

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	数学 II	2015年7月24日	金	2	田崎

答えだけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答えだけでもいいが）。解答の順番は（0番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2016年1月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. これは冒頭に書くこと。 レポートの提出や修正の状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、今日的答案にはさんで提出すること。

1. $m > 0, t_0 > 0, f_0$ を実定数とする。次元運動のニュートン方程式

$$m \frac{d^2}{dt^2} x(t) = \begin{cases} f_0(t_0 - t), & 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & t \geq t_0 \end{cases}$$

の一般解を求めよ。ただし、任意定数として $x(0)$ と $v(0) := \dot{x}(0)$ を使え。

2. γ, α, β を実定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt} x(t) = -\gamma x(t) + \alpha + \beta t \quad (1)$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

- (a) $\alpha = 0, \beta = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。
- (b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{ps}(t) = A + Bt$ と書けるものを求めよ (A, B は求めるべき定数)。
- (c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

3. α, β を正の定数とする。以下の常微分方程式の一般解を求めよ ((a) では $x(t) > 0$ とする)。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

$$(a) \frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha \sin(\beta t)}{x(t)} \quad (b) \frac{dx(t)}{dt} = (\alpha + \beta t) (1 + \{x(t)\}^2) \quad (2)$$

4. α, β, γ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha t x(t) + \beta \exp\left[\frac{\alpha}{2} t^2 - \gamma t\right] \quad (3)$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t) \exp[(\alpha/2)t^2]$ と書き、 $C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(3) の一般解を求めよ。任意定数を $x(0)$ によって表せ。

5. x, y 軸の回りの θ の回転はそれぞれ $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$

という行列で表わされる。「 x 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと y 軸回りに $\pi/2$ の回転」および「 y 軸回りに $\pi/2$ 回転したあと x 軸回りに $\pi/2$ の回転」を表わす行列を求めよ。また、点 $(a, 0, 0)$ がそれぞれの回転でどの位置に移されるかを求めよ。

6. 計算せよ。

$$(a) \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2}i \\ 2 - \sqrt{3}i \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2}i \\ 2 - \sqrt{3}i \\ 2 + \sqrt{3}i \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 & -2 & 0 \\ 20 & -8 & 9 \\ -10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$
$$(c) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (d) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 \end{pmatrix}$$

7. A, B, C を（複素数を成分にもつ）任意の $d \times d$ 行列とし、それぞれの i, j 成分を $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ と書く。積 AB の i, j 成分をもとの行列の成分と和の記号を使って表わせ。また、 $(AB)C$ の i, j 成分をもとの行列の成分と和の記号を使って表わせ。

$A(BC)$ についても同様の考察をし、等式

$$(AB)C = A(BC) \quad (4)$$

が成り立つことを証明せよ。