を下げる方法

なるべく小さな汚染を検出し、汚染度をなるべく正確に知るためには、検出限界と定量限界を小さくする必要がある。抽選機の例で、どうすれば検出限界と定量限界を小さくできるかを簡単に見ておこう。

■「元々の赤玉の個数」を減らす　汚染の検出がややこしかったのは、抽選機の中にもともと 25 個の赤玉が入っているからだ。汚染のないとき抽選機の中には白玉だけが 100 個入っていたなら、汚染の検出はかなり簡単だ。何回か抽選して、1 回でも赤玉が出れば、それは抽選機が汚染されているという決定的な証拠になる。「濡れ衣」で「汚染あり」と判定してしまう心配はないのだ（もちろん、汚染を見逃す可能性は残る）。

この極端な例から類推できると思うが、抽選機の中にもともと入っている赤玉の個数が少なければ少ないほど、検出限界は（そして、定量限界も）小さくなる。

食品の放射線検査の場合には、「もともと入っている赤玉」は、「放射性セシウムによる汚染がないときの放射線源」に対応する。具体的には、装置の周囲にある様々な放射線源と、食品の中に含まれているカリウム 40 である。前者からの放射線は装置の遮蔽を工夫することで減らすことができる。一方、カリウム 40 の量をを減らすのは不可能だが、ゲルマニウム検出器のようにエネルギー分解能の高い検出器を使うとカリウム 40 からの放射線の寄与を小さくできる*16。

ある。100 と比べると、0.9 倍から 1.1 倍という小さめの変動になっている。

*16 残念ながら、その理由についてきちんと説明する余裕はない。申し訳ありません。早野氏の講演会スライド [1] に簡単な説明がある。

■抽選の回数を増やす　検出限界と定量限界を下げるためのもう一つの方法は抽選の回数を増やすことだ。

これまで、1 セットの実験で 100 回の抽選をおこなうとしてきた。これを増やして、たとえば、1 セットの実験で 400 回の抽選をおこなうとしよう。こうすると、各々の玉は平均で 4 回、抽選機から出てくることになる。よって、素朴に考えると、「赤玉が出た回数」を 4 で割ったものが「抽選機の中の赤玉の個数」に等しいということになる。これに対応して、「実験で得られた汚染度」についての (1.2) は、

$$(\text{実験で得られた汚染度}) = \frac{(\text{赤玉が出た回数})}{4} - 25 \tag{1.5}$$

のように変更される。

ここまでは当たり前だが、実は、この場合の「実験で得られた汚染度」の「ゆらぎ」は、今までの抽選回数 100 回の場合に比べると、ちょうど 1/2 になることがわかっている。それに対応して、検出限界も定量限界も 1/2 になる。

さらに、1 セットの実験での抽選回数を 100 回の 100 倍の 10000 回にすれば、「実験で得られた汚染度」の「ゆらぎ」はもとの 1/10 になり、検出限界も定量限界も 1/10 になる。

数式が嫌いでない人のために書いておくと、抽選回数を A 倍にしてやると、「ゆらぎ」と検出限界と定量限界が $1/\sqrt{A}$ 倍になるというのが一般的なルールだ。

抽選回数が多いと「ゆらぎ」が小さくなる理由については以下のように考えればよい。抽選を続けていれば、そのあいだに、たまたま赤玉が多めに出るときもあれば、たまたま少なめに出るときもあるだろう。ギャンブルで、たまたま「つきが回ってきたり」「つきが離れたり」するのと同じことだ。

抽選回数が少ないと、そういう「短期的なラッキー、アンラッキー」の影響が最終的な「赤玉が出た割合」にもろに反映してしまう。これが大きな「ゆらぎ」の原因だ。一方、抽選回数が多くなると、「短期的なラッキー、アンラッキー」が何度も何度も訪れるため、けっきょくはそれらの効果が打ち消し合う。そして、「赤玉が出た割合」「ゆらぎ」が小さくなると考えられる。

食品の放射線測定の場合には、1 セットの実験での抽選回数を増やすことは、測定の時間を長くすることに対応する。つまり、同じ測定器であっても、じっくりと時間をかければ、より精度の高い測定ができるということだ。ただし、2 倍の精度（つまり、1/2 の検出限界）を得るためには測定時間を 4 倍に、10 倍の精度を得るためには測定時間を 100 倍にする必要がある。

疫学の場合には、抽選回数を増やすことは、調査の対象となる人数を増やすことに対応する。言うまでもなく、これは通常は容易なことではない。

2 一般の場合

前節の内容を理解すれば、検出限界、定量限界の意味が正確にわかっていると言っていいと思う。ここでは、数式を見るのがイヤではない人のために、同じ話を一般的にしてくり返そうと思う。特に、3σ や 10σ といった「謎の言葉」の意味が気になる人は目を通すといいだろう。

2.1 問題設定

1 節と同じ抽選機を考えるのだが、話を少し抽象的にしよう。白玉、赤玉の個数を具体的に扱うのではなく、個数の比率に注目する。「抽選機の中の赤玉率」q を

$$q = \frac{(\text{抽選機の中の赤玉の個数})}{(\text{抽選機の中の白玉と赤玉の総数})}$$

と定義する。抽選機が与えられれば、もちろん、q は一つの値に定まっている。ただし、われわれは q の値を知らない。

特に、抽選機に汚染がない「標準状態」での「抽選機の中の赤玉率」を q_0 と書く（1 節の例では、汚染のないときの赤玉率 q_0 は $25/100 = 0.25$ だった）。「汚染」があると、「赤玉率」q は q_0 よりも大きくなる。この設定では、「赤玉率」の増加 $q - q_0$ を「汚染度」と呼ぶのが自然だ。この「汚染度」の定義は 1 節とは異なっているので注意。

1 セットの実験で N 回の抽選をくり返しおこなう。この際、1.1 節に述べた「抽選のルール」に従う。1 回の抽選で赤玉が出る確率は、「抽選機の中の赤玉率」q に等しい。

1 セットの実験で赤玉が出た回数を n とする。「赤玉が出た回数」n は定まった数ではなく、実験をおこなうたびに様々な値をとる。1 セットの実験で赤玉がちょうど n 回出る確率は、

$$(\text{赤玉が } n \text{ 回出る確率}) = \frac{N!}{n!\,(N-n)!}\, q^n\,(1-q)^{N-n} \tag{2.1}$$

となることが初歩の確率論からわかる[*17]。

[*17] $\dfrac{N!}{n!\,(N-n)!}$ は（日本の）高校数学で ${}_N\mathrm{C}_n$ と書く

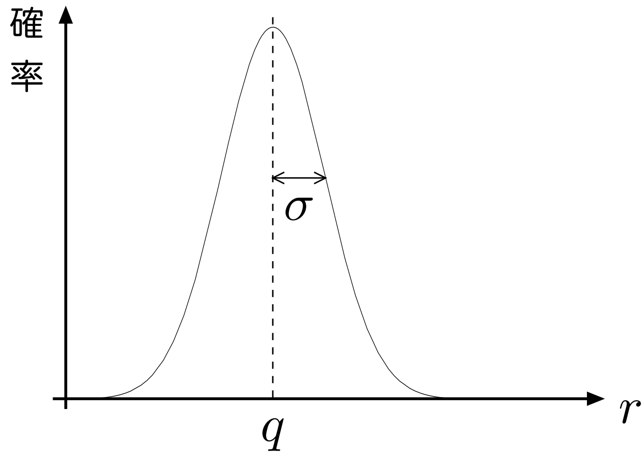

図 5　(2.2) 右辺の関数（正規分布、ガウス分布）の形。r が q に等しいところで最大になり、そこから両側に離れるに従って減っていく。全体の形は「ベル型」になる。標準偏差 σ が、ベルがどれくらい広がっているかを表わす。

以下の考察では回数 n そのものではなく、抽選回数 N で割った「赤玉が出た割合」$r = n/N$ を扱うほうが見通しがよい。この量を使えば、「実験で得られた汚染度」は $r - q_0$ と書ける。

われわれの目標は、**1 セットの実験から得られた r（あるいは汚染度 $r - q_0$）の値から、抽選機の汚染の有無について、また汚染度 $q - q_0$ の値について、信頼できる情報を引き出す**ことである。

2.2　正規分布とゆらぎ

話を先に進め、また、一般性を持たせるために、正規分布について説明する。

■正規分布　赤玉が n 回出る確率についての (2.1) を使えば、「赤玉が出た割合」がある値に等しくなる確率を求めることができる。特に、抽選回数 N が十分に大きいとき（だいたい N が 1000 以上くらいと思っていればいい）、「赤玉が出た割合」が r に等しい確率は、

$$(\text{「赤玉が出た割合」が } r \text{ に等しい確率}) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,N\,\sigma}\exp\Bigl[-\frac{(r-q)^2}{2\sigma^2}\Bigr] \tag{2.2}$$

と（かなり正確に）近似できることが知られている。(2.2) 右辺の関数を**正規分布**あるいは**ガウス分布**と呼ぶ[*18,*19]。

ここで、σ（ギリシャ文字のシグマの小文字）は分布の広がり具合を特徴づける正の定数で、**標準偏差**と呼ばれている。特に、今の抽選機の設定では、

$$\sigma = \frac{\sqrt{q - q^2}}{\sqrt{N}} \tag{2.3}$$

となる。たとえば、$q = 0.25$ なら $\sigma \simeq 0.433/\sqrt{N}$ である。

数式を見てもピンと来ない人は、図 5 のグラフでイメージをつかんでいただきたい。要するに、q を中心にして、σ で幅が決まっている、「ベル型」の関数ということだ。

少々しつこいが、混乱の多いところなので、状況をまとめておこう。「抽選機の中の赤玉率」q は（われわれは知らないけれど）抽選機を用意した時点で定まっている定数である。一方、「赤玉が出た比率」r のほうは、同じ抽選機を使ったとしても、1 セットの実験をおこなうたびに異なった値をとる。r の値はだいたい q に近いが、そのまわりで「ゆらぐ」のである。

標準偏差 σ には、**「赤玉が出た割合」r の「ゆらぎ」の典型的な大きさ**という意味がある。1.6 節で、抽選回数が N が大きければ大きいほど「ゆらぎ」が小さくなることを簡単に述べたが、(2.3) 右辺の分母の $\sqrt{N}$ は、そのことを明確に表わしている。

■分布の中心から離れた値をとる確率　正規分布 (2.2) の関数形を使うと、「赤玉が出る割合」r が「抽選機の中の赤玉率」q から大きくずれる確率を見積もることができる。たとえば、

[*18] There is a story about two friends, who were classmates in high school, talking about their jobs. One of them became a statistician and was working on population trends. He showed a reprint (論文の別刷り、リプリント) to his former classmate. The reprint started, as usual, with the Gaussian distribution and the statistician explained to his former classmate the meaning of the symbols for the actual population, for the average population, and so on. His classmate was a bit incredulous and was not quite sure whether the statistician was pulling his leg ("pull his leg" = かれをかつぐ、だます). "How can you know that?" was his query. "And what is this symbol here?" "Oh," said the statistician, "this is π." "What is that?" "The ratio of the circumference of the circle to its diameter." "Well, now you are pushing your joke too far," said the classmate, "surely the population has nothing to do with the circumference of the circle." (From "The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences" by Eugene Wigner.)

[*19] 「自分の知っている公式とは違って分母に N がある」と気づいた人は、「著者にミスの指摘のメールをしよう」と考えずに、なぜこうなっている（べき）か考えてほしい。

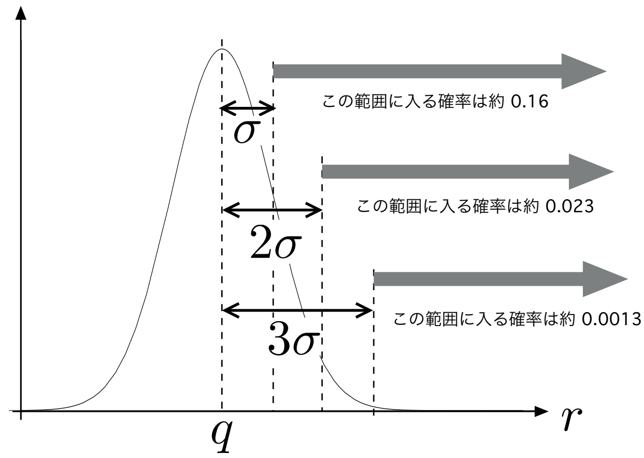

図 6　r が正規分布に従うときの、r が q から離れた値をとる確率。

- r が $q+\sigma$ 以上になる確率は、約 0.16
- r が $q+2\sigma$ 以上になる確率は、約 0.023
- r が $q+3\sigma$ 以上になる確率は、約 0.0013

となる。これらの結果は、q, σ の具体的な値にはよらず、いつでも正確に正しい。ここから、「r が q からどれくらい離れているか」を見るためには、σ を「単位」にして測るのが便利だとわかるだろう（図 6）。

2.3　検出限界

■汚染の判定と検出限界　抽選機が汚染されているかどうかを調べる方法を見よう。以下では、抽選回数 N は（実験装置の設定などによって）定まっていて変化しない（大きな）数とする。

汚染のないときは「抽選機の中の赤玉率」q は q_0 である。「汚染」されているかどうかわからない抽選機があり、ここで N 回の抽選を行なって、「赤玉が出る割合」r を求める。この r の値を見て、抽選機が汚染されているかを判定したい。

考え方は、1.3 節で詳しく述べたとおりだ。まず、抽選機は汚染されていなかったと仮定する。それを認めれば、「赤玉が出る割合」が r になる確率は、(2.2) で、$q=q_0$ とした式で表わされる。そして、実験で得られた r の値が「明らかに珍し過ぎる」なら、実は（仮定は誤りで）抽選機は汚染されていたと判定する。

何をもって「明らかに珍し過ぎる」とするかがデリケートで難しいことを 1.3 節で述

べた。ここでは、放射線計測の「業界標準」に従って、r が q_0 から 3σ 以上離れていたら[*20]、そのような r は「明らかに珍し過ぎる」と判断することにしよう[*21]。

上で述べたように、r が $q_0+3\sigma$ 以上になる確率は、約 0.0013、つまり、だいたい千分の 1 だ。これくらい小さい確率ならば「普通は生じない」と考えようということである[*23]。

まとめれば、この状況での汚染の判定基準は次のとおり。N **回の抽選から求めた「赤玉が出る割合」**r **が** $q_0+3\sigma$ **以上であれば**（ただし、σ は $q=q_0$ に対応する σ)、**この抽選機は汚染されている**（q は q_0 より大きい）**と判断する。逆に、**r **が** $q_0+3\sigma$ **未満であれば、汚染があるとは言えないので「不検出」とする**。

q_0 は標準の比率なので、上乗せの 3σ が、汚染度の**検出限界**、あるいは、**検出下限**、**測定下限値**である。

■確率についての注意　最後に、多くの読者が混乱するだろうことを覚悟の上で、やや難しい注意を書いておく。初めて学ぶ人はよくわからないと思うが、実は本質的な点なので、きちんと理解したい人は真面目に考えてほしい。

「抽選機が汚染されていないとき、r が $q_0+3\sigma$ 以上になる確率は約 0.0013」というのが、上で説明した判定基準のもとになる事実だった。これを裏返せば、「r が $q_0+3\sigma$ 以上ならば、$1-0.0013=0.9987$ の確率で、抽選機が汚染されていると言える」という話に

---

*20 (2.3) からわかるように、標準偏差 σ の値は q（と N）に応じて変わる。ここで言っているのは、(N はもともと定まっており）$q=q_0$ としたときの σ のことである。以下でも、σ はこの定数を意味する。なお、実際の応用の現場では、σ の q（に相当するパラメターへの）依存性を気にしないでいいことも多いようだ。

*21 ただし、この「標準」は普遍的なわけではなく、分野や問題のタイプに応じて変わってくる[*22]。放射性物質の測定に限っても、3σ ではなく、2σ や 3.29σ を使う別の流儀もある（疫学では、だいたい 2σ を用いるようだ)。ただし、厚生労働省の「食品中の放射性セシウムスクリーニング法」という文書 [2] には「測定下限値」(内容をみると「検出限界」と同じ意味）を 3σ にとると明記されているので、少なくとも国内の食品中の放射性物質の測定については 3σ で統一されている（あるいは、統一されていく）と期待する。

*22 「明らかに珍し過ぎる」とみなす境目の確率は、「汚染がないのに誤って汚染と判定してしまう確率」と言い換えてもいい。(N を一定にするかぎり）この確率を小さくとればとるほど、検出限界は大きくなる。逆に、検出限界を小さくしようとすれば、この（誤りをおかす）確率は大きくなる。ここにも、トレードオフの関係（「あちらを立てれば、こちらが立たず」）がある。

　なお、「標準」が問題のタイプに応じて変わるのは、必ずしも「いい加減」な話ではない。問題にしている主張（今の場合なら「汚染がない」）がそもそも成立していると考える根拠がどれくらい強いか、また、その主張が成立しないことがどれくらい「大事（おおごと）」か、一般に実験（測定）を何セットくらいおこなうのか、といった要因から「標準」が定まる（あるいは、定まるべきだ）と私は考えている。

*23 千分の 1 というのは、だいたい、サイコロを 5 回投げたらすべて同じ目が出る確率である。5 回も続けて同じ目が出たら「すごく珍しいことがおきたぞ！」と思うよりは、サイコロに細工があるのではと疑うほうが合理的だとするのと同等の判定基準だと言ってもいい。

なりそうだ[*24]。しかし、ちゃんと考えてみると、そうではない。

もう一度 0.0013 の意味をふり返ると、「仮に汚染がないと仮定したとき、こんな大きな r が出る確率は 0.0013 だ」という話だった。確率を考える前提が「汚染がない」であることに注意しよう。一方、上の（誤った）考えでは、「$q_0 + 3\sigma$ 以上の r が得られた」ことを前提にして、「汚染がある」確率を議論している。そもそも、考えている大枠の前提が違うので、確率の比較のしようもないのだ。

では、われわれが知りたい「r が $q_0 + 3\sigma$ 以上だとしたとき、抽選機が汚染されている確率」はいくつなのだろう？　実は、「わからない」というのが正解なのだ。そもそも、何らかの出来事の確率を議論するためには、考えている状況を確率論の言葉でモデル化しなくてはならない。基本的な出来事がどれくらいの確率で生じるかということを明確に規定して、ようやく複雑な出来事の確率を議論できるのだ。「汚染がない」と仮定したときは、それによって、$q = q_0$ の抽選機を考えることになり、確率論のモデルがしっかりと定まった。だから、様々な r の値が得られる確率も計算できたのだ。ところが、「N 回抽選したところ r が $q_0 + 3\sigma$ 以上だった」ということだけを教えられても、抽選機をどのような確率モデルで記述していいかはわからない。確率を考えるための前提がそろわないのである[*25]。

2.4　汚染が検出される確率

様々な汚染度の抽選機について 1 セットの実験で汚染が検出される確率を 1.4 節で見た。1.4 節の議論は、ほぼそのまま、この節の設定にあてはまるので、以下ではごく簡単に見ておこう。

■汚染度がちょうど 3σ の場合　まず、汚染度がちょうど検出限界の 3σ と等しい場合を考えるといい。つまり、「抽選機の中の赤玉率」q が $q_0 + 3\sigma$ ということだ。

この状況で、「赤玉が出る割合」が r に等しくなる確率は、図 7 のようなベル型の曲線になる。重要なのは、$r = q_0 + 3\sigma$ を中心にした左右対称の曲線だということだ。そのため、「赤玉が出る割合」r を測定すると、$q_0 + 3\sigma$ 以上になる確率と、$q_0 + 3\sigma$ 以下になる確率が、どちらも 1/2 ということになる[*26]。

[*24] 実際、いい加減な解説や新聞記事などには、たいてい、こういうことが書いてある。

[*25] それでも、「r が $q_0 + 3\sigma$ 以上ならば、抽選機が汚染されている『可能性（確率）は高い』」とわれわれが信じているのは確かだ。では、こういう状況での「確率」についてどう考えるか — という話を始めるといくらでも長くなるし、私自身、完全には消化できていないので、難しい話はこれくらいでやめておこう。

[*26] r がピタリと $q_0 + 3\sigma$ と一致する場合があればこれは微妙に違うのだが、N が大きいときには、その「ず

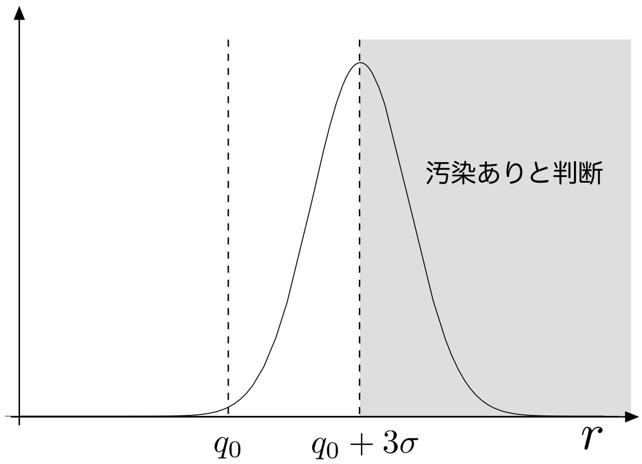

図 7　ちょうど検出限界と同じレベルに汚染されて $q=q_0+3\sigma$ となった抽選機で「赤玉が出る割合」が r となる確率（脚注 *20 で注意したように、σ は $q=q_0$ に対応する標準偏差)。ベル型の曲線のちょうど半分が汚染が検出される領域に、残りの半分が汚染が検出されない領域に入っている。

われわれは r が $q_0+3\sigma$ 以上ならば「汚染がある」と判定し、そうでなければ「汚染があるかどうかわからない（不検出)」と宣言する。よって、この場合には、半々の確率で、「汚染がある」あるいは「不検出」と結論することになる。確率 1/2 で、汚染は「見逃される」のだ。これは、回転式抽選機の例にかぎった話ではなく、検出限界についての一般的な事実である[27]。

■他の汚染度の場合　これ以外の汚染度の場合も同じように考えればいい。

汚染が 3σ よりも小さいなら、図 7 のベル型の曲線を左にずらせばいい。汚染が見逃される確率はさらに高くなる。逆に汚染が 3σ より大きいなら、ベル型を右にずらす。少しだけずらした場合は、相変わらず、汚染が見逃されてしまう確率はほどほどにある。

汚染度が検出限界を超えてずっと大きくなれば、汚染が見逃される確率は急激に小さくなっていく。実際、抽選機の汚染度が 3σ よりもずっと大きいときには、図 8 のような状況になり、r はほとんどの場合に $q_0+3\sigma$ よりも大きい値をとる。この場合には、抽選機の汚染はかなり確実に検出される。

れ」はまったく問題にならない。

[27] たとえば、放射性セシウムの検出限界が 25 Bq/kg の装置で、放射性セシウムによる汚染がちょうど 25 Bq/kg の牛肉を測定したら、確率 1/2 で不検出になる（残りの確率 1/2 で、25 Bq/kg より大きい様々な数値が得られる)。

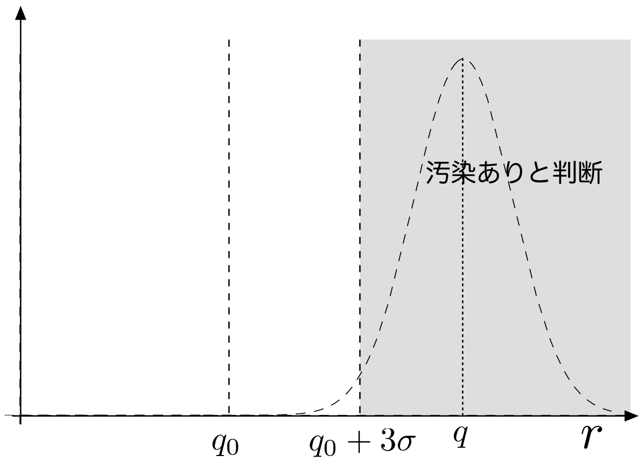

図 8　汚染度 q が検出限界の 3σ よりも十分に大きい状況（脚注 *20 で注意したように、σ は $q=q_0$ に対応する標準偏差）。この場合は、1 に近い確率で（つまり、ほとんどの場合に）「汚染あり」と判定される。

1.4 節でも述べたように、たとえば 100 Bq/kg の汚染を確実に検出するためには、その 4 分の 1 の 25 Bq/kg を検出限界に持つ検出器を用いることになっている。

さらに、汚染がまったくない場合にも、約 0.0013 の確率で「汚染あり」と判定されることも 1.4 節で説明した通りだ。

2.5　定量限界

「赤玉が出る割合」をもとに抽選機の「汚染度」を推測する問題について考えよう。1.5 節でも議論した定量限界の問題だ。

基本的な考え方は 1.5 節での簡単な説明に尽きているので、ここでそれ以上に踏み込むことはしない[*28]。また、（後で説明するが）日本での食品中の放射性物質の計測では定量限界は大ざっぱに扱われているようなので、あまり深入りする必要はないと思う。

1 セットの実験で「赤玉が出た割合」r が得られたとしよう。このとき、$r-q_0$ は「汚

[*28] 気になる人のために、よりしっかりとした扱いの概略を説明しよう。基本的なアイディアは検出限界の場合と同じだ。まず、実験を行なうと r の値が得られる。そうしたら、適当な q の値を仮定し、その仮定のもとで得られた r の値が「珍し過ぎる」かどうかを検討する。「珍し過ぎる」という結論がでたら、そのような q の値は候補から外す。同じことを様々な q の値について行なって、残ったものが q の値の候補だと考える。こうして、実験結果の r をもとにして、考えられる q の値の範囲（信頼区間と呼ばれる）が得られる。

染度」$q-q_0$ の近似値になると期待される。ただし、これが近似値としてどの程度信頼できるかは、$r-q_0$ の大きさによる。

たとえば、$r-q_0$ が 2σ 程度だったらどうだろう？　このときにも「汚染度はだいたい 2σ くらい」と言いたくなるが、それはダメだ。そもそも「汚染がある」というためには、$r-q_0$ は 3σ 以上でなくてはいけない。これが 2σ では、汚染があるという判定さえもできないのだから、汚染度がいくらかといった話ができるわけがない。

よって、$r-q_0$ が十分に大きいときにだけ、$r-q_0$ が汚染度の近似値として意味をもつことがわかる。どれくらい大きければいいかというところには、色々と考え方や流儀があるようだ。一つのわかりやすい標準となっているのは、

$r-q_0$ が 10σ よりも大きければ、$r-q_0$ は汚染度の近似値として意味を持つ

という基準だ。この 10σ を**定量限界**あるいは**定量下限**と呼ぶ。検出限界の 3σ のさらに、3 倍強の大きさに設定してある。

3　食品の検査結果について

最後に、ごく簡単な「応用編」として、食品中の放射性セシウムの検査結果をどう見るかということを取り上げよう。

抽選機の例題と、食品の放射性セシウム検査の対応関係は 1.1 節で簡単にまとめたが、ここでもふり返っておこう。まず、「一つの抽選機」に対応するのは「一つの食品（たとえば、米袋一つ）」である。「汚染されていない抽選機の中の赤玉の個数」または「汚染されていない抽選機の赤玉率 q_0」に対応するのは、「食品が放射性セシウムに汚染されていないときの放射線源」である。これは、主に、測定装置の周辺の放射線源と食品中の放射性カリウムである。これらの寄与をどうやって見積もるかは、ややこしい話になるので、ここでは省略する[*29]。そして、「抽選機の汚染度」に対応するのは、もちろん、「放射性セシウムによる食品の汚染」である。

「一つの抽選機についての 1 セットの実験」が「一つの食品（たとえば、米袋一つ）についての 1 回の測定」に対応する。「赤玉が出た回数」または「赤玉が出た比率 r」に対応するのは、「（あるエネルギーの範囲の）放射線のカウント数」だと言っていいだろう。そして、最終的な実験結果である「実験から得られた汚染度」に対応するのが、（カウント

[*29] たとえば、早野氏のスライド [1] の 51, 52 枚目、解説書 [4] の 92 ページ以降に説明があるが、ちょっと難しいかもしれない。

数から汚染がない場合のカウント数を差し引いた結果から換算して得られる）「食品中の放射性セシウムの量の測定値（単位は Bq/kg が一般的）」である。

この場合にも（いろいろと余分に考えるべきことはあるが）食品が放射性セシウムに汚染されていないときの標準偏差 σ を求めることができる。それをもとに 3σ を検出限界と定める。

さらに 10σ を定量限界と定めたいところだが、日本での食品中の放射性物質の計測には、「定量限界は 10σ」という考えは浸透していないようだ。そもそも定量限界（定量下限）という概念を採用していないようだし、定量限界（定量下限）という言葉を使うときにも検出限界（検出下限）と同じ意味で使っているようだ[*30]。一方、検出限界（検出下限）は（前述のように）3σ とすることは「標準」として受け入れられているので、けっきょく、**検出限界も定量限界もまとめて 3σ にしている**ということだろう。

しかし、「放射性セシウムの測定値」が 3σ をわずかに越えた程度では、もともとの汚染度は（ごく大ざっぱには、(測定値) $+\,\sigma$ から (測定値) $+\,5\sigma$ くらいの）幅広い範囲に入っている可能性がある。このようなときには、発表されている検査結果の数値をあまり信頼してはいけない。

具体的な数値を見よう。食品中の放射性セシウムの検査結果は、次の表のような形で発表される[*31]。放射性セシウムの量の単位は Bq/kg である。

品目	生産市町村名	セシウム 134	セシウム 137
牛肉	XXX	検出せず (<7.4)	検出せず (<7.3)
牛肉	XXX	検出せず (<7.8)	検出せず (<6.1)
牛肉	XXX	8.26	17.7

「検出せず」の括弧の中にある数字は検出限界である。「検出せず」を省略して、検査結果を単に「<7.4」のように表記することも多い。

「検出せず」の意味については、すでに詳しく解説したとおりだ。たとえば、検出限界が 7.4 Bq/kg で「検出せず」だった場合、10 Bq/kg 程度より小さい汚染が見逃されている可能性はある。しかし、たとえば、25 Bq/kg 以上の汚染が見逃されてしまうという可

[*30] たとえば、厚生労働省の「食品中の放射性物質の検査結果について」という文書 [3] には「検出下限」と「定量下限値」という用語が出てくるのだが、内容を見ると、両者を同じ意味で用いているとしか考えられない。

[*31] われわれがデータを見る際には、奥村晴彦氏による厚生労働省の「食品中の放射性物質の検査結果について」のデータ検索ページ [5] が便利だ。

能性はほとんどない。

表の 3 行目のように具体的な数値が書いてある場合には、結果の解釈に注意がいる。数値があるということは、たとえば 17.7 Bq/kg という検出結果が検出限界よりも大きかったということだ。だから、この場合には**牛肉に放射性セシウムが含まれていたことはほぼ確実**である。

ただし、表にある具体的な数値がどこまで信頼できるかを評価するためには、この測定をした際の検出限界の情報が必要だ。しかし、上の表の例のように、検出限界を明記せずに結果の数値だけを発表することが多いようだ。これはいささか不便だ。

上の表の例では、同じ市町村から複数の結果が出ているので、検出限界は同程度だろうと推測できる。セシウム 134 もセシウム 137 も、検出限界は 7 Bq/kg 程度だろう。これが 3σ なら、10σ は 20 Bq/kg よりも少し大きいくらいになる。セシウム 134 の 8.26 Bq/kg は、あまりにも小さく、数値そのものを信頼することはできないと考えられる。セシウム 137 の 17.7 Bq/kg は少しましだが、10σ よりは少し小さいので、ほどほどに信頼できるというところだろうか。

参考文献

[1] 早野龍五、連続講演会「放射線について『知って・測って・伝える』ために」第 2 回「福島のデータを見て考えよう」講演スライド
`http://www.slideshare.net/RyuHayano/2-14367722`

[2] 厚生労働省「食品中の放射性セシウムスクリーニング法」
`http://www.mhlw.go.jp/stf/houdou/2r985200000246ev-att/2r985200000246iu.pdf`

[3] 厚生労働省「食品中の放射性物質の検査結果について」
`http://www.mhlw.go.jp/stf/houdou/2r9852000001q51k-att/2r9852000001qjsv.pdf`

[4] 鳥居寛之、小豆川勝見、渡辺雄一郎「放射線を科学的に理解する — 基礎からわかる東大教養の講義」(丸善、2012 年)

[5] 奥村晴彦「食品の放射能データ検索」
`http://oku.edu.mie-u.ac.jp/food/`