量子力学 III

2024 年 1 月 25 日　田崎晴明

答だけではなく考え方や計算の筋道を簡潔に書け（単純な計算問題は答だけでよい）。**第 n 問の解答は n 枚目の解答用紙に書く**こと（ここで、$n=1,2,3$）。解答用紙の裏面も使用してもよい（解答用紙のスペースが不足する場合には追加の用紙を渡す。一枚の用紙に複数の問題の解答を書かないこと）。試験後、答案を受け取りにくること。2024 年 9 月を過ぎたら答案を予告なく処分する。

問題用紙は 2 枚あり、問題は第 3 問まである。

1.　それぞれ大きさ $\frac{1}{2}$ と大きさ 1 の角運動量を持った二つの粒子を考える。それぞれの粒子の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}}^{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とし、全系の角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{J}}=\hat{\boldsymbol{J}}^{(1)}+\hat{\boldsymbol{J}}^{(2)}$ とする。$\hat{\boldsymbol{J}}^2$ の固有値を $J(J+1)\hbar^2$ と、$\hat{J}_{\mathrm{z}}$ の固有値を $M\hbar$ と書き、対応する規格化された同時固有状態を $|\Phi_{J,M}\rangle$ とする。

講義と同様、角運動量演算子の z 成分の固有状態を、大きさ $\frac{1}{2}$ の場合には $|{\uparrow}\rangle$, $|{\downarrow}\rangle$ と、大きさ 1 の場合には $|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle$ と書く。

(a) J のとりうる値を求めよ。また各々の J について、M の取りうる値を求めよ（結果だけでよい）。

(b) $\hat{\boldsymbol{J}}^2=\frac{11}{4}\hbar^2+\hat{J}_+^{(1)}\hat{J}_-^{(2)}+\hat{J}_-^{(1)}\hat{J}_+^{(2)}+2\hat{J}_{\mathrm{z}}^{(1)}\hat{J}_z^{(2)}$ であることを示せ。

(c) 状態 $|\Psi\rangle=|{\uparrow}\rangle|+\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi\rangle$ と $\hat{J}_{\mathrm{z}}|\Psi\rangle$ を計算せよ。$|\Psi\rangle$ を $|\Phi_{J,M}\rangle$ の形に書いた場合の J と M の値を答えよ。

(d) 状態 $|\Psi_1\rangle=|{\uparrow}\rangle|0\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_1\rangle$ と $\hat{J}_{\mathrm{z}}|\Psi_1\rangle$ を計算せよ。状態 $|\Psi_2\rangle=|{\downarrow}\rangle|+\rangle$ について $\hat{\boldsymbol{J}}^2|\Psi_2\rangle$ と $\hat{J}_{\mathrm{z}}|\Psi_2\rangle$ を計算せよ。

(e) **上の結果を用いて** $|\Psi_1\rangle$ と $|\Psi_2\rangle$ の線型結合によって同時固有状態 $|\Phi_{J,M}\rangle$ を作れ（もちろん、J, M を明記すること）。独立なものを複数作れるならばすべて求めること。

角運動量の固有状態についての以下の一般公式を証明なしで用いてよい。

$$\hat{J}_\pm|\psi_{j,m}\rangle=\hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|\psi_{j,m\pm1}\rangle \tag{1}$$

2.　摂動計算の問題。摂動の基本的な公式は導出なしで用いてよい。

2 次元空間での調和振動子を扱う。非摂動のシュレディンガー方程式は

$$\Bigl\{-\frac{\hbar^2}{2m}\Bigl(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Bigr)+\frac{m\omega^2}{2}(x^2+y^2)\Bigr\}\varphi(x,y)=E\,\varphi(x,y) \tag{2}$$

である（難しそうに見えるかも知れないが、単に独立な 1 次元調和振動子が二つあるだ

け)。質量 m と角振動数 ω は正の定数。この系の基底エネルギーは $E_{\rm GS} = \hbar\omega$ であり、基底状態はただ一つで、その波動関数は

$$\varphi_{0,0}(x,y) = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\ \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{3}$$

である。また第 1 励起エネルギーは $E_{\rm 1st} = 2\hbar\omega$ であり、第 1 励起状態は 2 重に縮退しており、それらの波動関数は、たとえば、

$$\varphi_{1,0}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{m\omega}{\hbar}\, x\ \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{4}$$

$$\varphi_{0,1}(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{m\omega}{\hbar}\, y\ \exp\Big[-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2+y^2)\Big] \tag{5}$$

と取れる。上の三つの状態は規格化されている。

この系に $V_1(x,y) = v_1\, x^2 y^2$ というポテンシャルを摂動として加える（v_1 は定数)。

(a) 摂動を加えた系の基底エネルギーを摂動の 1 次の計算で求めよ。

(b) 縮退していた第 1 励起エネルギーが摂動の 1 次でどう変化するか求めよ。また、縮退が解けるなら、それぞれのエネルギー固有値に対応するエネルギー固有状態を摂動の 1 次で求めよ。

この系に $V_2(x,y) = v_2\, xy^3$ というポテンシャルを摂動として加える（v_2 は定数)。

(c) 摂動を加えた系の基底エネルギーを摂動の 1 次の計算で求めよ。

(d) 縮退していた第 1 励起エネルギーが摂動の 1 次でどう変化するか求めよ。また、縮退が解けるなら、それぞれのエネルギー固有値に対応するエネルギー固有状態を摂動の 1 次で求めよ。

以下のガウス積分の公式を導出なしで用いてよい（ここで $a > 0$ は定数)。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-a\,x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^2\, e^{-a\,x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,a^{3/2}},$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, x^4\, e^{-a\,x^2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4\,a^{5/2}} \tag{6}$$

3. 二つのスピン $\hat{\boldsymbol{S}}^{(1)}$, $\hat{\boldsymbol{S}}^{(2)}$ からなる系を考え、ハミルトニアンを

$$\hat{H} = \frac{4\alpha}{\hbar}\,\hat{S}_{\mathrm{z}}^{(1)}\hat{S}_{\mathrm{z}}^{(2)} \tag{7}$$

とする。α は正の定数である。以下では時刻を t と書き、ハミルトニアン (7) による時間発展を考察する。

スピン演算子とそれらの固有状態についての記号はすべて講義と同じとする。つまり、$|{\uparrow}\rangle$, $|{\downarrow}\rangle$ が $\hat{S}_{\mathrm{z}}$ の固有値 $\hbar/2$, $-\hbar/2$ の固有状態、

$$|{\rightarrow}\rangle = \frac{|{\uparrow}\rangle + |{\downarrow}\rangle}{\sqrt{2}}, \quad |{\leftarrow}\rangle = \frac{|{\uparrow}\rangle - |{\downarrow}\rangle}{\sqrt{2}} \tag{8}$$

が $\hat{S}_{\mathrm{x}}$ の固有値 $\hbar/2$, $-\hbar/2$ の固有状態である。

(a) ハミルトニアン (7) の固有状態と固有値を求めよ。線型独立な固有状態を全て書くこと。

(b) 初期状態を

$$|\psi_1(0)\rangle = \frac{|{\rightarrow}\rangle_1|{\rightarrow}\rangle_2 + |{\leftarrow}\rangle_1|{\leftarrow}\rangle_2}{\sqrt{2}} \tag{9}$$

とする。時刻 t での状態 $|\psi_1(t)\rangle$ を求めよ。状態 $|\psi_1(t)\rangle$ は物理的状態として時刻 t に依存するか？

(c) 初期状態を $|\psi_2(0)\rangle = |{\uparrow}\rangle_1|{\rightarrow}\rangle_2$ とする。時刻 t での状態 $|\psi_2(t)\rangle$ を求めよ。

(d) 状態 $|\psi_2(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{z}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。

(e) 状態 $|\psi_2(t)\rangle$ で $\hat{S}_{\mathrm{x}}^{(2)}$ を測定するとどのような確率でどのような測定結果が得られるか。