量子力学 II

2023 年 8 月 1 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n = 1, 2, 3, 4$）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。2 学期になったら答案を受け取りに来ること。2023 年 10 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

1.　1 次元の長さ L の区間上の 1 粒子の量子力学を考える。空間の座標 x は、$0 \le x \le L$ を満たす。

ある瞬間での粒子の状態が波動関数

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\,\sin\Bigl(\frac{2\pi}{L}\,x\Bigr) \tag{1}$$

で表わされるとする。

(a) 位置演算子を $\hat{x}$、運動量演算子を $\hat{p}$ と書く。状態 (1) に関する期待値 $\langle\hat{x}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{x}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{p}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$, $\langle\hat{p}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}}$ を求めよ。

(b) 上で求めた期待値を使って、位置のゆらぎ $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}[\hat{x}] := \sqrt{\langle\hat{x}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}} - (\langle\hat{x}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}})^2}$ および運動量のゆらぎ $\sigma_{\boldsymbol{\varphi}}[\hat{p}] := \sqrt{\langle\hat{p}^2\rangle_{\boldsymbol{\varphi}} - (\langle\hat{p}\rangle_{\boldsymbol{\varphi}})^2}$ を求めよ。その結果を不確定性原理の観点から考察せよ。

2.　$\hat{\boldsymbol{r}} = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$, $\hat{\boldsymbol{p}} = (\hat{p}_{\mathrm{x}}, \hat{p}_{\mathrm{y}}, \hat{p}_{\mathrm{z}})$ を 3 次元での位置演算子、運動量演算子とする。角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}} := \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$ と定義する。位置演算子と運動量演算子の交換関係は既知として用いてよい。

交換子 $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, (\hat{p}_{\mathrm{x}})^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, (\hat{p}_{\mathrm{y}})^2]$, $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, (\hat{p}_{\mathrm{z}})^2]$ および $[\hat{L}_{\mathrm{x}}, \hat{\boldsymbol{p}}^2]$ を求めよ。ただし、$\hat{\boldsymbol{p}}^2 := (\hat{p}_{\mathrm{x}})^2 + (\hat{p}_{\mathrm{y}})^2 + (\hat{p}_{\mathrm{z}})^2$ である。

3. 粒子の質量を m とし、ω を正の定数とする。3 次元の調和振動子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x,y,z) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2+z^2)\,\psi(x,y,z) = E\,\psi(x,y,z) \qquad (2)$$

のエネルギー固有状態を極座標で $\psi(x,y,z) = R(r)\,Y_1^m(\theta,\varphi)$ と書くと、$R(r)$ は

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2}\right\}R(r) + \frac{m\omega^2}{2}r^2\,R(r) = E\,R(r) \qquad (3)$$

を満たす。$Y_1^m(\theta,\varphi)$ は $\ell = 1$ の球面調和関数であり、具体的には

$$Y_1^1(\theta,\varphi) = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,e^{i\varphi}, \quad Y_1^0(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta,$$
$$Y_1^{-1}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,e^{-i\varphi} \qquad (4)$$

である。

(a) (3) には $a > 0$ を定数として $R(r) = r\,\exp[-a\,r^2/2]$ という形の解があることを示し、a とエネルギー固有値 E を求めよ。

(b) 上の $R(r)$ と (4) の Y_1^1, Y_1^0, Y_1^{-1} それぞれに対応するエネルギー固有状態 $\psi(x,y,z)$ を x, y, z で表わせ。定数 a は a のままでもよい。

(c) 上で求めたエネルギー固有値はちょうど三重縮退しているので、(b) で全てのエネルギー固有状態が求められたことになる。なぜ三重縮退と言えるか？ (2) が三つの 1 次元の調和振動子のシュレディンガー方程式に分解できることに注意して説明せよ。

4. 単独の（大きさ 1/2 の）スピン角運動量演算子を行列表示で、

$$\hat{S}_{\mathrm{x}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{y}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_{\mathrm{z}} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

と表わす。

(a) $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{z}}$ および $\hat{S}_{\mathrm{z}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を計算し、交換子 $[\hat{S}_{\mathrm{x}}, \hat{S}_{\mathrm{z}}]$ および $\hat{S}_{\mathrm{x}}\hat{S}_{\mathrm{z}} + \hat{S}_{\mathrm{z}}\hat{S}_{\mathrm{x}}$ を求めよ。

実定数 θ について $\hat{S}_{\theta} = \cos\theta\,\hat{S}_{\mathrm{z}} + \sin\theta\,\hat{S}_{\mathrm{x}}$ とする。また、$|\varphi\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ という状態を考える。

(b) $\hat{S}_{\theta}$ の固有値を全て求めよ。

(c) $|\varphi\rangle$ が $\hat{S}_{\theta}$ の固有状態であることを示し、対応する固有値を求めよ。

(d) 状態 $|\varphi\rangle$ において $\hat{S}_{\theta}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(e) 状態 $|\varphi\rangle$ において $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。