数学 II

2023 年 7 月 28 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい)。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n = 1, 2, 3, 4$)。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと)。2 学期になったら答案を受け取りに来ること。2023 年 10 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

1. $m > 0$, $t_0 > 0$, f_0, f_1, a を実定数とする。一次元運動のニュートン方程式

$$m\,\frac{d^2}{dt^2}x(t) = \begin{cases} f_0, & 0 \le t \le t_0 \\ f_1, & t \ge t_0 \end{cases}$$

を、初期条件を $x(0) = a$, $v(0) := \dot{x}(0) = 0$ として解け。$x(t)$ だけを答えればよい。なお、$t = t_0$ では $x(t)$ の二階微分は不連続だが、$\dot{x}(t)$ と $x(t)$ は連続とする。

2. α, β, γ を正の定数とする。常微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = \alpha\, x(t) + \beta\, e^{-\gamma t} \tag{1}$$

の一般解を以下の手順にしたがって求めよ。

(a) $\beta = 0$ とした斉次の常微分方程式の一般解を求めよ。

(b) 微分方程式 (1) の特解で $x_{\mathrm{ps}}(t) = A\, e^{-\gamma t}$ と書けるものを求めよ（A は求めるべき定数)。

(c) (a) と (b) での解を足して (1) の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$ を用いて表わせ。

3. α, β, γ を定数とし、常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \alpha\, t^2\, x(t) + \beta\, \exp\left[\frac{\alpha}{3}\, t^3 + \gamma t\right] \tag{2}$$

を次の手順（定数変化法）で解け。

(a) 解を $x(t) = C(t)\, \exp\left[\frac{\alpha}{3}\, t^3\right]$ という形に書き、$C(t)$ が満たす微分方程式を求めよ。

(b) $C(t)$ についての微分方程式の一般解を求め、(2) の一般解を求めよ。任意定数は初期値 $x(0)$ で表わせ。

α, β を正の定数とする。$t \geq 0$ について以下の常微分方程式の一般解を求めよ（(c) では $x(t) > 0$ とする）。任意定数として初期値 $x(0)$ を使え。

(c) $\dfrac{dx(t)}{dt} = \dfrac{\alpha\, \cos(\beta t)}{x(t)}$ (d) $\dfrac{dx(t)}{dt} = (\alpha + \beta t^2)\left(1 + \{x(t)\}^2\right)$ (3)

4. 一般の $d \times d$ 行列 A の i, j 成分を $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ と書く。以下ではこの成分を用いて解答すること。

(a) $(\mathsf{A}^\dagger \mathsf{A})_{i,j}$ を求めよ。できる限り和の記号（$\sum$ のこと）を用いること。

(b) $\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^\dagger \mathsf{A}] \geq 0$ を証明せよ。

(c) $\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^\dagger \mathsf{A}\mathsf{A}\mathsf{A}^\dagger] \geq 0$ を証明せよ。

以下の計算をせよ（答えは結果だけでよい）。

(d) $\begin{pmatrix} 3+\sqrt{5}\, i \\ \sqrt{5} - i \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 4+\sqrt{5}\, i \\ \sqrt{5} + 2\, i \end{pmatrix}$ (e) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (g) $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & y & 1 \end{pmatrix}$

(h) $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ (i) $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$