

試験問題		試験日	曜日	時限	担当者
科目名	量子力学 III	2016年1月27日	水	2	田崎

答だけではなく、考え方や計算の筋道を簡潔に書くこと（単純な計算問題は答だけでもいいが）。解答の順番は（0番以外）自由。解答用紙の裏面も使用してよい。試験後、答案を受け取りにくること。2016年9月を過ぎたら、答案を予告なく処分する。

0. これは冒頭に書くこと。 レポートの提出状況を書け（冒頭に何も記述がなければ、レポートは提出していないとみなす）。レポートは、返却済みのものも新規のものも、答案といっしょに提出すること。

1. 角運動量の合成の問題。大きさ1と大きさ1/2の角運動量を合成しよう。講義と同じ記法を使う場合、記号の細かい定義をする必要はない。きちんと定義してあれば、講義とは別の書き方を使ってもかまわない。説明等は最小限でよい。

合成した角運動量演算子を $\hat{\mathbf{J}} = (\hat{J}_x, \hat{J}_y, \hat{J}_z)$ とする。 $(\hat{\mathbf{J}})^2$ の固有値を $J(J+1)$ と書き、 \hat{J}_z の固有値を J_z と書く。また、対応する同時固有状態を Φ_{J,J_z} と書く。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、 J_z のとりうる値を求めよ。

(b) J, J_z に対応する規格化された同時固有状態を Φ_{J,J_z} と書く。 J, J_z のとりうる全ての値について、 Φ_{J,J_z} を合成前の角運動量の固有状態（正確に言えば、角運動量の大きさと z 成分が確定した状態）を使って表わせ。

なお、角運動量の固有状態についての一般公式

$$\varphi_{j,m} = \frac{1}{\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}} \frac{1}{\hbar} \hat{J}_- \varphi_{j,m+1} \quad (1)$$

を証明なしで用いてよい。

2. 摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

1次元の区間 $[0, L]$ での自由粒子のシュレディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi''(x) = E \varphi(x) \quad (2)$$

を考える。周期的境界条件 $\varphi(x+L) = \varphi(x)$ を課す。

この系の基底状態 $\varphi_0(x)$ と二重に縮退した第一励起状態 $\varphi_+(x), \varphi_-(x)$ は、

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}, \quad \varphi_+(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{i2\pi x/L}, \quad \varphi_-(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i2\pi x/L} \quad (3)$$

で与えられる。

(a) 上の問題の基底エネルギーと第一励起状態のエネルギーを求めよ。

v_0 を正の定数とする。

(b) 摂動ポテンシャル $V_1(x) = v_0 \left\{ \delta\left(x - \frac{L}{4}\right) - \delta\left(x - \frac{3L}{4}\right) \right\}$ が加わった際の基底状態と第一励起状態のエネルギーを摂動の一次までの範囲で求めよ。縮退が解けるなら、両方のエネルギーを書き、新たなエネルギー固有状態を示せ。

(c) 摂動ポテンシャル $V_2(x) = v_0 \left\{ \delta\left(x - \frac{L}{4}\right) + \delta\left(x - \frac{3L}{4}\right) \right\}$ が加わった際の基底状態と第一励起状態のエネルギーを摂動の一次までの範囲で求めよ。縮退が解けるなら、両方のエネルギーを書き、新たなエネルギー固有状態を示せ。

3. スピン $1/2$ の粒子二つからなる系を扱う。z 方向の上向き・下向きのスピン状態を $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ と書き、

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 \}, \quad (4)$$

という状態を考える。

(a) 粒子 1 の \hat{S}_z を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(b) 粒子 1 の \hat{S}_z を測定したら $\hbar/2$ が得られた。このあと粒子 2 の \hat{S}_z を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(c) 粒子 1 の \hat{S}_z を測定したら $\hbar/2$ が得られた。このあと粒子 2 の \hat{S}_x を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

(d) 粒子 1 の \hat{S}_x を測定したら $\hbar/2$ が得られた。このあと粒子 2 の \hat{S}_x を測定すると、どのような確率でどのような結果が得られるか。

ヒント： (使わなくてもいいです) $S = 1/2$ のスピン演算子の行列表示は、

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

である。