数学

— 物理を学び楽しむために —

暫定版（2023 年 11 月）

田崎 晴明

これは、主として物理学（とそれに関連する分野）を学ぶ方を対象にした、大学レベルの数学の入門的な教科書である。高校数学の知識を前提にして、大学生が学ぶべき数学をじっくりと解説する。最終的には、大学で物理を学ぶために必須の基本的な数学すべてを一冊で完全にカバーする教科書をつくることを夢見ているが、その目標が果たして達成されるのかはわからない。今は、書き上げた範囲をこうやって公開している。

詳しい内容については目次をご覧いただきたいが、現段階では

- 集合、論理、そして、関数や数列の収束についての基本（2 章）

- 一変数関数の微分とその応用（3 章）
- 一変数関数の積分（4 章）
- 常微分方程式（5 章、8 章）
- 座標、ベクトル、線形代数（6 章、7 章）
- ベクトル解析（10 章）

の各テーマについては、ほぼ完成しており、市販されている（優れた[*1]）教科書に匹敵する品質になっていると考えている。これらの分野について学習する方、また、講義や演習を担当される方は、本書を教科書・参考書として用いることを検討してみていただきたい。2020 年 3 月にようやくずっと懸案だった 4 章後半の積分の計算の部分を書いたので、（当面の）残りは多変数関数の微分と積分についての 9 章だけになった。これもなんとか執筆したいとは思っているのだが、さて、どう

[*1] 市販の教科書のなかにはおそろしく質の低い物が少なからずあることを知っておくべきだろう。大学レベルの専門書がきわめて安直に出版されていることを考えれば、この質の低さはうなずけるのだが。

なるのだろう？

> この pdf 版には文書内での相互リンクの機能がある。たとえば、目次の項目や索引の項目の指定ページをクリック（あるいは、タップ）すれば該当の箇所に移動するし、式番号や定理の番号を引用しているところをクリック（あるいは、タップ）すれば元の式や定理に移動する。上手に使えば便利だと思うので活用してほしい。

現状でも、物理数学の教科書や、理工系の数学といったタイトルのシリーズ物は数多く刊行されている。しかし、日本では洋書のような大きな本を作れないことを思うと、一冊の（普通の分量の）単行本で物理学に必要な数学をしっかりとカバーするのはきわめて困難なことだ。一方、シリーズ物の場合は、分量は十分にとれるだろうが、多くの著者の連携をとり的確に全体をカバーするのはなかなかむずかしいようだ。いくつ

かのシリーズをざっと眺めてみたが、全体で統一をとることを真剣に考えているシリーズは少ないように思える。さらに、学習者にとっては、何冊も高価な単行本を購入するのは、けっこうな経済的な負担になるだろう。

そういう意味で、一人の著者が責任をもって基礎的な数学全般をしっかりと書き上げた一冊の本が必要だとつねづね感じていた。私がその著者として適任であるかどうかは別として、物理学科一年生のための数学の講義をはじめた機会に、2004 年から本書の執筆と公開に着手した。「物理学科で必要な数学すべて」と大きく出たが、さしあたっては学部一、二年生の力学、電磁気学、熱力学、解析力学などの根幹科目の理解に必要な数学をカバーすることを目標にしようと思っている。

本書を執筆するにあたっては、ともかく、**初心者がじっくりと読めば確実に理解できるように、丁寧にしっ**

かりと説明することを心がけた[*2]。講義で取り上げる暇はないし、通常の本にも載っていないが、まじめに考える人は気にするような細かいことがらについてもきちんと書く[*3]ことにした。さらに、初めて学ぶときには必要ないが、学年が進んでたとえば量子力学を学ぶ際に必須になるような知識も盛り込んである。また、物理の学生のための本の中には数学的な厳密さを意識していないものも少なからずあるようだが、本書では数学的な論理を気にする人も満足できるように厳密な証明にもページを割いた[*4]。そういう意味では、欲張りな本である。もちろん、読者はそれぞれの必要に応

[*2] 初学者用の本ならそんなことは当たり前だと思うだろうが、そうでもない。内容を理解しているわれわれが読んでも何が書いてあるのか分からないようないい加減な本や、解き方だけの上っ面だけを書いた人を馬鹿にしたような本が、それなりの値段で売られているのを見ると暗澹たる気持ちになる。

[*3] もちろん、（私自身でも）講義では取り上げないし、ほとんどの読者は読み飛ばせばよい — と覚悟した上で書く。

[*4] また、証明を書く余裕がないときには、何が省略されているかをはっきり書くようにした。

じて、必要なところを読んでいただければよいと思う。

念のため、「本書の読み方」をまとめておこう。

- すべての章を順番に読む必要はないので、学びたいと思うところから読み始めればいい（ただし、第１章には軽く目を通してほしい)。
- ある章の途中の節から読み始めるとか、いくつかの節を読み飛ばすといったこともできるはずだ。目次を見て検討してほしい。また、必要な知識があるときには前の節をきちんと引用することを心がけたので、必要に応じて戻ってもらえばいいだろう。
- 上でも書いたように普通の教科書に比べると記述は詳細で丁寧である。また、分量を抑えるためにわかりやすさを犠牲にすることも一切していない。そのため、文章の量がかなり多いのだが、かならずしも全てを読み通す必要はないだろう。既にわかっている内容について読む場合や、前に学んだ部分を復習するような場合は、あ

る程度読み飛ばしても大丈夫だろう（もちろん、分からなくなったら、落ち着いてじっくりと読んでほしい）。

- かなり高度の内容や、相当に詳しい内容もある。最初からすべてを読んで理解しようなどと思う必要はない。特に数学的な証明は気になる読者だけが読めばいいだろう（ただし、読んで面白い証明というのもいくつかあると思う）。

このような試みでは、実際に本を使って学習・教育された読者からのフィードバックは非常に重要だと思う。紙に印刷されている本とはちがい、ネット上にファイルとして公開しているものは、容易にフィードバックを取り入れて、改訂・増補をおこなうことができる。実際、既に本書を読んでくださった何人かのみなさんから多くの有益なコメントをいただき、それは本書に反映されている。これからも、ネット公開のメリットを活かしながら、この草稿を改良していければと願って

いる。

お気づきの点やご提案などがありましたらメールで私にお知らせ下さい。アドレスは、

hal.tasaki@gakushuin.ac.jp

です。できれば、メールの subject 欄に「mathbook」という単語をいれて下さると助かります。また、コメントされるときは参照されているファイル名（たとえば、MB190828.pdf）をお書きいただくと対応しやすくなります。よろしくお願いします。

ファイルの公開にあたって：本書の著作権は田崎晴明にある。ダウンロードしたファイルは学習のためにご自由に活用していただきたい。本書の全部または一部を、個人で、あるいは大人数で使用するために印刷・製本することも大歓迎である。ただし、そうやって作った物を販売して利益を得ることは禁止する。また、ファイルを改変すること、(つねに新しいバージョンを配布したいので) ファイルを再配布することも禁止する。ファイルの最新版は、

http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/

から入手できる (「田崎　数学」といったキーワードで検索してもいいでしょう)。

未完成品に謝辞をつけるべきではないのかもしれないが、井田大輔、高麗徹、中村孔一、原隆、真野博史、宮沢透の各氏には構想の段階からさまざまな有益な議論をしていただき、また書いたものにも有益なコメントをいただいた。また、4 章を書く際には、（学習院大学物理学科の数学の講義を担当してくださっている）向田寿光氏の講義ノートを参考にさせていただいた。また、これを読まれた多くの皆さんから、さまざまなコメント、ご提案、間違いのご指摘をいただき、本書の改良に役立てることができた。とくに、井汲景太、井出雄一郎、石井豊、小田啓太、乙井研二、桂法称、鴨浩靖、河内一樹、川口光雄、九州の酔いどれゾンビ*5、下村明洋、白石直人、杉田歩、芹澤正、高橋雅裕、竹川敦、時枝正、中川尚子、野瀬田裕樹、廣田正夫、福島竜輝、前野昌弘、増田忠昭、水野潤、向田寿光、矢田部俊介、吉田正友、和田誠、そして、私の講義をとった学習院大学物理学科のみなさん、本書をゼミで輪講してく

*5 ご本人の希望でペンネーム（？）で掲載します。

ださった茨城大学理学部物理学コースのみなさんにはお世話になった。一部の演習問題は中川尚子さんと茨城大学理学部物理学コースの学生諸君に提供していただいた。

以上、お名前を挙げた方も、挙げきれなかった方も、本書にご協力いただいたすべての皆さんに心から感謝します。

2023 年 11 月

田崎晴明

目次

第 1 章　はじめに 1
1.1 物理で数学を使うことについて 3
1.2 物理と数学 6
1.3 基本的なことがら 15

第 2 章　論理、集合、数、関数 43
2.1 論理と集合 45
2.2 数と数列 149
2.3 無限級数 213
2.4 関数と連続性 230

第 3 章　関数と微分 277
3.1 微分法 279
3.2 様々な関数と微分 328
3.3 高階の導関数とテイラー展開 416

第 4 章　一変数関数の積分 453
4.1 積分の基礎 455
4.2 積分の計算 527

第 5 章　微分方程式 — 入門と初等的な解法 571
5.1 微分方程式とその解 574
5.2 指数減衰の微分方程式とその変形 . . . 585
5.3 一次元での運動 630
5.4 電気回路 709
5.5 微分方程式に関する用語や概念 742
5.6 積分を用いた一階の常微分方程式の解法 748
5.7 一階の方程式になおせる（未知関数が一つの）二階の常微分方程式 814

第 6 章　座標とベクトル　825

6.1　二次元空間の座標 826

6.2　三次元空間の座標 843

6.3　三次元空間のベクトル 869

6.4　三次元空間の中の運動 949

第 7 章　行列とベクトル　969

7.1　代数ベクトルの基本 971

7.2　行列の定義と基本 1014

7.3　二次の正方行列の逆行列とディターミナント 1083

7.4　ディターミナント 1098

7.5　逆行列と連立一次方程式 1210

7.6　行列の固有値、固有ベクトル、対角化 . 1243

7.7　実行列の固有値と固有ベクトル 1343

7.8　行列の指数関数 1433

第 8 章　常微分方程式の理論と解法　1471

8.1　常微分方程式の解の存在と一意性 . . . 1473

8.2 線形常微分方程式の一般論 1523
8.3 定数係数の線形常微分方程式 1566

第 9 章 多変数関数の微分と積分（予定地） 1607
9.1 偏微分 1608

第 10 章 場の量の微分と積分 1623
10.1 場とその表わし方 1626
10.2 ベクトル場の線積分 1644
10.3 スカラー場のグラディエント 1687
10.4 ベクトル場のローテーション 1707
10.5 ベクトル場の面積分 1747
10.6 ストークスの定理 1796
10.7 ダイバージェンスとガウスの定理 . . . 1821
10.8 ラプラシアンとポテンシャル 1865
10.9 極座標表示 1906
10.10 まとめといくつかの便利な公式 1961

索引 1974

第１章

はじめに

　これから学んでいきたいことは実にたくさんある。物理を学び楽しむための数学を一通り身につけたいわけだから、並大抵の話ではない。できるだけ早く物理が自由に楽しめるよう、できるだけ早く、できるだけ幅広い数学を身につけてほしいと思う。

　とはいえ、それだけの大事（おおごと）になると、本腰を入

れる前にしっかりとした心構えをもつのも大事だろう。この章の最初の二つの節では、物理と数学の関係について少し考えてみようと思う。最後の節では、ごく基本的なことがらをまとめる。

この本では、各々の章の冒頭に、その章を読むのに必要な予備知識を簡単に列挙する。この章の場合は、とりたてて必要なことはないが、せっかくだから書いておこう。

- **物理を学ぼうという熱意と知的好奇心。**
- **ある程度の長さの（しかも、挿絵（さしえ）のない）文章を読み通す能力。**
- **高校で学んだ数学の記号、とくに $\sum$ で和を書く方法（1.3 節）。**

1.1　物理で数学を使うことについて

「物理をやりたくて大学に入ったのに、どうしてこんなに数学をやるんだ」という声を、毎年のように大学一年生から聞く[*1]。われわれの答は、決まっている。「必要だから。」

物理を語るための言語が、物理を学び研究するための基本の技術が、物理を楽しむための基礎体力が、数学なのだ。凡庸（ぼんよう）なたとえだけれど、数学という基礎技術なしに物理の世界に入りこむのは、登山の技術ゼロで高い山に探検にいくようなこと、あるいは、水泳経

[*1] この文章を書いたときには本当にその通りだったのだが、この本を入学したての一年生に配るようになってからはそういう声は聞かなくなった。そういう意味では、この文はすでに正しくないのだけれど、悪くない書き出しなのでそのままにしておきます。

験ゼロで大海原(おおうなばら)に泳ぎ出すようなことである[*2]。だから、数学を学ぼう — 物理を学び、語り、そして、楽しむために。

と、微妙にくさい台詞(せりふ)をきめたところで終わりにして本題に入ってもかまわないと思う。しかし、「物理に数学が必要だなんて誰が決めたんだろう」という一部の人たちが抱いているだろう「もやもや」を残したまま先に進むのはうれしいことではない。逆に、物理に数学が使えるのは考えるまでもない自明の理だと思ってしまうのも、実は、考え物なのだ。もう少しそのあたりについて議論しておこう。

[*2] たとえ登山技術ゼロでも、実際に山に行って試行錯誤をつづければ、いずれは登山に必要な体力もつくし、登山の方法を独自に編み出せるはずだと反論する人がいるかもしれない。それは完璧に正しい。人類は、まさにそうやって試行錯誤しながら物理や数学を発展させてきたのだ — 猛烈に長い時間をかけて。

物理に数学を使うという話になると、ガリレオ[*3]の「偽金鑑識官 (1623)」から[*4]

> 哲学はつねにページが開かれているこの偉大な宇宙という本のなかに書かれている。しかし、それが書かれた言語についてまず学ばなければ、それを理解することはできない。それは数学の

[*3] Galileo Galilei (1564–1642) 彼の名前はガリレオ・ガリレイだから標準的に苗字で呼ぶなら「ガリレイ」になるはずだが、普通「ガリレオ」と呼んでいる（そもそも「ガリレイ」というのは「ガリレオ家」という意味らしい)。ただし、物理用語の中では「ガリレイ変換 (Galilean transformation)」のように苗字を使っている。言うまでもなくガリレオは力学の基礎を築いた偉大な物理学者だ。ただし、彼の考察の対象は地上の運動に限られており、たとえば、遠く離れた天体が引力を及ぼし合うという（今となれば正しい）考えは彼にはまったくのナンセンスにみえたようだ。これはガリレオが馬鹿だったとか偏見にとらわれていたということではない。科学の進歩はゆっくりとしたもので、偉大な洞察力をもった科学者といえども、観察事実が蓄積し理論的基盤が整うまでは真実を見抜くことができないことのよい現れである。

[*4] ジェームズ・マクラクラン「ガリレオ・ガリレイ」(野本陽代訳、大月書店、2007）p. 89 より引用。

> 言葉で書かれており、その文字は、三角、円、その他の記号である。これらなしには、人間はそれを一語なりとも理解することができないし、真っ暗な迷路をさまようだけである。

という部分を引用するのが定番だ。ガリレオのような偉大な人が、こうやって、はっきりと書いているんだから、数学こそが自然の言葉なんですよ、というわけだ。

しかし、歴史上の偉い人に言われたら、「はい、そうですか」と納得するというのでは、情けない。そもそも、自然科学を学ぼうというからには、ご託宣（たくせん）を無反省に受け入れるという態度は徹底的に避けるべきだ。いったいどういう経緯でみながそう信じるようになったか自分なりに考えてみるべきなのだ。

1.2　物理と数学

数学が物理学の役に立つというのは、人類が長い長い歴史の中で学んだ、純粋な経験則である。理由はと

もかく[*5]、考えうる様々なやり方の中で、数学を使って現実世界をモデル化するという方法こそが圧倒的にうまくいったのだ。

つきつめると、物理の目標とは、われわれのまわりにある現実の世界を理解すること、そして、その理解にもとづいて世界を（できる範囲で、必要に応じて、少しずつ）制御していくことだ。一方、数学というのは、現実の世界とは無関係に、抽象的な数、図形、論理の世界を理解するための学問だ[*6]。数学の本質は、その究極の「自由」にあるとされる。論理的につじつまがあってさえいれば、新しい概念をつけくわえ、新しい

---

*5 「この世の物事はすべて論理的に理解できなくてはならない。それが科学というものだ。」などと思っている人は、いったい何を根拠にそう思えるのかを考え直してほしい。

*6 数学が現実世界と無関係というのは、あくまで、形式としての話である。実際、石ころの数や狩人の人数に、足し算、引き算のルールが適用できるというような経験事実が、人類が数学を発展させる大きなきっかけになったのは事実だろう。つまり、ある程度のレベルまでの数学ならば、自然から「読み取る」ことができる。

研究対象を調べることができる。それらの概念や対象が現実の世界となんらかの意味でかかわっている必要はないのだ。

そう考えると、現実の世界と向き合う物理の営みの中で数学が役に立つというのは、まったく不思議なことだ。この「不思議さ」をみごとに表しているのは、(これも、偉い人の言葉ではあるが) ウィグナー[*7]の論説のタイトル「**自然科学における数学の不合理なまでの有効さ**[*8] (The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences)」だろう。私としては、このフレーズの方が、ガリレオの名文よりもずっと共感できる。ウィグナーは、自分自身の理論物理学での経験

[*7] Eugene Paul Wigner (1902–1995) ハンガリー出身で後にアメリカに渡った理論物理学者。1963 年ノーベル物理学賞。量子論における対称性についての理論や核反応の理論などの業績がある。(実は私はプリンストン大学でのポスドク時代に晩年の Wigner 先生を何度もお見かけした。)

[*8] もう少し意味をとって訳せば、「自然科学において数学が筋が通らないほどに役に立つことについて」あたりか。

の中で、数学があまりにも役に立つことを身をもって実感し、この言葉に表したのだろう。

実際、物理学を学んでいくと、信じられないほど色々なところで、物理と数学が深くかかわってくるのを見ることになる。三次元空間での運動を表すのにベクトルが有効なことは、高校で物理を学んだみなさんには、自然に思えるだろう。さらに、力学であつかう種々の運動を記述するのに最適のことばは、微分と積分である。線形代数という（ベクトルと行列の理論を一般化した）抽象的な数学は、さまざまな物理現象を記述する線形微分方程式を解くための最適の道具だ。また、驚くべきことに、複素数を係数にした線形代数は、ミクロな世界の物理を記述する量子力学を定式化するためのもっとも自然な言語になっているのだ。ベクトル解析という体系（今は、ただの関数よりずっと手強（てごわ）いものを相手にする微分積分くらいに思っておいてほしい）は、電磁気学や流体力学とは切っても切り離せない。あるいは、ギャンブルの解析から生まれた確率論

の数学は、統計力学によるマクロな系の記述や量子系のふるまいの予言には不可欠なのだ。

物理をきわめていった結果、思わぬところで数学が役に立つことに気づく、ということもしばしばある。アインシュタイン[*9]が 1916 年にゾンマーフェルト[*10]宛てに書いた手紙[*11]の一部を抜粋しよう。

> 現在、私は重力の問題に専念しており、こちら

[*9] Albert Einstein (1879-1955) 文句なく前世紀最高の、そして、おそらくは（今のところ）史上最高の、物理学者である。もちろんすばらしく頭がよく計算力も抜群だが、彼の何にも増して偉大な点は、混沌とした実験事実と未完成の理論の中から、何が信頼しうるかを見抜くおそるべき洞察力をもっていたこと、そして、それらを足がかりに次の時代の理論を創造してしまう圧倒的な力をもっていたことだろう。

[*10] Arnold Johannes Wilhelm Sommerfeld (1868–1951) 量子論の初期から円熟期まで、数々の重要な業績を残した。この脚注を書こうと思って、彼がノーベル賞をとっていないことをはじめて知った。

[*11] A. Pais “Subtle is the Lord” p.216 にある英訳から重訳した。

> で親しくしてくれている数学者[*12]の助けを借りて、すべての困難を克服できるだろうと今や信じています。ただ、ひとつ確実にいえることは、今までの人生で、私はこれほどまでに根を詰めてがんばったこともなく、また、これほどまでに数学への深い敬意を感じたこともなかったということです。今までの私は、単純にも、数学のややこしい部分は単なる贅沢品だとみなしていたのです。

アインシュタインは、重力の理論である一般相対性理論の物理的なアイディアを着想したあと、曲がった時空間を書き表すような「ことば」がないかを探してい

[*12] グロスマンという数学者。グロスマンは、アインシュタインの学生時代の友人で、学生時代にはアインシュタインに講義のノートを貸してあげたりしていたらしい。その後、アインシュタインが一般相対性理論にむけて本格的な研究にはいったとき、グロスマンと共同研究をすることになる。（別にアインシュタインにからめて言う必要もないのだけれど）大学時代の友人というのは本当に貴重なものだから大切にしよう。

た。そして、リーマン[*13]らを出発点とした数学者らの研究で、アインシュタインの求めていたものにかなり近い「ことば」が既に発展していたことを、友人のグロスマンをはじめとする数学者に教えられたのだ。上の手紙は、数学者のつくった高度な「ことば」によって自分のアイディアを表現することができるようになった時期に、アインシュタインが書いたものだ[*14]。彼が「贅沢品」とみなしていた抽象数学の一分野（微分幾何学）こそが重力の本質を書き表すもっとも適切な「ことば」だったのである。

こういう例を次々と挙げていってもきりがないし、

[*13] Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866) ドイツの数学者。四十年に満たない生涯のあいだに、数学のいくつかの分野で本質的な業績を残した。われわれが 4 章で学ぶ積分の定式化を与えたのはリーマンであり、本文ででてきた曲がった空間の幾何学も彼が創始した。また ζ（ツェータ）関数のゼロ点分布に関するリーマン予想は、現代数学におけるもっとも深い未解決の予想とされている。

[*14] ただし、そこから先の一般相対性理論の構築も、決して一筋縄ではいかなかったのだが。

しょせんは、ただの「お話」になってしまう。今のところは、これで、やめておこう。

ただ、さいごに、みなさんが高校で習った範囲でも、「一様重力中での物体の運動」という現実世界での現象と「二次関数の理論」という数学のあいだの、みごとな対応関係が味わえたことを思い出してほしい。あそこで習ったのは、単なる問題解法の公式などではなく、われわれの住む世界できわめて高い精度で成り立つ強力な定量的な運動法則の数学的な表現だったのである。

問 1.2.a　数学が物理に役に立つということについて、たとえば、次のような反論をする人がいたとしよう[*15]。

> 現代の物理学というのは、数学好きの人たちが集まって、自分たちの好きな数学を使ってでっちあげた理論に過ぎない。だから、数学が物理

[*15] そんな人がいるはずはないと思うだろうが、案外、変に「哲学」にかぶれたような人からそういう意見が真顔で出てくることがあるようだ。

に役に立つのはそもそも当たり前の話なのだ。それは、単に物理学者という人たちの特性を表しているだけのことで、自然についての何らかの真理を表すものではない。

「数学を使ってつくった物理の理論は実験に合う」という主張もお笑いぐさだ。彼らのいう「実験」は、もともと理論と合わせることが目的のものだ。だから、測定装置にしろ、そこから読み取る数値にしても、みな、はじめから理論と合うように作られているのだ。

こういう意見に対して、みなさんなりに、真面目（まじめ）な反論をすることを考えてみよう。単にガリレオの言葉を引用したりするようでは、相手の思うつぼだ。また、知りもしない一般相対性理論なんかを持ち出しても勝ち目はない。自分がしっかりと理解している物理と数学を軸に、しっかりとした反論を考えよう。

1.3　基本的なことがら

本文に入る前に、いくつかの基本的なことがらをまとめておく。

この本で使う用語や数学記号は標準的なものだし、新しい記号がでるときには、そのたびに説明する。しかし、いくつか基礎的なものについては、1.3.1 節と 1.3.2 節にまとめる。また、抽象的な和の取り扱いについては高校よりは進んだ技(わざ)を頻繁に用いるので、1.3.3 節で詳しく解説する。最後の 1.3.4 節では、物理における単位のあつかいについて述べる。

1.3.1　基本的な数学用語

始めに、定義、定理といった数学ならではの「言葉」について、ざっと説明しておこう。ただし、数学に不慣れな人がここだけを読んでもちゃんとはわからないと思うので、ここでは簡単に読み流しておいてもらえれ

ばよい。本書を（あるいは他の数学書を）読んでいて混乱したとき、ここを見てもらえればいいだろう。なお、命題や論証のルールについては、2.1.1 節から 2.1.3 節で少し詳しく取り扱う。

数学の推論の出発点になるのは**公理** (axiom) と呼ばれる一連の命題である。ただし、この本ではほとんど公理には触れないし、普通の物理の本で（そして、数学の本でも）出発点になる公理をしっかりと書き下すことはしない[*16]。そういう状況で使われる公理のほとんどはわれわれが「常識的に知っている」と考えていることだからである。

ただし、公理というのは、数学の体系をつくるために用意する基本的な前提であって、いわゆる「自明の理」のことではない。その体系の本質を簡潔に表わし、また「使いやすい」命題を集めて公理にするのだが、ある体系をつくるための公理がいつも一通りに定まるわけ

[*16] ただし、数学者は「やる気になりさえすれば、用いている公理をすべて書くことはできる」と考えていると思う。

ではない。場合によっては、まったく同じ体系を扱っていても、ある教科書で公理だったものが別の教科書では定理になっている（そして、一つ目の教科書での定理が二つ目では公理になっている）というようなこともある。

定義 (definition) というのは、何らかの概念(がいねん)を新たに導入するための（数学的な）宣言をいう。

定理 (theorem) というのは、公理と定義だけを使って厳密に証明できる命題をまとめて表現したものである。また、単に証明できるという以上に、とくに重要なものを、定理と呼ぶ習慣になっている。

補題 (lemma) というのも、公理や定義から厳密に証明できる命題。ただし、どちらかというと目標とする定理を示すために補助的に示されたような命題の場合、ちょっと控えめに、補題と呼ぶことが多い。

系 (corollary) というのは、ほとんど数学でしか使わない言葉だが、ある定理から「非常に簡単に」証明することができる命題をいう。

証明 (proof) というのは、公理と定義と論証の基本的なルールだけを用いて、定理、補題、系を示す論証のプロセスのことをいう。

1.3.2　等号に似た記号

等号 $=$ は両辺が等しいことを表す記号だが、これに似た書き方を少し見ておく。

$$\langle F(\varphi)\rangle_0 := \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{L\to\infty}\frac{1}{\mathcal{Z}_{\varepsilon,L}}\int \mathcal{D}\varphi\, F(\varphi)\, e^{-\mathcal{S}_{\varepsilon,L}(\varphi)} \tag{1.3.1}$$

のような式に現れる $:=$ は、左辺に書いてあるものを右辺に書いたもので定義したことを意味する。一般に、$A := B$ あるいは $B =: A$ と書けば、A という新しい記号を、すでに内容のわかっている B によって定義したということだ。定義には $A \equiv B$ という書き方を用いることが多いが、これだと、左辺と右辺のどちらが定義されているのかが明確ではない。本書では、より明確な $:=$ を用いる。

ただし、たとえば「$f(x) = x^2$ とする」などというのも、定義といえば定義なのだが、いちいち $:=$ を使うことはしない。かなり一般性をもって使われる記号や概念を定義するときにだけ、あらたまって $:=$ を使うことにする。

A, B ふたつの量が「近似的に等しい」ことを表すために、$A \simeq B$ と書くことがある。たとえば、「ε が 1 に比べてずっと小さいとき[*17]、$\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$ が成り立つ」という風に使う。高校で用いる $\fallingdotseq$ と同じ意味だと思っていい[*18]。もちろん、厳密に言えば、「近似的に等しい」ということの意味をはっきりさせなくては、こういう書き方は意味がない。このあたりのより厳密なあつかいは、3.1.1 節で微分を議論するときに見ることに

[*17] これを $\varepsilon \ll 1$ と表す。

[*18] 数学ではむしろここでの $\simeq$ の意味で $\sim$ を使うことが多い。「近似的に等しい」ことを表す記号の使い方は分野や著者によって微妙にちがうので、文献を読むときには注意が必要だ。

しよう。

問 1.3.2.a　上にでてきた「ε が 1 に比べてずっと小さいとき、$\sin\varepsilon \simeq \varepsilon$ が成り立つ」という主張が正しいかどうか（正しいとして、どういう意味で正しいか)、関数電卓を使って自分で確かめよ（1.3.5 節で紹介する WolframAlpha® を使ってもいい)。ε を 0.1 とか 0.01 とかに選びながら、様子をみてみよう。

1.3.3　一般的な和の記号

和を一般的に $\sum$ で表す書き方は高校でも使ってきたと思うが、大学に入って抽象的な数学をあつかうようになると、この書き方がいよいよ活躍するようになる。二重や三重の和などの新しい技も登場するし、クロネッカーのデルタと呼ばれる特殊な関数との組み合わせが威力を発揮したりする。以下、基本的な技術をまとめておこう。最初は、こんなことが何の役に立つかはわからないだろうから、軽く読み飛ばしておいて、

あとで必要になったとき、ここに戻ってくればいいと思う。

■一重和の場合　基本の一重和（いちじゅうわ）の場合からはじめよう。まずは、ウォーミングアップで、

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3+7^3+8^3+9^3+10^3 \quad (1.3.2)$$

という和を考える[*19]。こうやって全部書くと長くなりすぎるので、

$$\sum_{i=1}^{10} i^3 \quad (1.3.3)$$

という記号でまったく同じものを表す。$\sum$ は普通「シグマ」と読む（38 ページのギリシャ文字の表を参照）。また、i は 1 から 10 までの整数値をとる**変数** (variable)

[*19] ちなみに、和は 3025 になる。

である[*20]。これは、

> i という名前をつけた変数を用意する。i を 1 から 10 まで順に動かしながら、i^3 という量を足しあげなさい。

ということを意味している。(1.3.3) と同じものが文中にでてくるときは、$\sum_{i=1}^{10} i^3$ のように、小さい文字の部分の位置を変えるのが標準の書き方だ。

ここで、まず注意すべきなのは、最初に書いた (1.3.2) には、i という変数が登場していないこと。というより、(1.3.2) は、単に十個の数の和だから、i にしろ何にしろ、変数が入りこむ余地はない。抽象的な和 (1.3.3) に登場する変数 i というのは、本来は問題に登場して

[*20] 一般に（ある定められた範囲で）一般的な値、あるいは未知の値をとる量を変数と呼ぶ。変数はアルファベットの文字で表わすことが多い。変数に対して、何らかの定まった値をとる量を**定数** (constant) という。定数は、3 とか 145 といった具体的な数でもいいし、（値を特定せず）a, b のような文字で表わすこともある。

いないけれど、便利のために仮に導入した変数に過ぎない。だから、変数の名前は i でなくてもよいわけで、$\sum_{k=1}^{10} k^3$ と書いても、$\sum_{\zeta=1}^{10} \zeta^3$ と書いても、(1.3.3) とまったく同じものだ（ζ はギリシャ文字のツェータ。38 ページの表を参照)。このように、和の中などで登場する仮の変数のことを**ダミー変数** (dummy variable) と呼ぶ[*21]。ダミー変数は、(首尾一貫して置きかえさえすれば）他のどんな変数に置き換えてもかまわない。また、ダミー変数は和の記号で強制的に値を決められているので、一般の変数とはちがって、われわれが好きな数を代入することはできない[*22]。定積分における積分変数（4.1 節）も典型的なダミー変数だ。

もう少し話を一般化しよう。k と ℓ を $0 < k < \ell$ を

[*21] 束縛変数 (bound variable) という言い方もある。なお、統計学などの分野ではダミー変数という言葉が全く別の意味（0, 1 の二値をとることで条件を表わす変数）で用いられているので注意。

[*22] 英語ではダミー変数を dead variable ということもある。数を代入することができないから、「死んでいる」というわけだ。

満たす整数とし、

$$k^3 + (k+1)^3 + \cdots + (\ell - 1)^3 + \ell^3 \tag{1.3.4}$$

という和を考えよう[*23]。k から ℓ まで、整数の三乗を足したということだ[*24]。これを抽象的な和で書けば、

$$\sum_{i=k}^{\ell} i^3 \tag{1.3.5}$$

となる。今度は、

> i という名前をつけた（整数値をとる）変数を用意する。i を k から ℓ まで順に動かしながら、i^3 という量を足しあげなさい。

[*23] ちなみに、和は $(\ell - k + 1)(\ell + k)(\ell^2 + \ell + k^2 - k)/4$ である。

[*24] (1.3.4) は、k と ℓ が 4 以上離れているときにだけ意味のある書き方になっている。実際には、たとえば $k = 3$, $\ell = 5$ といった場合には、$3^3 + 4^3 + 5^3$ という和を表したいのだ。意外かもしれないが、数学にもこういう「わかってくれよ」的な書き方はよくでてくる。

ということになる。和の表式 (1.3.5) には、i, k, ℓ の三つの変数が登場するが、これらの性格はちがう。和の記号に支配された i は、上でみたように、ダミー変数だが、残りの k と ℓ は、われわれが何か好きな数を代入することのできる「生きた」変数だ。(1.3.5) の変数 i を（一貫して）他の変数に置き換えても何も変わらないが、k, ℓ はちゃんと名前をもった変数だから、勝手に他のものに置き換えるわけにはいかない。

以上を完璧に理解してもらった上で、より抽象的な書き方に進もう。

$a_1, a_2, \ldots$ を何らかの数列とする。各々の正の自然数 $i = 1, 2, 3, \ldots$ に対して、対応する実数 a_i が定まっているということだ。考えづらいと思えば、上の例にあわせて $a_i = i^3$ だと思ってもいい。k と ℓ を $0 < k < \ell$ を満たす整数とし、(1.3.4) に相当する和を、一般に

$$\sum_{i=k}^{\ell} a_i := a_k + a_{k+1} + \cdots + a_{\ell-1} + a_\ell \tag{1.3.6}$$

という記号で表す。わかりにくいと思う人は、もう一

度、上の例に戻って考えてほしい。

■多重和の場合　話を進めて、二重、三重の和について、同様の抽象的な書き方をすることを考えよう。

今回は、最初から抽象的な数列をあつかおう。正の自然数 $i = 1, 2, \ldots$ と $j = 1, 2, \ldots$ を決めたとき、実数 $a_{i,j}$ が定まるとしよう。たとえば、$a_{i,j} = (i + j)^3$ などというのを思い浮かべるといいだろう。

ここで、$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}$ という二重の和を考えたい。これは、$\sum_{i=1}^{3} (\sum_{j=1}^{3} a_{i,j})$ のように、まず、内側の j についての和を計算し、それから外側の i についての和を計算する、という意味だと解釈する。よって、

和の定義 (1.3.6) をそのまま使うと、

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j} &:= \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{3}(a_{i,1}+a_{i,2}+a_{i,3}) \\
&= (a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3})+(a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3}) \\
&\quad +(a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3}) \\
&= a_{1,1}+a_{1,2}+a_{1,3}+a_{2,1}+a_{2,2}+a_{2,3} \\
&\quad +a_{3,1}+a_{3,2}+a_{3,3} \qquad (1.3.7)
\end{aligned}
$$

となる。最後の形をみると、$i=1,2,3$ と $j=1,2,3$ の九通りの組み合わせ方すべてについて $a_{i,j}$ を足しあげたことになっている。これは、きわめて自然な和の取り方なので、ふたつの変数をまとめて、

$$
\sum_{i,j=1}^{3} a_{i,j} \qquad (1.3.8)
$$

と書いて、同じ和を表現しよう。

より一般的に、k と ℓ を $0 < k < \ell$ を満たす整数とし、

$$\sum_{i,j=k}^{\ell} a_{i,j} := \sum_{i=k}^{\ell} \left(\sum_{j=k}^{\ell} a_{i,j} \right) \tag{1.3.9}$$

のように二重和を定義する。同じ考えで、三重和は

$$\sum_{h,i,j=k}^{\ell} a_{h,i,j} := \sum_{h=k}^{\ell} \left(\sum_{i=k}^{\ell} \left(\sum_{j=k}^{\ell} a_{h,i,j} \right) \right) \tag{1.3.10}$$

と定義できるし、より一般の多重和も定義できる。

■クロネッカーのデルタ　正の自然数 $i = 1, 2, \ldots$ と $j = 1, 2, \ldots$ に対して、**クロネッカー**[*25]**のデルタ** (Kronecker Delta) と呼ばれる量を

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.3.11}$$

[*25] Leopold Kronecker (1823–1891) ドイツの数学者。数論や代数など幅広い分野を結び付けるような業績があるらしい。数学の対象は有限の手続きでつくられるべしとして、無理数を使うことも否定していたというのは、おもしろい。

と定義する。この式は、場合分けによる定義で、$i = j$ と $i \neq j$ どちらの条件が満たされるかに応じて、1 か 0 を採用する。「クロネッカーのデルタ」などと仰々(ぎょうぎょう)しい名前がついているが、要するに、i と j が等しければ 1 で、異なっていれば 0 というだけだ。具体的にみれば、$\delta_{3,4} = 0$, $\delta_{234,234} = 1$, $\delta_{56,1} = 0$ などなど。こんな「ちゃち」なものが、抽象的な理論を進めていく上で実に便利なのだ。

クロネッカーデルタの関わる和の基本的な性質をみておこう。まず、

$$\sum_{i=1}^{M} \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & 1 \leq j \leq M \\ 0 & j > M \end{cases} \tag{1.3.12}$$

が成り立つ[*26]。ぱっと見ると何だかわからないだろうから、たとえば $M = 4$ とでもして、和を具体的に書い

[*26] $\leq$ というのは、$\leqq$ と同じで「等しいかまたは小さい」という意味。何故かはわからないが、大学では、$\leqq$ と $\geqq$ ではなく、$\leq$ と $\geq$ を使う。

てみると、

$$\sum_{i=1}^{4} \delta_{i,j} = \delta_{1,j} + \delta_{2,j} + \delta_{3,j} + \delta_{4,j} \tag{1.3.13}$$

となる。ここで、j がたとえば 2 なら、右辺の四つのデルタのうち $\delta_{2,2}$ だけが 1 になり他は 0 だから、合計は 1 だ。また、j がたとえば 5 なら、四つのデルタはみな 0 になるので、合計も 0。これを一般化すると、(1.3.12) になる。

これをもう一歩進めた便利な関係として、

$$\sum_{i=1}^{M} \delta_{i,j}\, a_i = \begin{cases} a_j & 1 \leq j \leq M \\ 0 & j > M \end{cases} \tag{1.3.14}$$

が成り立つ。(1.3.13) のように $M = 4$ の場合を書き下し、この関係が成立することを確認してみよう。

また二重和と一重和を結び付ける

$$\sum_{i,j=1}^{M} \delta_{i,j}\, a_{i,j} = \sum_{i=1}^{M} a_{i,i} \tag{1.3.15}$$

も成立し、思わぬところで役に立つ。

問 1.3.3.a　二重和の定義 (1.3.9) にもとづいて、(1.3.15) の関係を示せ。

■積の記号　和と同様に、積についても

$$\prod_{i=k}^{\ell} a_i := a_k\, a_{k+1} \cdots a_{\ell-1}\ a_\ell \tag{1.3.16}$$

という書き方を使う。和の (1.3.6) と見比べよう。多重積も多重和と同じように定義できる。

1.3.4　物理における数と単位

ここでは、この本の本文とは関係ないのだが、物理量の単位のあつかいについて注意をしておきたい。

時間にしろ距離にしろ、物理に現れる量は、それをはかる単位を決めてやらなければ決して意味をもたない。高校の物理では、あらかじめ時間の単位は s、距離の単位は m などと決めておき、たとえば、時間を変数 t、

距離を変数 ℓ で表すとき、これらの変数には $t = 3.2$, $\ell = 5.4$ のような単なる数が代入されるとした。そして、これらの数値に単位をくっつけて、3.2 s, 5.4 m のような実際の物理量に焼き直すことになっていた。しかし、物理量というのは、そもそも、数の部分と単位の部分がいっしょになってこそ意味をもつものだ。両者を無理に切り離してしまう取り扱いは、不自然だし、不便である。

大学レベル以上の物理では、物理量は $t = 0.5$ h のように、数値と単位[*27]をかけ合わせたものとして扱う。そして — ここがとくに重要な点だが — とりたてて単位を一つに決めることはせず、$t = 0.5\ \mathrm{h} = 1800\ \mathrm{s} \simeq 0.020833$ days、あるいは $\ell = 35\ \mathrm{cm} = 0.35\ \mathrm{m}$ のように、異なった単位をもった物理量を（もちろん正しい換算を介して）同じものだとみなすのである。ℓ という

*27 「単位」とほぼ同じ意味で「次元」ということも多い。これは、「われわれの暮らす空間は 3 次元」というときの「次元」とはまったく違う意味であることに注意。

長さは、人間や物差しとは無関係に、存在する。それを、たまたまメートルという単位で表現すると 0.35 m であり、たまたまミリメートルという単位で表現すると 350 mm になる、と考えるわけだ。だから、たとえば $v = 36.0$ km/h の速さで $t = 5.00$ min のあいだ進んだときの走行距離は、

$$\ell = v\,t = \frac{36.0\ \mathrm{km}}{\mathrm{h}} 5.00\,\mathrm{min} = 180\,\frac{\mathrm{km\ min}}{\mathrm{h}} = 3.00\,\mathrm{km} \tag{1.3.17}$$

のように計算できる。数の部分と単位の部分を別個に計算して、最後に 1 h = 60 min という換算式を使った。

このように、変数を設定するときも、式を書くときも、物理量は単位を含んでいるものだということをつねに意識し続けるのである。それによって、複数の物理量を組み合わせて新しい量をつくるとき、式を書き下すときに、まちがいを犯す可能性が圧倒的に低くなる。たとえば（初速度 v をもった質量 m の物体に一定の抵抗力 F が働いた際の、物体が静止するまでの移動

距離 ℓ を求める式)

$$\frac{m\,v^2}{2} = F\,\ell \tag{1.3.18}$$

のような式も、かならず両辺の単位が等しいことを確認しながら、書くのである（実際、両辺の単位が等しいことを確かめよ)。こういう注意をすれば、$t+\ell$ のように単位の違うものを足してしまうといった（少なくとも、私などがみると）頭がおかしくなるような式を書くことはなくなるだろう。

さて、これだけの注意をすれば、「この本でも、すべての変数には単位が含まれているとしてあつかう」という宣言がつづくと思われるだろう。私も、何人かの仲間と相談しながら、数学を教える際にも変数に単位を含める可能性について、いろいろと検討してみた。その結果、残念ながら、この本のように物理数学の基礎を教える段階で単位のことまで気にすると、読者を不用意に混乱させてしまうだろうという結論にいたった。というわけで、この本では、x のような文字変数

には、ただの実数や有理数が代入されるものとして話を進めていく。ただし、微分方程式など、物理とのつながりの強い内容を議論するときには、変数が単位をもつ物理的な状況とのつながりをはっきりとさせていきたいと思っている。

いずれにせよ、大学の物理をはじめるにあたって、高校までの物理量の単位のあつかいが不自然なものであったことを認識し、自然なやり方に慣れる努力をしてほしい[*28]。

1.3.5　数値計算、数式処理のソフトについて

計算機を用いた数学の計算や数式処理の技術は今日ではきわめて高いレベルに達している。インターネットにつながっている環境では無料で利用できるシステムもある。ここでは、私が知っている中でもきわめて

[*28] 学習院の物理学科では「一般物理学」の講義で、そういう経験ができるはず。

強力な WolframAlpha® を簡単に紹介しよう。

使用法はいたって簡単である。インターネットにつながっているブラウザーで WolframAlpha® のページ（`https://www.wolframalpha.com/` だが、検索すればすぐにみつかる）にとび、Enter what you want to **calculate** or **know about**: という欄に評価したい表式[*29]を入力し、リターンキーを押すだけである。

いくつかの例題を見ておこう。

- “`1/9801`” と入力すれば[*30]、Decimal approximation:というところに 1/9801 の小数での表現が表示される。面白い形をしている。“More digits” というボタンをクリックすればもっと先の桁まで見られる。何がおきているのだろう？（218 ページの問 2.3.2.a を見よ。）

[*29] 数学の問題だけでなく、“When was Isaac Newton born?” あるいは “What is the speed of sound in water?” みたいな質問にも答えてくれる。

[*30] “や” は入力せず中身だけ入力する。以下も同様。

- “`(2143/22)^(1/4)`”と入力すると $(2143/22)^{1/4}$ つまり 2143/22 の 4 乗根を計算してくれる。結果はちょっと面白い。
- “`(x+1)^4`”は $(x+1)^4$ という意味だ。入力すると、グラフ、展開形、微分、積分まで表示される。
- “`D[Log[x^2+y^2],{x,2}]`”は $\log(x^2+y^2)$ を（y は定数とみなして）x で二回微分せよという意味。
- “`Integrate[Exp[a x] Cos[b x],x]`”と入力すれば (4.2.60) で求める不定積分
  $\int dx\, e^{ax}\cos(bx)$ を計算してくれる。
- “`Matrix{{6,2},{2,3}}`” と入力すると 2×2 行列 $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ についての様々な量を勝手に計算して表示してくれる。もっと次元の大きな行列も
  “`Matrix{{2,9,4},{7,5,3},{6,1,8}}`” のようにして入力できる。

これらの例は WolframAlpha® の強力な機能のごくごく一部を示しているに過ぎない。

このような優れたプログラムが無料で利用できるというのはまったく驚くべきことである[*31]。たとえばこの本の練習問題の多くは WolframAlpha® に適切に入力すれば解けてしまうだろう。といっても、それでは読者自身の理解はほとんど進まないわけだから、バランスを取りながらこういった技術も活用してほしいと思う。

1.3.6　ギリシャ文字の表

大学の数学や物理ではギリシャ文字が用いられることが多い。読み方や書き方が分からないと不便なので、ギリシャ文字を表にしておこう。

ギリシャ文字の小文字、大文字、英語での綴り、日本

[*31] 私は WolframAlpha® のもとになった Mathematica という有料のアプリケーションを 1980 年代の終わり頃から愛用している（最初は Mac 用しかなかった）。

語での定番の読み方を並べて書いてある。ただし、大文字が通常のアルファベットと同じものは省略した。

α		alpha	アルファ
β		beta	ベータ
γ	Γ	gamma	ガンマ
δ	Δ	delta	デルタ
ϵ, ε		epsilon	イプシロン
ζ		zeta	ツェータ、ゼータ
η		eta	イータ
θ	Θ	theta	シータ
ι		iota	イオタ
κ		kappa	カッパ
λ	Λ	lambda	ラムダ
μ		mu	ミュー
ν		nu	ニュー
ξ	Ξ	xi	グザイ、クサイ、クシー
o		omicron	オミクロン
π	Π	pi	パイ

ρ		rho	ロー
σ	Σ	sigma	シグマ
τ		tau	タウ
υ	Υ	upsilon	ウプシロン
ϕ, φ	Φ	phi	ファイ
χ		chi	カイ
ψ	Ψ	psi	プサイ
ω	Ω	omega	オメガ

イオタ ι やウプシロン υ はあまり用いられない。オミクロン o は普通のアルファベットのオーと同じ文字を使っている[*32]。

ファイの二つの字体のうち数学や物理での変数として主に用いられるのは二つ目の φ である。一つ目の ϕ を空集合の記号として用いる風習があるが、本書では空集合は $\emptyset$ で表す。量子力学では ψ と φ が多用される

[*32] そのためオミクロンはギリシャ文字の中でもっとも無名だったと思われる。もちろん、2021 年 11 月より前の話だが。

のだが形も名前も（プサイとファイ）似ていることから言い間違える人が多いので注意[*33]。

[*33] 混乱を避けるための秘伝として（私の知り合いが考案した）「シュレディンガー音頭」というものがある。どうでもいい話だが、気になる人はネットで検索してみよう。

第 2 章

論理、集合、数、関数

この章では、数学を学び使っていくために必要な基本的な素材について、ある程度のページを割いて説明する。2.1 節で、論理、集合をあつかい、2.2 節で、自然数、整数、有理数、実数、複素数という数の概念と数列について述べる。さいごに、2.3 節では無限級数、2.4 節では関数とその極限や連続性をあつかう。

これらの内容は、通常は「数学者の担当」とみなされている部分で、物理数学の教科書にはあまり登場しないようだ。しかし、せっかく数学の世界に皆さんを案内しようというのだから、肝心の最初のところを他人まかせにしたくないと思って、この本には、こういう話も含めることにした。

あつかっている内容は基本的なものだが、ウェイトの置き方は、のちに物理に応用することを考えた結果、普通の（数学の）教科書とはずいぶん違うものになった。また、物理に直結しなくても、「文化的背景」として知っておくべきだと思ったこと（たとえば、$\sqrt{2}$ が有理数でないことや、収束の定義における ε-N 論法）は、ていねいに説明した。

この章は、これから先の章に比べると、数学よりであり、あまり実用的ではない。よって、さしあたって余裕のない読者は、**この章は通読し**

ないでも、先に進んでよい。証明などには深入りせず軽く斜め読みしておいて (あるいは、ほとんど読まずに)、のちに用語や定義が必要になったら読んでみるということでいいだろう。

- **論理的な思考力。**
- **高校で習った基本的な数学。とくに、論理と集合論、数列とその和、複素数、関数。**

2.1　論理と集合

この節では、数学のことばの基本である論理と集合をあつかう。これらのテーマについて深く踏み込んでいくと、予想もしなかった驚きに満ちた世界が広がっていくのだが、さすがに、それをやっていると物理を楽しんでいる暇がなくなってしまう。ここでは、基本的な記号や概念を説明することに主眼をおく。

数学に現れる論理については、高校で、ひととおり学

び、また (証明問題などで) 実践的に使っていると思う。物理について論理的に考えていくためには、数学的な論理が自然に身に付いているのが望ましい。2.1.1 節から 2.1.3 節で命題、述語とそれらの扱いについて解説する。「任意の・・・について、・・・が存在し」といった論理の構成にも慣れておいてほしい。2.1.4 節では初歩的な論理の面白い応用を紹介する。

一方、集合論を物理で本格的に用いる状況というのは、それほど多くない。状況をきちんと整理して説明するための道具として、集合論的な書き方を用いる場合がほとんどだと思う。だから、集合論には深入りせず、2.1.5 節と 2.1.6 節で集合と写像についてのいくつかの概念を復習しておく。おそらく高校では学ばなかっただろう集合の積という考え方は便利である。

2.1.1　命題と真偽

数学的な論理というのは、さまざまな数学的な命題（や述語）のあいだの関係を整理し、前提から正しい結

論を得るための決まりである。

命題 (proposition) とは、大ざっぱにいうと、数学的対象[*1]の数学的性質や、いくつかの数学的対象のあいだの数学的関係について何らかの主張を述べた「文」のことである[*2]。たとえば、“18 は偶数” とか “$123 > 98$” とか “$45 + 32 = 1234$” といったものが命題だが[*3]、“34 はラッキーナンバー” などは（数学的対象の非数学的性質だから）命題ではない。以下、命題を文字で代表させるときは、$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots$ などと書く。

---

*1 数学の対象になるものは多いが、ここでは数、関数、図形などを念頭に置いてもらえればいいだろう。

*2 進んだ注：より厳密に言うと、「命題」というのは「文」そのものではなく「文の示す内容」のことを指すというのが標準的な解釈だそうだ。たとえば、“$2 + 3 = 5$” と “$5 = 2 + 3$” と “2 と 3 の和は 5 に等しい” の三つは、文としては異なっているが命題としては同じものと見なされることが多いという。

*3 “$123 > 98$” は普通の意味での文ではないが “123 は 98 より大きい” ということだから文とみている。“$45 + 32 = 1234$” も “45 と 32 の和が 1234” に等しいということだから文だ。一方、“$45 + 32$” は “45 と 32 の和” と言っているだけで、文ではない。よって、これは命題ではない。

上で挙げた命題に、

$$\mathcal{P}_1 = \text{“18 は偶数”}, \quad \mathcal{P}_2 = \text{“}123 > 98\text{”},$$
$$\mathcal{P}_3 = \text{“}45 + 32 = 1234\text{”} \tag{2.1.1}$$

のように名前をつけると、議論が楽になる。それぞれの命題の内容をみてみよう。明らかに、命題 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ の主張は正しい。このことを、これらの命題は**真** (true) であると言う。一方、命題 $\mathcal{P}_3$ の主張は誤っている。このことを、この命題は**偽** (false) であると言う。同じことを「$\mathcal{P}_1$ が成り立つ」、「$\mathcal{P}_3$ が成り立たない」と、あるいは、より気楽に「$\mathcal{P}_1$ である」、「$\mathcal{P}_3$ でない」などと表現することもある。

物理に使う数学では（あるいは、ほとんどの数学の研究や応用でも）一般に**命題は真であるか偽であるかのどちらか**であると考えていい[*4]。

例として、2 の平方根 $\sqrt{2}$ という数学的対象についての以下のような命題を考えてみよう。なお、$\sqrt{2} =$

[*4] これを排中律という。関連する話題を脚注 *9 で取り上げる。

$1.41421356237309504 88\cdots$ のように $\sqrt{2}$ を十進法の小数で表わしたものを「$\sqrt{2}$ の十進小数展開」と呼ぶ。

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_4 &= \text{“}1 < \sqrt{2} < 2\text{”} \\
\mathcal{P}_5 &= \text{“}\sqrt{2}\text{ の十進小数展開の 1000 桁目までに} \\
&\qquad \text{1 が 4 個連続して並ぶところがある”} \\
\mathcal{P}_6 &= \text{“}\sqrt{2}\text{ の十進小数展開の } 10^{10000} \text{ 桁目までに} \\
&\qquad \text{1 が 10000 個連続して並ぶところがある”}
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

まず、命題 $\mathcal{P}_4$ が真であることは、$\sqrt{2}$ が近似的に 1.414 に等しいことを知っていれば即座にわかる[*5]。命題 $\mathcal{P}_5$ は手計算ではどうしようもないが、計算機を使って十進小数展開を 1000 桁目まで計算してじっとにらめば真偽が定まる。やってみると、小数点以下 952 桁目から 1 が 4 個連続して並んでいる。よって命題 $\mathcal{P}_5$ は真である。私は命題 $\mathcal{P}_6$ が真か偽か知らないし、知って

[*5] あるいは、$1^2 = 1$ と $2^2 = 4$ に注目すれば、「二乗して 2 になる数」が 1 より大きくて 2 より小さいことが分かる。これを丁寧に述べれば証明になる。

いる人も（おそらく）いない。これは、数が大きくなっただけで命題 $\mathcal{P}_5$ とまったく同じ構造の命題なので、10^{10000} 桁目までの十進小数展開を計算しさえすれば真偽は確定する。しかし、そんな計算は実際問題として不可能だろうし、そもそも膨大な計算をしてまで命題 $\mathcal{P}_6$ の真偽を知る意味があるとは思えない。それでも、この命題は真か偽かいずれかであることは明らかだと思う。以上の三つは、いずれも（原理的には）有限の計算だけで真偽が確定する[*6]命題だった。

さらに、以下のような命題を考えてみよう。

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_7 &= \text{“}\sqrt{2}\text{ の十進小数展開は限りなく続く”} \\
\mathcal{P}_8 &= \text{“}\sqrt{2}\text{ の十進小数展開で、1 が 1 兆個} \\
&\qquad \text{連続して並ぶところがある”} \\
\mathcal{P}_9 &= \text{“}\sqrt{2}\text{ の十進小数展開には 1 が全体の} \\
&\qquad \text{ちょうど 10 分の 1 の割合で現われる”} \qquad (2.1.3)
\end{aligned}$$

[*6] 単純に計算しさえすればいつかは必ず真か偽かがわかるし、最大でもどれだけの計算が必要かが事前にわかっているということ。

これらは、前の三つほど単純ではない。命題 $\mathcal{P}_7$ の真偽を調べようと思ったらどうするだろう？　巨大な計算機で $\sqrt{2}$ の十進小数展開をひたすら求めていくというのが一手だ。そして、（ものすごい桁数を計算したところで）展開が終わって $\sqrt{2}$ がピタリと有限の小数で表されれば、命題 $\mathcal{P}_7$ は偽だったとわかる。しかし、ものすごくたくさん計算してもずっと小数が続いたときはどう考えればいいだろう？　命題 $\mathcal{P}_7$ が真で展開に終わりがないのかもしれないし、実は、もう少しがんばると展開がピタリと終わるのかも知れない。これでは、命題 $\mathcal{P}_7$ は真だとも偽だとも言えない。上の命題 $\mathcal{P}_5$ の場合は、ともかく 1000 桁目まで計算すればそれで白黒がついたが、今度はそういう桁数の上限はないのだ。実際には、命題 $\mathcal{P}_7$ は真であることがわかっている。つまり、展開は決して終わらず限りなく続くのだ。これは計算機で十進小数展開を計算したのでは決して証明できない事実であることに注意しよう。実際

の証明はそれほど難しくない[*7]。

命題 $\mathcal{P}_8$ もよく似ている。ともかく計算機ですさまじい桁数の十進小数展開を計算し、1 が 1 兆個連続しているところをみつければ、それで真であることがわかる。しかし、偽であるとすると、それを単なる計算で示すことはできない。私の知るかぎりこの命題の真偽は未だに知られていない。おそらく真だと予想されるが、実際問題として、それを数値計算で示すのは不可能だろう。

命題 $\mathcal{P}_9$ はさらに「上級」である[*8]。これは無限に続く十進小数展開に関する性質なので、真であろうと偽であろうと、単なる計算で確かめることは決してでき

[*7] 156 ページの定理 2.7 で「$\sqrt{2}$ は無理数である」ことを証明する。それによって十進小数展開が無限に続くことが分かる(何故か考えてみよう)。

[*8] この命題をもう少し正確に述べると「$\sqrt{2}$ の十進小数展開の N 桁目までに現れる 1 の個数を N_1 とすると、$\lim_{N\to\infty} N_1/N = 1/10$ が成り立つ」ということである(lim の正確な意味については 2.2.3 節で詳しく述べる)。

ない。この命題が真であるか偽であるかを知るには、何らかの「賢い論法」を用いた証明が必要なのである。命題 $\mathcal{P}_9$ は膨大な数値計算の結果などから真であろうと予想されている。しかし、今のところ、その証明はないそうだ。

このように、$\sqrt{2}$ に関する命題だけを見ても、人類が未だに真偽を知らない命題は無数にある。それらの中には、「その気になって調べさえすれば（原理的には）真偽が分かる」命題 $\mathcal{P}_6$ のようなものもあれば、「何らかの賢い証明をみつけるまでは真偽が分からない」命題 $\mathcal{P}_9$ のようなものもある。このような命題にしても、人類が知るかどうかとは無関係に、真であるか偽であ

るかが確実に定まっていると考えるのである[*9]。

2.1.2　命題のあつかい

いくつかの命題から出発し、それらを「加工」したり組み合わせたりすることで新しい命題をつくること

[*9] **普通の人は無視してよい注意：**しかし、数学における論理について深く考えていくとかならずしも「どんな命題でも真か偽かが定まっている」と気楽に言い切れなくなることがわかっている。本書でこういった「論理の深い部分」に踏み込むつもりはない（そもそも私も解説できるほど理解していない）が、せっかくなのでごく簡単に説明しよう（もちろん、この部分はプロに助けてもらって書いたわけだが、それでもプロの目から見ると不十分な説明だと思う）。要するに、なにをもって「命題が真」であるとみなすかという定義の問題を考えようということだ。

たとえば、構成主義と呼ばれる（割と極端な）立場がある。構成主義（の最も有名な解釈の一つである BHK 解釈）では、ある命題 $\mathcal{P}$ が真であるのは、$\mathcal{P}$ の「具体的な」証明が与えられたときだと定義する。そうすると、ある命題 $\mathcal{P}$ とその否定 $\overline{\mathcal{P}}$（すぐ先を見よ）のどちらについても「具体的な」証明が存在しないときには、$\mathcal{P}$ は真だとも偽だとも言えないことになる。

ができる。ここではそのような規則についてまとめる。

読者は、この節の議論はあまりに形式的で「何がやりたいのか分からない」と感じるかもしれない。それはもっともなことだが、こういった（いっけんすると

もっと有名なのはゲーデルの不完全性定理だろう。ゲーデルの第一不完全性定理は「ある条件を満たす形式的体系（公理と推論規則を合わせたもの）には、（その体系の中では）証明することも反証することもできない命題 $\mathcal{G}$ が存在する」ことを主張する。この主張をそのまま「真とも偽とも定まらない数学的な命題がある」と解釈していいかどうかは簡単な話ではない。実際、具体的なモデル（数理論理学での「モデル」とは、ある形式的な体系の忠実な具体例となる数学の体系のことをいう）を決めれば、命題 $\mathcal{G}$ の真偽は（形式的体系のなかでの証明とは別の方法で）決めることができる。一方で、形式的体系がある条件を満たすならば、命題 $\mathcal{G}$ が真になるようなモデルも、命題 $\mathcal{G}$ が偽になるようなモデルも存在することが知られている。ほとんどの読者が激しく混乱しているだろうが、「どんな命題でも真か偽かが定まっているはずだ」と天真爛漫に言い切れないことだけは確かなようだ。

なお、本文で例に挙げた自然数についての命題（たとえば、命題 $\mathcal{P}_9$）が、ここで書いたような意味で「真とも偽とも定まらない」命題なのかどうかはまた別の（難しく、また未解決の）問題である。

当たり前のような）議論を積み重ねて行くときわめて深い世界が広がって行くのだ。特に、ここで定義する命題についての演算は 2.1.3 節で述語を扱かうときに

ところで、以下はまったくの蛇足なのだが（そして、蛇足を付け加えるのをやめられないのが私の性分なのだが)、ゲーデルの定理を持ち出して「世界は不完全だ」とか「人類の理性には限界がある」とか「言葉では表わされない何物かがあることが証明された」といったことを語る人がたくさんいるのだが、そういう人たちはゲーデルの結果について何も分かっていないと考えていい。ゲーデルの定理について無理解のまま何かを語るのは危険だから是非ともやめた方がいいと思う（実は私も理解していない。よって、この脚注は是非とも・・・)。

不完全性定理については、質の低い解説が多くでまわっていることも有名だ。web 上の解説など（私が見ても）首をかしげるようなものが多いし、専門家によると（たとえば、`http://taurus.ics.nara-wu.ac.jp/staff/kamo/shohyo/logic`
有名出版社から出されている入門書の類にも間違っているものが少なくないらしい。(専門家とはほど遠い）私が読んだ範囲でおすすめできるのは、野崎昭弘「不完全性定理 — 数学的体系のあゆみ」(ちくま学芸文庫)、結城浩「数学ガール/ゲーデルの不完全性定理」(ソフトバンククリエイティブ）である。また、トルケル・フランセーン「ゲーデルの定理 — 利用と誤用の不完全ガイド」(みすず書房）は、かなり上級者向きだが興味深い本だ。

本当の威力を発揮するので、その準備も兼ねていると思って読んでいただきたい。

以下では、$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ を一般の命題とする。一般の命題というのは、これらに好き勝手な具体的な命題を代入してよいということである。以下では、もとの命題 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, ... の真偽に応じて、これらから新しく作られる命題の真偽がどうなるかを中心に考える。

■否定　一般の命題 $\mathcal{P}$ に対して、その否定、つまり「$\mathcal{P}$ でない」を表わす命題を $\overline{\mathcal{P}}$ あるいは $\neg\mathcal{P}$ と書く。たとえば、$\mathcal{P}$ = “$3 \geq 2$” ならば $\overline{\mathcal{P}}$ = “$3 \geq 2$ ではない” = “$3 < 2$” ということである。

当然だが、$\mathcal{P}$ と $\overline{\mathcal{P}}$ の真偽はちょうど反対になる。もし $\mathcal{P}$ が真ならば $\overline{\mathcal{P}}$ は偽であり、逆に $\mathcal{P}$ が偽ならば $\overline{\mathcal{P}}$ は真である。このような真偽の対応関係を

$\mathcal{P}$	$\overline{\mathcal{P}}$
T	F
F	T

(2.1.4)

という**真偽表**（あるいは真理値表）を使って表現する。

ここでは、T が「真」、F が「偽」を表わす[*10]。たとえば 1 行目は $\mathcal{P}$ が T で $\overline{\mathcal{P}}$ が F ということを表わしている。真偽表では、命題の中身にはまったく踏み込まず、命題の真偽だけを形式的に問題にしていることに注意しよう。

命題 $\overline{\mathcal{P}}$ をさらに否定した「$\overline{\mathcal{P}}$ でない」という命題を $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ と書こう。上の真偽表の $\mathcal{P}$ のところを $\overline{\mathcal{P}}$ で置き換えればわかるように (というより、そもそも当たり前のなのだが)、$\mathcal{P}$ が真のときには $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ も真だし、$\mathcal{P}$ が偽のときには $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ も偽である。つまり、$\mathcal{P}$ がどんな命題だろうと、$\mathcal{P}$ と $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ の真偽は完全に一致する。この事実を、$\mathcal{P}$ と $\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ は**同値** (equivalent)（あるいは、論理同値）であるといい、両者を $\equiv$ で結んで、

$$\mathcal{P} \equiv \overline{\overline{\mathcal{P}}} \tag{2.1.5}$$

[*10] ○と×でもいいのだが、「○が正解で、×は不正解」というルールは国際標準ではない。

と表わす[*11]。

このように、二つの一般的な命題[*12]の（論理）同値性は、元の命題の真偽のすべての可能なパターン（この場合は二通り）について、二つの命題の真偽が一致するということで形式的に定義する。ここでも命題の中身はまったく考えていないことに注意しよう。

ここで、$\mathcal{P}$ として、たとえば $\mathcal{P} =$ “$3 \geq 2$” のように具体的な命題を考えてみよう。$\overline{\overline{\mathcal{P}}}$ は、“「$3 \geq 2$ ではない」ではない”、つまり、“$3 < 2$ ではない”、つまり、“$3 \geq 2$” を表わしていることになるから、もとの $\mathcal{P}$ と全く同じである。つまり、論理同値な二つの命題（の表式）に具体的な命題を代入すると、両者はまったく

[*11] 命題の（論理）同値を $\Leftrightarrow$ という記号で表わすこともある。本書では $\Leftrightarrow$ は述語の同値性（2.1.3 節）と具体的な命題の真偽が等しいことを表わすのに用いる。

[*12] あるいは、「一般的な命題の表式」というほうが正確だろう。この本では具体的な命題については同値とは言わない。たとえば、“$2 \geq 1$” と “4 は偶数” はどちらも真だが、“$2 \geq 1$” $\equiv$ “4 は偶数” とは書かない（“$2 \geq 1$” $\Leftrightarrow$ “4 は偶数” とは書く）。

同じ内容を表わすのだ。この性質は一般的に成立する。(2.1.5) の同値性はあまりに当たり前なので、少し先のド・モルガンの法則 (2.1.13), (2.1.14) などを例に考えてみるのがいいだろう。

■「かつ」、「または」　二つの一般の命題 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ から「$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ が両方とも真」という新しい命題をつくることができる。これを $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ と書き、「$\mathcal{P}$ かつ $\mathcal{Q}$」と読む。同様に、「$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の少なくとも一方が真」という命題を、$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ と書き「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」と読む[*13]。

[*13] 日常語で「ビアンカまたはフローラと旅に出る」と言えば、ビアンカかフローラのうちのどちらか一方と旅に出るという意味で、ビアンカとフローラの両方を誘って三人でわいわいと旅に出ることは含まれない。数学用語の「$\mathcal{P}$ または $\mathcal{Q}$」とは異なっていることに注意。それに対し、「$\mathcal{P}$ かつ $\mathcal{Q}$」の方は、日常語と数学での用法がほぼ同じである。

これらを真偽表に表すと、それぞれ、

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(2.1.6)

となる。ここでは、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の真偽の組み合わせに応じて、真偽表の場合分けが四通りになっていることに注意。真偽表を書く際には一般の命題が取りうる真偽のパターンを全て尽くすのである。

一般の命題 $\mathcal{P}$ について、命題 $\mathcal{P} \vee \overline{\mathcal{P}}$ は必ず真であり、命題 $\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{P}}$ は必ず偽である。これらは、真偽表を書けばすぐに示される。必ず真になる命題を恒真命題、必ず偽になる命題を矛盾命題と呼ぶ。

問 2.1.2.a　実際に真偽表を書いて、上の事実を示せ。

真偽表を書いて見ればわかるように、二つの命題 $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$ の真偽は（四通りの場合について）完

全に一致する。同様に、$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$ の真偽も完全に一致する。この事実は同値（論理同値）の記号を用いて、

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \ \equiv\ \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \ \equiv\ \mathcal{Q} \vee \mathcal{P} \tag{2.1.7}$$

と書ける。直感的にも、「かつ」、「または」の概念は命題を並べる順番に依存しないので、これは当たり前である。また、これも当然だが、

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{P} \ \equiv\ \mathcal{P}, \quad \mathcal{P} \vee \mathcal{P} \ \equiv\ \mathcal{P} \tag{2.1.8}$$

である。

$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ を一般の命題とする。真偽表を書けばわかるように（あるいは、ほぼ当たり前だが）

$$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \ \equiv\ \mathcal{Q} \wedge (\mathcal{R} \wedge \mathcal{P}) \ \equiv\ \mathcal{R} \wedge (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \tag{2.1.9}$$

である[*14]。これら三つの命題が同値（同じもの）なので、これらをまとめて $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}$ と書くことにする。

[*14] () の意味は普通の演算の場合と同じで、() の中身をひとまとまりの命題と考えよということ。

自然な記法だろう。四つ以上の命題の「かつ」についても同様に定義する。

$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$ など、複数の命題を「または」で結んだものも、同様の考えで定義できる。

問 2.1.2.b　しかし、命題 $\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$ と $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}$ は、全く別物であることを（真偽表を書くか、具体例を作るかで）確認しておこう。無闇にかっこを外してはいけない点は、普通の計算と同じである。

問 2.1.2.c　一般の命題 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ について、分配則

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) &\equiv (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R}), \\ \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) &\equiv (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

が成り立つことを示せ。これらの関係を言葉で解釈し、もっともらしいことを納得せよ。

問 2.1.2.d　一般の命題 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ について、

$$\mathcal{P} \equiv (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}) \tag{2.1.11}$$

が成り立つことを示せ。

■ド・モルガンの法則　否定、「かつ」、「または」を組み合わせることで、**ド・モルガン**[*15]**の法則** (De Morgan's laws) と呼ばれる美しい結果を定式化することができる。当たり前だと思う人にとってはまったく当たり前なのだが、こういう地道な定式化が後々のより複雑な話につながっていくのだ。

二つの一般の命題 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ について、$\overline{\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}}$ と $\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}}$ の真偽を調べてみよう。$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ の真偽の四通りについ

[*15] Augustus de Morgan (1806–1871) イギリスの数学者。ド・モルガンの法則や数学的帰納法を定式化した。

て、真偽表を書くと、

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\overline{\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}}$
T	T	T	F
T	F	T	F
F	T	T	F
F	F	F	T

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\overline{\mathcal{Q}}$	$\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}}$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(2.1.12)

となり、$\overline{\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}}$ と $\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}}$ の真偽は完全に一致する。直感的に考えても、「『$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の少なくとも一方が成り立つ』のではない」ことと「『$\mathcal{P}$ が成り立たず』かつ『$\mathcal{Q}$ が成り立たない』」ことが同じというのは明らかだろう(ややこしいので、ゆっくり読んでください)。

ほぼ同様にして示されるもう一つの関係とあわせて

$$\overline{\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}} \equiv \overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}} \tag{2.1.13}$$

$$\overline{\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}} \equiv \overline{\mathcal{P}} \vee \overline{\mathcal{Q}} \tag{2.1.14}$$

を、ド・モルガンの法則という。

問 2.1.2.e　(2.1.14) を真偽表を作って示せ。また、これが直感的にももっともらしいことを説明せよ。

ド・モルガンの法則は命題が二つより多いときにも自然に拡張できる。$n = 1, 2, \ldots$ を任意の自然数とする。n 個の一般の命題 $\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ について、

$$\overline{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_n} \equiv \overline{\mathcal{P}_1} \wedge \overline{\mathcal{P}_2} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathcal{P}_n} \quad (2.1.15)$$

$$\overline{\mathcal{P}_1 \wedge \mathcal{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}_n} \equiv \overline{\mathcal{P}_1} \vee \overline{\mathcal{P}_2} \vee \cdots \vee \overline{\mathcal{P}_n} \quad (2.1.16)$$

が成り立つ。これも直感的にもっともらしいだろう。たとえば一つ目の関係は、「『$\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ の中の少なくとも一つは真』ではない」ことが「$\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ はすべて偽」と同じだと言っている。

命題が n 個になると真偽のパターンは 2^n 通りあるので、真偽表を地道に書いて (2.1.16) を示すのは不可能だ。こういうときは数学的帰納法を使うのが常套手段だ。

(2.1.15) の証明：$n = 2$ のときの関係は (2.1.13) で示されている。$n = k - 1$ について (2.1.15) が成り立つと仮定する。$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_{k-1}$ および $\mathcal{Q} = \mathcal{P}_k$ と書き、(2.1.13) を使うと、

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_k} &= \overline{\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}} \ \equiv\ \overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}} \\ &= \overline{\mathcal{P}_1 \vee \mathcal{P}_2 \vee \cdots \vee \mathcal{P}_{k-1}} \wedge \overline{\mathcal{P}_k} \\ &\equiv\ \overline{\mathcal{P}_1} \wedge \overline{\mathcal{P}_2} \wedge \cdots \wedge \overline{\mathcal{P}_{k-1}} \wedge \overline{\mathcal{P}_k}\end{aligned} \tag{2.1.17}$$

となる[*16]。最後は $n = k - 1$ のときの関係を使った。こうして $n = k$ のときの求める関係が得られたので、(後は数学的帰納法の一般論に従って) (2.1.15) が任意の $n = 2, 3, \ldots$ について示された。 ∎

問 2.1.2.f (2.1.16) を証明せよ。また、この関係を直感的に分かるように説明せよ。

[*16] 式変形で、単なる書き換えや代入の部分には $=$ を使い、命題の同値性を使ったところには $\equiv$ を使った。すべて $\equiv$ を使ってもかまわない。

■含意　これから述べる**含意**(がんい) (implication) が (少なくともこの段階では) もっとも分かりにくい。無理に説明しようとせず、ともかく定義を書いてしまおう。

$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を一般の命題とする。これらをもとに、真偽表

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(2.1.18)

で定まる命題 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ を定義する。これは、$\mathcal{P}$ の真偽で分けてみるとわかりやすい。まず、$\mathcal{P}$ が真のときには、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ の真偽は $\mathcal{Q}$ の真偽と完全に同じ。一方、$\mathcal{P}$ が偽のときには、$\mathcal{Q}$ がなんだろうと $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ は真とするのだ。また、まったく同じ命題を $\mathcal{Q} \Leftarrow \mathcal{P}$ とも書く。

命題 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ は通常「$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$」あるいは「$\mathcal{P}$ は $\mathcal{Q}$ を含意する」と読む。実際、$\mathcal{P}$ が真であり、かつ、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ も真であれば、真偽表 (2.1.18) から、$\mathcal{Q}$ が必ず真であることがわかる。たしかに、「$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$」と

いうことになる。

そうはいっても、日常的な感覚では「ならば」というのは何らかの因果関係を表わす言葉なので、単に二つの命題を並べて「ならば」と言われても意味がよくわからないのも事実だ。たとえば、命題「“$2+3=5$” ならば “三角形の内角の和は 180 度”」は（「ならば」の前後の命題はどちらも真だから）真ということになる。けれど、内角の和が 180 度になるのは三角形の性質であって $2+3=5$ の「おかげ」ではないので、この文章は奇異にみえる。あるいは、命題「“$2+3=18$” ならば “円周率は 4 より大きい”」も（「ならば」の前後の命題はどちらも偽だから）真ということになるが、やはり感覚的には変である[*17]。

このような、「ならば」の定義 (2.1.18) と日常的感覚のずれについては、差し当たっては、無理に納得しよ

[*17] ただし、日常会話でも「君が 100 m を 5 秒で走れるなら俺は将棋の九冠なれるぜ」のように、$\mathcal{P}$ があり得ないことだったら $\mathcal{Q}$ は何でもありというところはある。

うとせず「数学ではこう定義する」と割り切っておくのがいいと思う。実は、この先で述語についての含意を考えると、「ならば」の意味はもう少し普通の感覚に近づいてくる（103 ページを見よ）。

以下の二つの問題は解くのは容易だが深い意味をもっているので時間をかけてなっとくしてほしい。

問 2.1.2.g　$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \equiv \overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q}$ であることを示せ(真偽表を吟味すればよい)。

問 2.1.2.h　$\overline{\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}} \equiv \mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{Q}}$ であることを示せ。言葉で書けば、「『$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$』ではない」ということは「$\mathcal{P}$ かつ『$\mathcal{Q}$ ではない』」と同じということで、これは日常感覚でもなっとくできる。

■三段論法　$\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}$ を一般の命題とする。少し面倒だが、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$ の真偽表を書いてみよう。元の命題が三つあるから真偽のパターンは 8 通

りで、以下のようになる。

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$
T	T	T	**T**	**T**	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	**T**	**T**	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	**T**	**T**	T
F	F	F	**T**	**T**	T

(2.1.19)

この表の中で、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ と $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$ がどちらも真になるところだけを見ると（該当する **T** を太字にした)、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}$ もかならず真になっていることがわかる。よって、含意の定義を思い出して落ち着いて考えれば、

$$\big\{(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})\big\} \;\Rightarrow\; (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R}) \qquad (2.1.20)$$

が成り立つことがわかる[*18]。「『$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$』かつ『$\mathcal{Q}$

[*18] 式中の括弧は（普通の式の場合と同様に）命題のまとまりを示している。

ならば $\mathcal{R}$』ならば『$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{R}$』」ということだ。いわゆる三段論法であり、日常言語の感覚でももっともらしい。

(2.1.20) をくり返し用いれば、n 個の命題 $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ について、

$$\begin{aligned}&\big\{(\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2) \wedge (\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_3) \wedge \cdots \wedge (\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n)\big\}\\ &\Rightarrow\ (\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_n) \qquad (2.1.21)\end{aligned}$$

が成り立つこともわかる。意味は明らかだろう。

(2.1.21) は数学における証明の標準的な方法を抽象的に表わしたものと見ていい。命題 $\mathcal{P}_n$ が真であることを証明するのが目標だとしよう。$\mathcal{P}_1$ は真であることがわかっている命題、あるいは、考えている状況で真になる命題とする。そして、公理や既に知られている定理を用いて、$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_3$, …, $\mathcal{P}_{n-1} \Rightarrow \mathcal{P}_n$ の各々が真であることを示す。すると、$\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_n$ が真とわかるが、$\mathcal{P}_1$ が真であることから、$\mathcal{P}_n$ が真といえる。

さらに、ほぼ当たり前だが、$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$ を一般の命題

とするとき、

$$\big\{(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})\big\} \;\equiv\; \big\{\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})\big\} \tag{2.1.22}$$

$$\big\{(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})\big\} \;\equiv\; \big\{\mathcal{P} \Rightarrow (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})\big\} \tag{2.1.23}$$

が成り立つ。これらを示すのは簡単でわざわざ真偽表を書く必要もない[*19]。

■逆命題と対偶命題　命題 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ に対して、$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ を逆命題という。$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ の真偽のパターンについて、$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ の真偽表 (2.1.18) をもとに命題と逆命題の真偽表を書くと、

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

(2.1.24)

[*19] $\mathcal{P}$ が偽なら、$\mathcal{P} \Rightarrow$ “なにか” という命題はすべて真。$\mathcal{P}$ が真なら、たとえば $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ の真偽は $\mathcal{Q}$ の真偽と完全に一致する。これらに注意すれば、上の関係はすぐに示せる。

となる。当然だが、命題 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ と逆命題 $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ の真偽は完全には一致しない。

命題と逆命題がともに真であること、つまり $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \Leftarrow \mathcal{Q})$ という命題を $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ と書く。(2.1.24) をもとに真偽表を書けば、

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

(2.1.25)

となる。つまり、(具体的な命題 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ について) $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ が真ということは、$\mathcal{P}$ と $\mathcal{Q}$ の真偽が一致していることを意味する。

命題 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ に対して、$\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}$ を対偶命題という。実は、対偶命題はもとの命題と同値、つまり

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \equiv (\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}) \tag{2.1.26}$$

である。これは、$\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}$ の真偽表

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\overline{\mathcal{P}}$	$\overline{\mathcal{Q}}$	$\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}}$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	T
F	F	T	T	T

(2.1.27)

を作り、命題 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ の真偽表 (2.1.18) と比較してみれば明らかである。この性質は実際の証明でも大いに役に立つし、次に見る背理法の基礎でもある。

ある命題とその対偶命題が同値であることは、ある程度は、直感的にも納得できる。例えば、「人間ならば動物だ」は真であり、その対偶命題の「動物でなければ人間ではない」も真であって要するに同じことを言っている[*20] しかし、少し話がややこしくなってくると、命題と対偶命題が直感的には随分と違って感じられる

[*20] 一方、(よく出てくる例だが)「叱られないと勉強しない」の対偶命題が「勉強すると叱られる」だと考えてしまうと変だ。どう考えても二つの言明は同値ではない。

こともある。以下の問題を吟味してほしい。

問 2.1.2.i　以下の命題の真偽を判定せよ。
(a) ある正の整数が偶数でないなら、その数は 14 の倍数ではない。
(b) 二つの整数の和が 4 でないならば、二つの整数のうちの少なくとも一つは 2 ではない。
(c) 三つの硬貨の金額の合計が 150 円未満ならば、少なくとも一つの硬貨は 50 円未満である。

問 2.1.2.j　ある夏の水泳教室の出欠を調べたところ「A 君が出席していた日には必ず B 君は欠席していた」ことがわかった。このことから「B 君が出席していた

話がおかしくなるのは、日常的な表現には時間順序（あるいは因果関係が）が暗に含まれていることがある一方、「・・ならば・・」という論理での含意にはそういう要素はないからだ。時間を明示して、たとえば「午前中に叱られなかったなら、午後は勉強しない」という命題を考えれば、その対偶は「午後に勉強しているなら、午前に叱られた」あるいは「午後に勉強しているということは、午前に叱られたのだな」となって、確かに元の命題と同値になっている。

日には必ず A 君は欠席していた」と結論できるだろうか？　なお、この水泳教室には欠席か出席しかないものとする。

■背理法　高校でも**背理法**と呼ばれる証明の方法を学んだと思うが、ここで抽象的な形で述べておこう。

定理 2.1 (背理法)**.** $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ を（一般の命題ではなく）具体的な命題とする。$\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \mathcal{Q}$ と $\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ がどちらも真ならば、命題 $\mathcal{P}$ は真である。

高校では、「証明したい結論の否定（つまり $\overline{\mathcal{P}}$）から出発して矛盾を導く」と学んだと思う。ここでも、「$\overline{\mathcal{P}}$ から $\mathcal{Q}$ とその否定 $\overline{\mathcal{Q}}$ がともに導かれる」と言っているので、やはり矛盾が導かれている。

証明：仮定と (2.1.22) より $\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow (\mathcal{Q} \wedge \overline{\mathcal{Q}})$ が真だから対偶命題の $\overline{\mathcal{Q} \wedge \overline{\mathcal{Q}}} \Rightarrow \mathcal{P}$ も真である。左側にド・モルガンの法則 (2.1.14) を適用することで、$(\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{Q}}) \Rightarrow \mathcal{P}$ が真とわかる。ところが $\mathcal{Q} \vee \overline{\mathcal{Q}}$ は恒真命題だから、含

意（ならば）の定義 (2.1.18) により $\mathcal{P}$ が真とわかる。
∎

定理 2.1 が背理法の基本だが、実際の証明のことを考えると以下のように定式化しておくのが便利だ。

定理 2.2 (背理法)**.** $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}_1$, $\mathcal{Q}_2$ を具体的な命題とする。$(\mathcal{Q}_1 \wedge \overline{\mathcal{P}}) \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}_2}$ が真ならば $(\mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2) \Rightarrow \mathcal{P}$ が真である。

これは（数学の文献では）よく見かける論法である。通常は、「条件 $\mathcal{Q}_1$ と $\mathcal{Q}_2$ が成り立つときに $\mathcal{P}$ が成り立つ」ことを証明するために、「まず逆の $\overline{\mathcal{P}}$ を仮定し、条件 $\mathcal{Q}_1$ と組み合わせると、$\mathcal{Q}_2$ が成り立たないことが言える。これは矛盾なので $\mathcal{P}$ が成り立つ」という書き方をする。

証明：真偽表を書いてもいいが、問 2.1.2.g で示した関係 $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \equiv \overline{\mathcal{P}} \vee \mathcal{Q}$ に注意し、またド・モルガンの

法則を適切に使うと、

$$
\begin{aligned}
\{(\mathcal{Q}_1 \wedge \overline{\mathcal{P}}) \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}_2}\} &\equiv \overline{(\mathcal{Q}_1 \wedge \overline{\mathcal{P}})} \vee \overline{\mathcal{Q}_2} \\
&\equiv (\overline{\mathcal{Q}_1} \vee \mathcal{P}) \vee \overline{\mathcal{Q}_2} \\
&\equiv \overline{\mathcal{Q}_1} \vee \overline{\mathcal{Q}_2} \vee \mathcal{P} \\
&\equiv (\overline{\mathcal{Q}_1} \vee \overline{\mathcal{Q}_2}) \vee \mathcal{P} \\
&\equiv \overline{(\mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2)} \vee \mathcal{P} \\
&\equiv \{(\mathcal{Q}_1 \wedge \mathcal{Q}_2) \Rightarrow \mathcal{P}\} \qquad (2.1.28)
\end{aligned}
$$

のように、二つの含意が同値であることが示される。∎

せっかくなので、背理法を用いた証明の有名な例と

して[*21]、ユークリッド[*22]による素数は無限個あるという定理の証明をみておこう。

ご存知のように、自然数 $1, 2, \ldots$ のなかで、自分自身と 1 以外では割り切れない数を**素数** (prime number) と呼ぶ。素数を小さいほうから並べると、$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 \ldots$ という具合だ。素数と 1 以外の自然数は（$18 = 2 \times 3 \times 3$ のように）かならず複数の素数の積に分解される[*23]。

定理 2.3. 素数の個数に限りはない。

[*21] ただし、この証明は、背理法で述べると単に見通しがよいだけで、背理法を用いずに定式化することもできる。これに対して、2.2.4 節で述べる「有界単調な数列は必ず収束する」という定理 2.14（181 ページ）は、背理法をまったく用いずに証明することはできないことが知られているそうだ（私は理解していない）。

[*22] Euclid (325 BC??–270 BC??) ギリシャの偉大な幾何学者。あまりに有名な「原論」において、公理的な幾何学を展開し、数学における一つの規範をつくった。ユークリッドの互除法やピタゴラスの定理の証明などでも知られる。

[*23] 証明はそれほど難しくない。

証明：$\mathcal{P}$ = “素数は限りなく多い” を証明したい。

背理法を使うべく、$\overline{\mathcal{P}}$ = “素数は有限個しかない” が真だと仮定しよう。有限個しかないから、すべての素数を $2, 3, 5, 7, 11, \ldots, M$ のように小さい方から順に列挙できる。M は最大の素数である。ここで

$$N = (2 \times 3 \times 5 \times \cdots \times M) + 1 \tag{2.1.29}$$

という整数を定義する。$N > M$ であり M は最大の素数なのだから $\mathcal{Q}$ = “N は素数ではない” が真。つまり、$\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \mathcal{Q}$ がいえた。

一方、定義 (2.1.29) からして、N はどの素数で割っても 1 余る。素数と 1 以外の自然数はかならずいずれかの素数で割りきれるから[*24] N は素数ということになる。つまり、$\overline{\mathcal{Q}}$ = “N は素数である” は真であり、$\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ が言えたことになる。

[*24] 定義より、素数と 1 以外の自然数は、自分自身と 1 以外の数で割りきれる。ところが、この割り切る数も素数の積に分かれるから、「素数と 1 以外の自然数はいずれかの素数で割りきれる」ことがわかる。

$\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \mathcal{Q}$ と $\overline{\mathcal{P}} \Rightarrow \overline{\mathcal{Q}}$ がどちらも言えたので、定理 2.1 より、$\mathcal{P}$ は真である。▮

2.1.3　述語と命題

述語 (predicate) とは、大ざっぱにいうと「変数を含んだ命題」のことである。述語を組み合わせて新しい述語をつくり、また述語をもとに命題をつくることで、論理の世界が劇的に豊かになることをみよう。

■述語　抽象的な数学では、2 や $\sqrt{3}$ といった値の定まった数だけでなく、ある定められた範囲内の値をとれる量、つまり変数を頻繁に用いる。以下では、x を変数とする。特に断らないかぎり、x は実数の範囲で勝手な値をとるとしよう。

変数 x の数学的性質について述べた文

$$\mathcal{P}(x) = \text{“}3 \leq x \leq 12\text{”}, \quad \mathcal{Q}(x) = \text{“}x = 9\text{”} \quad (2.1.30)$$

は、命題と似た形をしているが、命題ではない。文が

扱っている数学的対象が定まっておらず、このままでは真偽が定まらないからだ。このような「変数が入っている命題」を**述語** (predicate) と呼ぶ[*25]。

$\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ のような述語の変数 x に具体的な実数を代入すれば、命題がつくられる。たとえば、命題 $\mathcal{P}(4)$, $\mathcal{P}(\pi)$, $\mathcal{Q}(9)$ は真で、命題 $\mathcal{P}(-4)$, $\mathcal{Q}(10)$ は偽である。このような命題の真偽は、一番左側の列に x の範囲を記入した真偽表

	$\mathcal{P}(x)$	$\mathcal{Q}(x)$
$x < 3$	F	F
$3 \leq x < 9$	T	F
$x = 9$	T	T
$9 < x \leq 12$	T	F
$12 < x$	F	F

(2.1.31)

[*25] なぜ「述語」と呼ぶのか私はちゃんと理解していない。「x は 9 である」という文は主語と述語からできているが、このうち主語の x の方は定まっていないので、残っているのは述語だけ — というのが一つの納得のしかただろう。ちなみに、私自身は正式名称の「述語」をわざわざ使うことはあまりなく、「変数が入った命題」のような言い方をすることが多い。

で表現できる。

複数の変数に依存する述語も同様に考えられる。たとえば、x, y を独立な変数とするとき、$\mathcal{R}(x,y) =$ “$x^2 + y^2 \leq 9$” は x, y を変数にもつ述語である。

■述語の同値性　具体的な述語 $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ が与えられたとする。x を許されるすべての範囲で動かしたとき、どの x についても $\mathcal{P}(x)$ と $\mathcal{Q}(x)$ の真偽が一致するとしよう。このとき、二つの述語 $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ はまったく同じ内容を表わしていると考えられるので、二つは**同値** (equivalent) であるといい、

$$\mathcal{P}(x) \;\Leftrightarrow\; \mathcal{Q}(x) \tag{2.1.32}$$

と書く。また、同じことを「$\mathcal{P}(x)$ は $\mathcal{Q}(x)$ の**必要十分条件**である」あるいは「$\mathcal{Q}(x)$ は $\mathcal{P}(x)$ の必要十分条件である」と表現することもある。この用語の意味については、この節の最後で述べる。

たとえば、

$$x^2 \leq 9 \;\Leftrightarrow\; -3 \leq x \leq 3, \quad n \text{ は偶数} \;\Leftrightarrow\; n^2 \text{ は偶数} \tag{2.1.33}$$

などが同値な述語の例である。なお、一つ目の例では x は実数の範囲を動き、二つ目の例では n は自然数 $1, 2, 3, \ldots$ の範囲を動く。

2.1.2 節で定義した同値性 $\equiv$ は一般的な命題（の組み合わせ）が同じ物であることを表わす記号だった。ここでの同値性 $\Leftrightarrow$ は具体的な述語が同じ物であることを表わしている。二つの「同値」の概念は、似ているし関連もしているが、異なっていることに注意[*26]。

■述語の演算　命題の場合とまったく同様に複数の述語を組み合わせて別の述語を作ることができる。

$\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ を一般の述語とする。これらをもとにして、「$\mathcal{P}(x)$ の否定」を表わす述語 $\overline{\mathcal{P}(x)}$、「$\mathcal{P}(x)$ かつ

[*26] $\equiv$ と $\Leftrightarrow$ という記号の使い分けは、嘉田勝『論理と集合から始める数学の基礎』（日本評論社）にならった。

$\mathcal{Q}(x)$」を表わす述語 $\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)$、そして「$\mathcal{P}(x)$ または $\mathcal{Q}(x)$」を表わす述語 $\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$ を作る。新しい述語の（x に具体的な値を代入した際の）真偽は、命題についての真偽表 (2.1.4), (2.1.6) で定めればいい。真偽表の一番左に x の範囲を指定する列があり、それが省略されていると思うとわかりやすいだろう。

たとえば、$(x \leq -2) \vee (x \geq 2)$ は「x は -2 以下または 2 以上」を意味する述語で、述語 $x^2 \geq 4$ と同値である。

ド・モルガンの法則 (2.1.13),(2.1.14) も、そのまま述語についての法則に焼き直すことができる。$\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ を具体的な命題とする。x に具体的な値を代入すれば、$\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ は具体的な命題になる。(2.1.13) によって、命題 $\overline{\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)}$ と $\overline{\mathcal{P}(x)} \wedge \overline{\mathcal{Q}(x)}$ の真偽が一致することがわかる。x を許される範囲で動かしていったとき、どの x についても同じことがいえる。つまり、これら二つの述語は同値である。

(2.1.14) から得られる結果とあわせて、

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)} &\Leftrightarrow \overline{\mathcal{P}(x)} \wedge \overline{\mathcal{Q}(x)}, \\ \overline{\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)} &\Leftrightarrow \overline{\mathcal{P}(x)} \vee \overline{\mathcal{Q}(x)} \end{aligned} \tag{2.1.34}$$

となる。

■**「任意の」と「存在する」**　変数に具体的な値を代入する以外にも、述語から命題をつくる方法がある。この方法はきわめて強力で、抽象的な数学を学ぶ上で欠かすことはできない。以下では、述語 $\mathcal{P}(x)$ から命題をつくる二つの基本的なやり方を解説する。

述語 $\mathcal{P}(x)$ から作られる一つ目の命題は、「（ある決められた範囲に含まれる）どんな x についても $\mathcal{P}(x)$ である」という強い主張だ。これを数学の言葉で、「任

意の[*27]x について $\mathcal{P}(x)$」、「すべての x について」などと言い、$\forall x\ \mathcal{P}(x)$ という式で表す。ここで、$\forall x$ は “for all x” を省略したものである。

$\forall x\ \mathcal{P}(x)$ という文では x に勝手な値を代入する余地はない。よって、$\forall x\ \mathcal{P}(x)$ は、述語ではなく、命題なのである。

述語 $\mathcal{P}(x)$ から作られるもう一つの命題は、「(ある決められた範囲から）うまく x を選んでくれば $\mathcal{P}(x)$ である」という主張だ。こっちは、上のよりもずっと気楽に成り立ちそうだ。これを数学の言葉で「x が存在して $\mathcal{P}(x)$」、「ある x について $\mathcal{P}(x)$」などと言い、$\exists x\ \mathcal{P}(x)$ という式で表す。ここで、$\exists x$ は “exists x such that”

[*27] こういう意味で「任意の」という言葉を用いるのは完全に定着した習慣なのだが、これは、いかにも不適切な用語だと思う。「任意」という言葉を見れば「意に任せる」つまり「好きにしてよい」という意味に思えてしまう（実際、「任意出頭」というときの「任意」は多分そういう意味だ)。「好きにしてよい」んだったら、自分に都合のいい数を選んでしまえ、と思うのが人情だろう。「どんな x についても」という言い方の方がずっと適切なのだ。

を省略したものである。ここでも x に勝手な値を代入することはできないから、$\exists x\ \mathcal{P}(x)$ は命題である。

述語を命題に変えるための鍵となる $\forall$ と $\exists$ をまとめて**量化子** (quantifier) と呼ぶ[*28]。

重要なところなのでまず日常的な具体例をみておこう。変数 x は（無人ではない）部屋の中にいる人を指すことにして、述語 $\mathcal{P}(x)$ は「x という人は五十歳以上である」だとしよう。すると、命題 $\forall x\ \mathcal{P}(x)$ は「部屋の中の任意の人について、その人は五十歳以上である」と読めるが、もっと普通の言い方をすれば「部屋の中にいる人は全員が五十歳以上である」ということになる。

[*28] 量化子というのは、アリストテレスの『オルガノン』に始まり西欧中世を通じて教えられた伝統論理学の用語だそうだ。たとえば、英語での “All students study.” “Some students study.” “No students study.” のような文章での all, some, no は「どれくらいの（人数の）学生」かを示している。そのため量化子と呼ばれる。なお「数値を『とびとびの値』に変換する」こと（あるいは、「古典力学系に対応する量子力学の系を考える」こと）を意味する量子化 (quantization) と混乱しないように。

命題 $\exists x\ \mathcal{P}(x)$ は「部屋の中のある人が存在して、その人は五十歳以上である」だが、これも「部屋の中の少なくとも一人は五十歳以上である」あるいは、もっと普通に「部屋の中には、五十歳以上の人が（少なくとも一人は）いる」と言い換えられる。部屋の中に五十歳以上の人が一人だけいる場合にも、あるいは部屋の中の人がみんな五十歳以上の場合にも、命題 $\exists x\ \mathcal{P}(x)$ は真であることに注意しよう。

もう一つ、簡単な例を図 2.1 に示した。

数学的な例に移ろう。x は実数の範囲を動くとして、たとえば、$\mathcal{P}(x) =$ “$x \geq 3$” とする。

一つ目の命題 $\forall x\ \mathcal{P}(x)$ は「どんな x についても、$x \geq 3$」ということになる。もちろん、この命題は偽である。$x = -4$ のように $\mathcal{P}(x)$ が成り立たない例がいくらでもあるからだ。$\forall x$ を含む命題が真になるためには、いつでも成り立つような性質を考えなくてはならない。たとえば、命題 $\forall x\ x^2 \geq -1$ は、「どんな実数 x についても、$x^2 \geq -1$」ということだから、これは真で

	● ● ●	● ○ ●	● ○ ○	○ ○ ○
$\forall x\ \mathcal{P}(x)$	T	F	F	F
$\exists x\ \mathcal{P}(x)$	T	T	T	F
$\exists x\ \overline{\mathcal{P}(x)}$	F	T	T	T
$\forall x\ \overline{\mathcal{P}(x)}$	F	F	F	T

図 2.1　簡単な例での量化子 $\forall, \exists$ と述語 $\mathcal{P}(x)$ から作られる命題の真偽。
白あるいは黒のボールが三つある。変数 x は三つのボールのいずれかを表わし、述語 $\mathcal{P}(x)$ は「ボール x は黒い」だとする。よって否定の $\overline{\mathcal{P}(x)}$ は「ボール x は白い」である。四通りの場合についての四つの命題の真偽は表のようになる。確認してみよう。また、量化子についてのド・モルガンの法則 (2.1.37) が成り立っていることもすぐに見てとれる。

ある。

やはり $\mathcal{P}(x) =$ “$x \geq 3$” とすると、二つ目の命題 $\exists x\ \mathcal{P}(x)$ は「x をうまくとれば、$x \geq 3$」となる。たとえば、$x = 4$ とでもしてやればいいわけだから、この命題はもちろん真。$\exists x$ を含む命題が偽になるのは、ど

うがんばっても成り立たない性質が宣言されているようなときだ。たとえば、命題 $\exists x\ x^2 < 0$ は「実数 x をうまくとれば $x^2 < 0$」ということだから、もちろん偽である。

■量化子を重ねた命題　量化子 $\forall, \exists$ を何重かに重ねて命題をつくることができる。これはとても便利で強力な手法で、さまざまな場面に登場する。ここでは、ごく簡単に考え方だけをみておこう。

x, y を変数とし、$\mathcal{P}(x, y)$ を x と y の両方に依存する述語とする。たとえば、$\mathcal{P}(x, y) =$ “$x < y$” といった例を思い浮かべればいい。

このとき、$\exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ は（y がもはや自由に動かせる変数ではなくなるので）x のみに依存する述語である。よって、そこから $\forall x\ \{\exists y\ \mathcal{P}(x, y)\}$ という命題をつくることができる。混乱の余地がないときには、かっこを外して、同じ命題を $\forall x\ \exists y\ \mathcal{P}(x, y)$ と書く。

具体例を見よう。上のように $\mathcal{P}(x, y) =$ “$x < y$” とする。命題 $\mathcal{Q} =$ “$\forall x\ \exists y\ x < y$” は、「任意の x につい

て、ある y が存在し、$x < y$ である」と読める（かっこが省略されているので左から順に読んでいくことに注意)。もっと普通の言葉に直せば、「どんな x をもってきても、うまく y を取ってくれれば、$x < y$ となっている」ということだ[*29]。x, y が実数の範囲を動くなら、$\mathcal{Q}$ はもちろん真である。一方、x, y がたとえば、$\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の範囲を動くとすると、$\mathcal{Q}$ は真ではない。$x = 5$ と選んだとき、$x < y$ を満たす y がないからである。

$\forall$ や $\exists$ を重ねて作られる本格的な命題には、次の 2.1.4 節でのゲームの必勝戦略の定式化、2.2.3 節での数列の収束の定義（とくに、(2.2.13) を見よ）などで出会う。物理を普通に学んでいく上では、$\forall$ や $\exists$ を含む命題を自分ですいすいと書き下せる必要はないだろう。しかし、「任意の・・・について・・・」とか「ある・・・が存在して・・・」といった命題の意味は半ば

[*29] この命題は、さらに意訳すれば、「いくらでも大きな数がある」と言っている。

直観的に理解できるようになっておくのがよいと思う。

■「任意の」と「存在する」に関するド・モルガンの法則　これまで x は実数値をとるとしてきたが、ここで x は 1 から N までの自然数の範囲をとることにしよう。N は勝手に選んで固定した正の整数である。$\mathcal{P}(x)$ を述語とする。

すると、「任意の x について $\mathcal{P}(x)$」という命題は、要するに、「$\mathcal{P}(1)$ であり、$\mathcal{P}(2)$ であり、$\cdots$、$\mathcal{P}(N)$ である」ということだから、

$$\forall x\, \mathcal{P}(x) \;\equiv\; \mathcal{P}(1) \wedge \mathcal{P}(2) \wedge \cdots \wedge \mathcal{P}(N) \qquad (2.1.35)$$

と書けることになる。同様に、「x が存在して $\mathcal{P}(x)$」の方は、「$\mathcal{P}(1), \ldots, \mathcal{P}(N)$ のいずれかが成り立つ」ということだから、個々の命題を「または」で結んで、

$$\exists x\, \mathcal{P}(x) \equiv \mathcal{P}(1) \vee \mathcal{P}(2) \vee \cdots \vee \mathcal{P}(N) \qquad (2.1.36)$$

と書ける。

これらの表式を N 個の命題についてのド・モルガン

の法則 (2.1.15), (2.1.16) に代入すれば、それぞれから

$$\overline{\exists x\ \mathcal{P}(x)}\ \equiv\ \forall x\ \overline{\mathcal{P}(x)},\quad \overline{\forall x\ \mathcal{P}(x)}\ \equiv\ \exists x\ \overline{\mathcal{P}(x)} \tag{2.1.37}$$

が得られる[*30]。これらの関係は、**量化子についてのド・モルガンの法則**と呼ばれている。

不慣れな人が (2.1.37) を見るとぎょっとするかも知れないが、落ち着いて読んでみれば無茶なことは言っていない。たとえば、一つ目の関係の左辺の命題 $\overline{\exists x\ \mathcal{P}(x)}$ は「『うまく x をとれば $\mathcal{P}(x)$』ではない」と言っているわけだから、要するに、どんなにがんばって x を変えていっても $\mathcal{P}(x)$ は成り立たないということだ。これは、まさに「どんな x をとっても $\overline{\mathcal{P}(x)}$」という右辺の命題 $\forall x\ \overline{\mathcal{P}(x)}$ に他ならない。

問 2.1.3.a　(2.1.37) の二つ目の関係についても、同じように日常語に翻訳して納得せよ。

---

*30 これは一般の述語 $\mathcal{P}(x)$ から作られる命題の同値関係なので $\equiv$ を使っている。$\mathcal{P}(x)$ を具体的な述語とすれば、両辺の具体的な命題の真偽が一致する。

念のため、先ほどの「五十歳以上」の例で、量化子についてのド・モルガンの法則 (2.1.37) が成り立つことを再確認しておこう。述語 $\overline{\mathcal{P}(x)}$ は「x という人は五十歳未満である」である。

(2.1.37) の一つ目の等式では $\exists x\ \mathcal{P}(x)$ つまり「この部屋の中には五十歳以上の人が (少なくとも一人は) いる」の否定を問題にしている。否定文は明らかに「この部屋の中には五十歳以上の人は (一人も) いない」だから、言い換えれば「この部屋の中の人は全員が五十歳未満である」つまり、「この部屋の中の任意の人について、その人は五十歳未満である」となる。これは右辺の $\forall x\ \overline{\mathcal{P}(x)}$ そのものだから、確かに等式は正しい。

(2.1.37) の二つ目の等式では $\forall x\ \mathcal{P}(x)$ つまり「この部屋の中の人は全員が五十歳以上である」の否定を考える。答はもちろん「この部屋の中の人は全員が五十

歳以上というわけではない」だが[*31]、その意味するところは「この部屋の中には五十歳未満の人が（少なくとも一人は）いる」であり、これはまさに等式の右辺の $\exists x\ \overline{\mathcal{P}(x)}$ である。

図 2.1 の例でも、ド・モルガンの法則 (2.1.37) が成り立つことはすぐに見て取れる。

さて、ここまでは変数 x が N 通りの値しか取れない状況を考えてきた。しかし、われわれが興味をもっている多くの状況では、変数 x は全ての自然数とか全ての実数とか、無限個の（つまり、有限個でない）値を取る。そのような状況では、(2.1.37) の関係を（たとえば帰納法を使って）示すことはできない。

それでも、(2.1.37) は直観的もきわめてもっともらしいし、正しいと考えるのが自然だ。そこで、**変数 x が無**

---

*31 「この部屋の中の人は全員が五十歳以上である」の否定を「この部屋の中の人は全員が五十歳以上でない」と書いてしまうと「この部屋の中の人は全員が五十歳未満である」という（まったく異なった）意味にも読めてしまう。

限個の値をとるような場合にも、量化子についてのド・モルガンの法則 (2.1.37) **が正しい**として、利用していくことにしよう[*32]。抽象的な数学の議論では (2.1.37) の規則をくり返し使うことになるので、これが感覚的に納得できていることが望ましい。

最後に、量化子が重なっている命題にド・モルガンの法則 (2.1.37) を使うとどうなるかを簡単にみておこう。命題 $\forall x\ \exists y\ \mathcal{P}(x,y)$ は、$\forall x\ \{\exists y\ \mathcal{P}(x,y)\}$ のかっこを省略したものだった。ド・モルガンの法則を使うときには、かっこがついた形を思い出し、あわてずに左から順番に変形していけばいい。つまり、

$$\begin{aligned}\overline{\forall x\ \exists y\ \mathcal{P}(x,y)} &= \overline{\forall x\ \{\exists y\ \mathcal{P}(x,y)\}} \\ &= \exists x\ \overline{\exists y\ \mathcal{P}(x,y)} = \exists x\ \forall y\ \overline{\mathcal{P}(x,y)}\end{aligned} \tag{2.1.38}$$

[*32] これは自明のことではなく、数学基礎論の分野で様々な議論があった。現代の通常の数学ではこれは基本的な公理の一つである。もちろん、物理を（そして、普通の数学を）学ぶ際には、そういう細かいことは全く気にする必要はない。

といった具合だ。

　たとえば、前に見た「どんな x をもってきても、うまく y を取ってくれば、$x < y$ となっている」という命題 $\forall x\ \exists y\ x < y$ の否定は、

$$\overline{\forall x\ \exists y\ x < y} = \exists x\ \forall y\ x \geq y \tag{2.1.39}$$

となる。「x が存在し、任意の y について $x \geq y$ である」というのだから、平たく言えば「うまい x をとれて、どんな y をもってきても $x \geq y$ となっている」ということだ。x, y が $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ の範囲の値をとるときにはこの命題は真だ。「うまい x」として最大の $x = 5$ を取ればいい。

■「任意の」と「存在する」を含む命題の証明　x の二次式についての簡単な命題を例に、「任意の」と「存在する」を含む命題をどうやって証明するかを具体的にみておこう。内容は当たり前だと思うが、$\forall$, $\exists$ といった「言葉」に慣れるための例題である。以下、x は実数の範囲を動く変数とする。

まず命題 “$\exists x\ x^2+4x \leq -3$” を考えよう。「$x$ をうまく選べば $x^2+4x \leq -3$ となる」と言っている。$x=5$ などと選ぶと不等式は成り立たないが、$x=-2$ としてやれば $x^2+4x=-4<-3$ なので不等式が成り立つ。例が一つでもみつかったので、考えている命題が真だと証明された。**「存在する」を含む命題が真であることを証明するには、たった一つでいいから主張されていることがらが成り立つ例をみつければいい**のだ。

次に命題 “$\forall x\ x^2+4x \geq -5$” を考える。「どんな x についても $x^2+4x \geq -5$ となる」というわけだから、「$x=3$ のとき大丈夫」、「$x=-4$ のとき大丈夫」といった具合に個別の例を見ていたのでは証明にならない[*33]。この命題は真なのだが、それを示すためには $x^2+4x \geq -5$ が $(x+2)^2+1 \geq 0$ と同値であることに注意する。「実数の 2 乗は 0 以上」という定理より $(x+2)^2+1 \geq 0$ はすべての x について成り立つので、

[*33] もちろん、証明を始める前に具体例を調べてみるのは常套手段だが。

考えている命題が真だと証明できる。**「任意の」を含む命題が真であることを証明するには、変数のすべての範囲をカバーするような何らかの一般論が必要**なのだ。

三つ目として、命題 “$\forall x\ x^2+4x>-3$” を考えよう。「どんな x についても $x^2+4x>-3$ となる」というのだから、明らかに偽とわかるし、こういう場合は反例を一つでも見つければいいことも知っているだろう。ここでは、もっと本格的な問題に立ち向かうことを想定して地道に（形式的に）やってみよう。この命題は偽だろうと予想して、その否定をとり、ド・モルガンの法則 (2.1.37) を使うと、

$$\overline{\forall x\ x^2+4x>-3} \Leftrightarrow \exists x\ \overline{x^2+4x>-3} \qquad (2.1.40)$$

である[*34]。しかし、述語 $\overline{x^2+4x>-3}$ は $x^2+4x\leq -3$ なので、右辺の命題は一つ目の例そのものになる。よって $x=-2$ のような例をみつければ真であること

[*34] ここでは具体的な命題の真偽が一致するという意味で $\Leftrightarrow$ を使った

が証明される。つまり元の命題は偽と証明されたことになる。

四つ目は、予想していると思うが、命題 “$\exists x\ x^2+4x < -5$” だ。これも偽である。これを示すには、ド・モルガンの法則 (2.1.37) によって

$$\overline{\exists x\ x^2+4x<-5} \ \Leftrightarrow\ \forall x\ \overline{x^2+4x<-5} \qquad (2.1.41)$$

と変形し右辺の命題が “$\forall x\ x^2+4x \geq -5$” に他ならないことに注意して、上の証明をくり返せばよい。このように、**「任意の」や「存在する」を含む命題が偽であることを証明するときには、ド・モルガンの法則** (2.1.37) **を使って「任意の」と「存在する」をひっくり返す**のが定番のやり方である。

■述語についての含意 — 必要条件と十分条件　述語に関する「ならば（含意)」についてみよう。これは数学を進めていく上できわめて重要な概念である。

x を変数とし、$\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ を任意の具体的な述語とする。これまでの考えで進むと、$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ は、各々

の x について命題の含意のルール (2.1.18) を適用して作った新しい述語ということになる。ところが、(本書を含む) 普通の数学の文献では、単に $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ と書いたとき、冒頭に「任意の x について」という宣言が略されていて、実は $\forall x\ \{\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)\}$ の意味だと解釈することになっている[*35]。これは述語ではなく命題である。

重要なことなのでくり返せば、

$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ は（述語ではなく）「任意の x について、$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$」という命題

なのである。また、この命題を「$\mathcal{P}(x)$ を満たす任意の x について、$\mathcal{Q}(x)$ が成り立つ」のように表現すること

[*35] この習慣について明示的に注意してある本は（私がパッとみた印象では）あまりない。たとえば、85 ページの脚注 *26 でも挙げた嘉田勝『論理と集合から始める数学の基礎』（日本評論社）には注意があり、私はそれを読んで初めて明確に意識した。

も多い。

こういう（真面目に考えると軽くルール違反の）習慣が使われている理由は、$\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ に具体的な述語を代入してみると納得できる。たとえば、$\mathcal{P}(x) =$ “$x \geq 4$”, $\mathcal{Q}(x) =$ “$x^2 \geq 16$” としよう。$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ は「$x \geq 4$ ならば $x^2 \geq 16$」という文になる。われわれは、この文を普通に読むと「$x \geq 4$ という条件が満たされているならば、いつでも $x^2 \geq 16$ となる」という風に、自然に「任意の x について」を補って解釈してしまう[*36]。x というのが変数だと知っているので、そこには何が代入されてもいいはずだと反射的に思うからだろう。「任意の x について」を省略する慣習は、そういう意味で、われわれの感性にとって自然なのだと思う。

前に、$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ が具体的な命題のとき、命題 $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ が

[*36] $x \geq 4$ が成り立たない状況は頭に浮かべないが、$\Rightarrow$ の定義を思い出せば、そちらは（自動的に真になるので）気にしなくても問題ない。

日常的な「$\mathcal{P}$ ならば $\mathcal{Q}$」という表現とはかならずしも一致しないことを注意した。ここで見たように、述語を含む命題 $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ は、通常の言葉での「$\mathcal{P}(x)$ ならば $\mathcal{Q}(x)$」にかなり近いのである。

具体的な述語 $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ について $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ が真だとしよう。このとき、$\mathcal{P}(x)$ は $\mathcal{Q}(x)$ の**十分条件** (sufficient condition) であると言い、また、$\mathcal{Q}(x)$ は $\mathcal{P}(x)$ の**必要条件** (necessary condition) であるという[*37]。この呼び方は、それほど直感的ではないようで、混乱してしまう人がけっこういる。しかし、名前はともかくとして、考え方がわかっていないと数学や物理（そして論理的な学問）をやっていく上で大いに不便だと思う。以下で例をみるので（よくわかっていない人

[*37] 「命題 $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ について $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ が真のとき、$\mathcal{P}$ は $\mathcal{Q}$ の十分条件、$\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ の必要条件という」と書いてある本が多い。ただ、具体的な命題についてそのような言い方をすることは実際にはないと思う。本書では、必要条件、十分条件という用語は（同じ変数をもつ）述語にだけ用いる。

は）この機会に時間をかけて理解しておこう。

x を自然数 $1, 2, \ldots$ の範囲を動く変数として、述語

$$\mathcal{P}(x) = \text{“}x \text{ は } 12 \text{ の倍数”}, \quad \mathcal{Q}(x) = \text{“}x \text{ は偶数”} \tag{2.1.42}$$

を考える。このとき $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ である（が、$\mathcal{Q}(x) \Rightarrow \mathcal{P}(x)$ ではない）ことは少し考えればわかるだろう。この例を使って、必要条件、十分条件という呼び名の意味を考えてみよう。

まず $\mathcal{Q}(x)$ の「x は偶数」というのが達成したい目標だと思ってみる。そして、$\mathcal{P}(x)$ の「x は 12 の倍数」という条件が満たされているとしよう。これはどう考えても強すぎる条件で、目標の $\mathcal{Q}(x)$ は楽勝で満たされる。つまり、$\mathcal{Q}(x)$ という目標のためなら、$\mathcal{P}(x)$ があれば「十分」だ。よって $\mathcal{P}(x)$ は $\mathcal{Q}(x)$ の十分条件。

次に、$\mathcal{P}(x)$ の「x は 12 の倍数」という方が達成したい目標だと思ってみよう。$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ と同値な対偶命題 $\overline{\mathcal{Q}(x)} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}(x)}$ は、「『x は偶数』でないならば、（もはや色々考えるまでもなく）『x は 12 の倍数』

ではない」と読める。つまり、「x は偶数」というのは目標達成のために絶対に必要な条件だ。よって $\mathcal{Q}(x)$ は $\mathcal{P}(x)$ の必要条件というわけだ。

問 2.1.3.b　（あまり数学的ではないが）定番の例。変数 A は人名、ペットの名前、物の名前などの「値」をとるとし、述語 $\mathcal{P}(A) =$ “A は人間だ” と $\mathcal{Q}(A) =$ “A は動物だ” を考える。この例を題材に、中学生に教えるつもりで、必要条件と十分条件を丁寧に説明せよ。

最初に定義した述語の同値性の概念を見直しておこう。

具体的な述語 $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ の真偽が任意の x について一致するとき、二つの述語は**同値**だといい、$\mathcal{P}(x) \Leftrightarrow \mathcal{Q}(x)$ と書いた。ところで、$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ と $\mathcal{Q}(x) \Rightarrow \mathcal{P}(x)$ がどちらも真なら、任意の x について $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ の真偽は一致する。つまり、$\mathcal{P}(x) \Leftrightarrow \mathcal{Q}(x)$ は、$(\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)) \wedge (\mathcal{Q}(x) \Rightarrow \mathcal{P}(x))$ とまったく同じことを表わしている。そこで、$\mathcal{P}(x) \Leftrightarrow \mathcal{Q}(x)$ が真である

とき、$\mathcal{P}(x)$ は $\mathcal{Q}(x)$ の**必要十分条件**である、あるいは、$\mathcal{Q}(x)$ は $\mathcal{P}(x)$ の必要十分条件であるというのである。

最後に、$\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ という形の命題を変形するためのルールを見ておこう。

$\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ を具体的な述語としよう。変数 x に具体的な値 x_0 を代入すると、これらは具体的な命題 $\mathcal{P}(x_0), \mathcal{Q}(x_0)$ になる。よって、具体的な命題 $\mathcal{P}(x_0) \Rightarrow \mathcal{Q}(x_0)$ を考えることができる。命題と対偶命題の同値性 (2.1.26) により、この命題の真偽は命題 $\overline{\mathcal{Q}(x_0)} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}(x_0)}$ の真偽と一致する。この議論は任意の x_0 について成り立つことに注意すると、述語の含意を含む命題に関しても、対偶命題の同値性

$$\{\,\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)\,\} \;\equiv\; \{\,\overline{\mathcal{Q}(x)} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}(x)}\,\} \qquad (2.1.43)$$

が成り立つことがわかる。

同様にして、三段論法 (2.1.20) から、

$$\big\{(\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)) \wedge (\mathcal{Q}(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x))\big\} \;\Rightarrow\; (\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{R}(x)) \qquad (2.1.44)$$

さらには、

$$\begin{aligned}&\big\{(\mathcal{P}_1(x) \Rightarrow \mathcal{P}_2(x)) \wedge (\mathcal{P}_2(x) \Rightarrow \mathcal{P}_3(x)) \wedge \\ &\cdots \wedge (\mathcal{P}_{n-1}(x) \Rightarrow \mathcal{P}_n(x))\big\} \\ &\Rightarrow\ (\mathcal{P}_1(x) \Rightarrow \mathcal{P}_n(x))\end{aligned} \tag{2.1.45}$$

が成り立つことが結論できる。これらの関係も実際の証明で（ほとんど意識されることはないが）多用される。

2.1.4　ゲームの勝ち負けについての定理

これまでみてきた初歩的な論理、とくに量化子についてのド・モルガンの法則 (2.1.37) の面白い応用として、オセロ（リバーシ (Reversi) ともいう）や五目並べのように二人のプレイヤーが対局するゲームの勝ち負けについての一般的な理論を紹介しよう[*38]。

[*38] もちろん、この節を読まずに先に進んでもまったく困らないが、意外に面白い話なのでざっとでも目を通しておくとよいと思う。

ここでは、

1. 二人のプレイヤーが交互に手を指していく
2. (相手のカードが見えないトランプのゲームなどと違って）二人のプレイヤーはゲームの局面のことを完全に知っている
3. ゲームに（カードをデタラメに配ったり、サイコロをふったりといった）確率的な要素は入ってこない
4. ある有限の自然数 N があって、N 手以下までプレイしたところでゲームの結果 — どちらが勝ったか、あるいは引き分けか — が確実に定まる

という性質をもったゲームを扱う。ゲーム理論の分類では、このようなゲームは二人零和有限確定完全情報

ゲームと呼ばれる[*39]。

われわれの知っているかなり多くのゲームがこれらの条件を満たしている。たとえば、オセロや五目並べが四つの性質を満たすことは簡単にわかる[*40]。将棋についても条件 1 から 3 までは自明に満たされている。「N 手以下で結果が決まる」という条件 4 は微妙だが、少なくとも現在の将棋の公式ルールではこれも成り立

[*39] 「零和」の部分は普通は「ぜろわ」と読むようだが、ゼロは英語だから「れいわ」と呼ぶ方が正統かもしれない（などという脚注を 2019 年 4 月に書き加えています）。

[*40] 五目並べなら N を盤の目の総数に選べばよい。オセロには「パス」があるが、二人が続けてパスをすると試合終了というルールなので、N を盤の目の総数の 64 の 2 倍の 128 にとってやれば十分だ（実際には、128 手もかかるゲームはないが）。

つ[*41]。

■必勝戦略による分類と主定理　必勝戦略があるかないかに応じてゲームを特徴づけよう。二人のプレイヤーを先手、後手と呼ぶ。もちろん一手目を指すのが先手だ。

あるゲームが**先手必勝**であるとは、先手にうまい指し方があって、後手がどんな手を指したとしても必ず先手が勝てることをいう[*42]。ここで、後手の指す手には何の制限もつけないことに注意しよう。ルールさえ

[*41] たとえば、二人がただただ飛車を前後左右に動かして（どのコマも取らずに）遊んでいれば対局は永遠に続く。そういった（あるいは、もっと真面目な）「終わらない対局」を避けるために「対局のあいだに完全に同じ局面が四回くり返されたら引き分け」というルールが設けられているそうだ（このルールができたのは 1983 年。それまでの将棋では（類似の少し弱い制約しかなかったので）原理的には「終わらない対局」が許されていたことになる）。

[*42] もちろん、先手必勝のゲームであっても、先手が「うまい指し方」を守らなければ後手が勝つこともある。「先手必勝」という言葉を文字通り「先手が必ず勝つ」と読んではいけない。

守っていれば、賢い手を指してもいいし、普通は絶対に指さないような（賢い人の意表をつく）馬鹿な手を指してもいいのだ。

ゲームが先手必勝ということは、先手にとっての「必勝法」があるということだ。「一手目をこのように指し、後手が二手目をこう指してくれば三手目をこう、ああ指してくればこう・・」という「完璧なマニュアル」が（原理的には）存在して、その通りに指せば絶対に勝てるということである。「先手が十分に賢ければ必ず勝てるゲーム」といってもいい — あまり面白くなさそうな響きだが。

同様に、あるゲームが**後手必勝**であるとは、先手がどんな手を指したとしても、後手にはうまい指し方があって、必ず後手が勝てることをいう。

また、「必ず勝てる」とまではいかなくても「決して負けない」ということが保証される場合もある。そこで、あるゲームが**先手不敗**であるとは、先手にうまい指し方があって、後手がどんな手を指しても決して先

手は負けない（つまり、先手が勝つか、引き分けかになる）ことをいう。同様に、あるゲームが**後手不敗**であるとは、先手がどんな手を指しても、後手にはうまい指し方があって、決して後手は負けないことをいう。

あるゲームが先手不敗であり、かつ、後手不敗であるとき、このゲームは**勝負がつかない**ということにしよう[*43]。二人のプレイヤーが十分に賢く（勝つために）ベストを尽くすなら勝負は必ず引き分けに終わるからだ。

まとめると、あるゲームが、先手必勝、後手必勝、または、勝負がつかないかであれば — 二人のプレイヤーが十分に賢くベストを尽くすとして — 勝負の行方（ゆくえ）は実際に対局をするまでもなく完全に決まっているということだ。これではあまり面白くなさそうである。

しかし、実は次のことが証明できる。

---

*43 「勝負がつかない」ことを「引き分け」と呼ぶことが多いようだが、単に「引き分け」と書いてしまうと個々の対局の引き分けと混乱する可能性がある。ここでは、できるだけ混乱を避けるため「勝負がつかない」という言葉を使うことにした。

定理 2.4 (対局ゲームの基本定理)**.** 上の四つの条件を満たすゲームは、先手必勝、後手必勝、あるいは、勝負がつかないかのいずれかである。

この定理を最初に証明したのはツェルメロ[*44]である。これによれば、オセロも将棋も囲碁も、結果が決まっている「面白くない」ゲームということになる。

実際、3×3 のマス目に○と×を交互に書き込んで三つ並んだ列をつくる三目並べ（○×ゲームとも呼ばれる）は勝負がつかないゲームだ。二人のプレイヤーがしっかりと考えて手を選べば必ず引き分けに終わることは、多くの読者が知っているだろう。

禁手のない五目並べ（この節の最後を参照）は、○×ゲームよりずっと複雑だが、先手必勝であることが古

[*44] Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871–1953) ドイツの数学者、論理学者。数学基礎論にいくつかの本質的な業績を残している。物理に関わるところでも、マクロな系での不可逆性についてのボルツマンの解釈に再帰性の観点から本質的な批判を提唱した。

くから（計算機の助けを借りずに）知られており、具体的な必勝戦略もわかっているそうだ[*45]。オセロはより複雑だが、4×4 の盤でのオセロは先手必勝、6×6 の盤でのオセロは後手必勝であり、それぞれの必勝戦略もわかっている。ただし、オセロについてのこれらの結果を得るにはコンピューターでの膨大な計算が必要だった。通常の 8×8 の盤でのオセロは勝負がつかないと予想されているそうだが、今のところ証明はないようだ[*46]。さらに、将棋ははるかに複雑で、定理 2.4 の三つの場合のどれに該当するのか予想さえも立っていない。

定理 2.4 のためにゲームが面白くなくなってしまうと書いたが、それはプレイヤーが十分に賢いと仮定し

[*45] 具体的なゲームの必勝戦略の詳しいことは私はまったく知らない。Wikipedia を見て書いているレベルだということを告白しておく。

[*46] 2023 年 10 月に「8×8 の盤でのオセロは勝負がつかない」ことを証明したとする論文が発表された。ただ、これは査読を受けていないプレプリントであり、証明が完全に正しいかどうかはこれから定まることになる。

た上での話だった。大きな盤上でのオセロや普通の将棋は、定理がなんと言おうと、われわれ人類にとって

進んだ注：私はこの論文の内容をまったく理解していない。ただ、ここでの証明の背後にある（らしい）**あるゲームについて、すべての対局のパターン（完全な「ゲームの木」）を生成することなく、また、最良の戦略を知ることもなく、「勝負がつかない」ことが証明できる状況がありうる**という点は理解し、興味深いと思った。（「ゲームの木」については、この先、特に図 2.2 を参照。）以下、この原理的な論点を説明しよう（重要な注意：上で触れた論文のロジックは以下に述べるものよりはるかに複雑である）。

8×8 の盤でのオセロ（に限らないのだが）のすごく優れた（しかし、最良かどうかはわからない）アルゴリズムがあったとしよう。アルゴリズムは与えれた局面に対して必ず一つの手を導き出すとする。以下、時流に合わせて、アルゴリズムを AI と呼ぼう。

まず、AI に先手をプレイさせる。AI がコマを置いたら、後手の方は何も考えず、可能な手を（どんなにダメそうでも）すべて列挙する。その各々の盤面に対して AI は次の手を一つ決める。これに対して、後手はまたすべての可能な手を列挙する。こうして、考えなくてはいけない盤面の数はどんどん増えていく。ただし、AI は必ず一つの手を選ぶので、これでも、起こりうる全てのゲームのパターンを列挙するのに比べれば場合の数は圧倒的に少なくなる（大雑把には平方根くらいに減る）。このようにして、ゲームを最後まで進めたとき、**ゲームが引き分けに終わる場合と先手が勝つ場合しか生じなかったとしよう**。AI が優れていたということだ。ここから、**このゲームは後手必勝ではあり得ない**ことが厳密にわかる。なぜなら、もし後手に必勝戦略があるなら（後手は全てのパターンを尽くしているから）必ずその戦略もどこかに含まれていて、その場合には後手が勝つはずだからだ。よって対局ゲームの基本定理（115 ページの定理 2.4）より、**このゲームは先手必勝か勝負がつかないかのいずれかである**ことが示される。

次に、先手と後手の役割を入れ替えて同じことを繰り返す。先手は全ての可能な手を列挙し、後手は AI が（確信を持って）プレイする。そして、ゲームを最後まで進めたとき、**ゲームが引き分けに終わる場合と後手が勝つ場合しか生じなかったとしよう**。すると、上と同じロジックで、今度は**このゲームは後手必勝か勝負がつかないかのいずれかである**ことが示される。

これら二つを合わせると「このゲームは勝負がつかない」ことが証明される！

もちろん、このような証明を実行するには、優れたアルゴリズム（AI）が必須だし、（全てのパターンの数よりは少ないものの）膨大な数のゲームのパターンを生成する必要がある。それでも、これがうまくいけば、「このゲームは勝負がつかない」ことが証明できるのである。ちなみに、アルゴリズムは最良でなくてもよい（勝てるはずの盤面から引き分けになってもいいし、上のプロセスで発生しないような盤面に関してはものすごく弱くてもいい）ことに注意しよう。

は十二分に面白いのである[*47]。

ルールの上で引き分けがないゲームの場合は勝負がつかないという可能性はない。よって上の定理から以下がいえる。

系 2.5 (引き分けのない対局ゲームの基本定理)**.** 上の四つの条件を満たす引き分けのないゲームは、先手必

[*47] この議論をそのまま進めると、「三目並べは小さい子供には勝負のわからない面白いゲームだろうが、大人にとっては解明された面白くないゲームだ。同様に、将棋は人類程度の知能の種族には面白いゲームだが、もっと高い知性をもった種族にとっては自明な面白くないゲームと見えるに違いない」というオチになりそうだ。もちろん、これは筋の通った議論だが、私自身は必ずしもそうは考えていない（あるいは、考えたくない)。将棋ほどのゲームになると、(すぐ後で説明する）ゲームの木の構造は（あくまで有限ではあるのだが）きわめて複雑になり、その中には様々な戦法や込み入った（ときには驚きのある）ストーリーが含まれるようになる。これは三目並べのゲームの木とは大きく異なるところで、単なる大きさの問題を越えた「質的な相違」があると思いたい。必勝法が見通せるほどの知性にとってもこれら戦法やストーリーが興味深く見える可能性はあるのではなかろうか。

勝あるいは後手必勝のいずれかである。

■ゲームの解析について　定理 2.4 は、四つの条件を満たすゲームは、先手必勝、後手必勝、勝負がつかないかのいずれかだと保証している。具体的なゲームがこの三つのどれに相当するかはどうやって判定すればいいのだろう？　また、存在するとされる必勝戦略あるいは不敗戦略はどうやって知ればいいのか？

指せる手が有限通りしかないようなゲーム[*48] — つまり、オセロや将棋を含む通常のゲーム — については、少なくとも原理的には、これは簡単な問題だ。N 手目までの対局のパターンはどうせ有限通りかないから、それらをすべて書き出してやればいいのだ。具体的には、図 2.2 のように、1 手目の可能なパターンを書き出し、その各々について、2 手目の可能なパターン

[*48] 面白いゲームがあるかどうか知らないが、プレイヤーが交互に自然数を挙げていって何らかの整数論的な方法で勝敗を決するようなゲームなら指せる手は無限にある。そのような場合も定理 2.4 は成立する。

図 2.2　三目並べ（○×ゲーム）のゲームの木のごく最初の部分。1 手目は 9 通りあるが、対称性を考慮すればこのように 3 通りだけを考えればいい。2 手目の（対称性を考慮して本質的に異なる）指し方は、1 手目のそれぞれの場合について、5 通り、5 通り、2 通りあり、2 手目までで既に 12 通りの局面がある。この先もゲームが確定するまで枝分かれを続けていけばゲームの木が完成する。

を書き出しという風に、次々と枝分かれさえながら可能な対局をすべて列挙する。ゲームの勝敗が決まれば、勝ち、負け、引き分けを書き込み、そこから先へは枝分かれさせない。こうして作られた樹枝状の図（ゲー

ムの木と呼ばれる）には、そのゲームで可能なあらゆる対局とその結果が書かれている。この図を丁寧にたどって様々な戦略を吟味していけば（これまた原理的には）ゲームが先手必勝なのか、後手必勝なのか、勝負がつかないのかがわかるし、同時に、必勝戦略や不敗戦略も見て取れることになる。だから、ものすごく複雑な図を描き、それをすさまじい手間をかけて解析してよいことにすれば、これはまったく当たり前の解析であり、数学的に深い問題はない[*49]。

しかし、実際問題として、普通のゲームについてはこのような解析が猛烈に複雑になりうることは想像できるだろう。三目並べのような単純なゲームでさえ人間の手でゲームの木の全体を描くのはかなり面倒な作業だ。現在のコンピューターの能力では、8×8 の盤でのオセロは完全に解析できる限界に近いようである（脚

[*49] ゲームが先手必勝なのか、後手必勝なのか、勝負がつかないのかを決定し、最適戦略を見出すための能率的な探索方法を発見・考案するのは深く重要な問題であり研究が続いている。

注 *46 を見よ)。将棋はさらに複雑なゲームで、どんなに強力なコンピューターを使おうと、必勝戦略の解明などとうてい望めな状況のようだ[*50]。そういうゲームについては、定理 2.4 はあくまで「絵に描いた餅」に過ぎないのである。

■定理 2.4 の証明　定理の証明はきわめて簡単である。基本的な概念をきちんと定式化すればそれでほとんど証明は終わるといってもいい[*51]。

あるゲームを考え、具体的な対局を $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$

---

*50 将棋を指すコンピューターはかなり強いが、それでも必勝戦略を解明しているわけではなく（人間の棋士と同じように）様々な戦略を組み合わせて手を選んでいるようだ。ただし、対局の途中で何手か先までを（ゲームの木の一部分を作って）「読む」ことにかけては、コンピューターは人間よりも圧倒的に強い。

*51 私はこの証明を白石直人さんから学んだ。とある講義で定理の内容をざっと紹介し「ゲームの木を描けば証明できると思うけれど、もっと簡単な証明がないかな？」と話したところ、教室にいた（当時は大学院生だった）白石さんがその場で考えて、講義が終わったところで教えてくれたのだった（もちろん同じ証明がどこかに書いてあると思うけれど)。

のように表わす。ここで、x_i は第 i 番目の手を抽象的に表わしたものである[*52]。$i-1$ 番目までの手 $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ が与えられたとき、x_i はゲームのルールによって許される範囲のみをとることにしておこう。実際の対局は N 手まで指さなくても終わるはずだが、表記を簡単にするため、x_N まで並べておいた（勝負がついた後の x_i は全て「パス」にとればよい)。後手が指したところで終わることにするよう N は偶数にとる。また、$(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ をまとめて $\boldsymbol{x}$ と略記する。

ここで、述語

$$\mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x}) = \text{“対局 } \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \text{ では先手が勝ち”} \tag{2.1.46}$$

$$\mathcal{P}_{\text{後勝}}(\boldsymbol{x}) = \text{“対局 } \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \text{ では後手が勝ち”} \tag{2.1.47}$$

を定義し、任意の $\boldsymbol{x}$ について $\mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x}) \wedge \mathcal{P}_{\text{後勝}}(\boldsymbol{x})$ は偽と仮定しよう（つまり、かならず勝負が決まるという

[*52] オセロや五目並べなら x_i は第 i 手で石を置いた位置（あるいは、「パス」）を表わす。

こと)。もしある対局 $\boldsymbol{x}$ について $\mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x})$ と $\mathcal{P}_{\text{後勝}}(\boldsymbol{x})$ がどちらも偽ならばこの対局は「引き分け」ということだ。

肝心なのは先手必勝といった概念がどう定式化されるかである。先手必勝とは「先手にうまい指し方があって、後手がどんな手を指してもかならず先手が勝てる」ということだったから、いかにも $\exists$ や $\forall$ が顔を出しそうだ。実際、$\mathcal{W}_{\text{先}}$ = “このゲームは先手必勝” という命題は、

$$\mathcal{W}_{\text{先}} = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \cdots \exists x_{N-1} \forall x_N \ \mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1.48}$$

と書ける。わかる人には即座にわかるはずだが、ほとんどの人はこんなのを見てもぎょっとすると思う。落ち着いて日本語で読み下してみよう。92 ページで注意したように、量化子が重なるときにはかっこが省略さ

れていると考え[*53]、左から順に読んでいけばいい。まず、公式の訳では

> x_1 が存在し、任意の x_2 について、x_3 が存在し、任意の x_4 について、・・・x_{N-1} が存在し、任意の x_N について、この対局は先手の勝ち

となるが、これではわかりにくい。気持ちをこめて日常語にしてみると、

> うまい第一手 x_1 があって、後手がどんな第二手 x_2 を指してこようと、うまい第三手 x_3 があって、後手がどんな第四手 x_4 を指してこようと、・・・うまい第 $N-1$ 手 x_{N-1} があって、後手がどんな第 N 手 x_N を指してこようと、この対局は先手の勝ちだ！

[*53] この場合にかっこを省略せずに書くと、$\exists x_1\{\forall x_2\{\exists x_3\{\forall x_4\{\cdots\{\exists x_{N-1}\{\forall x_N \quad \mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x})\}\}\cdots\}\}$ となる。一番右では $N-1$ 個のかっこをまとめて閉じている。

ということになる。まさに「相手がどんなプレイをしようと、こちらはマニュアル通りに指しさえすれば必ず勝てる」ということの忠実な表現になっている。

同様に、$\mathcal{W}_{\text{後}}$ ＝ “このゲームは後手必勝” という命題は

$$\mathcal{W}_{\text{後}} = \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \cdots \forall x_{N-1} \exists x_N \ \mathcal{P}_{\text{後勝}}(\boldsymbol{x}) \tag{2.1.49}$$

と書ける。自分で日常語に直してなっとくしていただきたい。

$\mathcal{N}_{\text{先}}$ ＝ “このゲームは先手不敗” および $\mathcal{N}_{\text{後}}$ ＝ “このゲームは後手不敗” という命題も、

$$\mathcal{N}_{\text{先}} = \exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \cdots \exists x_{N-1} \forall x_N \ \overline{\mathcal{P}_{\text{後勝}}(\boldsymbol{x})} \tag{2.1.50}$$

$$\mathcal{N}_{\text{後}} = \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \cdots \forall x_{N-1} \exists x_N \ \overline{\mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x})} \tag{2.1.51}$$

と表現できる。

ここで、命題 $\mathcal{W}_{\text{先}}$ の否定がどうなるかを考えてみよう。「任意の」や「存在する」を含む命題の否定だか

ら、量化子についてのド・モルガンの法則 (2.1.37) を使えばよい。この際、(2.1.38) で注意したように、かっこが省略されていたことを思い出し、左から順番に公式を使う。実際にやってみると、

$$
\begin{aligned}
\overline{\mathcal{W}_{\text{先}}} &= \overline{\exists x_1 \forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \cdots \exists x_{N-1} \forall x_N \ \mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x})} \\
&\equiv \forall x_1 \ \overline{\forall x_2 \exists x_3 \forall x_4 \cdots \exists x_{N-1} \forall x_N \ \mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x})} \\
&\equiv \forall x_1 \exists x_2 \ \overline{\exists x_3 \forall x_4 \cdots \exists x_{N-1} \forall x_N \ \mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x})} \\
&\equiv \cdots \\
&\equiv \forall x_1 \exists x_2 \forall x_3 \exists x_4 \cdots \forall x_{N-1} \exists x_N \ \overline{\mathcal{P}_{\text{先勝}}(\boldsymbol{x})} \\
&= \mathcal{N}_{\text{後}} \qquad (2.1.52)
\end{aligned}
$$

という、きれいな結果が得られる。「このゲームは先手必勝ではない」ということと「このゲームは後手不敗」ということは完全に同じなのだ。言われてみれば当たり前のような気もするが（そして、上のように証明は当たり前なのだが）普通の言葉だけで考えているとつい混乱してしまう人は多いのではないだろうか。

まったく同様にして

$$\overline{\mathcal{W}_{\text{後}}} \equiv \mathcal{N}_{\text{先}} \tag{2.1.53}$$

という関係も示される。(2.1.52), (2.1.53) がわかれば証明は終わったも同然である（引き分けのないゲームなら $\mathcal{N}_{\text{後}} = \mathcal{W}_{\text{後}}$ だから (2.1.52) から系 2.5 が直ちにいえる）。

まず $\mathcal{D}$ = “このゲームは勝負がつかない” という命題をみておこう。定義から $\mathcal{D} = \mathcal{N}_{\text{先}} \wedge \mathcal{N}_{\text{後}}$ である。ここに、(2.1.53), (2.1.52) をそれぞれ代入すれば、

$$\mathcal{D} \equiv \mathcal{N}_{\text{先}} \wedge \overline{\mathcal{W}_{\text{先}}}, \quad \mathcal{D} \equiv \mathcal{N}_{\text{後}} \wedge \overline{\mathcal{W}_{\text{後}}} \tag{2.1.54}$$

が得られる。つまり、「先手は不敗だが必勝とはいえない」ということと「後手は不敗だが必勝とはいえない」ことは等価であり、それが「勝負がつかない」ということなのである。

さて、(2.1.11) の関係を使えば、

$$\mathcal{N}_{\text{後}} \equiv (\mathcal{N}_{\text{後}} \wedge \mathcal{W}_{\text{後}}) \vee (\mathcal{N}_{\text{後}} \wedge \overline{\mathcal{W}_{\text{後}}}) \equiv \mathcal{W}_{\text{後}} \vee \mathcal{D} \tag{2.1.55}$$

である（自明な関係 $\mathcal{N}_{後} \wedge \mathcal{W}_{後} \equiv \mathcal{W}_{後}$ と (2.1.54) を用いた）。(2.1.52) より $\mathcal{W}_{先} \vee \mathcal{N}_{後}$ はつねに真だが、(2.1.55) に注意すれば、これは $\mathcal{W}_{先} \vee \mathcal{W}_{後} \vee \mathcal{D}$ がつねに真ということになる。定理 2.4 の主張そのものである。

■先手不敗が証明できる場合　ある種のゲームについては、（具体的に対局を解析することなく）一般論だけで定理 2.4 よりも強い「先手は決して負けない」という結果が証明できる。以下、話を具体的にするため「禁手[*54]のない n 目並べ」を扱かう。

n, L を $n \leq L$ を満たす自然数とする。一辺 L の正方形状の盤に[*55]先手（黒）と後手（白）が交互に石を置いて行く。パスはない。石はどこに置いてもよいが、各々の目には一つの石しか置けず、いったん置い

---

*54 「黒はこれこれの形を作ってはいけない」といった制約のことを禁手という。禁手を設けることで先手と後手をなるべく平等にしてゲームを面白くしている。

*55 もちろん高次元バージョンも可能だし、その場合も定理 2.6 は成立する。

た石は動かさない。縦・横・(45° の) 斜めいずれかの方向に n 個以上の石を連続して並べれば勝ちである。$n = L = 3$ としたものが三目並べ（あるいは○×ゲーム)、$n = 5, L = 19$ としたものが五目並べである。

定理 2.6 (n 目並べは先手不敗)**.** 任意の n, L について、n 目並べは先手必勝であるか勝負がつかないかのいずれかである。

前に述べた三目並べ（勝負がつかない)、五目並べ (先手必勝) の例はもちろんこの定理を満たしている。

証明には背理法を用いるのだが、これはなかなか面白い論法だと思う。

証明：このゲームが後手必勝だと仮定する。つまり後手が参照できる必勝戦略がある。

先手は第一手をデタラメに (たとえば、盤の端あたりに) 指す。そして、その後は、最初に置いた石（これを「捨て石」と呼ぶ) のことは忘れ、自分は（実際には先手なのだが) 後手を指しているつもりになって、後手

の必勝戦略に従ってプレイする。途中で、既に「捨て石」が置いてある位置に石を置くことになったら、どこか別のデタラメな場所に置き、これを新たな「捨て石」とみなす（これまで「捨て石」だった石は普通の石に昇格する）。こうして必勝戦略によって決着が着くところまで指せば、とうぜん先手の石は n 個連続して並んでおり、後手の石はまだ並んでいない。デタラメに置いた「捨て石」が一つ余分にあるが、これは n 個連続して並んだ列を邪魔することはない。あるいは、「捨て石」のために、先手の石はもっと前の段階で n 個連続して並んでいたかもしれない。いずれにせよ、こう

して先手は必ず勝てる[*56]。

後手必勝という仮定から先手必勝という矛盾する結

[*56] 念のため証明をもう少し丁寧に述べよう。進んだ読者向けなので、まだ導入していない集合の記法を使う。$1 \leq k < N$ を満たす奇数 k について、$B_k = \{x_1, x_3, \ldots, x_k\}$, $W_k = \{x_2, x_4, \ldots, x_{k-1}\}$ を、それぞれ先手と後手が石を置いた盤の目の集合とする（集合なので置いた順番などの情報は入っていないことに注意）。ある対局 $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ において先手が勝ったということは、$1 \leq k < N$ を満たすある奇数 k について、B_k の中には n 個の連続した並びがあり、W_k の中にはないことである。後手が勝ったということも同様に表わされる。

今、先手が上に述べた戦略でプレイしたとする。「捨て石」の目を $\tilde{x}$ としよう（はじめ $\tilde{x} = x_1$ であり、その後は必要に応じて定義を変える）。後手の必勝法が存在するという仮定から、ある k があって、$B_k \backslash \{\tilde{x}\}$ の中には n 個の連続した並びがあり、W_k の中にはない。このとき、明らかに B_k の中にも n 個の連続した並びがあるので、この対局では先手が勝っている。

論が得られた。仮定が誤っていたことがわかる[*57]。定理 2.4 を使えば、定理の結論が得られる。∎

この証明では、デタラメに指した「捨て石」が自分にとって不利にならないという事実が鍵になっている。この性質さえあればどんなゲームでも定理 2.6 は成り立つのである。

特に、ルールの上で引き分けがなく、かつ「捨て石をしても不利にならない」という性質をもったゲームは（最初にあげた四つの条件を満たしていれば）必然的に先手必勝ということになる。たとえば、ヘックスというボードゲームはまさにこの論法によって先手必勝であることが厳密に知られている。ただし（盤が十分に小さい場合を除けば）必勝戦略は知られていないので、

[*57] 定理 2.1 に忠実に述べておこう。上の（「後手のつもりで指す」論法で）$\mathcal{W}_{後} \Rightarrow \mathcal{W}_{先}$ を示した。一方、$\mathcal{W}_{後} \Rightarrow \overline{\mathcal{W}_{先}}$ は定義から自明。$\overline{\mathcal{N}_{先}} \equiv \mathcal{W}_{後}$ を思い出せば、$\overline{\mathcal{N}_{先}} \Rightarrow \mathcal{W}_{先}$ と $\overline{\mathcal{N}_{先}} \Rightarrow \overline{\mathcal{W}_{先}}$ がどちらも真と示されたので、$\mathcal{N}_{先}$ が真といえる。

この定理も（少なくともヘックスで遊ぶ人にとっては）「絵に描いた餅」なのである。

2.1.5　集合の基本

■集合とは何か　**集合** (set) とは、数学的な対象の集まりを言う。ただし、「『私のお気に入りの図形』の集まり」みたいな漠然としたものはダメだ。どういう対象を集めてきたかが明確に示されているときにのみ、数学的な意味で集合と呼ぶ。

集合をつくっている一つ一つの対象を**要素** (element) または**元**と呼ぶ。

集合を表すもっとも直接的な（しかし、不便な）方法は、集合の要素をすべて列挙することだ。このときは、波括弧を用い、

$$S = \{1, 2, 3, 4\} \tag{2.1.56}$$

のように書く決まりになっている。これで、S という文字で表されるのは、1, 2, 3, 4 という四つの数を集め

た集合だということになる。

集合では、要素を並べる順番はまったく問わない。つまり、

$$\{1, 4, 2, 3\}, \quad \{3, 2, 4, 1\} \tag{2.1.57}$$

なども、(2.1.56) の S と全く同じ集合とみなす。また、

$$\{1, 2, 2, 2, 3, 4, 4\} \tag{2.1.58}$$

などのように同じ要素が重複（ちょうふく）していても、だぶって現れていることは気にしないで、(2.1.56) の S と同じ集合とみる。

要素を列挙するのが面倒なとき、たとえば、

$$S' = \{1, 2, \ldots, 16\} \tag{2.1.59}$$

のような省略した書き方を用いることが多い。もちろん、「...」の部分は数が一つずつ増えていくという意味で、これは集合 $S' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$ のことだ。（くそ）真面目（まじめ）に考えると、どこにも等差で数を作

れなどと書いていないのだから、$\{1, 2, 4, 8, 16\}$ と等比になっているのかもしれないし、あるいは、もっとわけのわからないやり方で数が並んでいるのかもしれない。しかし、普通は、そういううるさいことは言わず、(2.1.59) のような書き方をみたら、数が一つずつ増えていくのだなという「もっともすなおな」解釈をすることになっている[*58]。

上で見た集合はいずれも要素の数が有限である。一般に要素の総数が有限の集合を**有限集合** (finite set) と呼ぶ。有限集合でない集合というのは、つまり、要素の数が有限ではない、要素の数が限りなく多い集合である。そのような集合を一般に**無限集合** (infinite set) と呼ぶ。すぐ後に出てくる整数の集合 $\mathbb{Z}$ や自然数の集

[*58] 数学者は、すべてを厳密に論理的に述べるのだから、こんな省略はしないだろうと思うかもしれない。しかし、数学者というのも不思議と直感的なものを重んじる人たちで、こういう風に「論理的ではないが、ちょっとした推理をして、もっともすなおな解釈をすればよい」という書き方も大変に好きなようだ。

合 $\mathbb{N}$ は無限集合の例である。

■集合の表し方　要素を列挙したり、（推理可能な規則で）省略して並べたりするだけで間に合わないときには、文字変数と述語によって集合を表すこともできる。変数 x を含む述語 $\mathcal{P}(x)$ を用いて、$\left\{x \,\middle|\, \mathcal{P}(x)\right\}$ と書けば、（述語に具体的な x を代入して得られる）命題 $\mathcal{P}(x)$ が真になるような x すべての集合という意味になる。縦棒の左側が集合の要素を代表する変数で、縦棒の右側が要素の満たすべき条件である。たとえば、

$$S' = \left\{x \,\middle|\, x \text{ は } 1 \leq x \leq 16 \text{ を満たす整数}\right\} \tag{2.1.60}$$

とすれば、(2.1.59) の S' と同じ集合になる。

一般に S を集合とするとき、a が集合 S の要素であるという事実を $a \in S$ と書く。これを、「a は S に属する」と読むこともある。もちろん、$a, b \in S$ は、a, b がともに S の要素という意味。また $a \notin S$ は a が S の要素でないことを意味する。具体的には、$2, 4 \in \{1, 2, 3, 4\}$, $8 \notin \{1, 2, 3, 4\}$ などとなるが、もちろん、こんな当た

り前のときには、こんな式を書いても特にありがたくない。

いくつかのよく使われる集合には、決まった名前がついている。まず、$\emptyset = \{\ \}$ は何も要素をもたない集合で、**空集合** (empty set) と呼ばれる[*59]。空っぽの集合なんて使えないと思うだろうが、これを定義しておくと、(物理での使い勝手だけを考えても) いろいろな局面で便利だ。また、

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\} \tag{2.1.61}$$

はすべての整数の集合であり、

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.1.62}$$

はすべての自然数の集合である[*60]。

---

*59 空集合も有限集合である。

*60 自然数の集合に 0 を含める流儀もある。「どちらが本当ですか？」と聞かれたことがあるが、本当もなにも、きちんと定義して、一貫して定義どおりに使えばいいだけのことだ。

整数の集合 $\mathbb{Z}$ や自然数の集合 $\mathbb{N}$ にはいくらでも大きな数が含まれている。どんな大きな数を宣言しても、かならずそれより大きな数が $\mathbb{Z}$ と $\mathbb{N}$ の中にみつかるということだ[*61]。しかし、∞（無限大[*62]）という「数」が $\mathbb{Z}$ や $\mathbb{N}$ に含まれているわけではないことに注意しよう。$\mathbb{Z}$ や $\mathbb{N}$ には限りなく多くの（つまり、無限個の）要素があるわけだが、各々の要素は、どんなに大きくても、あくまで有限なのである。

こういう記号を使えば、(2.1.60) の集合を

$$S' = \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{Z},\ 1 \leq x \leq 16 \right\} \tag{2.1.63}$$

と書くこともできる。このように、縦棒の右側の条件が複数「,」で区切られている場合は、これらの条件がすべて成り立つことを意味する（つまり「,」は「$\wedge$」であると解釈する）。あるいは、縦棒の左側にも情報をも

[*61] 式で書けば、$\forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ m > n$ となる。

[*62] 大ざっぱに言うと、どんな数よりも大きな「数」を無限大と呼ぶ。

たせて、

$$S' = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, 1 \leq x \leq 16 \right\} \tag{2.1.64}$$

と書いてもいいことになっている。

こういう記法を用いると、

$$P = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, m, \ell \in \mathbb{N} \text{ が存在し、} n^2 = m^2 + \ell^2 \text{ となる} \right\} \tag{2.1.65}$$

のような、凝(こ)った集合を定義することもできる。

問 2.1.5.a　すぐ上で定義した P はどういう集合か、考えてみよ。P の要素をすべて列挙することはできないが、小さい方からいくつか要素を求めてみよ。

もし、$n \in P$ なら任意の自然数 k について、$kn \in P$ となる（なぜなら、$n^2 = m^2 + \ell^2$ ならば、$(kn)^2 = (km)^2 + (k\ell)^2$ となるから）。よって、P は（空集合でないことはわかるので）無限集合である。

話のついでに書いておくと、より面白い問題は、集合

$$P' = \left\{ n \in \mathbb{N} \,\middle|\, m, \ell \in \mathbb{N} \text{ が存在し、} n^2 = m^2 + \ell^2 \text{ となり、} n, m, \ell \text{ の最大公約数は } 1 \right\} \tag{2.1.66}$$

が無限集合かどうかである（今度は、上と同じ論法は使えない）。

問 2.1.5.b　P' が無限集合であることを示せ。簡単な問題ではないが、高校数学の知識で十分に解ける。ヒントがほしい人は脚注をみよ[*63]。

2.1.6　集合の包含関係、和、交わり、差、積

ここでは、一般的な立場から、集合についての基礎的なことがらをまとめる。集合の直積以外は、高校でおなじみの内容だと思うので、記号をまとめる程度の

[*63] P' の定義に現れる (n, m, ℓ) の組は原始ピタゴラス数と呼ばれる。手始めに、$m = n - 1$ を満たすような特別な原始ピタゴラス数をさがすとよい。

つもりで、さらっと書く。もしこれらの内容について不慣れな読者がいれば、高校の参考書をみるなど、自分で補足してもらいたい。

以下では、S_1, S_2 を一般のふたつの集合とする。

まず、二つの集合の関係を表す記号から。S_1 と S_2 の要素が完全に一致しているとき、$S_1 = S_2$ と書く。S_1 の要素のすべてが、S_2 の要素でもあるとき、S_1 は S_2 の**部分集合** (subset) であるといい、$S_1 \subset S_2$ と表す[*64]。もし、$S_1 \subset S_2$ であり、また S_2 の要素の中に S_1 に含まれないものが一つでもあるとき（つまり、S_2 の方が S_1 よりも本当に大きいとき)、S_1 は S_2 の**真部分集合** (proper subset) であるといい、$S_1 \subsetneqq S_2$ と表わす。

S_1 と S_2 の要素をあわせて作った集合を、これらの**和集合** (sum, union) と呼び、$S_1 \cup S_2$ と表す (図 2.3 (a))。

[*64] $\in$ は集合の要素を表す記号、$\subset$ は一方の集合が他方に含まれていることを示す記号であり、二つは全く別の概念である。(物理ではあまり出てこないが)「集合を集めて集合を作る」というようなときには混乱することがあるので注意。

図 2.3　集合 S_1, S_2 をベン図で表わした。図では、(a) 和集合 $S_1 \cup S_2$、(b) 共通部分 $S_1 \cap S_2$、(c) 差 $S_1 \backslash S_2$ を、それぞれ、斜線で示した。

式で書けば、

$$S_1 \cup S_2 = \left\{ a \,\middle|\, a \in S_1 \text{ または } a \in S_2 \right\} \tag{2.1.67}$$

となる。

S_1 と S_2 に共通に含まれる要素を集めて作った集合を、これらの**共通部分** (intersection) と呼び、$S_1 \cap S_2$ と表す（図 2.3 (b)）。式で書けば、

$$S_1 \cap S_2 = \left\{ a \,\middle|\, a \in S_1 \text{ かつ } a \in S_2 \right\} \tag{2.1.68}$$

となる。

S_1 に属するが、S_2 には属さない要素の集合を $S_1 \backslash S_2$ と書く（図 2.3 (c)）。これは、S_1 から S_2 の要素を差っ引いた残りなので、「引き算」に相当する。式で書けば、

$$S_1 \backslash S_2 = \left\{ a \,\middle|\, a \in S_1 \text{ かつ } a \notin S_2 \right\} \tag{2.1.69}$$

となる。

以上、具体的な例を挙げてもいいが、簡単なことなので、不慣れな読者は自分で具体例を考えてみてほしい。

さいごに、二つの集合の積を定義する。これは、高校ではでてこなかったと思うが、大学レベルでは重要な考えなので、少し詳しく述べよう。$a \in S_1$, $b \in S_2$ として、これらを単に並べたペアー (a, b) を考える。集合とは違って、並べる順番にも意味があるとする。

いま、$a, c \in S_1$, $b, d \in S_2$ として、二つのペアー (a, b) と (c, d) を考える。これらペアーについて $(a, b) = (c, d)$ というのは、$a = c$ と $b = d$ がともに成り立つことだと定義しよう。このようなペアー (a, b) すべてから作られる集合を S_1 と S_2 の**直積** (Cartesian

product) と呼び、$S_1 \times S_2$ と表す。これも式で書けば、

$$S_1 \times S_2 = \left\{ (a, b) \,\middle|\, a \in S_1,\ b \in S_2 \right\} \tag{2.1.70}$$

となる。

例をみておこう。$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$, $S_2 = \{1, 2, 3\}$ とすれば、

$$\begin{aligned} S_1 \times S_2 = \{&(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), \\ &(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3)\} \end{aligned} \tag{2.1.71}$$

のように、二つの集合からすべての組み合わせをとってきたものが直積である。もとの集合 S_1, S_2 の要素の個数が、それぞれ、四つと三つだったが、直積集合 $S_1 \times S_2$ の要素の個数は $4 \times 3 = 12$ になっている。集合の直積は、図 2.4 に示したように、図形的に理解することができる。つまり、S_1 と S_2 の要素を、それぞれ、一次元的に並べると、それらの直積 $S_1 \times S_2$ の要素は二次元的に並んでいるとみなされる。これは、物理で重要になってくる座標の考え方そのものだといっ

図 2.4　$S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ と $S_2 = \{1, 2, 3\}$ の直積 $S_1 \times S_2$ の図形的な解釈。図のように、S_1 の要素を「横軸」に、S_2 の要素を「縦軸」に並べれば、図中の黒丸が $S_1 \times S_2$ の要素に対応する。いくつかの黒丸について要素の具体系を示したが、他の黒丸についても考えてみよ。

ていい。

同じようにして、n 個の集合 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ の直積 $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$ も定義できる。さらに、同じ集合 S を n 個もってきて作った直積を

$$S^n = \underbrace{S \times S \times \cdots \times S}_{n\text{ 個}} \tag{2.1.72}$$

のように書く。たとえば、$\mathbb{Z}^2$ は、$(3, -4)$, $(-1234, 9999)$ のような整数二つのペアーからな

る集合である。$\mathbb{R}^3$ は三つの実数[*65]x, y, z を並べて作った組 (x, y, z) の集合であり、これは、まさに（物理の舞台となる）無限に広い三次元の空間である。

2.2　数と数列

物理学に応用される数学の主要な役者は、さまざまな数である。ここでは自然数、整数、有理数、実数、そして、複素数について、基本的な性質をまとめる。とくに、高校数学ではあまり強調されていない、実数と複素数の本質的な意味について、少し詳しく述べた。また、(無限個の数の並びである）数列とその極限についても、きちんと述べた。これらは、物理学にとっても重要な概念なので、この機会に正しく身につけてほしい。

[*65] $\mathbb{R}$ は実数の集合。これについては、2.2.4 節で詳しく述べる。

2.2.1　自然数と整数

すでに見たように、自然数の集合を

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} \tag{2.2.1}$$

とする。これは、典型的な無限集合である。

二つの自然数 n, m をとると、それらの和 $n + m$ が決まる。明らかに、どんな自然数 n, m についても、それらの和 $n + m$ もまた自然数である。(2.1.2 節で導入した（かっこいい）記号を使えば、この事実は $\forall n, m \in \mathbb{N}\ [n + m \in \mathbb{N}]$ と書ける[*66]。）このような事実を、「自然数の集合 $\mathbb{N}$ は加法（足し算）について、閉じている」と表現する。$\mathbb{N}$ の中で、好き勝手に足し算をしても、けっして外に飛び出ることがないから、「閉じて」いるというわけだ。

[*66] 前には変数が x 一つの場合だけを扱ったが、ここでは $\forall$ は n, m の両方にかかると読む。つまり、$\forall n, m \in \mathbb{N}$ のところが「$\mathbb{N}$ の中からどんな m と n をとってこようと」という意味。

これに対して、自然数 $\mathbb{N}$ は減法（引き算）については、閉じていない。$\exists n, m \in \mathbb{N}\ [n - m \notin \mathbb{N}]$ というわけだ（日常語に訳してみよ）。実際、$n = 2,\ m = 10$ とでもすれば、$n - m = -8$ は $\mathbb{N}$ の元ではない。

この例からもすぐにわかるように、自然数以外に、0 や負の整数を考えてやれば、減法についても閉じた集合が得られる。こうして作られるのが、整数の集合

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\} \tag{2.2.2}$$

である。あるいは、$\mathbb{N}$ に 0 と負の数を付け加えて作ったということを強調したければ、

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \left\{ -n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.2.3}$$

と書いてもよい。自然数の集合 $\mathbb{N}$ を（なるべく小規模に）拡張して、加法についても減法についても閉じるようにしたのが整数の集合 $\mathbb{Z}$ だとみることができるのだ。

2.2.2　有理数

整数の集合は乗法（かけ算）について閉じている。式で書けば、$\forall a, b \in \mathbb{Z}\ [ab \in \mathbb{Z}]$ だ。ところが、商 a/b は必ずしも整数にはならないから、整数の集合は除法（割り算）について閉じていない。

そこで、数の集合として、より大きなものを考える。**有理数**[*67] (rational number) の集合を

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.2.4}$$

と定義する。分数の分母に 0 が来ないように、b を自然数からとってくることにしてある。ここで、分数に

[*67] rational という英語には「理性的、合理的」などの意味があるので rational number を「有理数」と訳したと思われるが、これは（有名な）誤訳である。この場合の rational は ratio（比）を形容詞にしたもので単に「比で書ける数」を意味していると解釈するのが自然だ。「比数」あるいは「有比数」とすれば意味が通じたはず。

ついては、任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して通分のルール

$$\frac{na}{nb} = \frac{a}{b} \tag{2.2.5}$$

が成り立つことを暗黙に仮定している。だから、(2.2.4) の定義で要素を列挙していくとき、たとえば 1/2 という数は、2/4, 3/6 などなど様々な形で（無限回）重複（ちょうふく）して数えられている。(2.1.58) で例を挙げて述べたように、集合の定義では、同じ要素がくり返し登場しても、一回だけ登場したのと同じようにあつかうことを思い出そう。

有理数の集合 $\mathbb{Q}$ は、加法、減法、乗法について閉じている。また、割る数が 0 でなければ、除法についても閉じている。普通の四則演算をすることを考えると、$\mathbb{Q}$ は十分に大きい。

実際、$\mathbb{Q}$ には、たくさんの数が含まれている。現実にわれわれが種々の測定器で物理量を測る際には、測定結果はすべて有限桁の小数 ($\times$ 単位) で表される。有限桁の小数はもちろん有理数の一部である。コンピューターの普通の数値計算で用いる数（たとえば、C 言語

の「実数型」の変数のとる値）もすべて有理数（のごく一部）だ[*68]。有理数の集合 $\mathbb{Q}$ さえあれば、物理だろうと、数学だろうと、快適に話を進めていくことができそうに思える。

問 2.2.2.a　（この問題は、ちょっと趣味的なので、気になる人だけが解いて下さい。また無理数などについての知識があった方がよいでしょう。）すぐ上のコンピューターについての記述は、はじめ

> コンピューターのなかであつかわれる数もすべて有理数（のごく一部）だ。

となっていた。しかし、この記述は正しくないとの指摘があり、上のように書き改めた。もとの記述はどのような点で不正確か、いくつかの観点から考えてみよ。

[*68] ただし、コンピューターによっては、設定した上限より大きな数が現れたとき「無限大」を表すコードにして計算を続行するものもあるらしい。「無限大」は有理数ではないので、これは例外。

図 2.5　有理数だけを数と考えると、このような直角二等辺三角形の斜辺の長さ（$\sqrt{2}$ のはずなのだが）は存在し得ないことになってしまう。

■有理数ではない数（無理数）の存在　ところが、話はそう簡単ではない。直感的に考えて「ある」べきはずの数が、有理数の集合 $\mathbb{Q}$ に含まれていないのだ。その代表的な例は $\sqrt{2}$ である。

$\sqrt{2}$ というのは、二乗すると 2 になるような正の「数」、つまり、$x^2 = 2$ という方程式の正の解である。われわれは、この数を、$\sqrt{2} \simeq 1.4142135623730950488$

といった具合に、好きな精度で計算できる[*69]。また、図 2.5 のような直角二等辺三角形の斜辺の長さは（ピタゴラス[*70]の定理から）$\sqrt{2}$ でなくてはならない。だから、$\sqrt{2}$ という数が「存在する」ことは確かに思える。

ところが、次の定理のように、$\sqrt{2}$ は有理数ではないことが簡単に証明できるのだ。

定理 2.7 ($\sqrt{2}$ は有理数ではない)**.** 任意の自然数 n, m について

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 \neq 2 \tag{2.2.6}$$

である。よって $\sqrt{2}$ は有理数ではあり得ない。

[*69] 173 ページの脚注 *79 を見よ。

[*70] Pythagoras of Samos (569 BC??–475 BC??) ギリシャ時代の人物だが、書いた物などが残っていないので、真の姿はほとんどわかっていない。数学などの学問とわけのわからない宗教をいっしょくたにしたような秘密主義の教団の指導者だったらしい。傑出した人物だったのは確かだろう。ピタゴラスの定理が本当にピタゴラス自身が発見した物なのかどうかは定かでないらしいが、彼らの教団でよく知られていたことは事実だそうだ。

証明：自然数 n, m から 2 の因数をくくりだし、$n = 2^p\,k$, $m = 2^q\,\ell$ と書く。p, q は 0 以上の整数、k, ℓ は奇数である。すると、

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = 4^{p-q}\,\frac{k^2}{\ell^2} \tag{2.2.7}$$

なので、これが整数になるなら（k^2/ℓ^2 は奇数なので)、4 の倍数か奇数かである。2 は奇数でも 4 の倍数でもないので (2.2.6) がいえる。∎

こうして、有理数の集合 $\mathbb{Q}$ からは「抜けている」数があることがわかった。読者は、とうぜん、次のような疑問をもつだろう。

1. 「抜けている」数があるのは少し気持ち悪いが、(物理への応用を考えたとき）何か実用的に困ることがあるのか？
2. これまでのように「抜けている」数を付け加えて、より大きな集合を作ることになるのだろうが、それはどうやるのか？

これについて答えるためには、（少しだけ）本格的な数学に踏み込む必要がある。そのために、次の節では（高校では、直感的にすませていた）数列の収束という概念をきちんと定式化する。しかし、答を先延ばしにするのも楽しくないので、ごく簡単な答を書いておこう。

1. 有理数だけでは、一般に極限がとれない。よって微分も定義できない。極限や微分ぬきで物理をするのは、猛烈に不便だ。つまり実用的に大いに困る。
2. 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ に「抜けている」数を付け加えたのが、実数の集合 $\mathbb{R}$ だ。しかし、それは $\sqrt{2}$ や $\sqrt{3}$ を付け加えていこう、といった単純な話ではない。実数をどうやって構成するかというのは難問であり、それを解決することが、現代数学の実りある発展となったのだ。物理を学ぶ人は、実数の構成を深く理解する必要はないが、それが決して当たり前の存在でないことは知っておいていいだろう。この本でも、実数の構成

にはあまり深入りせず、ひとつの特徴付け（コーシー列の収束）を与えることにする。

1 について、少し補足する。

物理学では、現実の世界での時間、距離、座標（の成分）などを、数に対応させることで、定量的な理論をつくっていく。そして、数としては実数を用いるのが標準である。ここで、「本来の時間」や「本来の長さ」は実数なのか有理数なのか、と問う人がいるかもしれない。しかし、そのようなことを悩む必要はないのだ。実際に測定される距離や時間には測定の際の誤差がつきものだから、「本来の距離や時間」というものが仮にあったとして、それが有理数なのか実数なのか（あるいは、他のものなのか）は区別のつけようがないからだ。

重要なのは、**実数を利用したモデル化によって、閉じた理論体系をつくることができ、そこから、現実の世界と比較できるような予言が導ける**ということだ。そして、関数、微分、積分といった数学的な道具立てがつかえるような理論をつくるためには、実数による

モデル化が圧倒的に便利なのである。たとえば、有理数だけを使ったニュートン力学というものを想像してみると、もしそんなものを無理矢理につくったにせよ、われわれが普通は何気なく使っている計算や論法が、やたら面倒かつ冗長になってしまい、まったく使い物にならない。そんな理論は、不便というよりも、「不自然」だというのが物理学者のすなおな感覚なのである。

2.2.3　有理数の数列と極限

■数列の収束　各々の自然数 $i \in \mathbb{N}$ に対して、ひとつの有理数 $a_i \in \mathbb{Q}$ を対応させる[*71]。これは、$a_1, a_2, a_3, \ldots$ のように、有理数が列をつくって無限に並んだものとみることができるので、**数列** (sequence) とよぶ。また各々の数 a_i を数列の項とよぶ。数列をひとまとめにし

[*71] もちろん、実数 $a_i \in \mathbb{R}$ を対応させれば実数の数列、複素数 $a_i \in \mathbb{C}$ を対応させれば複素数の数列が得られる。ただし、まだ $\mathbb{R}$（実数の集合）も $\mathbb{C}$（複素数の集合）も導入していないので、さしあたって、有理数の列で話を進める。

て、$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ あるいは $(a_i)_{i=1,2,\ldots}$ あるいは、i の範囲についての了解があればそれを省略して (a_i) のように書く[*72]。数列は、集合とはちがって、順番を入れ替えたり、重複する要素を消してしまったりはできないことに注意。

数列の例は、いくらでもあるが、たとえば $a_i = i^2$ とすれば、

$$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, \ldots \tag{2.2.8}$$

のように、どんどん増えていく数列が得られ、たとえば $a_i = 1/i$ とすれば、

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \ldots \tag{2.2.9}$$

のように、どんどん減っていく数列が得られる。もちろん、数列というときには各々の a_i がきちんと定まっ

[*72] $\{a_i\}$ と書くことも多いが、集合と紛らわしいので、この本では上のように書く。

ていさえすればよいので、これらの例のように a_i が簡単な式で書ける必要はない。

添え字 i がどんどんと大きくなるにつれて数列の項 a_i がある決まった数 α に限りなく近づくとき、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は**収束**し (converge)、その**極限**は α である、という。この事実を、

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \alpha \tag{2.2.10}$$

あるいは

$$a_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \tag{2.2.11}$$

のように表す。上の (2.2.9) の例では、明らかに、$\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ となっていると思われる。

もちろん、「どんどん大きくなるにつれ限りなく近づく」という上の言い方は、感覚的なものでしかなく、これでは論理的な議論はできない。きちんと議論を進めるためには、収束の意味を、はっきりと定めておかなくてはならない。

添え字 i が無限に大きくなる話をしているのだから、

「i に ∞ を代入したときに $a_\infty = \alpha$ となる」というのが収束の意味じゃないだろうか — と思うかもしれない。しかし、2.1.5 節のさいごに注意したように、∞ というのは自然数ではない。そして、a_i は（有限の）自然数 i についてのみ定められているのだから、a_∞ などという数はないのだ。

つまり、あくまで有限の i を相手にしつつ、「限りなく大きくなる」ときのふるまいをつかまえる必要がある。それをしたのが、次の、収束と極限の定義だ。いわゆる「ε-N 論法」であり、この本の中でも、もっとも抽象的な話だと思う。最初くらいは、数学のそういうところと付き合っておくのも悪くないだろう。

定義 2.8 (数列の収束)**.** 任意の正の有理数 ε に対して、ある自然数 N が存在し、$i \geq N$ を満たす任意の自然数 i について

$$|a_i - \alpha| \leq \varepsilon \tag{2.2.12}$$

が成立するとき、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は収束し極限 α をもつという。

せっかくだから、さらに抽象的な書き方をしておこう。$\varepsilon \in \mathbb{Q}$, $i, N \in \mathbb{N}$ という了解のもとで、

$$\left(\lim_{i\to\infty} a_i = \alpha\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0\ \exists N\ [\forall i \geq N\ |a_i - \alpha| \leq \varepsilon]) \tag{2.2.13}$$

が収束と極限の定義である[*73]。

さて、定義 2.8 が（まして、(2.2.13) が）すんなり頭

[*73] (2.2.13) では、四角括弧を使って、その中身が論理的に一つのかたまりになっていることを示した。絶対に必要なわけではないが、式をみやすくために、つけておいた。

に入ってくるという人は少数派だろうから、少し時間をかけて、日常語に翻訳してみよう。まず、「任意の正の有理数 ε に対して」という部分だが、ここは少し気持ちをいれて、「どんな小さな正の有理数 ε をもってきても」と読もう。小さな正の数 ε は、収束についての「精度」だと想像するのがよい。つづく「ある自然数 N が存在し」というところは、「十分に大きい自然数 N をうまく選んでやれば」と読む。そして、残りは、「i が N 以上だったら、a_i は（精度の範囲で）極限の α と同じと思える」と言っているわけだ。

この話のうまいところは、精度 ε を決めてしまわず、「どんな ε でも」と言っているところだ。つまり、誰かが「精度は $\varepsilon = 0.01$ で」と言うと、「はいはい、それなら $N = 5$ に取っておけばいいでしょう。$a_5, a_6, a_7, \ldots$ はぜんぶ精度 0.01 で α と一致しているから」と答える。が、これだけでは話が終わらず、今度は（たとえば）「じゃ、精度 $\varepsilon = 0.001$ にしてくれ」と言ってくるので、「よし、それなら $N = 13$ と取ろう」と受ける。

さらに、「ほしたら、精度 $\varepsilon = 0.00001$ やったらどないや？」「いけずやなあ*74。それやったら、$N = 3500$ や！」という具合に、掛け合い漫才か小学生の喧嘩みたいに、これが延々とつづくというわけだ。

一人目がどんなに厳しい精度を要求しても（ただし、「精度 $\varepsilon = 0$」と要求することは許されない！）、二人目はそれに合格するような N を見つけてこられる — というのが収束の意味なのである。収束や極限といった「無限」にかかわる事柄をきちんと理解するために、一種の「動き」のあるシナリオを用意したと言ってもよい。決してもっとも素直な考えだとは思わないが、ひとたび把握すれば、自然で、ものを考える出発点とな

*74 「いけず」は、広辞苑にも載っていることばで、意地悪とか強情の意味とある。名古屋出身の学生さんから、この言葉はまったく理解できないとのご意見をいただいた（ただし、同じ名古屋出身者でも、吉本興業の番組を見て育った人は、よくわかるとコメントしてくれた）。私の理解するかぎり、今でも関西では「いけず」は日常的な言葉で、わざわざ持って回ったことをして意地悪をするような人に対して使われる。

る定義である。

以上の説明を理解すれば、定義 2.8 で、はじめに ε をとり、次に N を取るという順番になっていることがきわめて重要なことがわかるはずだ。(2.2.13) で、$\forall\varepsilon > 0\ \exists N$ となっているところを、安易に $\exists N\ \forall\varepsilon > 0$ などとしてしまうと、まったく違った意味になってしまうことを、なっとくしてほしい。

■数列の発散　$(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を数列とする。添え字 i がどんどんと大きくなるにつれて数列の項 a_i が限りなく大きくなっていくとき、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は**無限大に発散**する (diverge) といい、それを、

$$\lim_{i\to\infty} a_i = \infty \tag{2.2.14}$$

あるいは

$$a_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \infty \tag{2.2.15}$$

のように表す。はじめにあげた数列 (2.2.8) は、明らかに無限大に発散する。

もちろん、「限りなく大きくなっていく」ということも厳密に定式化しなくては数学にはならない。上の収束の定義がわかっていれば、これは簡単だ。やはり「掛け合い漫才」をやらせるのだが、今度は、以下のように、一人目が「好き勝手な大きな数」R を宣言して、二人目はそれに対して「十分に大きな」N の値を答えることになる。

定義 2.9 (無限大への発散)**.** 任意の正の有理数 R に対して、ある自然数 N が存在し、$i \geq N$ を満たす任意の自然数 i について $a_i \geq R$ が成立するとき、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は無限大に発散するという。

負の無限大に向けて発散も、まったく同じように定義できる。

二つの例 (2.2.8), (2.2.9) を見ていると、数列というのは、収束するか、プラスかマイナスの無限大に収束するかどちらかなのかという気になるかも知れない。しかし、もちろんそんなことはない。

たとえば、$a_i = (-1)^i$ として得られる数列

$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots \tag{2.2.16}$$

は永遠に 1 と -1 のあいだを行き来する。収束しないし、無限大かやマイナス無限大に発散するわけでもない。あるいは、$a_i = i\,(-1)^i$ として得られる

$$-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, -9, 10, -11, \ldots \tag{2.2.17}$$

は、絶対値を増しながら正負のあいだを振動し続ける[*75]。

■数列と極限の例　基本的な例として、$i \in \mathbb{N}$ について、

$$a_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{9}{10^j} \tag{2.2.18}$$

[*75] これらの例のように、「収束しないし、無限大かマイナス無限大に発散するのでもない」数列も「発散する」というのが標準の流儀らしい（「数学辞典」等には、そのように書いてある）。私は、あまりそういう言葉使いはしない。

と定義しよう。抽象的な和の記号を使ったが、意味がすぐに取れない人は 1.3.3 節を見直そう。(2.2.18) で、i は「生きた」変数であり、j はダミー変数であることに注意しよう。$a_i \in \mathbb{Q}$ なので、これで有理数の数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が定義される。もちろん、

$$\begin{aligned} a_1 &= 0.9 \\ a_2 &= 0.99 \\ a_3 &= 0.999 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

ということである。

どうみてもこの数列の極限は 1 だが、念のため、定義 2.8 にしたがって証明しておこう。明らかに $1 - a_i = 10^{-i}$ である[*76]。任意の $\varepsilon > 0$ が与えられたら、$10^{-N} \leq \varepsilon$ を満たす N を選ぶ。これは簡単で、ε が（十進法で表示して）小数点以下に M 個の 0 が並ぶ

[*76] 等比級数の和の公式を使ってもいいし、帰納法で示してもよい。

数なら、$N = M + 1$ とすればよい。すると、任意の $i \geq N$ について、$|a_i - 1| = 10^{-i} \leq 10^{-N} \leq \varepsilon$ となり、(2.2.12) が成立。これで $\lim_{i\to\infty} a_i = 1$ がいえた。

これが、中学校くらいから知っていたであろう等式

$$1 = 0.99999999\cdots \quad (9\text{ が限りなく続く}) \tag{2.2.20}$$

の導出であり、(より重要なことだが) 論理的な意味づけなのである。web などを見ていると、(2.2.20) の等式がなっとくできないとか「哲学的におかしい」とか言っている人が、かならずどこかにいる[*77]。しかし、(2.2.20) 右辺に出てくる $0.999\cdots$ というのは、(2.2.18) で決まる数列 (a_i) の極限を表す省略記号なのだから、極限のことを知らない人がこの等式を「なっとくできない」のは当たり前の話なのだ (哲学のことは知らないが)。中学あたりで極限の概念もないまま「だまし討ち」のような「導出[*78]」を教えてしまって、そのあと

[*77] あとよくいるのが「相対論は間違っている」の人たち。

[*78] $1/3 = 0.3333\cdots$ を無理に納得させておいて、両辺を 3 倍して (2.2.20) を出す、というやつ。

のフォローがないことが混乱の元凶なのだとも思う。

さて、次の例として、

$$
\begin{aligned}
b_1 &= 1.4 \\
b_2 &= 1.41 \\
b_3 &= 1.414 \\
b_4 &= 1.4142 \\
&\vdots \\
b_{30} &= 1.41421356237309504880168872421 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{2.2.21}
$$

という数列を考えよう。もちろん、これだけでは数列の定義にはなっていないが、やっていることは、わかると思う。$\sqrt{2}$ を小数で表示し、小数点以下 1 桁目から i 桁目までを残したのが、b_i である。もちろん、任

意の $i \in \mathbb{N}$ について $b_i \in \mathbb{Q}$ であるから[*79]、有理数の数列 $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が定義される。

任意の $j > i$ について、b_j と b_i を比べてみよう。小数点以下 1 桁目から i 桁目までは、両者はまったく同じで、違いがあるのはその先だけである。よって、$0 \leq b_j - b_i \leq 10^{-i}$ が成り立つ。つまり、i が大きくなればなるほど、そこから先で b_j はほとんど変化しなくなる、ということだ。そうすると、数列 (b_i) が収束するのは当たり前だと思われる。

もし数列が極限 $\lim_{i\to\infty} b_i$ を持つなら、それは $\sqrt{2}$

[*79] どんな i についても、b_i は有限の計算だけで求めることができる。たとえば、$b_2 = 1.41$ を知っていて、b_3 を求めることを考えよう。三桁目がどうなるか調べるため、$(1.410)^2$, $(1.411)^2$, $(1.412)^2$ という風に三桁目を一つずつ増やしながら二乗を計算していく。すると、$(1.414)^2 = 1.999396$, $(1.415)^2 = 2.002225$ となるので、三桁目は 4 と知れる（これがなぜか、考えよう）。i が大きくなると計算は大変になってくるが、原理的には、まったく同じ方法で計算できる。

に等しくなければならない[*80]。ところが、すでに見たように $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ である。よって、**いかにも収束しそうな有理数の数列 (b_i) は、有理数の中に収束する先を持たない**、ということが言えてしまった！　数列や収束を議論するためには、有理数というのは不便な集合なのである。

2.2.4　実数

■実数と実数列　上の数列 (b_i) が有理数の中で収束しなかった理由を考えてみよう。有理数 q を小数で表示すると、$39/25 = 1.56$ のように（割り切れて）有限の桁でおわる小数になるか、
$13/7 = 1.\ 857142\ 857142\cdots$ のように途中から同じパターン（ここでは、857142 というパターンが永遠にくり返す）が続く循環小数になるか、のいずれかであ

[*80] 真面目にいえば、この事実も証明を要する。証明は簡単なので、気になる読者はやってみよう。

る[*81]。$\sqrt{2}$ が有理数でないということは、$\sqrt{2}$ の小数表示が決して循環小数にならないことを意味している。

よって、$\sqrt{2}$ に限らず、有限小数にも循環小数にもならないような無限小数は、有理数でないことがわかる。そこで、有理数の集合 $\mathbb{Q}$ に、**循環小数にならない無限小数をすべて付け加える**ことで、新しく実数の集合 $\mathbb{R}$ をつくることにする。もちろん、これは、かなりいい加減な説明であり、この発想にしたがってきちんと実数を構成するためには、それなりに面倒な数学的な議論が必要になる。残念だが、この本でそこまで踏み込んでいる余裕はさすがにない。ここでは、そうやって実数がきちんと作られたとして、その性質（とくに、定理 2.13）を述べることにしよう[*82]。

[*81] 筆算で割り算をする操作を落ち着いて吟味すれば、この事実はなっとくできるだろう。そのまま議論をつきつめれば、厳密な証明もできる。

[*82] 数学者の書いた「解析学」の教科書は、ほとんど、実数の構成からはじまる。厳密な構成に興味のある読者は、どれか一冊の最初の方を読んでみるとよい。

有理数を実数に広げる際に新たに付け加えられた数（つまり $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ の元）は**無理数**[*83] (irrational number) といわれる。無理数は、循環小数では表されない数であり、$\sqrt{2}$ や π など、無数に存在する[*84]。

まず、実数の集合 $\mathbb{R}$ と有理数の集合 $\mathbb{Q}$ の間には、次の関係がある。

定理 2.10 ($\mathbb{R}$ の中での $\mathbb{Q}$ の稠密性(ちゅうみつせい)). 任意の実数 a と任意の正の実数 ε に対して、有理数 q が存在して、$|a-q| \leq \varepsilon$ が成り立つ。

[*83] 152 ページの脚注 *67 で述べたように、ratio は比のことなので、irrational number はまさに「比で書けない数」の意味。「無比数」とでもすればよかったか。

[*84] 有理数も無理数も、かぎりなく多く存在する（どんな有限の個数を取り除いても必ず残りがある、ということ）。ところが、無理数の方が有理数よりも「ずっと多い」ことがわかっている。かぎりなく多いものどうしをどうやって比較するのかというのは面白い話で、集合の大きさを特徴づける「濃度」という概念が重要になってくる（これは、普通に知っている濃度とは本質的に意味のちがう概念なので注意）。ここでは（残念ながら）そこまで深入りする余裕はない。

つまり、どんな実数をとっても、その限りなく近くに有理数が存在するということである。いってみれば、有理数は実数のなかに「びっしりと」埋まっているのだ。これは、有理数が循環小数に対応し、実数が一般の無限小数に対応することを思えば、自明な性質だろう。

もちろん、実数の集合 $\mathbb{R}$ は、加法、減法、乗法について閉じており、0 で割らない限り除法についても閉じている。

さらに、各々の自然数 $i \in \mathbb{N}$ に対して、ひとつの実数 $a_i \in \mathbb{R}$ を対応させて、実数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ をつくることができる。このあたりの用語や記号は、有理数の数列について 2.2.3 節で説明したものとまったく同じである。また、収束の意味も、定義 2.8 と全く同様に、次の「掛け合い漫才」で定義しよう。

定義 2.11 (実数列の収束)**.** $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ を実数列、α を実数とする。任意の正の実数 ε に対して、ある自然数 N

が存在し、$i \geq N$ を満たす任意の自然数 i について

$$|a_i - \alpha| \leq \varepsilon \tag{2.2.22}$$

が成立するとき、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は収束し極限 $\alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$ をもつという。

前節に登場した「(行き先を知っているとはかぎらないけれど) いかにも収束しそうな数列」という考えを、きちんとつきつめていくと、次に定義するコーシー[*85]列の概念が得られる。

[*85] Augustin Louis Cauchy (1789–1857) フランスの数学者。業績は理論物理にもおよび多彩だが、微分積分学、複素解析、微分方程式論などで本質的な貢献がある。彼の生年はフランス革命の年だ！

定義 2.12 (コーシー列)**.** 任意の正の実数 ε に対して、ある自然数 N が存在し、$i \geq N,\ j \geq N$ を満たす任意の自然数 i, j について

$$|a_i - a_j| \leq \varepsilon \tag{2.2.23}$$

が成立するとき、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ はコーシー列であるという。

再び $\varepsilon > 0$ を（誰かが宣言した）「精度」だと解釈しよう。(2.2.23) の条件は、N 項目より先では a_i が（精度の範囲で）まったく変化しなくなることを意味している。たしかに「いかにも収束しそう」だ。数列 (2.2.19) や (2.2.21) は典型的なコーシー列である。

次の「コーシー列の収束」の定理は、実数のもっとも本質的な性質を表している。実際、「コーシー列の収束」を定理ではなく、実数の公理の一つとして（つまり、実数論の基本前提として）要請することも少なく

ないのだ。ここでは、(実数の厳密な構成を議論していないので) 定理の証明は述べない。今後、実数の性質にかかわる事実の証明は、ほぼすべてこの定理に帰着させて証明していくことになる。

定理 2.13 (コーシー列の収束)**.** 任意のコーシー列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は実数の範囲で収束する。逆に収束する実数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は必ずコーシー列である。

直感的には、この定理は「いかにも収束しそうな数列は、収束する (逆もまた然り)」ということを言っている。当たり前のようだが、本質的に重要だ。これによって、(2.2.21) で定まる数列 $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ の極限の存在も保証され、$\sqrt{2} = \lim_{i\to\infty} b_i$ が実数であることが再確認される。

この基本定理をもとに、数列の収束についての、きわめて便利な定理を示しておこう。

定理 2.14 (有界単調列の収束)**.** 数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ と実数 b があり、任意の i について $a_i \leq a_{i+1}$（単調性）および $a_i \leq b$（有界性）が成り立つとする。このとき、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は収束する。

落ち着いて考えれば、定理の内容は当たり前に思える。無限個の数が並んでいて、着々と増えていき、なおかつ絶対に b を越えることができないのだ。どう考えても、一カ所にむかって収束していくしかない。つまり、収束の基本定理 2.13 は、こういう「当たり前」のことがちゃんと成立することを保証しているのだ。言うまでもないだろうが、$a_i \geq a_{i+1}$, $a_i \geq b$ を満たす数列 (a_i) も収束する（証明：数列 $(-a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ に定理 2.14 を適用)。

定理 2.14 の証明：背理法を用いる[*86]。定理の条件を満たす数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が収束しないと仮定する。よって (a_i) はコーシー列ではない。すなわち、ある $\varepsilon > 0$ が存在し、任意の N に対して、適当な $i > j \geq N$ をとれば $a_i - a_j > \varepsilon$ となる。$\varepsilon > 0$ を上で存在が保証された値に固定。まず $N = 1$ と選び、上に保証された i, j をとり、これらを i_1, j_1 とでも呼ぶ (これらは、$i_1 > j_1 \geq 1$ を満たす)。次に、$N = i_1$ と選び、対応する i, j をとり i_2, j_2 と呼ぶ (これらは、$i_2 > j_2 \geq i_1$ を満たす)。これをくり返せば $j_1 < i_1 \leq j_2 < i_2 \leq \cdots \leq j_\ell < i_\ell \leq \cdots$ が定まり、これらは $a_{i_\ell} - a_{j_\ell} \geq \varepsilon$ を満たす。これを使い、また単調性から $a_{j_2} - a_{i_1} \geq 0$ であることに注意すれば、$a_{i_2} - a_{j_1} = (a_{i_2} - a_{j_2}) + (a_{j_2} - a_{i_1}) + (a_{i_1} - a_{j_1}) \geq (a_{i_2} - a_{j_2}) + (a_{i_1} - a_{j_1}) \geq 2\varepsilon$ がわかる。同じことをくり返せば ($a_{i_3} - a_{j_1}$ について、実際にやってみよう)、

[*86] これは 78 ページの定理 2.2 の応用例になっている。80 ページの脚注 *21 を見よ。$\mathcal{Q}_1$ が単調性、$\mathcal{Q}_2$ が有界性、$\mathcal{P}$ が Cauchy 列であることに対応する。

一般の正整数 k について、$a_{i_k} \geq a_{j_1} + k\,\varepsilon$ という不等式が得られる。ところが、右辺は k とともにいくらでも大きくなるので、有界性と矛盾。∎

最後に、数列の極限について基礎的なことをまとめておく。実数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}, (b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ があり、$\alpha = \lim_{i\to\infty} a_i$, $\beta = \lim_{i\to\infty} b_i$ が成り立つとする。c, d を任意の実数とするとき、新しい数列 $(c\,a_i + d\,b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ について、

$$\lim_{i\to\infty}(c\,a_i + d\,b_i) = c\,\alpha + d\,\beta \tag{2.2.24}$$

が成り立つ。積の数列 $(a_i\,b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ についても、

$$\lim_{i\to\infty}(a_i\,b_i) = \alpha\,\beta \tag{2.2.25}$$

が成り立つ。$b_i \neq 0$, $\beta \neq 0$ であれば[*87]、商の数列 $(a_i/b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ についても、

$$\lim_{i\to\infty}\frac{a_i}{b_i} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{2.2.26}$$

[*87] 条件 $b_i \neq 0$ は特に必要ではないが a_i/b_i が定義できるように課しておいた。

が成り立つ。要するに、数列の加減乗除の極限は、すなおに極限の加減乗除に等しいと考えてよいということだ。

これらの関係は定義にもとづいて自然に証明できる。それほど面白いものではないが、ε-N 論法の標準的な使い方の例になるので、易しすぎず難しすぎないところで、積についての (2.2.25) を証明しておこう。こういう技術に関心のある読者が読めばいいだろう。

(2.2.25) の証明：まず任意の $\varepsilon > 0$ を選ぶ。これを使って、

$$\varepsilon_1 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|\beta|+1}, 1\right), \quad \varepsilon_2 = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|\alpha|+1}, 1\right) \tag{2.2.27}$$

と定義する。ただし、$\min(a, b)$ は a,b のうちの小さい方である。

数列 (a_i) が α に収束することから、自然数 N_1 がとれて、任意の $i \geq N_1$ について $|a_i - \alpha| \leq \varepsilon_1$ となる。同様に、自然数 N_2 がとれて、任意の $i \geq N_2$ について

$|b_i - \beta| \leq \varepsilon_2$ となる。それぞれで、ε の代わりに ε_1 と ε_2 を使ったところがミソだ。

N_1 と N_2 のうち大きい方を N と書くと、任意の $i \geq N$ について、$|a_i - \alpha| \leq \varepsilon_1$ かつ $|b_i - \beta| \leq \varepsilon_2$ がいえる。よって、

$$\begin{aligned}
&|a_i\, b_i - \alpha\beta| \\
&= |(a_i - \alpha)(b_i - \beta) + (a_i - \alpha)\beta + \alpha(b_i - \beta)| \\
&\leq |a_i - \alpha|\,|b_i - \beta| + |a_i - \alpha|\,|\beta| + |\alpha|\,|b_i - \beta| \\
&\leq \varepsilon_1\varepsilon_2 + |\beta|\,\varepsilon_1 + |\alpha|\,\varepsilon_2 \qquad (2.2.28)
\end{aligned}$$

となる。ここで、少しだけ先走りして三角不等式 (2.2.47) と $|xy| = |x|\,|y|$ という関係を使った。$(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \geq 0$ より、$2\varepsilon_1\varepsilon_2 \leq (\varepsilon_1)^2 + (\varepsilon_2)^2 \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ である（最後は、定義から $0 < \varepsilon_1 \leq 1,\ 0 < \varepsilon_2 \leq 1$ であることを使った）。つまり、$\varepsilon_1\varepsilon_2 \leq (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)/2$ がいえた。この不等式を (2.2.28) の右辺に適用すると、

$$|a_i\, b_i - \alpha\beta| \leq \left(|\beta| + \frac{1}{2}\right)\varepsilon_1 + \left(|\alpha| + \frac{1}{2}\right)\varepsilon_2 \leq \varepsilon \quad (2.2.29)$$

がいえる。最後の結果は、定義 (2.2.27) からそのまま

でる。というよりも、こうやって最後が ε で押さえられるように $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を選んだのだ。

はじめに選んだ $\varepsilon > 0$ に対して N が存在し (2.2.29) が成り立つ。数列 $(a_i\, b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ が $\alpha\beta$ に収束することが示された。 ▮

問 2.2.4.a　上の証明を通読した読者は、(2.2.24) を証明してみよ。

■実数のべき乗　a を任意の実数とし、n を任意の正の整数とする。「a の n 乗」と呼ばれる実数を

$$a^n := \underbrace{a \times \cdots \times a}_{n\ \text{個}} \tag{2.2.30}$$

と定義する。また、0 でない任意の実数 a と負の整数 m については、

$$a^m := \frac{1}{a^{-m}} \tag{2.2.31}$$

と定義する。さらに、すべての実数 a について、$a^0 = 1$ と定義しよう[*88]。すると、任意の 0 でない実数 a と任意の整数 n, m について、

$$a^n\, a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{n\,m} \tag{2.2.32}$$

が成り立つことが簡単に示される。

このような実数のベキ乗を指数（べき）が有理数の場合に拡張しよう。以下では、a を任意の正の実数とする。

n を正の整数とすると、$b^n = a$ となるような正の実数 b がただ一つ存在する。この事実は自明ではないの

[*88] これによって $0^0 = 1$ となる。ただし、「0^0 は定義しない」という立場の文献も多い。というのも、$a \neq 0$ についての $a^0 = 1$ という（誰もが認める）等式で $a \to 0$ とすれば $0^0 = 1$ が自然に見えるが、一方で、任意の正の整数 n について $0^n = 0$ という等式からは $0^0 = 0$ 自然に見えるからだ。「どちらが正しい」というものではなく（数学である以上）便利なように一貫した定義を用いればよい。この本で $0^0 = 1$ とするのは、単に一部の表式（たとえば (3.2.11) の最右辺）が簡潔に書けるからである。

で、気になる人のためにすぐ下で証明しよう。このような b を「a の n 乗根」と呼び、$\sqrt[n]{a}$ あるいは $a^{1/n}$ と書く。もちろん $\sqrt[2]{a}$ は平方根なので、2 を略して $\sqrt{a}$ と書く。$a^{1/n}$ という書き方は初心者には奇異に映るかもしれないが、

$$(a^{1/n})^n = a, \quad (a^n)^{1/n} = a \tag{2.2.33}$$

という関係と (2.2.32) の二つ目の関係を見比べれば、確かにもっともな書き方だなっとくがいくと思う。

最後に m を任意の整数とする。任意の正の整数 n について、

$$(a^{1/n})^m = (a^m)^{1/n} \tag{2.2.34}$$

という等式を示そう。両辺とも正の実数だから、両辺を n 乗したものが等しいことを言えばいい。右辺の n 乗は定義から a^m である。左辺の n 乗を調べるには、(2.2.32) の二つ目の関係から一般に $(b^m)^n = b^{n\,m} = (b^n)^m$ であることに注意する。今は $b = a^{1/n}$ なので左辺の n 乗も a^m に等しい。

(2.2.34) の等式を踏まえて、ここに現われた量を $a^{m/n}$ と書くことにする[*89]。任意の有理数 $q \in \mathbb{Q}$ は $q = m/n$ と書けるから、これで任意の正の実数 a と任意の有理数 q について a^p が定義されたことになる[*90]。このように定義すれば、任意の $p, q \in \mathbb{Q}$ について、(2.2.32) に相当する関係

$$a^p\, a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{p\,q} \tag{2.2.35}$$

が成り立つことも示される。これも（証明は難しくないが）当たり前ではないので、一つ目を導いておこう。$p = m/n$, $q = k/\ell$ と書き、左辺の $n\ell$ 乗を求めると、

$$(a^{m/n}\, a^{k/\ell})^{n\ell} = (a^{m/n})^{n\ell}\, (a^{k/\ell})^{n\ell} = a^{m\ell}\, a^{kn} = a^{m\ell+kn} \tag{2.2.36}$$

---

*89 真面目に言うと、ここで正の整数 ℓ について $a^{m/n} = a^{(\ell m)/(\ell n)}$ であることを示す必要がある。気になる人は示しておこう。

*90 3.2.4 節では、対数関数を使って、任意の正の実数 a と任意の実数 b についてのべき乗 a^b を定義する。371 ページを見よ。

となる。よって定義から

$$a^{m/n}\,a^{k/\ell} = a^{(m\ell+kn)/(n\ell)} \tag{2.2.37}$$

だが、これが求める関係だった。

問 2.2.4.b　(2.2.35) の二つ目の関係を証明せよ。

<u>n 乗根が存在することの証明</u>：a を任意の正の実数、n を任意の正の整数とするとき、$b^n = a$ を満たす実数が存在して一意的であることを示す。

まず、$0^n, 1^n, 2^n, 3^n, \ldots$ を次々と求めながら a と比較する。k^n がはじめて a を越えた整数 k を使って、$b_0 = k - 1$ と定める。つまり b_0 は 0 以上の整数で $(b_0)^n \leq a < (b_0+1)^n$ を満たす。

次に、$\{b_0 + (k/10)\}^n$ を $k = 0, 1, 2, \ldots$ について計算し、やはり最初に a を越えたときの k を使って $b_1 = b_0 + ((k-1)/10)$ とする。次は、$\{b_1 + (k/10^2)\}^n$ について同様のことを行ないということをくり返し、数列 $b_0, b_1, b_2, \ldots$ を作る。これは、$\sqrt{2}$ を近似する数

列 (2.2.21) と全く同じ思想で $a^{1/n}$ を近似する数列になっている。構成法からして、任意の $i < j$ について $0 \leq b_j - b_i \leq 10^{-i}$ だから、これはコーシー列。極限 $b := \lim_{i\to\infty} b_i$ が存在する。$b^n = a$ が成り立つことは（真面目に言うと証明を要するが）明らか。二つの正の実数について $b \neq b'$ なら $b^n \neq (b')^n$ だから、一意性も明らか。 ∎

■実数の部分集合　高校でも学んだことだろうが、実数の集合 $\mathbb{R}$ を無限に長い直線（数直線）と同一視すると、いろいろと見通しがよい。この際、直線上の各点と各々の実数が対応し、$a < b$ ならば a に対応する点は b に対応する点の左にあり、両者の距離は $b - a$ に等しい。直線上の点に対応する実数は、その点を表示する座標の値と考えてもよい。

$\mathbb{R}$ の部分集合には実に様々なものがあるが（たとえば、$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ はいずれも $\mathbb{R}$ の部分集合)、とくに、数直線の一部を切り取ってきたような部分集合はいろいろ

図 2.6　数直線上に、実数 $a < b < c < d$ に対応する点を示す。下は、閉区間 $[a, b]$ と開区間 (c, d)。黒丸の点は区間に含まれ、白抜きの点は区間に含まれない。

な局面で役に立つ（図 2.6）。$a < b$ について定義される部分集合

$$[a, b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x \leq b \right\} \tag{2.2.38}$$

は**閉区間** (closed interval) と呼ばれる。区間の両端の a, b が含まれているので「閉」といわれる。これに対して、

$$(a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b \right\} \tag{2.2.39}$$

は両端を含まない**開区間** (open interval) である。(a, b) という記号は、二つの実数 a, b の組（二次元空

間の座標）とまぎらわしいが、この書き方は定番なので、そのまま用いる。

この他にも開いた端と閉じた端をもつ

$$[a,b) := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leq x < b \right\} \tag{2.2.40}$$

や、同様に定義する $(a,b]$、また、一端の端が閉じていない半無限区間

$$[a,\infty) := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \geq a \right\} \tag{2.2.41}$$

なども使われる。∞ という要素は $\mathbb{R}$ には含まれないので、$[a,\infty]$ のような区間はあり得ないことに注意。

■上界、下界、最大値、最小値　これは単なる言葉の定義で、特に難しいことはないと思う。

$S \subset \mathbb{R}$ を実数の部分集合とする。任意の $x \in S$ について $x \leq b$ が成り立つような実数 b を、集合 S の**上界** (upper bound) という。もし b が S の上界なら、$b' \geq b$ を満たす任意の実数 b' も S の上界である。もちろん全ての集合 S に対して上界が存在するわけではな

い。$[a, \infty)$ や $\mathbb{Z}$ のように、いくらでも大きな数を含むような部分集合は上界をもたない。

同様に、任意の $x \in S$ について $x \geq a$ が成り立つような実数 a を、集合 S の**下界** (lower bound) と呼ぶ。「げかい」と同じ字だが、こちらは「かかい」と読む。もし a が S の下界なら $a' \leq a$ を満たす任意の実数 a' も S の下界である。

同じ言葉は一つの（多くの場合、未知の）実数 x についても使う。つまり、$a \leq x \leq b$ が成り立つとき、a は x の下界であり、b は x の上界であるという[*91]。たとえば、$1.4142 \leq \sqrt{2} \leq 1.4143$ という不等式は、$\sqrt{2}$ の下界が 1.4142 で上界が 1.4143 であることを示す。

関数についても同じ言葉を使う（関数については 2.4.2 節で議論するのでいささかフライングなのだが、別に難しい話ではない）。ほとんど説明するまでもない

[*91] $S = \{x\}$ という一つの要素だけからなる部分集合について（既に上で定義した意味での）上界と下界を考えたと言ってもよい。

だろうが、$D \subset \mathbb{R}$ という範囲に定義された関数 $f(\cdot)$ が、任意の $x \in D$ について $a \leq f(x) \leq b$ を満たすとき、a を関数 $f(\cdot)$ の下界、b を関数 $f(\cdot)$ の上界という。

再び $S \subset \mathbb{R}$ を実数の部分集合とする。もし S の上界 b が S に含まれるなら、b を S の**最大** (maximum) または**最大値**と言い、

$$b = \max S \tag{2.2.42}$$

と書く。要するに、$\max S$ は S の要素の中でもっとも大きいものである。上界とは違って、最大値は存在すればただ一つに定まる。

もちろん、$[a, \infty)$ や $\mathbb{Z}$ のように、いくらでも大きな数を含むような部分集合に最大はない。また、開区間 (a, b) は、いくらでも大きな数を含むわけではないが、最大値をもたない。なぜなら、b は (a, b) の上界だが、(a, b) の要素ではない。一方、(a, b) の要素でなるべく大きな c をとってきたとしても、それより大きな (a, b) の要素（たとえば $(b + c)/2$）が必ず存在する。

「変数 x が実数の部分集合 S 上を動くときの関数

の値 $f(x)$ の最大値」といった量は、これから頻繁に登場する。(2.2.42) の書き方では、この最大値は $\max\{f(x)\,|\,x \in S\}$ と表わすことになるが、同じものを $\max_{x\in S} f(x)$ のように表わすこともある。

最小についてもまったく同じ。もし S の下界 a が S に含まれるなら、a を S の**最小** (minimum) または**最小値**と言い、

$$b = \min S \tag{2.2.43}$$

と書く。要するに、$\min S$ は S の要素の中でもっとも小さい（ゼロに近いと言う意味ではなく、マイナス無限大に近い）ものである。

■実数についての不等式　先に進む前に、実数のあいだの不等式について、これから先に使う関係を、簡単にまとめておこう。まず、

$$(a \geq b \ \wedge \ c > 0) \Rightarrow a\,c \geq b\,c \tag{2.2.44}$$

$$(a \geq b \ \wedge \ c < 0) \Rightarrow a\,c \leq b\,c \tag{2.2.45}$$

という関係はよく知っているだろう。また、任意の a, b について、**三角不等式**

$$|a+b| \leq |a| + |b| \tag{2.2.46}$$

が成り立つ。これは、a, b が同符号の場合と異符号の場合を分けて考えれば、自明。これをくり返し使うことで、任意の n について

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i| \tag{2.2.47}$$

が示される。

2.2.5　複素数

■複素数とその意義　実数の集合 $\mathbb{R}$ は（0 で割ることを除けば）四則演算について完全に閉じているし、$\mathbb{R}$ 上では「いかにも収束しそうな数列」は確実に収束する。物理をするにせよ、数学をするにせよ、実数の集

合さえあれば、ほとんど万全のように思われる[*92]。

実数の世界で不便なことは、x^2+1 のような多項式がこれ以上は因数分解できないこと、言いかえれば、二次方程式

$$x^2+1=0 \tag{2.2.48}$$

が解を持たないことである。そこで、高校で学んだように、

$$i^2=-1 \tag{2.2.49}$$

を満たす「新しい数」である**虚数単位** (imaginary unit) の i を導入する[*93]。そして、実数 a, b によって $a+ib$

[*92] 実際、古典物理学については、これは正しい。古典力学や電子回路論で複素数を使うことは多いが、それは、あくまで数学的な道具に過ぎず、物理的に不可欠なものではない。**しかし、**量子物理学においては話はまったく違う！　量子論では物理系の記述のためには、どうしても複素数を用いる必要があるのだ。これも、「自然科学における数学の不合理なまでの有効さ（1.2 節）」の驚くべき好例である。

[*93] 文字 i は整数値を取る変数としても多用するので、これはあまりよい記号ではないのだが、定番なので仕方がない。なお、電気工学などの分野では i は電流に用いて、虚数単位を j と表わす。

と書ける**複素数** (complex number) を定義するのである。複素数の集合は

$$\mathbb{C} = \left\{ a + ib \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\} \tag{2.2.50}$$

と書くことができる[*94]。虚数単位を単なるアルファベット i で表すのはあまりよい風習とは言えないが、物理や数学の文献ではこれが定番なので、それに従うことにする。状況をきちんと見抜けば、虚数単位の i と単なる文字変数の i を混乱することは、ほとんどあり得ないと思う。

このように数を拡張することで、(2.2.48) の二次方程式の解も $x = \pm i$ のように求めることができる。あるいは、$x^2 + 2x + 2 = 0$ のような（実数の範囲では解なしの）方程式も、$x = -1 \pm i$ のように解ける。めで

[*94] 実数二つの組という点では、$\mathbb{C}$ は集合 $\mathbb{R}^2$（(2.1.72) を参照）と同じである。実際、足し算、引き算、絶対値などについて調べるかぎり、$\mathbb{C}$ は $\mathbb{R}^2$ とまったく同じものと言ってよい。しかし、$\mathbb{C}$ には独自のかけ算の規則があるために、$\mathbb{R}^2$ とは本質的に異なった、豊かな性質をもつ。

たし、めでたし、というわけだ。

しかし、これは複素数を導入する本当の意義ではない[*95]。実数を使った問題（たとえば、実数を係数とする二次方程式）が解けないからということで新しい数である複素数を考えたわけだが、それによって、考えるべき問題も増えてしまうことを忘れないでほしい。具体的には、複素数を含んだ $x^2 = i$ のような新しい方程式を考える必要がでてきてしまう。それを解くために、また「新しい数」を導入して・・・とやっているのでは、話にキリがないではないか。

ところが、面白いことに、新しい方程式 $x^2 = i$ は、複素数の範囲で解をもつのだ。ためしに未知の実数 a, b

[*95] むかし、「『実数が直線なら、それを平面にして二成分にしたのが複素数だ（後述する複素平面のこと）』と習ったら、複素数の意味がわかった」と言っている学生さんがいた。本当に、それでなっとくできるのだろうか？　直線を平面に広げたというだけの話なら、次は、それを空間にまで広げて三成分にし、その次は・・・という具合にどんどんと続いてしまう。このように考えていたのでは、「平面」の複素数を特別あつかいすることはなっとくできないと思う。

により $x = a + ib$ と書いて、方程式に代入してみる。$(a+ib)^2 = (a^2-b^2)+2iab$ だから、これが i に等しいことを要請すると、$a^2 - b^2 = 0,\ 2ab = 1$ という実数についての連立方程式を得る。これを (解が実数という範囲で) 解けば、$(a, b) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), (-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ である。よって、方程式 $x^2 = i$ の解は $x = \pm(1 + i)/\sqrt{2}$。これ以上の「新しい数」など持ち出さずに、新しい方程式が解けてしまった！

実は、上の例は「やらせ」ではない。これは、複素数のもつ深い意義をはっきりと表すガウス[*96]の**代数学の基本定理**の、もっとも単純な例なのだ。

[*96] Johann Carl Friedrich Gauss (1777–1855) 十九世紀前半最大の天才数学者。整数論、幾何学、解析学、応用数学など様々な分野で重要な業績を残した。電磁気学にもガウスの法則でその名を残している。

定理 2.15 (代数学の基本定理)**.** 自然数 $n \geq 2$ をとる。$c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ を任意の複素数とし、変数 x についての n 次の多項式

$$F(x) = x^n + c_{n-1}\, x^{n-1} + \cdots + c_2\, x^2 + c_1\, x + c_0 \tag{2.2.51}$$

をつくる。すると、複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ が存在し、$F(x)$ は

$$F(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) \tag{2.2.52}$$

と因数分解できる。

言いかえれば、n 次方程式 $F(x) = 0$ は、解 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ をもつ（これら解の中には重複するものがあるかもしれない)。つまり、複素数の範囲では、どんな n 次方程式をつくっても、複素数の範囲で完全に解を求めることができるのだ。これこそが、複素数という「新しい数」を導入する最大の（数学的な）意

義なのである。興味（そして複素数についての少し進んだ知識）のある読者のために定理 2.15 を証明の概略を以下で簡単に説明する。普通の読者は証明を読む必要はないが、このような事実があるということは心に深く刻んでおいてほしい。

別の言い方でくり返せば、複素数の集合 $\mathbb{C}$ は四則演算や数列の収束について閉じているだけでなく、「好き勝手な n 次方程式をつくってその解をさがす」ということについても、閉じている。そういう意味で、これは数学者が気紛れにつくった「新しい数」などではなく、きわめて自然な推論の結果として見いだされた、強い必然性をもった数の集合なのである。

定理 2.15 の証明の概略：代数学の基本定理には様々な証明が知られているが、ここではコーシー[*97]による初等的な（そして面白い）証明の概略を述べよう。なお、証明を能率的に書くため（まだ導入していないのだが）

[*97] 178 ページの脚注 *85 を見よ。

複素数の極表示 (3.2.116)（409 ページ）を用いる。極表示を知らない読者はここは（読むとしても）後から読んでほしい。

定理の条件を満たす $F(x)$ に対して、複素数 α が存在し、

$$F(x) = (x-\alpha)(x^{n-1} + c'_{n-2}\,x^{n-2} + \cdots + c'_1\,x + c'_0) \tag{2.2.53}$$

と因数分解できることを証明する（$c'_0, \ldots, c'_{n-1}$ は適当な複素数)。これがいえれば、右辺第二項の $n-1$ 次の多項式を新たに $F(x)$ とみなして同じ結果を使う — ということをくり返せば定理が示される。

$c_0 = 0$ なら (2.2.53) は（$\alpha = 0$ として）自明に成り立つので、$c_0 \neq 0$ とする。実数 $R \geq 0$ を固定し、実数 θ を 0 から 2π まで変化させたとき $F(Re^{i\theta})$ が複素平面でどのような曲線を描くかを考える。$Re^{i\theta}$ は複素平面の半径 R の円周上を動くから、この円周が写像 $F(x)$ によってどのような曲線に写されるかを考えてい

ると言ってもいい。

$$F(Re^{i\theta}) = R^n e^{in\theta} + \left(\text{絶対値が (定数)}\times R^{n-1}\text{ 以下の複素数}\right) \quad (2.2.54)$$

なので、R を十分に大きく取れば、$F(Re^{i\theta})$ のふるまいはおおよそ $R^n e^{in\theta}$ だけで決まる。よって、θ が 0 から 2π まで変化するとき、$F(Re^{i\theta})$ は半径 R^n の円周に（ほぼ）沿って複素平面の原点のまわりを反時計方向に n 回まわる。

一方、$R = 0$ のときは θ が変化しても $F(Re^{i\theta}) = F(0) = c_0 \neq 0$ は一定である。つまり、われわれが考えている曲線は一点 c_0 に「縮んで」いる。

ここで、はじめ十分に大きく取った R を連続的に小さくして 0 に近づけることを考える。$F(Re^{i\theta})$ の描く曲線は、R が大きいときには原点を n 重に囲む輪だが、R が小さければ c_0 近辺にいて原点を囲まない。よって、どこか途中の R で曲線が原点を横切ることにな

図 2.7　$F(x) = x^3 + x^2 + ix + 2 + 2i$ として、四通りの R の値について、θ を 0 から 2π まで動かしたときに $F(Re^{i\theta})$ が描く曲線を図示した。R が大きい一番左の図では曲線は原点のまわりを 3 回まわっているが、R が小さい一番右の図では曲線は原点を囲んでいない。これらの途中の R で曲線がちょうど原点を横切る（図には二つの状況を示したが、もう一つ横切る状況がある。これら三つが $F(x) = 0$ の三つの解に対応する）。

る[*98]。図 2.7 を見よ。よって、ある複素数 α が存在し

[*98] これは絵を描いてみれば当たり前に思えるが、厳密に言えば証明すべきことだ。ここではそこまでの厳密さにはこだわらないことにする（なので、「証明の概要」と書いた）。

て $F(\alpha)=0$ がいえる。因数定理[*99]によって (2.2.53) が証明された。▮

■複素数のあつかいの基本　$x, y \in \mathbb{R}$ とし、$z = x + iy$ という複素数を考える。x を複素数 z の**実部** (real part) とよび、$x = \mathrm{Re}\, z$ と書く。y を z の**虚部** (imaginary part) とよび、$y = \mathrm{Im}\, z$ と書く。言うまでもないが、二つの複素数 w, z について $w = z$ とは $\mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, w$ と $\mathrm{Im}\, z = \mathrm{Im}\, w$ がともに成り立つということである。また、$\mathrm{Re}\, z = 0$ を満たす 0 でない複素数を**純虚数** (pure imaginary number) と呼ぶ。

複素数 $x + iy$ は、x, y という二つの実数の組に対応するので、図 2.8 のように、x と y を座標にもつ平面上の点に対応させることができる。このような平面を**複素平面** (complex plane) と呼ぶ。

[*99] 「$F(\alpha)=0$ ならば (2.2.53) のように因数分解できる」というのが因数定理。高校数学では実係数の多項式の場合を学んだと思うが、複素係数になっても因数定理の証明は実係数の場合とまったく同じである。

図 2.8　複素数 $z = x + iy \in \mathbb{C}$ を x と y を座標とする平面（複素平面）上の点に対応させる。複素共役の $z^* = x - iy$ は、もとの z を x 軸に対して鏡映変換した位置にある。

すでに高校で学んだことだが（そして、上でも少し使ってしまったが)、複素数の四則演算では、あたかも i をただの数のようにみなして計算し、必要に応じて $i^2 = -1$ の関係を使えばよい。加法、減法については、$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ として

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d) \qquad (2.2.55)$$

であり、乗法については、

$$\begin{aligned}(a + ib)(c + id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= (ac - bd) + i(ad + bc) \qquad (2.2.56)\end{aligned}$$

とする。明らかに、複素数どうしの足し算、引き算、かけ算の結果はやはり複素数になる。つまり、複素数は加法、減法、乗法について閉じている。0 でない複素数の逆数は、少しややこしいが、

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+ib} &= \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2} \qquad (2.2.57)\end{aligned}$$

のように「分母の有理化」をすることで、やはり普通の複素数の形に直すことができる。このことから、(割る数が 0 でなければ) 複素数は除法についても閉じていることがわかる。

複素数 $z = x + iy$ に対して、その**複素共役** (complex conjugate) を、

$$z^* := x - iy \qquad (2.2.58)$$

と定義する。数学の文献では、複素共役を $\bar{z}$ と書くのが普通で、私もその書き方を使うこともあるのだが、この本では物理で標準の z^* で統一する。複素平面上で

は、図 2.8 に示したように、z^* は z を x-軸に対して鏡映変換した位置にある。

$z, w \in \mathbb{C}$ とすると、和の複素共役についての

$$(z+w)^* = z^* + w^* \tag{2.2.59}$$

は自明だが、積についての

$$(z\,w)^* = z^*\,w^* \tag{2.2.60}$$

は、(2.2.56) のような計算をして確かめる必要があるだろう。(2.2.60) をくり返し使うことで任意の正整数 n について

$$(z^n)^* = (z^*)^n \tag{2.2.61}$$

も示される。また、複素共役を使えば、複素数 z の実部と虚部を、それぞれ、

$$\mathrm{Re}\,z = \frac{z+z^*}{2}, \quad \mathrm{Im}\,z = \frac{z-z^*}{2i} \tag{2.2.62}$$

と表すことができる。

任意の $z = x + iy \in \mathbb{C}$ について、

$$z^*\,z = (x-iy)(x+iy) = x^2 + y^2 \geq 0 \tag{2.2.63}$$

が成り立つ。そこで、

$$|z| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2.2.64}$$

により、複素数 z の**絶対値** (absolute value) を定義する。複素平面では、$|z|$ は、z に対応する点と原点とのあいだの距離に等しい。$|z| = 0$ となるのは $z = 0$ のときに限られることに注意。また、定義より、$z, w \in \mathbb{C}$ について、

$$|z\,w| = |z|\,|w| \tag{2.2.65}$$

および

$$|\mathrm{Re}\,z| \leq |z|, \quad |\mathrm{Im}\,z| \leq |z| \tag{2.2.66}$$

は明らか。さらに、

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z^* + w^*)(z+w) \\ &= |z|^2 + |w|^2 + z^* w + w^* z \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z^* w) \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z|\,|w| \\ &= (|z| + |w|)^2 \end{aligned} \tag{2.2.67}$$

だから、複素数についても**三角不等式**

$$|z+w| \leq |z| + |w| \tag{2.2.68}$$

が成立する。帰納法を使えば、任意の $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ について、

$$\left| \sum_{j=1}^{n} z_j \right| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| \tag{2.2.69}$$

が示される。

■複素数の数列と級数　各々の自然数 j に対してひとつの複素数 c_j を対応させることで、複素数の数列 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ が得られる。複素数列の収束については、実数列の場合の定義 2.11 をそのまま焼き直して、次のように定義する。

定義 2.16 (複素数列の収束)**.** $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ を複素数列、γ を複素数とする。任意の正の実数 ε に対して、ある自然数 N が存在し、$j \geq N$ を満たす任意の自然数 j について

$$|c_j - \gamma| \leq \varepsilon \tag{2.2.70}$$

が成立するとき、数列 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ は収束し極限 $\gamma = \lim_{j\to\infty} c_j$ をもつという。

さらに、コーシー列の定義 2.12 も同様にそのまま拡張すると、コーシー列の収束を保証する定理 2.13 も、そのままの形で、成立する。数列の極限の加減乗除についての (2.2.24), (2.2.25), (2.2.26) がそのまま成立することはいうまでもないだろう。

2.3　無限級数

この節では無限級数をあつかう。無限級数は、数列の特別なケースにすぎず、すでに (2.2.18) で一つの例をみているのだが、物理での応用の重要さを考えて、とくに別にまとめることにする。特に、絶対収束の概念は重要で、ある無限級数が絶対収束するための条件（系 2.18）は頭にいれておくべきだろう。

2.3.1　無限級数と絶対収束

非負の整数 $i = 0, 1, 2, \ldots$ の各々に対してひとつの実数 a_i を対応させ、数列 $(a_i)_{i=0,1,2,\ldots}$ をつくる[*100]。これを順に足して、

$$s_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_i = \sum_{j=0}^{i} a_j \tag{2.3.1}$$

とすれば、新しい数列 $(s_i)_{i=0,1,2\ldots}$ が得られる。数列 $(s_i)_{i=0,1,2\ldots}$ が収束するとき、**無限級数** (infinite series) $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ が収束するという。そして、極限 $s = \lim_{i\to\infty} s_i$ を無限級数の和とよび、

$$s = \sum_{j=0}^{\infty} a_j = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{2.3.2}$$

[*100] 今までは数列に自然数 i を使って番号を付けてきたが、ここでは慣習にしたがって非負の整数を使う。もちろん、そうしても本質的には何も変わらない。

と書く。無限級数も数列の特別な場合にすぎないから、数列の極限の加減乗除についての (2.2.24), (2.2.25), (2.2.26) はそのまま成立する。

無限級数の和についての次の定理は、たいへん役に立つ。

定理 2.17 (絶対収束する無限級数)**.** 各々の a_i を絶対値 $|a_i|$ に置きかえて作った無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$ が収束するなら、無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$ も収束する。また、$|\sum_{j=0}^{\infty}a_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$ が成り立つ。

証明：まず 2.2.4 節を読み返してコーシー列の意味とその役割を思い出しておこう。$\tilde{s}_i = |a_0|+|a_1|+\cdots+|a_i|$ とする。仮定により $(\tilde{s}_i)_{i=0,1,2\ldots}$ はコーシー列。ところが、任意の $i > j$ について、三角不等式 (2.2.47) により

$$\begin{aligned} |s_i - s_j| &= |a_i + a_{i-1} + \cdots + a_{j+1}| \\ &\leq |a_i| + |a_{i-1}| + \cdots + |a_{j+1}| \\ &= \tilde{s}_i - \tilde{s}_j \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

が成り立つので、$(s_i)_{i=0,1,2,\ldots}$ もコーシー列である。最後の不等式は有限和については三角不等式 (2.2.47) そのもの。任意の有限和について不等式が成り立つので、極限でも成り立つ。 ∎

無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$ が収束するとき、無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$ は、(上の定理により収束するわけだが) **絶対収束**する、という。

上でつくった $\tilde{s}_i = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_i|$ は、明らかに、単調性 $\tilde{s}_i \leq \tilde{s}_{i+1}$ をもつ。よって、有界単調数列の収束についての定理 2.14 より、あとは有界性があれば級数 $(\tilde{s}_i)_{i=0,1,2,\ldots}$ の収束は保証される。これをまとめよう。

系 2.18. ある実数 b があり任意の n について $\sum_{j=0}^{n}|a_j| \leq b$ が成り立てば[*101]、無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j|$ は収束する。よって、無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}a_j$ は絶対収束

[*101] 以上の条件をひとまとめにして $\sum_{j=0}^{\infty}|a_j| < \infty$ と書いてしまうことも多い。

する。

2.3.2　無限級数の例

■絶対収束する無限級数　絶対収束する無限級数の例を二つみておこう。これらは、単なる例という以上に、これから先に重要な役割を果たす。

一つ目は、(2.2.19) の一般化である。β を $|\beta| < 1$ を満たす任意の実数とすれば、

$$1 + \beta + \beta^2 + \beta^3 + \cdots = \frac{1}{1-\beta} \tag{2.3.4}$$

である。これは高校でも学んだことだが、念のために、導出をみておこう。

まず、任意の i について、部分和が

$$1 + \beta + \cdots + \beta^i = \frac{1-\beta^{i+1}}{1-\beta} \tag{2.3.5}$$

のように計算できる[*102]。よって、

$$\left|\sum_{j=0}^{i}\beta^j - \frac{1}{1-\beta}\right| = \frac{|\beta|^{i+1}}{|1-\beta|} \tag{2.3.6}$$

となる。もし $|\beta| < 1$ なら (2.3.6) の右辺は i を大きくすればいくらでも小さくなるので、収束の定義 2.11 により、$\sum_{j=0}^{\infty}\beta^j = 1/(1-\beta)$ がいえる。この場合の収束は絶対収束である。$|\beta| \geq 1$ では、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ は収束しない。

問 2.3.2.a　電卓や筆算で 1/81 の小数表示を求めよ。ちょっと面白い形をしている。これは以下のように理解できる。$|\beta| < 1$ とする。無限級数 (2.3.4) を用いて $1/(1-\beta)^2$ を $\sum_{i=0}^{\infty} c_i\beta^i$ という無限級数で表わせ（c_i は求めるべき係数)。(ヒント：どうやっていいかわからないなら 3.2.3 節の最初の $e^x e^y = e^{x+y}$ の証明を参照するといい。ここでは厳密な証明をする必要はない。)

[*102] 忘れている人は、(2.3.5) の両辺に $1-\beta$ をかけてみよ。

この結果を用いて最初に求めた小数の形が説明できることを述べよ。なお $1/81 = 1/9^2 = 0.01/(1-0.1)^2$ であることに注意。1/9801 についても考察せよ[*103]。

(2.3.4) はすべてが計算できてしまう例で、せっかくの定理や系の出番がなかった。次の例はこれほど当たり前ではない。

任意の実数 x に対して、無限級数

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^i}{i!} + \cdots \tag{2.3.7}$$

を考える。もちろん

$$i! = i(i-1)(i-2)\cdots 1 \tag{2.3.8}$$

は自然数 i の**階乗**(かいじょう)である[*104]。このように、各項が x

[*103] 小数表示の計算はたとえば WolframAlpha® を使えば簡単にできる。1.3.5 節を参照。

[*104] 言うまでもないと思うが、$1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 3 \times 2 = 6$, $4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$ である。

のべき乗[*105]になっている無限級数を、とくに、**べき級数** (power series) と呼ぶ。

任意の x を固定し、無限級数 (2.3.7) が絶対収束することを示す。$0! = 1$ と約束することにして、$a_i = x^i/i!$ $(i = 0, 1, \ldots)$ とする。$M \geq |x|$ を満たす自然数 M をとり、$\beta = |x|/(M+1) < 1$ とする。$k \geq M$ なる自然数について、

$$k! = \underbrace{k(k-1)\cdots(M+1)}_{k-M\ \text{項}}\, M! \geq (M+1)^{k-M}\, M! \tag{2.3.9}$$

が成り立つ。よって

$$|a_k| = \frac{|x|^k}{k!} \leq \frac{|x|^M}{M!}\,\frac{|x|^{k-M}}{(M+1)^{k-M}} = \frac{|x|^M}{M!}\,\beta^{k-M} \tag{2.3.10}$$

[*105] 変な言葉だが、「x の二乗」「x の三乗」というときの二や三を「べき」と呼ぶので、x^n を総称して「x のべき乗」という。しかし、普通は「x の n 乗」と呼ぶことが多い。

である。よって、

$$\sum_{k=M}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=M}^{\infty} \frac{|x|^M}{M!} \beta^{k-M} = \frac{|x|^M}{M!} \sum_{j=0}^{\infty} \beta^j$$
$$= \frac{|x|^M}{M!} \frac{1}{1-\beta} \tag{2.3.11}$$

を得る。右辺の量を c と書く。有限和 $d = \sum_{j=0}^{M-1} |a_j|$ はもちろん有限である。よって、$b = c + d$ とおけば、任意の正の整数 n について、$\sum_{j=0}^{n} |a_j| \leq b$ が示されたことになる。こうして、系 2.18 が使えることになり、次の重要な事実が示される（一つの例に過ぎないわけだが、あまりに重要なので、定理にしておく）。

定理 2.19 (指数関数を定義する無限級数の絶対収束)**.** 任意の実数 x について、無限級数 (2.3.7) は絶対収束する。

後に 3.2.2 節で、この無限級数を用いて、

$$\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^i}{i!} + \cdots \tag{2.3.12}$$

のように**指数関数** (exponential function) $\exp(x)$（同じものを e^x とも書く）を定義することになる。

■無限級数についての注意　もし無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ が収束すれば、かならず $\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ となる。この事実は定義をたどっていけば、簡単に証明できる。

しかし、「逆は真ならず」で、$\lim_{i\to\infty} a_i = 0$ だからといって無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ が収束するとは限らない。典型的な反例は、無限級数

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{i} + \cdots \tag{2.3.13}$$

である。新たに足される項はどんどん小さくなっていくのだが、すぐ後でみるように、この級数は無限大に発散することが簡単にわかる。

実は、この無限級数は「ぎりぎり」発散する場合であることが知られている。s を正の実数として、無限級数

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\cdots+\frac{1}{i^s}+\cdots \tag{2.3.14}$$

を考えよう。$s=1$ とすると上の (2.3.13) そのものなので、もちろん発散。$s<1$ なら、この級数の各々の項について $i^{-s}>i^{-1}$ だから、もちろん和も $s=1$ の場合より大きい。この場合も無限級数 (2.3.14) は発散する。一方、任意の $s>1$ について無限級数 (2.3.14) が収束することが示される（447 ページの (3.3.40) を見よ）。

$s>1$ について、無限級数 (2.3.14) を足しあげた結果を

$$\zeta(s):=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^s} \tag{2.3.15}$$

と書き、**ゼータ関数** (zeta function) と呼ぶ。本書で踏み込むことはできないが、ゼータ関数は深遠な性質を

持った関数で、数学で最も深く研究されている対象の一つである。たとえば、簡単なところでも、$\zeta(2) = \pi^2/6$ という少々意外な結果が知られている (残念ながら、これに踏み込む余裕もない)。

ちなみに、発散する無限級数 (2.3.13) の一つおきの項にマイナスをつけた無限級数

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2i-1} - \frac{1}{2i} \cdots \qquad (2.3.16)$$

は収束して $\log 2$ に等しいことを (3.3.32) で示す。これは絶対収束しない[*106]無限級数の例である。

■無限級数 (2.3.13) が発散するという証明　無限級数 (2.3.13) が無限大に発散することを厳密に示そう。

基本となるアイディアは簡単だ。この級数を（足す

[*106] 「ぜったい『収束しない』」と言っているのではなく、「『絶対収束』しない」と言っている。

順番は変えずに）次のようにまとめなおす。

$$1+\left\{\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right\}+\left\{\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right\}$$
$$+\left\{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right\}+\left\{\frac{1}{17}+\cdots+\frac{1}{32}\right\}+\cdots \tag{2.3.17}$$

ここで波括弧 $\{\cdots\}$ でまとめた部分はいずれも 1/2 以上であることに注意しよう。実際、一つ目の波括弧は中身が 1/2 そのものだから、これは自明。二つ目は、1/3 は 1/4 以上であることに注意すれば、1/4 以上の数 2 つの和だから、1/2 以上。さらに、三つ目は 1/8 以上の数 4 つの和、四つ目は 1/16 以上の数 8 個の和などなど。同じことが限りなく続けられるので、この級数は 1/2 をずっと足し続けた物よりも大きいことがわかる。つまり、無限大に発散する。

せっかくなので、同じことを数式を使ってもう少し厳密にみておこう。まず、N を正の整数として、無限

級数 (2.3.13) に対応する有限和 $S(N)$ を、

$$S(N) := \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \tag{2.3.18}$$

と定義しよう。すると、(2.3.17) の「まとめ方」に対応して、任意の正の整数 k について、

$$S(2^k) = 1 + \sum_{\ell=1}^{k} \sum_{j=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{j} \tag{2.3.19}$$

と書ける。一見ややこしい式だが、一つ目の和の ℓ を地道に 1, 2, 3 と増やしながら、二つ目の和の範囲を具体的に調べてみるのがいいだろう。ここで、二つ目の和について、

$$\sum_{j=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{j} \geq \sum_{j=2^{\ell-1}+1}^{2^\ell} \frac{1}{2^\ell} = \{2^\ell - 2^{\ell-1}\}\frac{1}{2^\ell} = \frac{1}{2} \tag{2.3.20}$$

という不等式が成り立つ。これを (2.3.19) に戻せば、

$$S(2^k) \geq 1 + \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{2} = 1 + \frac{k}{2} \tag{2.3.21}$$

となる。

これで無限級数の発散がいえる。厳密には次のようにすればいい（168 ページの定義 2.9 を参照）。R を（大きな）任意の正の実数とする。このとき、正の整数 k を $1 + (k/2) \geq R$ となるように選ぶ。すると、(2.3.21) によって、$N \geq 2^k$ を満たす任意の N について $S(N) \geq R$ がいえる。これは「$S(N)$ がいくらでも大きくなること」の厳密な表現であり、無限級数 (2.3.13) が発散することが示された。

なお、テイラー展開を利用した簡単な議論により、$S(N) \geq \log(N+1)$ というきれいな関係を示すこともできる（446 ページの (3.3.37) でこれを示す）。そこからも、この無限級数の発散が示される。

問 2.3.2.b　$0 < r < 1$ を満たす実数と自然数 N があ

り、任意の $i \geq N$ について $|a_{i+1}| \leq r\,|a_i|$ が成立するなら、無限級数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ は絶対収束する。この事実を証明せよ。

2.3.3　複素数の無限級数

$j = 0, 1, 2, \ldots$ の各々に対してひとつの複素数 c_j を対応させ、無限級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} c_j = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots \tag{2.3.22}$$

を考えることができる。ここで、各々の c_j をその絶対値 $|c_j|$ で置きかえて得られる実数の無限級数

$$\sum_{j=0}^{\infty} |c_j| = |c_0| + |c_1| + |c_2| + \cdots \tag{2.3.23}$$

が収束すると仮定しよう。実数の無限級数の絶対収束についての定理 2.17 に使われたのは、コーシー列の収束を保証する定理 2.13 と三角不等式 (2.2.47) だけだっ

た。複素数についても同じ三角不等式 (2.2.69) が成立するから、定理 2.17 は、そのまま複素数の数列についても成立する。つまり、

系 2.20. 実数の無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}|c_j|$ が収束すれば、対応する複素数の無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ も収束する。このとき、無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}c_j$ は絶対収束するという。また、$|\sum_{j=0}^{\infty}c_j| \leq \sum_{j=0}^{\infty}|c_j|$ が成り立つ。

絶対収束する複素数の無限級数の重要な例は、(2.3.7) の実数 x を任意の複素数 z におきかえて作った

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^j}{j!} + \cdots \tag{2.3.24}$$

である。ここで、

$$\left|\frac{z^j}{j!}\right| = \frac{|z|^j}{j!} \tag{2.3.25}$$

に注意すれば、この場合の実数の無限級数 $\sum_{j=0}^{\infty}|c_j|$ は、以前の (2.3.7) で x に $|z|$ を代入したものに他ならない。それは、すでに見たように収束するので、無限級

数 (2.3.24) が絶対収束することがわかる。これによって、3.2.7 節で見るように、複素数 z の指数関数を

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^j}{j!} + \cdots \quad (2.3.26)$$

のように定義することができる。

2.4　関数と連続性

この節では、写像と関数の概念を一般的に説明する。そして、実数上の実数値関数について、関数が連続であるという重要な考えを導入する。

2.4.1　写像

まず、抽象的な立場から、写像の概念をごく簡単にまとめておく。

S_1, S_2 を一般の集合とする。集合 S_1 の各々の要素 $a \in S_1$ に対して、集合 S_2 の何らかの要素 $f(a) \in S_2$ を対応させる（あるいは、写す）対応関係 f を、一般

に、S_1 から S_2 への**写像** (mapping) と呼ぶ。「各々の要素」といっているから、S_1 の要素のすべてについて、写される先が決まっていなくてはならない。f が S_1 から S_2 への写像であることを、$f : S_1 \to S_2$、あるいは、$S_1 \xrightarrow{f} S_2$ という記号で表し（図 2.9 (a)）、要素 a が要素 $f(a)$ に写されることを $a \mapsto f(a)$ と表す[*107]。また、これらをひとまとめにして、

$$\begin{array}{ccc} S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array} \tag{2.4.1}$$

のように表すと、状況と記号が一目でわかって見通しがよい（$a \in S_1$, $f(a) \in S_2$ という関係も、横倒しになって、入っている）。写像の値を $f(a)$ と書くとき、代入されている a を引数（ひきすう） (argument) と呼ぶことがある。

[*107] $a \mapsto f(a)$ は、もっぱら数学者の使う記号のようで、物理の文献ではあまり見ない。しかし単なる矢印 $\to$ と $\mapsto$ を使い分けると混乱が減って便利だ。

写像 f とは、集合 S_1 の要素を入力すると、何らかの決まった手続きにしたがって、S_2 の要素を出力してくるような「装置」あるいは「仕掛け」だと思うのがいい。装置の仕様(しよう)に応じた正しいものを入力してやらなければ装置がきちんと動かないように、写像にも適切な要素を入力する必要があるのだ。

写像というのは、とても一般的な言い方で、S_1 や S_2 が数の集合の場合には、写像のかわりに**関数** (function) と言うことが多い。また、S_1 と S_2 が同じものであり何らかの構造をもった集合の場合、写像のかわりに**変換** (transformation) と言うこともある。さらには、S_1 が関数の集まりで S_2 が数の集合であるような状況さえ物理に登場する。このような場合、写像は汎関数(はんかんすう)と呼ばれるものになる。

集合

$$f(S_1) := \left\{ f(a) \,\middle|\, a \in S_1 \right\} \subset S_2 \tag{2.4.2}$$

は、S_1 の全体が S_2 の中にうつされていった先の集合であり、**値域** (range)、あるいは写像 f による S_1 の

図 2.9　集合 S_1, S_2 の要素を黒丸で示し、(a) 一般の写像、(b) 全射、(c) 単射、(d) 全単射の例を描いた。

像と呼ばれる。これに対応させて、S_1 のことを**定義域** (domain) と呼ぶ。

以下、写像についての基本的な概念を簡単にまとめておく。さしあたっては、図 2.9 をざっと眺めてから定義を軽く見ておく程度でいいだろう。

$f(S_1) = S_2$ が成り立つとき、つまり値域が S_2 そのものであるとき、写像 $f : S_1 \to S_2$ は**全射** (surjection) であるという（図 2.9 (b)）。f で写る先が S_2 全体をおおうからだ。また任意の $b \in f(S_1)$ に対して、

$b = f(a)$ を満たすような $a \in S_1$ がただ一つしかないとき、写像 $f : S_1 \to S_2$ は**単射** (injection) であるという（図 2.9 (c)）。

写像 $f : S_1 \to S_2$ が全射であり、かつ単射であるとき、**全単射** (bijection) であるという。全単射は、二つの集合の要素すべてを、完全に一対一に対応させる（図 2.9 (d)）。そこで、全単射 $f : S_1 \to S_2$ については、$f^{-1}(f(a)) = a$ により、**逆写像** (inverse mapping) $f^{-1} : S_2 \to S_1$ を定めることができる。もちろん、逆写像 f^{-1} も全単射になる。

S_1, S_2, S_3 を集合とし、$f : S_1 \to S_2$, $g : S_2 \to S_3$ を写像とする。このとき、$a \in S_1$ に対して、$g(f(a)) \in S_3$ を対応させることで、S_1 から S_3 への写像を定義することができる。このような写像を f と g の**合成写像** (composite) と呼び、$g \circ f : S_1 \to S_3$ という記号で表す。

2.4.2　関数

集合 S_1, S_2 がともに何らかの数の集合であるとき、両者のあいだの写像 $f : S_1 \to S_2$ を**関数** (function) と呼ぶ。とくに、集合をはっきりさせたいときは、「S_1 上の S_2 値の関数」という。また、関数を (2.4.1) のように表現するとき、a を変数と呼ぶ。

もっとも基本的な関数は、もちろん、実数上の実数値関数である。ひとまとめに図式で書けば、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\!\!\cup \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \tag{2.4.3}$$

だ。ここで、x は一般の実数を代表する記号なので、$f(\pi)$ や $f(2.0050416)$ のように具体的な数を代入してもよいし、別の記号で $a \in \mathbb{R}$ のように実数を表したものを代入して、$f(a)$ と書いてもよい。

関数そのものを指したいときには、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ とか f と言えばいいわけだが、前者はまだるっこしいし、

後者のように一文字だと変数と混乱するおそれがある。よくあるのは、x を一般的な変数ととらえて $f(x)$ と書くことで、関数そのものを意味するという方法だ。ただ、この書き方だと、x という特定の実数を f に代入したものと混乱が生じる可能性がある。比較的すぐれた方法は、$f(\cdot)$ のように「ここには何かを代入する場所があるよ」ということを記号レベルで示すことだ。この本では、あえて一つの方法にかぎらず、状況に応じて、適切で誤解のない表現を使っていこうと思う。

言うまでもないだろうが、関数に f、変数に x の文字を使うという決まりがあるわけではない。実際、一次元の空間を運動する粒子の位置を表す場合には、時刻を t、位置座標を x と書くことに合わせて

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{x} & \mathbb{R} \\ \cup\!\!\!\!\!\!\cup & & \cup\!\!\!\!\!\!\cup \\ t & \longmapsto & x(t) \end{array} \tag{2.4.4}$$

のように、関数名に x を用いるのが標準だ。記号を見て判断するのでなく、物理的な設定をきちんと理解す

べきなのだ。

■関数の例　関数の例は無数にあるが、いくつか典型的な例をみておこう。

　まず、a, b, k を実数の定数としたとき、

$$f_1(x) = a\,x^2 + b\,x, \quad f_2(x) = a\,\sin(k\,x) + b\,\cos(k\,x) \tag{2.4.5}$$

のように、多項式や三角関数などの標準的な関数の組み合わせで書けるような関数が考えられる。あるいは、

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \begin{cases} a\,x & x \leq 0 \text{ のとき} \\ a\,\sin(k\,x) & x > 0 \text{ のとき} \end{cases} \\ f_4(x) &= \begin{cases} a\,x - b & x < 0 \text{ のとき} \\ 0 & x = 0 \text{ のとき} \\ a\,x + b & x > 0 \text{ のとき} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

のように、変数の値に応じて場合分けがあって、形が変わるようなものでもよい。実数 x に対応して $f(x)$

が決まりさえすれば関数の資格があるから、

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \text{ のとき} \\ 1 & x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ のとき} \end{cases} \tag{2.4.7}$$

というような無茶なものでも、関数なのだ（有理数のとき 0、無理数のとき 1 をとる、ということ）。たしかに $f_5(1/2) = 0$, $f_5(\sqrt{2}) = 1$ という具合に、ちゃんと値は決まっているわけだが、こんな関数はグラフでは表しようもない。

さらに、こういったきれいな式であっさりと書けないような関数というのも、物理の現場にはたくさん登場する。高校までの数学や物理では、単純な式で表される具体的な関数を相手にすることが多かったと思う。しかし、大学での本格的な数学や物理では、ほとんどの場合、まだ正体のわかっていない関数たちが相手なのだ。関数のくわしい具体形がわからないまま、その性質を調べたり、そこに（微分や積分などの）数学的

操作を加えて新しい関数を作ったりすることになる。

問 2.4.2.a　$f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ のグラフの概形を描け。定数の符号などは自分で適当に選ぶ。また、定数をゼロに置いたりすると一般性がなくなるので、なるべく一般の状況を描くようにすること。

■単調関数　$f(\cdot)$ を実数上、あるいは実数の部分集合上の実数値関数とする。$x_1 < x_2$ を満たす任意の（$f(\cdot)$ の定義域上の）x_1, x_2 について、$f(x_1) < f(x_2)$ となるとき、$f(\cdot)$ は**単調増加関数** (monotone increasing function) であるという。要するに、x を増やせば $f(x)$ も増えるということだ。同様に、$x_1 < x_2$ を満たす任意の x_1, x_2 について、$f(x_1) > f(x_2)$ となるなら、$f(\cdot)$ は**単調減少関数** (monotone decreasing function) と呼ばれる。今度は、x を増やせば $f(x)$ は減るということだ。関数が単調増加あるいは単調減少であることを単調であるという。

これよりも少し弱い特徴づけとして、$x_1 < x_2$ を満

たす任意の x_1, x_2 について、$f(x_1) \leq f(x_2)$ となる $f(\cdot)$ を**単調非減少関数**、$f(x_1) \geq f(x_2)$ となる $f(\cdot)$ を**単調非増加関数**という[*108]。

2.4.3　関数の極限

ここでも実数上の実数値関数 $f(x)$ をあつかい、関数の極限という考え方をみておこう。

■極限の直感的な定義　任意の実数 x_0 を選んで固定する[*109]。x を小さい側から x_0 に近づけていったとき、$f(x)$ が一定値に近づくなら、この一定値を

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) \tag{2.4.8}$$

[*108] 単調非減少、単調非増加を、それぞれ広義増加、広義減少と呼ぶ流儀もある。また、その流儀を採用する場合、上の増加、減少を、狭義増加、狭義減少と呼ぶこともある。

[*109] 最初に選ぶときはなんでもよいけれど、いったん選んだらそれから後は変えないということ。

と書き、$f(x)$ の x_0 における**左極限**と呼ぶ。同様に、x を大きい側から x_0 に近づけていったとき、$f(x)$ が一定値に近づくなら、この一定値を

$$\lim_{x \downarrow x_0} f(x) \tag{2.4.9}$$

と書き、$f(x)$ の x_0 における**右極限**と呼ぶ[*110]。そもそも、一定値に近づかないようなときは、左極限や右極限が存在しない、という。

もし左極限と右極限がともに存在して、しかも両者が一致すれば、その値を

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \tag{2.4.10}$$

と書き、$f(x)$ の x_0 における**極限** (limit) という。

■極限の厳密な定義　上のように極限を直感的に定義しても、物理のレベルで話を進める上では、大きな支障はない。しかし、少しデリケートなこと（たとえば、

[*110] $x \uparrow x_0$ のかわりに $x \to x_0 - 0$、$x \downarrow x_0$ のかわりに $x \to x_0 + 0$ と書く流儀もある。

無限級数の微分）をまじめに議論しようと思うと、このような「定義」では、どうしても不十分だ。以下では、極限概念を数学的にどう定義するかをみていくので、読者の興味に応じて読んでいただきたい。

関数の極限も、数列の収束の定義 2.8（164 ページ）とほぼ同じ発想の「掛け合い漫才」で、定義する。「いけずな」人が（小さな）精度 $\varepsilon > 0$ を宣言する部分は前と同じだ。ただし、今度は、相方（あいかた）は、十分に小さな $\delta > 0$ という数を答えることになる。x_0 から δ 以下の距離まで近づけば、関数は（精度の範囲で）極限に一致するぞ — というわけだ。

これが — ひょっとすると、どこかで聞いたことがあるかも知れないが — 有名な「ε-δ（イプシロン・デルタ）論法」である。かつて、大学で理系の学部に入ると、入学早々、数学の先生によるイプシロン・デルタ論法を使った淡々とした講義があり、それが多くの学生にとってカルチャーショックとなったと言われている。この論法の「のり」に自然についていく（どち

らかというと少数派の）学生とそうでない学生のあいだにギャップが生まれ、「イプシロン・デルタ」というのは訳(わけ)のわからない数学の代名詞にさえなっていた。

しかし、「イプシロン・デルタ論法」の本質は、「掛け合い漫才」的な動きのあるシナリオを通して、関数の極限的なふるまいを正確に言おうということにすぎない。決して無謀に難しい考えではない。せっかくだから、これより先を読む前に、定義 2.8 とその説明を読み返し、自分で左極限の厳密な定義をつくってみるのも数学という「文化」のいったんに触れる楽しい体験になると思う。

というわけで、左極限 (2.4.8) の厳密な定義を書く。

定義 2.21 (実数上の実数値関数の左極限)**.** $f(\cdot)$ を実数上の実数値関数、x_0, α を実数とする。任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、正の実数 $\delta > 0$ が存在し、任意の

$x \in [x_0 - \delta, x_0)$ について[*111] $|f(x) - \alpha| \leq \varepsilon$ が成り立つとき、関数 $f(\cdot)$ は x_0 において左極限 α をもつといい、

$$\alpha = \lim_{x \uparrow x_0} f(x) \tag{2.4.11}$$

と書く。

右極限の定義もまったく同じだから、わざわざくり返さない。それらをひとまとめにして、関数の極限の定義を書くと、次のようになる。

[*111] 区間の定義は (2.2.40) を見よ。$x_0 - \delta$ の側の端が閉じているのは趣味の問題で、ここは、開いた端でもよい。x_0 の側が開いているのは必須。

定義 2.22 (実数上の実数値関数の極限)**.** $f(\cdot)$ を実数上の実数値関数、x_0, α を実数とする。任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、正の実数 $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in [x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta]$ について $|f(x) - \alpha| \leq \varepsilon$ が成り立つとき、関数 $f(\cdot)$ は x_0 において極限 α をもつといい、

$$\alpha = \lim_{x \to x_0} f(x) \tag{2.4.12}$$

と書く。

同様にして、x を限りなく大きくするときの極限も定義しておこう。

定義 2.23 (実数上の実数値関数の $x \to \infty$ 極限)**.** $f(\cdot)$ を実数上の実数値関数、x_0, α を実数とする。任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、実数 R が存在し、任意の $x \in [R, \infty)$ について $|f(x) - \alpha| \leq \varepsilon$ が成り立つとき、関数 $f(\cdot)$ は $x \to \infty$ において極限 α をもつといい、

$$\alpha = \lim_{x \to \infty} f(x) \tag{2.4.13}$$

と書く。

$x \to -\infty$ の極限もまったく同様に定義できる。

数列についての (2.2.24), (2.2.25), (2.2.26) と同様な性質も、もちろん、成り立つ。二つの関数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ があり、$\lim_{x \to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \beta$ とする。ここで、x_0 は実数ないしは $\pm\infty$ とする。a, b を任意の実数とするとき、新しい関数 $a\,f(x) + b\,g(x)$ について、

$$\lim_{x \to x_0} \{a\,f(x) + b\,g(x)\} = a\,\alpha + b\,\beta \tag{2.4.14}$$

が成り立つ。積の関数 $f(x)\,g(x)$ についても、

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\,g(x) = \alpha\,\beta \tag{2.4.15}$$

が成り立つ。また、$g(x) \neq 0,\ \beta \neq 0$ であれば、商の関数 $f(x)/g(x)$ についても、

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \tag{2.4.16}$$

が成り立つ。これらの関係も定義から簡単に証明できる。証明の基本的な方針は、183 ページの数列の積の極限についての (2.2.26) の証明とほとんど同じだ。興味のある読者は、自分で試みてほしい。

2.4.4　関数の極限と連続性

続いて、やはり実数上の実数値関数 $f(x)$ をあつかい、関数の連続性を議論しよう。

ある x_0 において、

$$f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x) \tag{2.4.17}$$

が成り立つとき、関数 $f(x)$ は x_0 において**連続** (continuous) であるという。関数 $f(x)$ が何らかの範囲（たとえば区間）内のすべての x において連続なら、$f(\cdot)$ はその範囲で連続であるという。連続な関数を（そのまんまだが）**連続関数** (continuous function) と呼ぶ。たとえば、すぐ先で証明するように（そして、証明してなくても当たり前に思えるだろうが)、任意の自然数 n について、べき乗の関数 $f(x) = x^n$ は実数全体で連続である。関数 $f(x)$ が x_0 で連続でないとき、$f(x)$ は x_0 において**不連続** (discontinuous) であるという。

直感的にいえば、関数が連続というのはグラフがちゃんとつながっているということであり、不連続というのは（その点で）グラフに「跳び」があるということだ。図 2.10 を見よ。

2.4.2 節の例に挙げた関数 (2.4.5), (2.4.6), (2.4.7) を見ると、$f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ は、すべて連続関数だ。しかし、$f_4(x)$ については、$\lim_{x\uparrow 0} f_4(x) = -b$, $\lim_{x\downarrow 0} f_4(x) = b$ だが $f_4(0) = 0$ であり、$b = 0$ でな

図 2.10　(a) 描いた範囲全体で連続な関数 $f(x)$ のグラフ。(b) x_0 で不連続になる関数 $f(x)$ のグラフ。黒丸の点はグラフに含まれ、白抜きの点はグラフに含まれない。要するに、不連続というのは、グラフに「跳び」があるということだと思っていい。

いかぎり、この関数は 0 において不連続である。さらに、無茶な関数である $f_5(x)$ にいたっては、どんな x_0 においても $\lim_{x\uparrow x_0} f_5(x)$ も $\lim_{x\downarrow x_0} f_5(x)$ も存在しない。この関数は、いたるところで不連続なのだ。

■連続性の厳密な定義　上の極限 (2.4.17) を使った連続性の特徴付けは、極限の意味を厳密に考えさえすれ

ば、厳密な定義になっている。ただし、以下のような、極限ということをあらわに言わない定義の方がいろいろな意味で[*112]見通しがよい。

定義 2.24 (実数上の実数値関数の連続性)**.** $f(\cdot)$ を実数上の実数値関数、x_0 を実数とする。任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、正の実数 $\delta > 0$ が存在し、任意の $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ について

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \tag{2.4.18}$$

が成り立つとき、関数 $f(\cdot)$ は x_0 において連続であるという。

これも典型的な「ε-δ」の考えを用いた定義である。掛け合い漫才のいっぽうが ε という（小さいが正の）量を指定すると、もう一方は $\delta > 0$ という範囲を答え

[*112] この本ではあつかわないが、より一般の集合上の関数に連続性の概念を拡張する際など。

る。このとき、x_0 から δ 以内の範囲の x ならば $f(x)$ と $f(x_0)$ の差は ε 以内になっているというわけだ。ピンと来ない人は時間をかけてなっとくしておくといいと思う。

せっかくなので、これも論理記号で書いておくと、

$$\big(f(\cdot)\text{ は } x_0 \text{ で連続}\big) \Leftrightarrow$$
$$\Bigg(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x$$
$$\Big[x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]\ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon\Big]\Bigg) \tag{2.4.19}$$

となる[*113]。

すでに述べたように、関数 $f(x)$ が何らかの範囲（たとえば区間）内のすべての x において連続なら、$f(\cdot)$ はその範囲で連続であるという。

[*113] 右辺の $\forall x$ は省略してもいいルールだけれど念のため書いておいた。

■連続関数の性質　まず、任意の自然数 n について、関数 $f(x) = x^n$ が実数全体で連続であることを証明しておこう。むずかしい証明ではないが、ε-δ 論法の典型例になっている。

証明：任意の実数 x_0 を固定し、x_0 において $f(x) = x^n$ が連続であることを示す。任意の $a > 0$ を選び、$|x_0+a|$ と $|x_0 - a|$ のうちの大きい方を b と書く。よって、$x_0 + a \leq b$ かつ $x_0 - a \geq -b$ が成り立つ。ここから $|x_0| \leq b$ も分かる。

証明の鍵になるのは次の因数分解である。

$$\begin{aligned} &f(x) - f(x_0) = x^n - (x_0)^n \\ &= (x - x_0) \\ &\{x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x\,(x_0)^{n-2} + (x_0)^{n-1}\} \end{aligned} \tag{2.4.20}$$

さて、ε-δ 論法にしたがって、任意の $\varepsilon > 0$ をとる。これに対して、

$$\delta = \min\left\{a, \frac{\varepsilon}{n\,b^{n-1}}\right\} \tag{2.4.21}$$

により $\delta > 0$ を決める。以下、x を、$x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ を満たす任意の実数としよう。$\delta \leq a$ だから $x_0 - a \leq x \leq x_0 + a$ であり、上と見比べて $|x| \leq b$ とわかる。(2.4.20) の絶対値をとり三角不等式 (2.2.47) を使い、$|x - x_0| \leq \delta$, $|x| \leq b$, $|x_0| \leq b$ に注意すれば、

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &\leq |x - x_0| \{ |x|^{n-1} + |x|^{n-2} |x_0| + \\ &\qquad \cdots + |x| \, |x_0|^{n-2} + |x_0|^{n-1} \} \\ &\leq \delta \, n \, b^{n-1} \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{2.4.22}$$

となり、連続性の条件 (2.4.18) が示された。ここでも、(2.4.21) の右辺に ε がでるよう、うまく δ を決めたことが分かるだろう。 ∎

関数 $f(x)$, $g(x)$ が x_0 において連続であるとする。a, b を任意の実数とするとき、$a\,f(x) + b\,g(x)$, $f(x)\,g(x)$ は x_0 において連続である。また $g(x_0) \neq 0$ なら $f(x)/g(x)$ も x_0 において連続である。これらの事実は、連続性の定義から、簡単に証明できる。ここでも、証明の基本的な方針は、183 ページの数列の積の極限

についての (2.2.26) の証明とほとんど同じ。

この事実をくり返し使えば、n 個の任意の連続な関数 $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ と任意の実数 $a_1, \ldots, a_n$ について、

$$f(x) = a_1\, f_1(x) + \cdots + a_n\, f_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, f_i(x) \tag{2.4.23}$$

は、連続であることがかる。とくに、正整数 n について x^n は連続なので、任意の多項式

$$p(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, x^i \tag{2.4.24}$$

は実数全体で連続である。ただし、この結論は n が有限のときにしか成り立たないことに注意しよう。$n \to \infty$ とした無限級数（この場合はべき級数）で定義される関数は、不連続になることもある。

最後に連続関数の本質的な性質を表す二つの重要な定理を示しておこう。これらの証明はやや技巧的なので数学が好きな読者以外は読む必要はないが、定理の

図 2.11　中間値の定理の内容。$f(a)$ と $f(b)$ のあいだの勝手な実数 f_0 をとれば、それは、かならず $c \in (a, b)$ によって $f(c)$ と書ける。

内容は頭に入れておいて損はないだろう。

一つ目の重要な定理は、**中間値の定理** (intermediate value theorem) である。

定理 2.25 (中間値の定理)**.** $f(\cdot)$ が閉区間 $[a, b]$ 上で連続であり、また $f(a) < f(b)$ とする。このとき、$f(a) < f_0 < f(b)$ を満たす任意の f_0 に対して、$f(c) = f_0$ を

満たす $c \in (a, b)$ が存在する。

もちろん $f(a) > f(b)$ の場合もまったく同様である。要するに、x が $[a, b]$ を動くとき、$f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値を取るということだ (もちろん、$f(a)$ と $f(b)$ の間の値に加えて、それ以外の値を取ってもいい)。図 2.11 を見よ。これは、「連続関数のグラフはつながっている」ことからすると、きわめてもっともらしい結果だ。

ただし、連続性の定義 2.24 にもとづいて中間値の定理 2.25 を証明しようと思うと、話はそう簡単ではない。定義では、ある一点 x_0 の連続性という局所的な情報だけを問題にしているのだが、「グラフがつながっている」というのは、関数を全体としてみたときの大域的な情報だ[*114]。厳密な証明をするためには、定義の

[*114] 局所的というのは何かの小さな部分をじっとみるという立場であり、大域的というのは何かの全体的な様相をみる立場。数学や物理でもよく用いられる表現だ。ちなみに、英語では、局所的は local、大域的は global である。

局所的な情報をつなぎあわせて、大域的な意味を読み取らなくてはいけない。

定理 2.25 の証明：「定理の内容が成り立たないとすると、グラフはこれこれこういう風になるから、連続性と矛盾」みたいな「証明」をしたくなるのだが、それではうまくいかない。実際、定理の主張が成り立たない状況というのは無数にあるわけで、それをすべて列挙することなどできないからだ。もっと、一網打尽に証明する必要がある。

実数 $y \in [a, b]$ についての

$$\mathcal{P}(y) := (\text{任意の } x \in [a, y] \text{ について } f(x) \leq f_0 \text{ が成り立つ}) \tag{2.4.25}$$

という命題を考えよう。明らかに、$\mathcal{P}(a)$ は真で、$\mathcal{P}(b)$ は偽である。また、もし $\mathcal{P}(y)$ が真なら、$a \leq y' \leq y$ を満たす任意の y' について $\mathcal{P}(y')$ は真である。よって、$\mathcal{P}(y)$ が真になるような y の範囲は、ある c についての区間 $[a, c]$ あるいは $[a, c)$ でなくてはならない（実はかならず $[a, c]$ であることがわかるのだが、今それを示す

必要はない)。ここで c は $a \leq c < b$ を満たすことがわかっている。このとき、実は $f(c) = f_0$ になっている。これを示せば定理の主張がいえる（ついでに $c > a$ とわかる)。

まず、$f(c) > f_0$ と仮定して矛盾をいおう。$\varepsilon = (f(c) - f_0)/2 > 0$ と選んで $f(\cdot)$ が c において連続であることを使うと、定義 2.24 より、ある δ が存在して、任意の $x \in [c-\delta, c+\delta]$ に対して $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$ となる。よって $f(x) \geq f(c) - \varepsilon = f_0 + \varepsilon > f_0$ が成り立つが、これは $x \in [c-\delta, c+\delta]$ について $\mathcal{P}(x)$ が偽であることを意味する。ところが x は c より小さくとれるのだから、これは矛盾。次に、$f(c) < f_0$ と仮定する。今度は、$\mathcal{P}(y)$ が真になる範囲が c を越えてしまうことを言えばいいわけだ。$\varepsilon = f_0 - f(c) > 0$ として連続性を使うと、ある δ が存在して、任意の $x \in [c-\delta, c+\delta]$ に対して $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$、つまり $f(x) \leq f(c) + \varepsilon = f_0$ が成り立つ。これが c よりも大きい x について言えるのだから、やはり矛盾。 ∎

先に進む前に、中間値の定理の応用として（それほど重要ではないが）関数の単調性に関する次の定理を述べておく。この定理は逆関数の連続性（320 ページの定理 3.3）を証明する際に役に立つ。

定理 2.26 (連続な単射は単調である)**.** 開区間 (a, b) 上の連続な単射 $f(\cdot)$ は、単調増加関数あるいは単調減少関数である。

証明：$a < x_1 < x_2 < b$ となる任意の x_1, x_2 をとる。$f(\cdot)$ が単射だから $f(x_1) < f(x_2)$ か $f(x_1) > f(x_2)$ かのいずれかである。前者だとして話を進める。

このとき、$x_2 < x_3 < b$ となる任意の x_3 について、$f(x_2) < f(x_3)$ が成り立つことを示そう。$f(x_2) > f(x_3)$ と仮定する。区間 $[x_2, x_3]$ について中間値の定理から、$f(x_2) > f_0 > f(x_3)$ を満たす任意の f_0 に対して、$f(y) = f_0$ となる $y \in (x_2, x_3)$ がある。同様に、区間 $[x_1, x_2]$ について中間値の定理から、$f(x_1) < f_0 < f(x_2)$ を満たす任意の f_0 に対して、$f(y') = f_0$ となる

$y' \in (x_1, x_2)$ がある。二つの場合の f_0 は共通に取れるが、そのときは $f(y) = f(y')$ となり $f(\cdot)$ が単射であることと矛盾する。

全く同じ論法で、$a < x_0 < x_1$ を満たす任意の x_0 について $f(x_0) < f(x_1)$ が示される。こうして、不等式 $f(x_1) < f(x_2)$ を出発点に、次々と不等式を左右に「増設」できることがわかった。（$f(x_2) < f(x_3)$ を出発点にして、$a < x_1' < x_2$ となる任意の x_1' について $f(x_1') < f(x_2)$ を示すこともできる。）これを何度かくり返して使うことで、$a < x < y < b$ となる任意の x, y に対して $f(x) < f(y)$、つまり $f(\cdot)$ が単調増加であることがいえる。

もちろん、最初に $f(x_1) > f(x_2)$ となった場合は、$f(\cdot)$ が単調減少と結論できる。∎

二つ目の重要な定理の証明の準備として、簡単だが本質的な補題を述べておく。この補題は、すぐ後の定理 2.31 で多変数の連続関数を調べる際にも役に立つ。

補題 2.27 (閉区間上の無限列には収束する部分列がある)**.** $(x_i)_{i=1,2,\ldots} = (x_1, x_2, \ldots)$ を閉区間 $[a, b]$ 上に値をとる無限数列とする。無限数列の中から、順番を変えずに、適当な要素を抜き出して作った新しい無限数列 $(\tilde{x}_i)_{i=1,2,\ldots}$ を部分列という[*115]。閉区間 $[a, b]$ 上の任意の無限数列 $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ に対して[*116]、ある $\bar{x} \in [a, b]$ に収束する部分列 $(\tilde{x}_i)_{i=1,2,\ldots}$ が必ず存在する。

証明：閉区間 $[a, b]$ を二つの閉区間 $[a, (a+b)/2]$, $[(a+b)/2, b]$ に分割する。数列 $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ には無限個の要素があるから、これら二つの区間の少なくとも一方には無限個の要素が含まれている。そのような区間を選び（どちらも無限個の要素を含んでいたら、（どちらでもいいのだが）左側を選び）$[a_1, b_1]$ と呼び直す。

[*115] より正確に言えば、$i = 1, 2, \ldots$ に対して $1 \leq j(i) < j(i+1)$ を満たす（正の整数から正の整数への）任意の関数 $j(i)$ をとり、$\tilde{x}_i := x_{j(i)}$ とする。

[*116] 各々の i について $x_i \in [a, b]$ という以外には何の制約もない。どのように増減してもかまわないし、同じ要素がくり返し出てもかまわない。

$x_{i(1)} \in [a_1, b_1]$ となる $i(1)$ を適当に選び、$\tilde{x}_1 := x_{i(1)}$ とする。

次に閉区間 $[a_1, b_1]$ を $[a_1, (a_1 + b_1)/2]$ と $[(a_1 + b_1)/2, b_1]$ に分ける。やはり $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ の無限個の要素を含んでいる方を $[a_2, b_2]$ と呼ぶ。$x_{i(2)} \in [a_2, b_2]$ および $i(2) > i(1)$ を満たす $i(2)$ を適当に選び（$[a_2, b_2]$ の中には無限個の要素があるので、これはつねに可能)、$\tilde{x}_2 := x_{i(2)}$ とする。

この手続きを次々と続ければ、増加する整数列 $i(1), i(2), i(3), \ldots$ とそれに対応する部分列 $(\tilde{x}_i)_{i=1,2,\ldots}$ が得られる。作り方からして $i \geq n$ ならば $\tilde{x}_i \in [a_n, b_n]$ である。$b_n - a_n = 2^{-n}(b - a)$ だから、任意の $i, j \geq n$ について $|\tilde{x}_i - \tilde{x}_j| \leq 2^{-n}(b - a)$ がいえる。よって数列 $(\tilde{x}_i)_{i=1,2,\ldots}$ はコーシー列であり、ある $\bar{x}$ に収束する。$\bar{x} \in [a, b]$ であることを示すのは簡単。∎

二つ目の重要な定理は、閉区間上の連続関数は必ず最大値と最小値をもつことをいう。連続関数に関わる

さまざまな証明で役に立つ性質である。

定理 2.28 (閉区間上の連続関数の最大値と最小値)**.** 閉区間 $[a,b]$ 上の任意の連続関数 $f(\cdot)$ は、$[a,b]$ の中で最大値と最小値をとる。つまり、$x_{\min}, x_{\max} \in [a,b]$ が存在し、任意の $x \in [a,b]$ について $f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$ が成り立つ。

ここで、区間が閉区間であることは本質的である。たとえば、区間 $[0,1)$ を考えよう[*117]。$f(x) = (1-x)^{-1}$ はこの区間上で連続だが、いくらでも大きな値をとる。あるいは、$f(x) = x$ はもちろん連続で、任意の $x \in [0,1)$ について $0 \leq f(x) \leq 1$ を満たすが、$f(x) = 1$ となるような $x \in [0,1)$ はない。

また、この定理と中間値の定理 2.25 を合わせれば、$f(\cdot)$ による閉区間 $[a,b]$ の像（(2.4.2) を参照）

$$f([a,b]) = \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in [a,b] \right\} \tag{2.4.26}$$

[*117] $[0,1)$ とは $0 \leq y < 1$ を満たす実数 y の集合。

が閉区間であり $[f(x_{\min}), f(x_{\max})]$ に等しいこともいえる。

<u>定理 2.28 の証明</u>：最大値についてのみ証明する。もちろん最小値の存在証明も（$-f(x)$ を $f(x)$ とみなせばいいだけなので）全く同じ。

まず像 $f([a,b])$ に上界があることを示す。つまり、適当な M をとれば、任意の $x \in [a,b]$ について $f(x) \leq M$ となることをいう (M が上界)。上界がないと仮定しよう。$A \geq f(a)$ を満たす任意の (どんなに大きな) A についても $f(x) = A$ となるような x が (少なくとも一つ) 存在するということだ。そこで、$A_i \to \infty$ となる無限列 $(A_i)_{i=1,2,\ldots}$（ただし、$A_i \geq f(a)$）をとり、$f(x_i) = A_i$ を満たす x_i を並べて無限列 $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ を作る。補題 2.27 により $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ の部分列 $(\tilde{x}_i)_{i=1,2,\ldots}$ がとれて、$\lim_{i\to\infty} \tilde{x}_i = \bar{x} \in [a,b]$ である。一方、作り方より $\lim_{i\to\infty} f(\tilde{x}_i) = \infty$ である。ところが、$\bar{x}$ は $f(\cdot)$ の定義域に入っているから $f(\bar{x})$ は何らかの実数であり、もちろん $f(\bar{x}) < \infty$ である。これは $\bar{x}$ において $f(\cdot)$ が

連続でないことを意味する。こうして矛盾が導かれた。

$f([a,b])$ に上界があることがわかった。上界 M の最小値を $f_{\max}$ と書く。$f_{\max} \in f([a,b])$ が言えれば最大値の存在が証明される。そこで、$f_{\max} \notin f([a,b])$ と仮定する。$x \in [a,b]$ について、$f_{\max} - f(x) \neq 0$ だから、$g(x) = \{f_{\max} - f(x)\}^{-1}$ は $[a,b]$ 上の連続関数である。しかし、$f_{\max} - f(x)$ はいくらでも小さくできるので、$g(x)$ に上界はない。一方、この証明の前半で示したことは $f(\cdot)$ に限らず、「任意の連続関数は閉区間では上界をもつ」ということである。これを $g(x)$ に適用すると矛盾が生じる。∎

■一様連続性　ここでは、関数の連続性の概念の自然な延長である一様連続性について述べる。後に 4.1.2 節で連続関数の積分についての基本定理（定理 4.3）を証明する際に一様連続性が重要な役割を果たす。さしあたってはとばしても問題はない。

まず定義を書こう。連続関数の定義 2.24 と比較しな

がら吟味してほしい。

定義 2.29 (実数上の実数値関数の一様連続性)**.** $f(\cdot)$ を $I \subset \mathbb{R}$ 上の実数値関数とする（I は閉区間でも開区間でも実数全体でもよい)。任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して、正の実数 $\delta > 0$ が存在し、任意の $|x-y| \leq \delta$ を満たす任意の $x, y \in I$ について

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \tag{2.4.27}$$

が成り立つとき、関数 $f(\cdot)$ は一様連続であるという。

論理式で書けば、

$$\begin{aligned}
&\big(f(\cdot) \text{ は一様連続 }\big) \Leftrightarrow \\
&\Big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in I \\
&\qquad \Big[|x-y| \leq \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\Big]\Big)
\end{aligned} \tag{2.4.28}$$

となる。

連続性の定義 2.24 では一点 x_0 のまわりでの連続性

を問題にしていたのに対して、ここでは区間 I 全体を一網打尽に扱っているのが大きな違いだ。

より詳しくみよう。まず、「掛け合い漫才」をする一方が $\varepsilon > 0$ という小さな数を宣言するところは、単なる連続の場合も一様連続の場合も同じだ。次に、もう一人が「これくらい近ければ大丈夫」という $\delta > 0$ という数を言い返すわけだが、ここに違いがある。単なる連続性の場合、個々の参照点 x_0 ごとに「掛け合い漫才」をやっているので、δ は参照点 x_0 に依存してもかまわない。一方、一様連続性という場合には、区間全体について $\delta > 0$ という一つの数が決まらなくてはいけないのだ。これは単なる連続性よりも厳しい条件である。

252 ページでは実数全体の上の関数 $f(x) = x^n$（n は自然数）が連続（つまり任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ において連続）であることをみた。ここで $n = 1$ とした $f(x) = x$ は一様連続でもある。なぜなら、ε が与えられたらとき単に $\delta = \varepsilon$ とすれば (2.4.27) が満たされるからだ。

一方 $n = 2$ とした $f(x) = x^2$ は一様連続ではない。これは、x が大きくなると $f(x) = x^2$ のグラフの傾きがいくらでも大きくなることからも直感的に明らかだろうが、念のためきちんと証明しておこう。まず、(2.4.28) の否定が

$$\big(f(\cdot) \text{ は一様連続でない}\big) \Leftrightarrow$$
$$\Big(\exists\varepsilon > 0\ \forall\delta > 0\ \exists x, y \in I$$
$$\Big[|x - y| \leq \delta\ \wedge\ |f(x) - f(y)| > \varepsilon\Big]\Big) \qquad (2.4.29)$$

であることに注意する（ここで 70 ページの問 2.1.2.h の結果を用いた）。右辺の中身を解釈するのはいい練習問題だろう。$f(x) = x^2$ が一様連続でないことを示すには、$\varepsilon = 2$ とでもとり、任意の $\delta > 0$ が与えられたら、$x = \delta + \delta^{-1}$ および $y = \delta^{-1}$ と選んでやればよい。$|x - y| = \delta$ であり、さらに $f(x) - f(y) = 2 + \delta^2 > 2$ だから、(2.4.29) の右辺が真とわかる。

問 2.4.4.a　開区間 $(0, 1)$ 上の関数 $f(x) = 1/x$ は連

続だが一様連続ではないことを示せ。

閉区間上の関数については、連続性が自動的に一様連続性を意味することが知られている。この定理は役に立つ。

定理 2.30 (閉区間上の連続関数は一様連続である)**.** 閉区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(\cdot)$ が連続ならば一様連続でもある。

証明：様々な証明があるが、ここでは対偶命題「閉区間 $[a,b]$ 上の関数 $f(\cdot)$ が一様連続でないなら連続ではない」を証明しよう。(2.4.29) の右辺が真としよう。以下、ε はここで存在が保証された $\varepsilon > 0$ を指す。δ は任意なので、$i = 1, 2, \ldots$ に対して $\delta = 1/i$ と取ろう。このとき、(2.4.29) で存在が保証される x, y を x_i, y_i と書く（$|f(x_i) - f(y_i)| > \varepsilon$ である）。これらを集めて無限列 $(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ と $(y_i)_{i=1,2,\ldots}$ を作る。補題 2.27 によれば、$(x_i)_{i=1,2,\ldots}$ の収束する部分列 $(x_{i(j)})_{j=1,2,\ldots}$（ただし $i(j+1) > i(j)$）がとれる。$\bar{x} = \lim_{j\to\infty} x_{i(j)}$ としよう。

いま、$|x_{i(j)} - y_{i(j)}| \leq 1/i(j)$ だから、$\lim_{j\to\infty} y_{i(j)}$ が存在して $\bar{x}$ に等しい。ところが、$|f(x_{i(j)}) - f(y_{i(j)})| > \varepsilon$ なのだから、$f(\cdot)$ は $\bar{x}$ において連続ではない[*118]。 ▮

■多変数の連続関数　ここで、多変数の連続関数において定理 2.28 に対応する定理を証明しておく。これは明らかに進み過ぎた話題なので、普通の読者はとばしてほしい[*119]。

d を正の整数とし、d 変数の関数を扱う。変数を $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ と書く。各々の $i = 1, 2, \ldots, d$ について、x_i は実変数である。ここでは、さらに有限の $a_i < b_i$ をとり、x_i は閉区間 $[a_i, b_i]$ の値をとることにす

---

*118 証明の後半は省略気味に書いたので、気になる人は ϵ と δ を使って丁寧に書き直してみるといいだろう。

*119 この部分を読むには、少なくとも 6.2.4 節の d 次元空間の座標についての知識が必要である。この定理は、ずっと後に 1332 ページの補題 7.54 や 1349 ページの定理 7.57 を（厳密に細かいところまで）議論する際に必要になるので、その時点で気になったら戻って読めばいいだろう。

る。よって変数 $\boldsymbol{x}$ は $\Lambda := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d$ という集合の上を動くことになる（$d = 3$ なら Λ は直方体）。

$f : \Lambda \to \mathbb{R}$ を Λ の要素を実数に写す関数とする。変数を具体的に書くときには、$f(\boldsymbol{x})$ と書く。

多変数関数 $f(\cdot)$ が連続であるということを、定義 2.24 を素直に拡張して、以下のように定義する。ある $\boldsymbol{x} \in \Lambda$ において $f(\cdot)$ が連続であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し、$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \leq \delta$ を満たす[*120]任意の $\boldsymbol{x}' \in \Lambda$ について $|f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{x}')| \leq \varepsilon$ が成り立つことである。また、全ての $\boldsymbol{x} \in \Lambda$ において連続な関数 $f(\cdot)$ を Λ 上の連続関数という。

定理 2.31 (多変数の連続関数の最大値と最小値)**.** Λ 上の任意の連続関数 $f(\cdot)$ は Λ の中で最大値と最小値をとる。つまり、$\boldsymbol{x}_{\min}, \boldsymbol{x}_{\max} \in \Lambda$ が存在し、任意の $\boldsymbol{x} \in \Lambda$

[*120] $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ のとき $|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \cdots (x_d)^2}$ とする。

について $f(\boldsymbol{x}_{\min}) \leq f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{x}_{\max})$ が成り立つ。

定理 2.28 と同様に、ここでも、関数 $f(\cdot)$ が連続であることと、変数の動く範囲が閉区間の積 Λ であることがどちらも本質的である。実は、Λ をより一般の有界閉集合（この状況では、コンパクト集合といってもよい）で置き換えても定理は成り立つのだが、本書では、そういった概念を使うところまでは踏み込まない。正直なところ、コンパクト集合についての一般論を展開したほうが定理の証明は美しくなるのだが、ここでは、一変数の場合の知識にもとづいた（不自然な）証明を書いておこう。

証明：変数の数についての帰納法を使う。d 変数関数については定理の主張が正しいと仮定して、$d+1$ 変数関数についての主張が成り立つことを示す。$d=1$ の場合は定理 2.28 で示されているので、これで定理が示される。ここでも最大値のほうだけを議論する。

$f(\cdot)$ を $d+1$ 変数についての連続関数とする。$d+1$

番目の変数 $x_{d+1} \in [a_{d+1}, b_{d+1}]$ を y と書き、$f(\cdot)$ の変数を $(\boldsymbol{x}, y)$ と表そう。もちろん $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_d) \in \Lambda_d := [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ は最初の d 個の変数を並べたものである。

以下、$\boldsymbol{x} \in \Lambda_d$ を（任意の値に）固定して議論を進める。

各々の $y \in [a_{d+1}, b_{d+1}]$ について、$f(\cdot)$ は $(\boldsymbol{x}, y)$ において連続である。よって、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta(y) > 0$ が存在して、$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \leq \delta(y)$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}' \in \Lambda_d$ について $|f(\boldsymbol{x}, y) - f(\boldsymbol{x}', y)| \leq \varepsilon$ が成り立つ[*121]。

ここで、$\delta(y)$ を適切に選べば、($\boldsymbol{x}$ には依存するが y には依存しない) $\delta > 0$ があって、任意の $y \in [a_{d+1}, b_{d+1}]$ について $\delta(y) \geq \delta$ とできる。これを示すために、そのような $\delta > 0$ が取れないと仮定しよう。つまり、任意の

[*121] ここでは y の変化を考えていないので、ここで書き下した条件は、$(\boldsymbol{x}, y)$ における $f(\cdot)$ の連続性よりは弱い（だから、もちろん正しい)。

(小さな) $\alpha > 0$ に対して、$\delta(y) \leq \alpha$ と取るしかないような y が (少なくとも一つ) 存在するということだ。このような y については、$\alpha \leq |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \leq 2\alpha$ を満たし、かつ $|f(\boldsymbol{x},y)-f(\boldsymbol{x}',y)| > \varepsilon$ (不等式の向きに注意) となるような $\boldsymbol{x}'$ が必ず対応することに注意しよう（もしそのような $\boldsymbol{x}'$ が一つもなければ、$\delta(y) = 2\alpha$ と取れてしまう)。ここで $\lim_{i\to\infty} \alpha_i = 0$ となる無限列 $(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots}$ をとる。そして、各々の $\alpha = \alpha_i$ に対して上のように決まる y と $\boldsymbol{x}'$ をそれぞれ y_i と $\boldsymbol{x}'_i$ と呼ぶ。$(y_i)_{i=1,2,\ldots}$ は $[a_{d+1}, b_{d+1}]$ の中の無限列だから、補題 2.27 より、部分列 $(\tilde{y}_i)_{i=1,2,\ldots}$ があり、$\lim_{i\to\infty} \tilde{y}_i = \bar{y} \in [a_{d+1}, b_{d+1}]$ である。$(y_i)_{i=1,2,\ldots}$ から部分列 $(\tilde{y}_i)_{i=1,2,\ldots}$ を抜き出したのと同じ番号の要素を抜き出すことで、$(\alpha_i)_{i=1,2,\ldots}$ の部分列 $(\tilde{\alpha}_i)_{i=1,2,\ldots}$ と $(\boldsymbol{x}'_i)_{i=1,2,\ldots}$ の部分列 $(\tilde{\boldsymbol{x}}_i)_{i=1,2,\ldots}$ を作る[*122]。$\boldsymbol{x}'$ を選んだ条件から、$|\boldsymbol{x} - \tilde{\boldsymbol{x}}_i| \leq 2\tilde{\alpha}_i$ である。もちろん $\lim_{i\to\infty} \tilde{\alpha}_i = 0$ だから、$i \to \infty$ では

[*122] 正確に言えば、$\tilde{y}_i = y_{j(i)}$ となる $j(i)$ を用いて、$\tilde{\alpha}_i = \alpha_{j(i)}$ および $\tilde{\boldsymbol{x}}_i = \boldsymbol{x}'_{j(i)}$ とする。

$\tilde{\boldsymbol{x}}_i \to \boldsymbol{x}$ である。そもそも y と $\boldsymbol{x}'$ を選んだ条件からして、$|f(\boldsymbol{x}, \tilde{y}_i) - f(\tilde{\boldsymbol{x}}_i, \tilde{y}_i)| > \varepsilon$ となるはずだった。ところが、$i \to \infty$ で左辺の二つの関数は（$f(\cdot)$ が連続だから）いずれも $f(\boldsymbol{x}, \bar{y})$ に収束する。こうして矛盾がいえた。

以上で面倒な準備がおわったので、帰納法の肝心の部分に入ろう。$\boldsymbol{x} \in \Lambda_d$ を固定すると、$f(\boldsymbol{x}, y)$ は $y \in [a_{d+1}, b_{d+1}]$ の連続関数である。よって、定理 2.28 から

$$g(\boldsymbol{x}) := \max_y f(\boldsymbol{x}, y) \tag{2.4.30}$$

という関数がきちんと定義できる（右辺では y を動かして最大値をとる）。

d 変数関数 $g(\boldsymbol{x})$ が $\boldsymbol{x}$ において連続であることをいおう。$\varepsilon > 0$ を任意の実数とする。上の考察から、（y によらない）$\delta > 0$ がとれて、$|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'| \leq \delta$ を満たす任意の $\boldsymbol{x}' \in \Lambda_d$ について $|f(\boldsymbol{x}, y) - f(\boldsymbol{x}', y)| \leq \varepsilon$ が（全ての y について）成り立つ。

(2.4.30) で最大値を実現する y を $y_{\max}$ と書く。上

の条件を満たす任意の $\boldsymbol{x}'$ について、
$f(\boldsymbol{x}', y_{\max}) \geq f(\boldsymbol{x}, y_{\max}) - \varepsilon$ である。最大値は特別の y の値を代入したものより小さくはないから、$g(\boldsymbol{x}') \geq f(\boldsymbol{x}', y_{\max}) \geq f(\boldsymbol{x}, y_{\max}) - \varepsilon = g(\boldsymbol{x}) - \varepsilon$ がいえる。

上の条件を満たす任意の $\boldsymbol{x}'$ をとり、$f(\boldsymbol{x}', y)$ を最大にする y を $y'_{\max}$ と書く。$f(\boldsymbol{x}', y'_{\max}) \leq f(\boldsymbol{x}, y'_{\max}) + \varepsilon$ が成り立つ。よって、$g(\boldsymbol{x}') = f(\boldsymbol{x}', y'_{\max}) \leq f(\boldsymbol{x}, y'_{\max}) + \varepsilon \leq g(\boldsymbol{x}) + \varepsilon$ がいえる。

二つの不等式を合わせれば、$|g(\boldsymbol{x}) - g(\boldsymbol{x}')| \leq \varepsilon$ である。$\varepsilon > 0$ は任意だから、これは $g(\cdot)$ が $\boldsymbol{x}$ において連続であることを意味する。$\boldsymbol{x}$ は任意だったから、$g(\cdot)$ は Λ_d 上で連続。帰納法の仮定から、$g(\cdot)$ は Λ_d 上で最大値をとる。これは $f(\cdot)$ の最大値に他ならない。∎

第 3 章

関数と微分

　微分の方法は、現代数学の中でも、もっとも役に立つ強力な道具である。物理においてもきわめて役に立つことは言うまでもない。力学についての普遍的な法則を書き下そうと努力した

結果、ニュートン[*1]は自(みずか)ら微分の方法を作り上げてしまったわけだから、物理学にとって微分がいかに自然で重要な道具かがわかると思う。

高校の数学では、具体的な関数を微分する（導関数を求める）トレーニングはかなり積んできたと思う。しかし、大学の物理を楽しく進めるためには、どんな形かわからない一般の関数の微分を抽象的にあつかう必要がある。そういう点を意識して学んでいこう。

3.1 節で、微分のアイディアを振り返ったあと、一般の関数の微分を定義し、基本的なルールをみる。それから、3.2 節で、べき乗、指数関数、対数関数、三角関数などの微分を詳しく調べることにする。とくに、無限級数で定義した指数関数の性質を深く掘り下げること、複素数

[*1] Sir Isaac Newton (1643–1727) 紹介不要だろう。物理学の歴史のなかの巨人の一人。物理や数学の研究以外に、錬金術にも凝っていたのは有名な話。

の指数関数から三角関数が定義されることをみよう。3.3 節では、解析学の応用においてきわめて強力なテイラー展開についても、初等的なところから解説する。さいごに、9.1 節で、偏微分についてごく簡単に説明する。

- **実数と実数上の実数値関数（についての大まかなイメージ）。**
- **関数の極限と連続性（についての大まかなイメージ）。**
- **高校で身につけた、具体的な関数を微分する技術。**

3.1　微分法

3.1.1　微分への導入

すでに高校でも微分法を学び、多くの例に接してきたと思う。が、ここでもう一度、基本的な例に戻って

微分の考え方を思い出しておこう。とくに、これからは正体のわからない一般の関数の微分を自在にあつかう力が必要になる。微分のアイディアをしっかりと体得してから先に進もう。

■一次関数の例　まず a, b を実定数として、一次関数 $f(x) = a\,x + b$ を考える。変数 x がある値 x_0 から $\varDelta x$ だけずれて $x_0 + \varDelta x$ になったとき、$f(x)$ の値がどれほど変化するかに注目する[*2]。関数が簡単なので、単に代入すれば、変化は、

$$\begin{aligned} f(x_0 + \varDelta x) - f(x_0) &= \{a\,(x_0 + \varDelta x) + b\} - (a\,x_0 + b) \\ &= a\,\varDelta x \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

[*2] ここで $\varDelta x$ と書いたが、これは「$\varDelta$ かける x」という意味ではないし（dx のように）特別の意味をもった記号でもない。$\varDelta x$ でひとかたまりで、普通の一つの実数を表している。だから h とか他の文字でもよいわけだが、$\varDelta x$ と書くことで「変数 x を少し変えよう」という意志が読み取れるという習慣になっている。

と求められる。変化 $a\,\Delta x$ が「ずれ」Δx に比例していることに注目しよう。この比例係数 a は関数の変化の仕方の鍵をにぎるだいじな量だと考えられる（もちろん、微係数 $f'(x_0)$ そのものなのだが)。そこで、(3.1.1) を a について解けば、

$$a = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.1.2}$$

となる。**二点での関数の値の差を、「ずれ」Δx で割れば、鍵になる係数 a がでてくる。**

この自明な例を百パーセントなっとくした上で、この次に簡単な例に進もう。

■二次関数の例　a, b, c を実定数として、二次関数 $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ について同じことを考える。再び x が x_0 から Δx だけ変化したときの $f(x)$ の変化

を調べる。展開し、少し整理すると、

$$\begin{aligned} f(x_0+\Delta x)-f(x_0) &= \{a\,(x_0+\Delta x)^2+b\,(x_0+\Delta x)+c\} \\ &\quad -\{a(x_0)^2+bx_0+c\} \\ &= (2ax_0+b)\Delta x+a(\Delta x)^2 \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

となる（やってみよう）。今度は、残念なことに、関数の変化は $(2ax_0+b)\Delta x+a(\Delta x)^2$ というややこしい形（Δx の二次式）になってしまった。どうも、すっきりしない。しかし、ここで「ずれ」Δx が非常に小さい場合を考えてみよう。もともと Δx が小さいのだから、その二乗 $(\Delta x)^2$ はさらに小さい（$\Delta x=0.001$ なら $(\Delta x)^2=0.000001$ だ）。だから、(3.1.3) で、関数の変化を Δx に比例する部分とそれ以外に分けて

$$\begin{aligned} &f(x_0+\Delta x)-f(x_0) \\ &\quad =(2ax_0+b)\Delta x+((\Delta x)^2 \text{ に比例する部分}) \end{aligned} \tag{3.1.4}$$

と書くことに意味がある。この式にでてくる $(2ax_0+b)\Delta x$ というのが、関数の変化の主要部分なのだと思っ

ていい。そして関数の変化の鍵をにぎるのは、比例係数 $2ax_0 + b$ だと考えられる。再び、この比例係数を取り出すことをねらって、(3.1.2) と同じ式をつくってみると、(3.1.3) より

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2ax_0 + b + a\,\Delta x \qquad (3.1.5)$$

となる。ねらっていた係数 $2ax_0 + b$ の他に $a\,\Delta x$ という余分な項がでてきてしまうが、これは想定済みだ。われわれは「ずれ」Δx が小さい場合を考えようとすでに決めているのだから、あわてずに、それに対応して $\Delta x \to 0$ という極限をとれば、

$$2ax_0 + b = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \qquad (3.1.6)$$

のように、鍵になる係数 $2ax_0 + b$ を引っ張りだすことができる。これが、言うまでもないが、この場合の微係数 $f'(x_0)$ だ。

■ここまでのまとめ　ちょっとしつこいけれど、ここまでをまとめよう。微分の出発点になるのは、変数を

少しずらしたときの関数の変化 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ だ。これは、**単なる引き算**に過ぎない。微分がただの引き算と（少しだけ）ちがうのは、単に変化そのものをみているのではなく、**ずれ Δx を小さくしていったとき、関数の変化の中から Δx に比例する成分を抜き出してきている**、という点である。

「微分とは何か？」と問われ、なるべく簡単に答えようと思うと、「x^2 が $2x$ になるもの」といった返答をしてしまう人は多い。しかし、これは単なる一例に過ぎず、微分の本質をまったく伝えていない。それくらいなら「引き算をちょっとだけ賢くしたもの」とか「すごく近いところでの引き算」とか、そういう答え方をした方がずっといいと思う。

問 3.1.1.a　三次式 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ について、上と同じ考察をせよ。

問 3.1.1.b　微係数と関数のグラフの傾きが一致することは高校で習っただろう。上の一次式と二次式の例

について、そのことを（教科書など何も見ないで）自分で導出してみよ。

3.1.2　一般の関数の微分

■微係数とその意味　$f(x)$ を実数上の実数値関数とする。ここでは、前節のように具体的な関数を決めてしまうのでなく、一般の関数のまま話を進めよう。

　前節でみた考えを一般化して、微係数を次のように定義する。

定義 3.1 (一変数関数の微分)**.** 関数 $f(x)$ が x_0 において**微分可能**であるとは、極限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{3.1.7}$$

が存在することである。極限 (3.1.7) を x_0 における $f(x)$ の**微係数** *(differential coefficient)* と呼び、$f'(x_0)$ と書く。

ある点での微係数を求めることを、関数 $f(x)$ を「微分する」と言うことがある。なお、f' には「エフダッシュ (dash)」と「エフプライム (prime)」の二つの呼び方があり英語の文献でも両方が用いられているそう

だ[*3]。私の周辺ではほとんど「プライム」という呼び方しか耳にしないので私はもっぱら「プライム」と呼んでいる。

以下、極限 (3.1.7) で決まる微係数 $f'(x_0)$ の意味について考えていこう。

極限 (3.1.7) が存在するというのは、Δx をどんどん小さくすれば、極限の中の量が一定値 $f'(x_0)$ に近づくということだ。そこで、Δx がとても小さいと思って、かなり大ざっぱだが

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \simeq f'(x_0) \tag{3.1.8}$$

と書こう。$\simeq$ というのは、両辺がほぼ等しいということを意味する（数学者はあまり使わない）便利な記号だ。ただし、これを使うときには、どういう状況でどう

[*3] 英語では（私が直接に体験した範囲では）通常は prime と呼ばれているが、歴史的には dash が本来の読み方だったという説もある。dash という言葉は（この文章でも使っているが）挿入などで使う「—」という記号 — 日本語ではダッシュあるいはダーシと呼ぶ — を指すのにも使われる。

いう意味で両辺がほぼ等しいのかをはっきりさせておかなければならない。今はまだ何もはっきりさせていないから、これから (3.1.8) の意味をちゃんと考える。

まず $\simeq$ を等号と同じようにあつかえるとして、(3.1.8) を変形すると、

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \simeq f'(x_0)\,\Delta x \tag{3.1.9}$$

という近似的な等式が得られる。もちろん、$\simeq$ であるからには、なんらかの「おつり」があるはずなので、それをあからさまに書くと、(3.1.9) は、

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + R(x_0, \Delta x) \tag{3.1.10}$$

となる。$R(x_0, \Delta x)$ は、よくわからない「おつり」だが、ともかく x_0 と Δx の両方によるだろうから、こう書いた。(3.1.10) の仮定を (3.1.7) に代入し極限が $f'(x_0)$ に等しいことを使うと、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = 0 \tag{3.1.11}$$

であることがわかる。これは、Δx **が限りなくゼロに近づくとき、**$R(x_0, \Delta x)$ **という量は** Δx **と比べると完全に無視できる**（ゼロとみなしてよい）ことを意味している。このような「小さな量」を、$o(\Delta x)$ という記号でひとまとめに書いてしまうと便利だ。記号 $o(\Delta x)$ は、関数を特定せず、単に Δx **と比べると無視できる小さな量**だということを表したいときに使う（この記号については、すぐ下でもう一度まとめる）。読み方は定まっていないようだが、「スモールオーダー Δx」と言えば通じる。

こうして、(3.1.9), (3.1.10) を、

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\,\Delta x + o(\Delta x) \tag{3.1.12}$$

と書くことができる。これは、前節でみたことを、かっこいい式で書いたに過ぎない。関数の変化 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ を、Δx に比例する部分とそれに比べて無

視できる部分に分けた。そして、Δx に比例する成分の比例係数が微係数 $f'(x_0)$ ということだ。

ところで、前節でみた二次関数についての (3.1.3) と、「おつり」$R(x_0, \Delta x)$ を含んだ (3.1.10) とを比較すると、この場合 $R(x_0, \Delta x) = a(\Delta x)^2$ であることがわかる。また、問 3.1.1.a でみた三次関数では、$R(x_0, \Delta x)$ は $(\Delta x)^2$ に比例する部分と、それよりもさらに小さい部分の和になっている。このようなとき、$R(x_0, \Delta x)$ は、(3.1.11) よりも強い

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{R(x_0, \Delta x)}{(\Delta x)^2} = (\text{定数}) \tag{3.1.13}$$

という関係を満たす。くり返すと、Δx **が限りなくゼロに近づくとき、**$R(x_0, \Delta x)$ **は** $(\Delta x)^2$ **に（ほぼ）比例しつつゼロに近づく**。このような性質をもった量を（定数が 0 という場合も含め)、$O((\Delta x)^2)$ という記号でひとまとめに書く。今度は、大文字の O を使った。「オーダー $(\Delta x)^2$」と読む。

$R(x_0, \Delta x)$ が $O((\Delta x)^2)$ であるとき、(3.1.9) は

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\,\Delta x+O((\Delta x)^2) \tag{3.1.14}$$

と書くことができる。

$o(\Delta x)$ で誤差を書いた (3.1.12) は $f(x)$ が x_0 の近辺で微分可能ならつねに成り立つ関係である。それに対して、$O((\Delta x)^2)$ の入った (3.1.14) は、$f(x)$ がよい性質をもつとき[*4]にだけ成り立つ（下の問 3.1.2.a を参照)。ただし、物理に一般的に登場する関数については、ほとんどいつでも (3.1.14) が成り立つと考えて間違いない。

問 3.1.2.a　$x>0$ として $f(x)=a+bx+cx^{3/2}$ とする。$f'(0)$ を求めよ。$x_0=0$ のとき、(3.1.12) は成り立つが (3.1.14) は成り立たないことを確認せよ。なお

[*4] $f(x)$ が x_0 の近辺で二回微分可能なとき。

ゼロでない有理数 α について x^α の導関数が $\alpha x^{\alpha-1}$ であること（(3.2.10) で示す）を使ってよい。

■ランダウの記号について　上に登場した $o(\Delta x)$ や $O(\Delta x)$ のことを、ランダウ[*5]の記号と呼ぶ。ランダウの記号は極限を考える際に便利なので物理の現場でもよく用いられる。混乱することも多いので、ここで簡単にまとめておこう。

ランダウの記号を使う際には、ある量がどんどんゼロに近づいていくということが前提になる[*6]。上ではゼロに近づく量を Δx としたが、ここでは ε がゼロに近づくとしよう。

n を正の整数とし、ある関数 $f(\varepsilon)$ が

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(\varepsilon)}{\varepsilon^n}=0 \tag{3.1.15}$$

[*5] Edmund Georg Hermann (Yehezkel) Landau (1877–1938) 数論が専門のドイツの数学者。有名な理論物理学者のランダウとは別人。

[*6] ある量が大きくなる場合を扱うこともあるが、本書では用いない。

を満たすとする。つまり、ε がゼロに近づくとき、$f(\varepsilon)$ は ε^n に比べて完全に無視できる（ゼロとみなしてよい）ということである。このような性質をもつ $f(\varepsilon)$ が式の中に登場し、しかも（小さいということ以外）関数 $f(\varepsilon)$ の情報が必要ないなら、$f(\varepsilon)$ を $o(\varepsilon^n)$ と書き換えてしまってよい。逆に、式の中に $o(\varepsilon^n)$ が現れれば、具体的な形や値は分からないが、ともかく、ε^n に比べて完全に無視できる量だということが分かる。

同様に、ある関数 $g(\varepsilon)$ が、$\varepsilon \to 0$ とするとき

$$\left|\frac{g(\varepsilon)}{\varepsilon^n}\right| \leq (\text{定数}) \tag{3.1.16}$$

を満たすとする[*7]。ここで、右辺の定数はゼロでもかまわない。つまり、ε がゼロに近づくとき、$g(\varepsilon)$ は ε^n と同程度の大きさであるか、ε^n に比べて無視できるかのいずれかということだ。このような $g(\varepsilon)$ を単に

[*7] (3.1.13) では $\Delta x \to 0$ の極限が存在する場合を扱ったが、一般には、(3.1.16) の左辺の極限が存在する必要はない。たとえば、$|\sin(1/\varepsilon)| \leq 1$ だから $\varepsilon \sin(1/\varepsilon) = O(\varepsilon)$ である。

$O(\varepsilon^n)$ と書き換えてしまっていい。逆に、$O(\varepsilon^n)$ というのは、詳細は分からないが、ε^n と同程度かそれより小さい量を表している。

具体例を見るとイメージがわくだろう。たとえば、

$$(1+\varepsilon)^4 = 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4 \tag{3.1.17}$$

である。しかし、仮に ε の一次までの精度で関数の値を考えたいなら、これを

$$(1+\varepsilon)^4 = 1 + 4\varepsilon + o(\varepsilon) \tag{3.1.18}$$

と書いてしまっていい。$6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4$ は明らかに ε に比べれば無視できるので、まとめて $o(\varepsilon)$ とした。もちろん、他の精度で考えることにして、

$$(1+\varepsilon)^4 = 1 + o(1), \quad (1+\varepsilon)^4 = 1 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \tag{3.1.19}$$

などと書くこともできる。$o(1)$ は $o(\varepsilon^n)$ で $n = 0$ としたものだが、要するに $\varepsilon \to 0$ でゼロに近づく量のことである。

同じ関数について、(3.1.18) と同様に ϵ の一次までを正確に扱い、

$$(1+\varepsilon)^4 = 1 + 4\varepsilon + O(\varepsilon^2) \tag{3.1.20}$$

と書いてもよい。この場合には、$6\varepsilon^2 + 4\varepsilon^3 + \varepsilon^4$ が ε^2 と同程度の大きさの量なので $O(\varepsilon^2)$ とした。こちらについても、

$$(1+\varepsilon)^4 = 1+O(\varepsilon), \quad (1+\varepsilon)^4 = 1+4\varepsilon+6\varepsilon^2+O(\varepsilon^3) \tag{3.1.21}$$

といった式も正しい。

■導関数　微係数は、ある一点での関数の性質を特徴づける量だったが、これをもとに導関数という新しい関数をつくることができる。

上で x_0 と書いたものを単に x と書く。考えてみれば、x_0 も任意の実数を表す変数だったのだから、これは変なことではない。関数 $f(\cdot)$ が x において微分可能なら、(3.1.7) により、微係数 $f'(x)$ が定まる。さらに、

$f(\cdot)$ がある範囲[*8]の中のすべての x において微分可能だとしよう。この範囲内のすべての x において微係数 $f'(x)$ が決まるから、これらを集めたものは、x の関数とみることができる。

定義 3.2 (導関数)**.** 実数のある範囲内のすべての x について $f(x)$ が微分可能なら、その範囲で $f(x)$ は**微分可能** *(differentiable)* であるという。$f'(x)$ をこの範囲の x の関数とみなし、$f(x)$ の**導関数** *(derivative)* という。

ある関数の導関数を求めることを、その関数を「微分する」と言う[*9]。また、関数 $f(x)$ が微分可能なら導関数 $f'(x)$ は連続になりそうな気がするが、実際には各々の x について $f'(x)$ が存在しても $f'(x)$ が不連続

[*8] 具体的には、開区間 (a, b)、実数 $\mathbb{R}$ 全体、など。

[*9] 微係数を求める場合も「微分する」だった。要するに、この言い方は融通がきくのだ。

関数になる例が知られている[*10]。ただし、普通に物理をやっていく上で、そういう例を気にする必要はほとんどない。

導関数を表わす記号はいくつかある。論理的にもっともすぐれているのは（ちょっと意外に思うかも知れないが）上のように「$'$」を使う書き方だろう。この方法だと、もとの関数を変数を特定せずに $f(\cdot)$ と書き、対応する導関数を $f'(\cdot)$ と書くことができる。導関数 $f'(\cdot)$ に、x, a, y, 3.4, $ax+by$ などを代入した結果は、それぞれ、$f'(x)$, $f'(a)$, $f'(y)$, $f'(3.4)$, $f'(ax+by)$ のように書ける。特に、最後の例のように数式まで代入できてしまうのは便利だ。

よく用いられる導関数の表わし方として、

$$\frac{df(x)}{dx}, \quad df(x)/dx, \quad \frac{d}{dx}f(x) \tag{3.1.22}$$

などの書き方があり、この本でも頻繁に使うことにな

[*10] 実数のある範囲で $f'(x)$ が存在しかつ $f'(x)$ が連続になるとき、$f(x)$ は連続的微分可能という。

る。ただ、こういう書き方だと、抽象的な変数と具体的な変数の値がきちんと区別されていないという問題がある。たとえば導関数 $\dfrac{df(x)}{dx}$ に $x = 2$ を代入したいと思ったとき、x をすべて 2 で置きかえて $\dfrac{df(2)}{d2}$ とすることはなく、$\dfrac{df(2)}{dx}$ のようにかっこの中の x だけを置きかえるのが普通だろう。これは、$\dfrac{df(x)}{dx}$ と書いたとき、かっこの中の x は変数の値で、分母の x は抽象的な変数だ、という解釈をしていることに相当する。同じ流儀で $\dfrac{df(a)}{dx}$ とするくらいなら、まだ何とかなるが、たとえば $ax + by$ を代入して $\dfrac{df(ax+by)}{dx}$ と書いてしまうと、（y も独立変数なのかとかいった疑念が浮かび）何が何だかわからなくなってしまう。けっきょく、この記号法を使って論理的にものごとを進めたければ、$\dfrac{df(x)}{dx}$ に現れる x は二つとも抽象的な変数名だと思うことにして、x に何か（たとえば a）を代入しよ

うと思うときは、かなり面倒だが、

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=a} \tag{3.1.23}$$

という書き方をするのがよい。まず抽象的な変数 x の関数である $f(x)$ を x で微分し、その作業がおわったあとで、x に a を代入しよう — というストーリーをこめた書き方だ。この本では、$f'(\cdot)$ を使うか、そうでなければ、(3.1.23) の（面倒だが誤解の余地のない）書き方を使うことにする。なお、物理では、時間の関数 $f(t)$ の導関数を $\dot{f}(t)$ と表わすという習慣がある。これは便利なのでこの本でもよく用いる。

■導関数は「分数」か？　導関数を $\dfrac{df(x)}{dx}$（あるいは、同じことだが $df(x)/dx$）と書いたとき、これを「分母が dx で分子が $df(x)$ の分数」とみなしていいのか、という定番の疑問がある。これについて簡単に答えておこう。

まず（やはり定番の）簡潔な答えを書いてしまえば、$df(x)/dx$ は分数ではない。そもそもの定義を思い出せ

ば、(3.1.14) という極限で定義される微係数を一まとめにして $f'(x_0)$ あるいは $df(x)/dx|_{x=x_0}$ という記号で表わしたのだった。ここで $df(x)$ や dx というものが別個に定義されているわけではない。$df(x)/dx$ はこの形で一まとまりで意味を持っているものなのであって「$df(x)$ 割る dx」ではないということになる。ちなみに、積分でも $\int dx\, f(x)$（あるいは $\int f(x)dx$）という記号が出てくるが、ここでの dx もある種の極限を指定するための記号だと考えるべきだ（4.1 節を見よ）。

以上は数学的に正しい回答だが、一方で $df(x)/dx$ に「分数っぽい」ところがあるのも事実だ。実際、$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ と書くことにすれば、微係数の定義 (3.1.14) は

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \tag{3.1.24}$$

となる。極限の中身の $\Delta f/\Delta x$ はもちろん普通の意味での分数だ。だから、$\Delta x \to 0$ の極限をとったとき、Δx が dx という「無限小の量」に、Δf が df という

「無限小の量」に化けるのだとみなし、df/dx を二つの「無限小の量」の比と捉えるのはまっとうな考えだ。それを踏まえて、(3.1.24) の関係をを $df = f'\,dx$ という風に書き表わすこともある。df や dx は普通の量ではないけれど、これらの比は f' という普通の量（関数）になるという考えだ。これは数学的にも正当な書き方で、多変数関数の微分を表わす標準的な方法である全微分（←この本にもいずれは書く予定）でも使われる。また、このような見方は、たとえば、すぐ後の 3.1.3 節で合成関数の微分についての連鎖律を考えるとき、3.1.4 節で逆関数の導関数を考えるときにも便利になる。

実は、微分形式という少し進んだ数学を用いると、dx や df に個別に数学的に厳密な意味を与えることもできる。しかも、この定式化を使うと微分 df/dx に登場する dx も積分 $\int f(x)dx$ に登場する dx も同じものということになるのだ。微分形式を用いると、たとえば曲面や曲がった空間の上での微分や積分を美しく定

式化できるだけでなく、10 章で扱うベクトル解析の計算をきわめて能率的に進めることもできる。この本では残念ながら微分形式にまで踏み込む余裕はない。

3.1.3　微分についての基本的なルール

一般に、いくつかの微分可能な関数を組み合わせて新しい関数をつくったとき、その導関数がどうなるかについての基本的なルールをまとめておこう。以下、$f(\cdot)$, $g(\cdot)$ を一般の微分可能な関数とする。

α, β を実定数とする。二つの関数を定数倍したものを足してつくった新しい関数 $\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ は微分可能で、その導関数は、

$$\frac{d}{dx}\{\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\} = \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x) \tag{3.1.25}$$

である。つまり、微分操作は線形である[*11]。このルールをくり返し用いれば、n を一般の自然数、$f_1(\cdot), f_2(\cdot), \ldots, f_n(\cdot)$ を n 個の微分可能な関数、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ を n 個の実定数とするとき、

$$\frac{d}{dx}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f_i(x)\right\} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f_i'(x) \tag{3.1.26}$$

が示される。ここで和はあくまで有限和でなくてはならないことに注意。

関数の積 $f(x)\,g(x)$ も微分可能で、その導関数は、

$$\boxed{\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \qquad (3.1.27)}$$

[*11] 「関数の足し算の微分は、関数の微分の足し算。関数の定数倍の微分は、関数の微分の定数倍。」のように、足し算や定数倍と素直に交換するような操作は線形であるという。

である。関数の商 $f(x)/g(x)$ は $g(x) \neq 0$ をみたす x では微分可能で、導関数は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2} \\ &= \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2}\end{aligned} \tag{3.1.28}$$

となる。この特別な場合として、関数の逆数の導関数は、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f(x)}\right) = -\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2} \tag{3.1.29}$$

である。

二つの関数を順次ほどこすことで、合成関数 $f(g(x))$ を作ることができる。これも微分可能で、その導関数は、

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = g'(x)\,f'(g(x)) \qquad (3.1.30)$$

と表わされる。(3.1.30) の関係を**連鎖律** (chain rule) と呼ぶ。(3.1.30) の右辺では、$f'(\cdot)$ という導関数の書き方の利点が発揮されている。これを、$df(x)/dx$ のような書き方で表すと、

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=g(x)} \frac{dg(x)}{dx} \qquad (3.1.31)$$

のようにかなり込み入った形になる。関数 $f(\cdot)$ の中に入る変数を x と書くわけにはいかないので、新しい変数 y を用意したわけだ。(3.1.30) と (3.1.31) がまったく同じ内容を表していることがすんなりとわかるようになってほしい。

ところで、3.1.2 節の最後で議論した微係数を「分数っぽいもの」とみなす考え方では、(3.1.31) の関係はきわめて自然だ。関数 $g(x)$ の代わりに関数 $y(x)$ を

使って (3.1.31) を書けば、

$$\frac{d}{dx}f(y(x)) = \left.\frac{df(y)}{dy}\right|_{y=y(x)} \frac{dy(x)}{dx} \tag{3.1.32}$$

となる（ここで y は独立変数、$y(x)$ は x の関数であることに注意)。これを関数の引数を省略して書けば、なんと

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy}\frac{dy}{dx} \tag{3.1.33}$$

という簡単な形になる。式の形だけを見れば、二つの分数の積で dy を「約分」したことになっている。もちろんこれは厳密な証明ではないが、この論法に近くなるように厳密な証明を書くこともできる。

■導出　以上の関係は、基本的には、定義に忠実にしたがえば証明できてしまう。以下、簡単に導出をみていこう。

和についての (3.1.25) は簡単。$\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)$ を一つの関数とみなして、定義 (3.1.7) に代入し、あとはす

なおに変形すれば、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\{\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\Bigg[\{\alpha\, f(x+\Delta x) + \beta\, g(x+\Delta x)\} \\
&\qquad\qquad - \{\alpha\, f(x) + \beta\, g(x)\}\Bigg] \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{\alpha\, \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \beta\, \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}\right\} \\
&= \alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&\qquad\qquad + \beta \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
&= \alpha\, f'(x) + \beta\, g'(x) \qquad (3.1.34)
\end{aligned}
$$

となる。

積についての (3.1.27) のような関係を示すときは、$o(\Delta x)$ の記号を使った (3.1.12) を用いると便利。たとえば、$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ といった変形が許される。$o(\Delta x)$ を使った計算法に慣れる意味も含めて見ておこう。定義に (3.1.12) を代入して、す

なおに展開・整理すると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\{f(x)\,g(x)\} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\,g(x+\Delta x)-f(x)\,g(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\Big[\{f(x)+f'(x)\Delta x+o(\Delta x)\} \\
&\qquad\qquad \times\{g(x)+g'(x)\Delta x+o(\Delta x)\}-f(x)\,g(x)\Big] \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\,g(x)\,\Delta x+f(x)\,g'(x)\,\Delta x+o(\Delta x)}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$o(\Delta x)$ に $f(x)$ だとか Δx だとかをかけたものは、やはり $o(\Delta x)$ になることを用いた。このルールのために、式が圧倒的に簡単になっていることに注目したい。あとは、$\Delta x\to 0$ のとき $\{o(\Delta x)/\Delta x\}\to 0$ であることを用いれば、

$$
= f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x) \tag{3.1.35}
$$

となる。

商についての (3.1.28) は、色々な方法で示すことができるが、せっかくなので、上と同じように $o(\Delta x)$ を

使うベタな方法で示しておこう。定義に (3.1.12) を代入すると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\left\{\frac{f(x)+f'(x)\Delta x+o(\Delta x)}{g(x)+g'(x)\Delta x+o(\Delta x)}-\frac{f(x)}{g(x)}\right\}
\end{aligned}
$$

となる。なにやら恐ろしげだが、小学校時代からの教えにしたがって通分して計算を進めると、けっこうきれいな式になり

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\frac{f'(x)\,g(x)\,\Delta x-f(x)\,g'(x)\,\Delta x+o(\Delta x)}{\{g(x)+g'(x)\Delta x+o(\Delta x)\}g(x)}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)+\{o(\Delta x)/\Delta x\}}{\{g(x)+g'(x)\Delta x+o(\Delta x)\}g(x)}\\
&= \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2} \qquad (3.1.36)
\end{aligned}
$$

となる。

合成関数についての連鎖律 (3.1.30) も同じように示す。$g(x+\Delta x)=g(x)+\Delta g$ と書こう。もちろん、

$\Delta g = g'(x)\Delta x + o(\Delta x)$ である。すると

$$\begin{aligned} f(g(x+\Delta x)) &= f(g(x)+\Delta g) \\ &= f(g(x)) + f'(g(x))\Delta g + o(\Delta g) \end{aligned} \tag{3.1.37}$$

である。ここで、Δg の中身を代入し、また $o(\Delta g) = o(\Delta x)$ であることに注意すれば、

$$f(g(x+\Delta x)) = f(g(x)) + f'(g(x))g'(x)\Delta x + o(\Delta x) \tag{3.1.38}$$

となるので、後は定義にしたがえば連鎖律 (3.1.30) が得られる。

問 3.1.3.a　一般の関数の組み合わせの微分を調べる練習をしておこう。少し抽象的な問題だが、わからなくなってきたら、「$f(x) = \sin x$ だったら」という風に考えて、高校時代に慣れている具体的な計算の感覚に引き戻せばいいと思う。$f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$ を任意の微分可能な関数とする。以下の関数の導関数を、$f(\cdot)$, $g(\cdot)$, $h(\cdot)$, $f'(\cdot)$, $g'(\cdot)$, $h'(\cdot)$ などを使ってなるべく簡単に

表せ。

$$\{f(x)\}^n, \quad f(x)\,g(x)\,h(x), \quad f(g(h(x))), \quad f(x^n) \tag{3.1.39}$$

なお、$n \in \mathbb{N}$ であり、x^n の導関数が $n\,x^{n-1}$ であることを使ってよい。

3.1.4　逆関数とその導関数

一般論の最後に、実数上の実数値関数の逆関数とその導関数についてまとめておこう。

■逆関数とは何か　逆関数とは、関数の逆写像のことである。すでに 2.4.1 節で学んだ概念なのだが、混乱しやすいので、ここで復習をかねて少し詳しくみておくことにする。

まず、すごく大ざっぱな説明から（図 3.1）。x, y と

図 3.1　関数 $f(\cdot)$ とその逆関数 $f^{-1}(\cdot)$ の関係。$f(\cdot)$ が x を y に写すなら、$f^{-1}(\cdot)$ は y を x に写す。

いう二つの実変数が関数 $f(\cdot)$ によって[*12]、

$$y = f(x) \tag{3.1.40}$$

のように結ばれているとしよう。普通は (3.1.40) を「x を知ったときに y を知る関係」と見るのだが、関数 $f(\cdot)$ がうまい性質（すぐ下で見る単写という性質）をもっているときには、これを「y を知ったときに x を知る関係」と見てもいい。そういう気持で (3.1.40) の関係

[*12] 変数を明示しない書き方（2.4.2 節を参照）を使っている。

を書き直して、

$$x = f^{-1}(y) \tag{3.1.41}$$

と書く約束になっている。ここで関数 $f^{-1}(\cdot)$ が $f(\cdot)$ の逆関数である。

例をみよう。x が実数全体に値をとるとし、一次関数

$$f(x) = ax + b \tag{3.1.42}$$

を考える。もちろん a, b は実定数。

(3.1.40) に相当する関係は $y = ax + b$ だが、これを「y を知って x を知る」形に変形すれば $x = y/a - b/a$ となる。つまり逆関数は

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a} \tag{3.1.43}$$

となる。もちろん、変数の名前は何でもよいから、(3.1.43) のかわりに

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a} \tag{3.1.44}$$

図 3.2　$y = f(x)$ のグラフ（左）と $x = f^{-1}(y)$ のグラフ（右）。二つのグラフは単に x 軸と y 軸を入れ替えただけなので、$x = y$ の直線（図中の点線）に関して反転した形になっている。(x_0, y_0) に対応する点でのグラフの傾きを考えると、逆関数の微分の公式 (3.1.53) が簡単に理解できる。

と書いてもよい。当たり前だが、逆関数 $f^{-1}(x)$ と「関数の逆数」$(f(x))^{-1}$ には何の関係もない。今の例なら、$(f(x))^{-1} = 1/(ax + b)$ となることを見れば明らか。

関数と逆関数のグラフがどう対応するか見ておこう。最初に見たように、$y = f(x)$ と $x = f^{-1}(y)$ は、x と y との対応関係としてはまったく同じ物だった。x を変数と考えた対応関係を表わしたのが関数 $f(\cdot)$ であり、y を変数と考えた対応関係を表わしたのが逆関数 $f^{-1}(\cdot)$

である。

関数 $f(x)$ のグラフというのは、$y = f(x)$ を満たす点 (x, y) を x-y 平面にプロットしたものだったことを思い出そう。上の対応を考えれば、同じグラフは、$x = f^{-1}(y)$ を満たす点のプロットと考えることもできる。よって、図 3.2 のように、$f(\cdot)$ のグラフと $f^{-1}(\cdot)$ のグラフは、基本的には同じもので、単に x と y の役割が入れ替わっただけのものなのだ。図形としては、両者は斜め 45° の直線（$x = y$）についての反転で結ばれている。

■一変数関数の逆関数　逆関数の抽象的な定義をみよう。$f(\cdot)$ を実数の部分集合 D 上の実数値関数とする[*13]。D は、実数 $\mathbb{R}$ 全体や区間 $[a, b]$ など、状況に応じて決める。関数 $f(\cdot)$ の値域は、

$$R = f(D) := \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in D \right\} \tag{3.1.45}$$

[*13] 「D 上の実数値関数」とは、$x \in D$ を実数 $f(x)$ に写す関数のこと。D を $f(\cdot)$ の定義域という。

である。これは、D が $f(\cdot)$ で写された先。(2.4.2) を参照。

今、任意の $x, y \in D$ について、$f(x) \neq f(y)$ が成り立つとしよう。この性質を、$f(\cdot)$ が単射であるという (2.4.1 節)。「異なった点は必ず異なった点に写される」という性質だから、これは、一般に成り立つわけではない。

ここで、R 上の実数値関数 $g(\cdot)$ を、

$$\text{任意の } x \in D \text{ について} \quad g(f(x)) = x \tag{3.1.46}$$

によって、定義する。x が D 全体を動くとき、$f(x)$ は R 全体を動くから、これですべての $y \in R$ について $g(y)$ が定義されることになる。このように定義した $g(\cdot)$ を、$f(\cdot)$ の**逆関数** (inverse function) という。任意の x から出発したものが $f(x)$ に写され、そこに $g(\cdot)$

を作用させると、もとの x に戻るのだから[*14]、上で（大ざっぱに）見た逆関数そのものになっている。一般に、逆関数 $g(\cdot)$ を $f^{-1}(\cdot)$ と書く。この書き方を使えば、(3.1.46) は、

$$\text{任意の } x \in D \text{ について} \quad f^{-1}(f(x)) = x \qquad (3.1.47)$$

と書ける。

また、(3.1.46) の $g(f(x)) = x$ から、$f(g(f(x))) = f(x)$ という関係が得られる。ここで $y = f(x)$ と書くことにすると、

$$\text{任意の } y \in R \text{ について} \quad f(g(y)) = y \qquad (3.1.48)$$

であることもわかる。つまり、$g(\cdot)$ の逆関数 $g^{-1}(\cdot)$ は、もとの $f(\cdot)$ に等しい。「逆関数の逆関数はもとの関数

[*14] 「任意の x から出発」というのは、「どんな x から出発しても」という意味だったことを思い出そう（2.1.2 節）。つまり、$g(f(3)) = 3$, $g(f(-1234.5678)) = -1234.5678$, $g(f(\pi)) = \pi$ のように、$x \in D$ なら何を入れても元に戻るということ。

である」こと、記号で書けば、

$$(f^{-1})^{-1}(\cdot) = f(\cdot) \tag{3.1.49}$$

であることがわかった。

■例　もう少し例をみておこう。

二次関数 $f(x) = x^2$ を考えよう。これも実数全体で定義される関数だが、$f(x) = f(-x)$ なので、明らかに $f(\cdot)$ は単射ではない。そこで、定義域を $D = [0, \infty)$ のように[*15]非負の実数にとれば $f(\cdot)$ は単射になる。このとき、値域も $R = [0, \infty)$ だ。関係 $y = x^2$ を書き直せば $x = \sqrt{y}$ となるから（ここで $x \geq 0$ を使った）逆関数は $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ である。もちろん変数を x にして $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ と書いてもいい。

この例を一般化しておこう。n を任意の正の整数とし、関数 $f(x) = x^n$ を考える。定義域を $D = [0, \infty)$ とすると、値域も $R = [0, \infty)$ である。逆関数は、平方根

[*15] つまり、$x \geq 0$ を満たすすべての x からなる範囲。

を一般化した n 乗根になる (2.2.4 節を参照)。正の実数 a の n 乗根を $a^{1/n}$ と書くと、逆関数は $f^{-1}(y) = y^{1/n}$ である。

もう一つ、今度は定義域を $D = (0, \infty)$ として[*16]、関数 $f(x) = 1/x^2$ を考えよう。値域はやはり $R = (0, \infty)$ である。また $y = 1/x^2$ を書き換えれば $x = 1/\sqrt{y}$ だから、$f^{-1}(y) = 1/\sqrt{y}$ となる。

これも一般化できる。n を任意の正の整数とし、定義域 $D = (0, \infty)$ の関数 $f(x) = 1/x^n$ を考えれば、その逆関数は $f^{-1}(y) = 1/y^{1/n}$ である。同じことだが、$f(x) = x^{-n}$ および $f^{-1}(y) = y^{-1/n}$ と書くとすっきりする。

■逆関数の連続性　例を見て逆関数に慣れたところで、逆関数の存在と連続性についての厳密な（そして役に立つ）結果を見ておこう。

$f(\cdot)$ を開区間 (a, b) 上の連続な単射とする。

[*16] つまり、$x > 0$ を満たすすべての x からなる範囲。

259 ページの定理 2.26 により、$f(\cdot)$ は単調増加か単調減少かのどちらかである。話を簡単にするため仮に単調増加としよう。$f(\cdot)$ が下に有界なら（定数 f_0 があって、任意の $x \in (a,b)$ について $f(x) \geq f_0$ ということ）区間の左端での左極限 $\alpha = \lim_{x \downarrow a} f(x)$ が存在する[*17]。$f(\cdot)$ が下に有界でないときには $\alpha = -\infty$ としよう。同様に、β を右極限 $\lim_{x \uparrow b} f(x)$ または ∞ とする。$f(\cdot)$ が単調減少のときには上の ∞ と $-\infty$ を入れ替える。

定理 3.3 (逆関数の連続性)**.** $f(\cdot)$ を開区間 (a,b) 上の任意の連続な単射とし、α, β を上のように決める。$f(\cdot)$ の逆関数 $f^{-1}(\cdot)$ は (α,β) 上の連続関数であり、単調増加か単調減少かである。

証明：$f(\cdot)$ は単調増加として証明する。単調減少の場合への書き換えは自明。

[*17] 左極限の存在は有界単調列の収束についての 181 ページの定理 2.14 から示される。

まず、$f^{-1}(\cdot)$ の定義域（つまり $f(\cdot)$ の値域）が (α, β) であることを示す。任意の $y_0 \in (\alpha, \beta)$ をとる。α, β の定義から、$f(x_1) < y_0 < f(x_2)$ となる $x_1, x_2 \in (a, b)$ がある。$f(\cdot)$ が連続なので、中間値の定理（255 ページの定理 2.25）より、$f(x_0) = y_0$ となる $x_0 \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ の存在が保証される（もちろん、この x_0 が $f^{-1}(y_0)$ である）。つまり y_0 は $f(\cdot)$ の値域に入っている。

$f(\cdot)$ が単調増加であることから「$x_2 \leq x_1$ ならば $f(x_2) \leq f(x_1)$」である。対偶をとれば「$f(x_1) < f(x_2)$ ならば $x_1 < x_2$」となるが、$y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$ とすれば、これは「$y_1 < y_2$ ならば $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$」となり、$f^{-1}(\cdot)$ も単調増加とわかる。

最後に、任意の $y_0 \in (\alpha, \beta)$ において $f^{-1}(\cdot)$ が連続であることを示す。$x_0 = f^{-1}(y_0)$ とする。$f(\cdot)$ が単調増加で連続だから、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ を十分に小さくとれば $f(x_0 - \varepsilon) \leq y_0 - \delta$ および $y_0 + \delta \leq f(x_0 + \varepsilon)$ が成り立つ。よって、任意の $z \in$

$[y_0-\delta, y_0+\delta]$ に対して、$f(x_0-\varepsilon) \leq z \leq f(x_0+\varepsilon)$ である。$f^{-1}(\cdot)$ が単調増加だから、この不等式全体に $f^{-1}(\cdot)$ を作用させると、$x_0-\varepsilon \leq f^{-1}(z) \leq x_0+\varepsilon$ が得られる。これを $|f^{-1}(z)-f^{-1}(y_0)| \leq \varepsilon$ と書き直せば、まさに連続性の定義（250 ページの定義 2.24）になっている。∎

■逆関数の微分　それでは、本題である逆関数の微分について見ていこう。逆関数の微分は変数の関係がややこしくなるので苦手な人が多いが、基本となる関係はこれ以上ないほどに単純でわかりやすい。

$f(\cdot)$ を開区間 (a,b) 上の連続な単射とする[*18]。上の定理 3.3 により、$f^{-1}(\cdot)$ は (α,β) 上の連続関数である。$x_0 \in (a,b)$ において $f(\cdot)$ が微分可能でかつ $f'(x_0) \neq 0$ と仮定し、$y_0 = f(x_0)$ における $f^{-1}(\cdot)$ の微分係数がどうなるかを調べよう。$y_0+\Delta y \in (\alpha,\beta)$ となる Δy

[*18] 259 ページの定理 2.26 から $f(\cdot)$ は必ず単調である。

をとり、Δx を

$$\begin{aligned}\Delta x &= f^{-1}(y_0 + \Delta y) - x_0 \\ &= f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0) \qquad (3.1.50)\end{aligned}$$

と定義する。ここで、$f(x_0 + \Delta x) = y_0 + \Delta y$ より、

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \qquad (3.1.51)$$

と書けることに注意すると、

$$\begin{aligned}&\frac{f^{-1}(y_0 + \Delta y) - f^{-1}(y_0)}{\Delta y} \\ &= \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{\Delta x}{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)} \qquad (3.1.52)\end{aligned}$$

というきれいな関係が得られる。最左辺は $f^{-1}(\cdot)$ の微分係数を定める量、最右辺は $f(\cdot)$ の微分係数を定める量の逆数になっている。いま、$f^{-1}(\cdot)$ の連続性から、$\Delta y \to 0$ とすると $\Delta x \to 0$ となることがわかる。よって、(3.1.52) から $f^{-1}(\cdot)$ と $f(\cdot)$ の微分係数を結ぶ

$$\frac{df^{-1}(y_0)}{dy} = \left(\frac{df(x_0)}{dx}\right)^{-1} \qquad (3.1.53)$$

という関係が得られる。

定理 3.3 から、x_0 が (a,b) 上を動けば対応する y_0 が (α,β) 上をくまなく動くことがわかっている。よって、以下の定理が証明された[*19]。

定理 3.4 (逆関数の導関数)**.** $f(\cdot)$ を開区間 (a,b) 上の任意の微分可能な単射とし、任意の $x \in (a,b)$ について $f'(x) \neq 0$ とする。また、α, β を定理 *3.3* と同様に定める。このとき、逆関数 $f^{-1}(\cdot)$ は定義域 (α,β) 上で微分可能であり、微分係数は (3.1.53) で与えらえる。

[*19] 上では (3.1.53) の導出をさらりと書いたが、これを（ε や δ を使って）厳密な証明に書き直すのは簡単な練習問題である。(**進んだ注：**ただし、この証明が簡単に進めらるのは、定理 3.3（と 259 ページの定理 2.26）で $f^{-1}(\cdot)$ の存在と連続性が保証されているからである。実は、この本の以前のバージョンでは、この点を認識しておらず、定理 3.3 に相当する内容を証明せずに定理 3.4 に相当する結果を述べていた。それでは証明はなっていないこと、そして、どのように対応すればいいかを（必要な定理の証明も含めて！）福島竜輝さんに教えていただいた。)

(3.1.53) がいっているのは、要するに、**「逆関数の微分」は「もとの関数の微分の逆数」**ということだ。図 3.2 を見れば、(3.1.53) が当たり前の関係だとなっとくできると思う。求めたい $df^{-1}(y_0)/dy$ は右の逆関数のグラフの点 (y_0, x_0) での傾きであり、右辺にでてきた $df(x_0)/dx$ は左の関数のグラフの点 (x_0, y_0) での傾きである。ところが、二つのグラフは互いに 45° の直線について対称だから、傾きも互いの逆数になるということだ。

あるいは、次のように考えてもいい。関数を（$f(x)$ のかわりに）$y(x)$ と書き、逆関数を（$f^{-1}(y)$ のかわりに）$x(y)$ と書こう。さらに、関数の引数を省略して、$\dfrac{dx(y)}{dy}$ を $\dfrac{dx}{dy}$ と、$\dfrac{dy(x)}{dx}$ を $\dfrac{dy}{dx}$ と略記しよう。すると、(3.1.53) は、

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1} \tag{3.1.54}$$

と書けてしまう。式の形を見る限り全く当たり前の（ように見える）関係だ！　もちろん、3.1.2 節の最後

でも注意したように、dy/dx は「dy 割る dx」ではないのだが「分数っぽさ」がこういうところにも顔を出すのだ[*20]。実際、関係式 (3.1.52) を用いた (3.1.53) の証明も「分数をひっくり返す」というアイディアに基づいていた。

(3.1.53) で x_0, y_0 を単に x, y と書くことにすれば、使いやすい式

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

ただし $y = f(x)$ を使って右辺の x を y に書き換える

(3.1.55)

が得られる。ただ、この公式を眺めているだけではなかなか意味がつかみにくいので、具体例で手を動かして計算してみるのがいいだろう。

[*20] あるいは、3.1.2 節で紹介した書き方で $dy = f'dx$ として、これを $dx = (f')^{-1}dy$ と変形してもいい。

もっとも基本的な例として、$f(x) = x^2$（ただし $x \geq 0$）の逆関数 $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ を考えよう。もとの関数を微分すれば $f'(x) = 2x$ だから、その逆数をとって

$$\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2x} \tag{3.1.56}$$

となる。ただし、このままでは答えが x で表わされているので、$y = x^2$（つまり $x = \sqrt{y}$）を使って答えを y で表わせば、

$$\frac{d}{dy}\sqrt{y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \tag{3.1.57}$$

が得られる。もちろん、変数の名前は何でもいいから、微分の公式としては、

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{3.1.58}$$

と書き直しておいたほうが見栄えがいいだろう。

3.2　様々な関数と微分

一般の関数の微分について、みるべきことはみてきた。これからは、具体的な関数の微分を調べていこう。とくに、指数関数を、無限級数によって定義し、詳しく調べる。また、複素数の指数関数を調べることで、三角関数を定義する。さらに、指数関数をもとに、対数と双曲線関数を定義し、それらの性質をみる。様々な関数の微分を 416 ページの表にまとめた。

3.2.1　x^α の導関数

手始めに、もっとも基本の関数である x のべき乗 x^α の導関数を調べよう。この部分での最終的な結果は、α が有理数のとき、(3.2.10) が成り立つということだ。

まず、n を自然数として、関数 x^n について。

n を自然数とするとき、$(a+b)^n$ という式の展開につ

いて、次の**二項定理** (binomial theorem) が成り立つ。

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^{n-j} b^j \\
&= a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots \\
&\quad + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \qquad (3.2.1)
\end{aligned}
$$

ただし、**二項係数** (binomial coefficient) を

$$
\binom{n}{j} = \frac{n!}{(n-j)!\, j!} \qquad (3.2.2)
$$

とした。これは、高校数学では ${}_nC_j$ と書いた量だが、この書き方は海外の文献では標準ではないので、(3.2.2) を使う。

問 3.2.1.a　二項定理 (3.2.1) を証明せよ。n についての帰納法を使うとよい。

二項定理 (3.2.1) を使って、あからさまに計算すると、

$$(x+\Delta x)^n - x^n = \binom{n}{1}x^{n-1}\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n \tag{3.2.3}$$

なので、

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \binom{n}{1}x^{n-1} = n\,x^{n-1} \tag{3.2.4}$$

となる。(3.2.3) の右辺で、$(\Delta x)^2$ から $(\Delta x)^n$ までの項は極限をとったことで消えた。よって、

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1} \tag{3.2.5}$$

が得られる。

(3.2.5) が自然数 n だけでなく、任意の整数 n にも成立することをみよう。まず、$n = 0$ については、$x^0 = 1$ と定義することにすれば、(3.2.5) は $\dfrac{d}{dx}(1) = 0$ という自明な式になる。そこで、n を負の整数とし、

$x \neq 0$ についての関数 x^n を考える。もちろん $m = -n$ は自然数。逆数の導関数についての関係 (3.1.29) で $f(x) = x^m$ とすれば、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^m}\right) = -\frac{m\,x^{m-1}}{x^{2m}} \\ &= -m\,x^{-m-1} = n\,x^{n-1}\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

となり、(3.2.5) と同じ形になった。

次に、p を 0 でない整数として、$x > 0$ の範囲で、関数 $x^{1/p}$（べき乗については 2.2.4 節を参照）の導関数を求めたい[*21]。(3.1.56) で $\sqrt{x} = x^{1/2}$ の導関数を求めたのと同様、逆関数の微分を利用する。$f(x) = x^p$ とすると、$f^{-1}(y) = y^{1/p}$ であることに注意して、逆関数の導関数についての公式 (3.1.55) と $f'(x) = p\,x^{p-1}$

[*21] $x < 0$ とすると、$x^{1/p}$ は一般に複素数になってしまうので、その場合は考えない。また $p = 0$ とすると $1/p$ が無限大なので関数 $x^{1/p}$ は意味をなさない。

（これは (3.2.5), (3.2.6)）を用いれば、

$$\frac{d}{dy}(y^{1/p}) = \frac{1}{p\,x^{p-1}} = \frac{1}{p\,(y^{1/p})^{p-1}} = \frac{1}{p}\,y^{(1/p)-1} \tag{3.2.7}$$

となる。念のため、変数を x に直せば、

$$\frac{d}{dx}(x^{1/p}) = \frac{1}{p}\,x^{(1/p)-1} \tag{3.2.8}$$

となり、(3.2.5) で $n = 1/p$ とした形になっている。

最後に、0 でない整数 p, q について $f(y) = y^q$, $g(x) = x^{1/p}$ として、合成関数の導関数についての (3.1.30) を使うと、$x > 0$ の範囲で、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^{q/p}) &= \frac{d}{dx}f(g(x)) = q(x^{1/p})^{q-1}\,\frac{1}{p}x^{(1/p)-1} \\ &= \frac{q}{p}x^{(q/p)-1}\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

となる。

以上の結果をすべてまとめれば、任意の有理数 α について、

$$\frac{d}{dx}(x^{\alpha}) = \alpha\, x^{\alpha-1} \tag{3.2.10}$$

が成り立つことがわかった[*22]。予想されることだろうが、(3.2.10) は α が任意の実数でも成立する。これは、少し先に指数関数と対数関数を用いて、(3.2.71) で示す。

3.2.2　指数関数

■指数関数の定義と基本的な性質　実数 x について、**指数関数** (exponential function) $\exp(x)$ を無限級数により

[*22] x の範囲は、α が自然数なら $x \in \mathbb{R}$、α が負の整数なら $x \neq 0$、α が整数でないなら $x > 0$ である。

$$\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.2.11}$$

と定義する[*23]。なお、「0 の階乗」は普通に考えても値が決まらないので、この本では $0! = 1$ と約束することにする。こうすると、上のような式がきれいに書ける。

指数関数 $\exp(x)$ は高校数学でもおなじみの関数だが、ここでは高校とは少し異なった定義を与えた（高校で用いた定義は (3.2.23)）。また、後で見るように同じ関数を e^x と書くこともある。

221 ページの定理 2.19 でみたように、上の無限級数は任意の $x \in \mathbb{R}$ について絶対収束する。よって、

[*23] $x = 0$ の場合も最右辺での x^0 は 1 と解釈する。187 ページの脚注 *88 を見よ。

(3.2.11) により、$\exp(\cdot)$ は実数上の実数値関数として、完全に定められる。

関数 $\exp(x)$ の性質として、まず連続性をおさえておこう。

定理 3.5 (指数関数の連続性)**.** 実数全体で指数関数 $\exp(x)$ は連続である。

定義 (3.2.11) が無限級数なので、連続性は決して当たり前ではない。ただし、その証明をすべての読者が気にする必要もないと思うので、証明は次の節にまとめよう。

指数関数のもっとも重要な性質を次の定理としてまとめておく。

定理 3.6 (指数関数の基本的な性質)**.** 任意の $x, y \in \mathbb{R}$ について、

$$\exp(x+y) = \exp(x)\,\exp(y) \tag{3.2.12}$$

が成り立つ。

この定理を使うと、指数関数の基本的なふるまいをごく簡単に示すことができる（369 ページの図 3.4 (a) に指数関数のグラフがある）。

系 3.7 (指数関数のふるまい)**.** 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $\exp(x) > 0$ である。$\exp(\cdot)$ は単調増加関数である (つまり、任意の $x < y$ について $\exp(x) < \exp(y)$ が成り立つ)。そして、$\exp(0) = 1$ であり、$x \to \infty$ で $\exp(x) \to \infty$ となり、$x \to -\infty$ で $\exp(x) \to 0$ となる。

証明：$\exp(0) = 1$ は定義より自明。$x > 0$ とする。$\exp(x) \geq 1$ であること、$\exp(\cdot)$ が単調増加関数であ

ること、$x \to \infty$ で $\exp(x) \to \infty$ となることは、定義 (3.2.11) より明らか。$x < 0$ については、(3.2.12) で $y = |x| = -x$ と置けば $\exp(x) = \{\exp(|x|)\}^{-1}$ が得られるから、$x > 0$ についての $\exp(x)$ の性質を使えば、すべての性質がいえる。 ▮

定理 3.6 の証明は次節にまわすが、重要なことなので、証明の「のり」は見ておきたい。定義 (3.2.11) を思い出せば、(3.2.12) は、

$$\begin{aligned}&1 + (x+y) + \frac{(x+y)^2}{2} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \cdots \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \cdots\right)\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

が成り立つといっていることになる。一見したところ、ちょっと成り立ちそうにない、すごい関係だ。

しかし、あきらめず、x や y の次数の低いところから見ていこう。まず、一次までで止めて右辺を展開す

ると、

$$(1+x)(1+y) = \underbrace{1+(x+y)}_{\text{この範囲は一致}} + xy \tag{3.2.14}$$

となり、xy という二次の項のことを忘れれば、(3.2.13) 左辺の一次までと一致。気をよくして、二次までとって同じように計算すると、

$$\begin{aligned}&\left(1+x+\frac{x^2}{2}\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}\right)\\ &= \underbrace{1+(x+y)+\frac{(x+y)^2}{2}}_{\text{この範囲は一致}} + \frac{xy^2+x^2y}{2} + \frac{x^2y^2}{4}\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

となり、これまたみごとに二次までは左辺と一致する。これなら、この調子で一般化していけば、(3.2.13) が成り立つことが示せそうだ。導出の残りは次の節にまわして、ここでは、話を先に進めよう。

問 3.2.2.a　(3.2.15) の計算を確かめよ。三次まで残して同じ計算をしてみよ。

既に予告したように、$\exp(x)$ は e^x とも書かれる、高校数学でもおなじみの関数だ。ただ、(3.2.11) のように定義しただけでは、$\exp(x)$ が「e という定数の x 乗」という意味をもつということは、まったく明らかではない。($\exp(0) = 1$ だけは定義を見ればわかる。) これから、この点を考えていこう (2.2.4 節の「実数のべき乗」の定義を思い出しておこう)。

まずは

$$\begin{aligned} e := \exp(1) &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \simeq 2.718281828459045235 4 \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

により普遍定数 e を定義しておく。この定数にはネイ

ピア[*24]数という名前がついているが、オイラー[*25]以来の伝統で単に e（イー）と呼ぶことがほとんどだ。定数 e は、関数 e^x の微分が特殊な美しい性質（もちろん $\dfrac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ということだけれど）をもつという理由で、（人間が勝手に選んだものではなく）特別な意味のある定数なのだ。(3.2.16) を見れば想像できるだろうが、e は無理数である。

指数関数の基本的な性質 (3.2.12) を使うと、任意の自然数 n について、

$$\exp(n) = \exp(1)\,\exp(n-1) = e\,\exp(n-1) = \cdots = e^n \tag{3.2.17}$$

となり（$\cdots$ のところで秘かに数学的帰納法をやって

[*24] John Napier (1550-1617) スコットランドの数学者、哲学者。実のところ「ネイピア数」という呼び方を記憶している人はそれほど多くないと思う。私も、これを書くために調べた。

[*25] Leonhard Euler (1707-1783) 十八世紀の中心的な数学者の一人で、理論物理学を含むきわめて広い範囲で多くの業績を残した。物理を学んでいっても、解析力学でのオイラーの微分方程式、流体力学のオイラー方程式など、いろいろなところに彼の名前をみる。

いる)、確かに指数関数 $\exp(n)$ には、定数 e の n 乗という意味がある。さらに、同じく自然数 n について、(3.2.12) より $\exp(-n)\exp(n) = \exp(0) = 1$ だから、

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n} = (e^{-1})^n = e^{-n} \quad (3.2.18)$$

となる。つまり、任意の整数 m について、$\exp(m)$ には「e の m 乗」という意味がある。これで、堂々と $\exp(m) = e^m$ と書ける。

整数ができたから、次は有理数（2.2 節を思い出そう)。n を自然数とする。基本の関係 (3.2.12) から、任意の実数 x について

$$\begin{aligned}\exp(nx) &= \exp(x + (n-1)x) = \exp(x)\exp((n-1)x) \\ &= \cdots = \{\exp(x)\}^n \qquad (3.2.19)\end{aligned}$$

が成り立つ。よって、両辺の n 乗根をとり、$nx = y$ と書けば、

$$\{\exp(y)\}^{1/n} = \exp\left(\frac{y}{n}\right) \qquad (3.2.20)$$

が得られる。ここで、y を整数 m にとれば、$\exp(m) = e^m$ と書けるので、

$$\exp\left(\frac{m}{n}\right) = (e^m)^{1/n} = e^{m/n} \tag{3.2.21}$$

となる。有理数は m/n と書けるわけだから、こうして、任意の有理数 q について、$\exp(q) = e^q$ であることが示された。

ここまで来れば、あと一歩（のような気がする）。任意の実数 x について、(3.2.11) で定義される $\exp(x)$ が「ネイピア数 e を x 乗したもの」という意味をもつことを示せればうれしい。

どうやって示そうか — と悩みつつ考えてみると、そもそも、一般の実数 x について、「何かの数を x 乗する」なんていう計算をぼくらは知っているのか、と問うことになる。たとえば、$2^{\sqrt{2}}$ とか 3^{π} なんていう計算には出会ったこともないし、そんなものをどう考えていいかも知らない。「実数の無理数乗」などというものは未だに定義されていないのだ。だから、$\exp(x)$ が「ネイピア数 e を x 乗したもの」になっているかどうか

という問いには、そもそも意味がなかったのだ。

ここで、あきらめてがっかりするかわりに、開き直って先に進むことにする。x を任意の無理数とする。定理 2.10 で述べたように、どんな実数であっても、好きな精度で有理数で近似できる。そこで、近似の精度をどんどんあげていくことで、有理数からできた数列 $(q_i)_{i=1,2,\ldots}$ で $\lim_{i\to\infty} q_i = x$ となるものを取ることができる。

有理数 q_i については $\exp(q_i)$ が「e の q_i 乗」に等しいことははっきりしている。また、定理 3.5 の $\exp(x)$ の連続性より $\lim_{i\to\infty}\exp(q_i) = \exp(x)$ であることもわかっている。これら二つの事実は、無理数 x についても、「e の x 乗」を $\exp(x)$ に等しいものと定義してしまうのが自然だということを強く示している。そのように定義しよう。

こうして、任意の実数 x について

$$\exp(x) = e^x \tag{3.2.22}$$

と書くことができる。これから先では、$x \in \mathbb{R}$ について、$\exp(x)$ と e^x をいっさい区別することなく使っていこう。

■指数関数のもう一つの定義　高校の数学では、以下の極限 (3.2.23) によって指数関数を定義するのが標準的だ。こちらの定義にもいろいろな美しい性質があって魅力的なのだが、物理への応用の現場では (3.2.11) のような x のべきによる無限級数がしょっちゅうでてくる。無限級数に慣れるという意味でも、この本では (3.2.11) の定義を採用した。

もちろん、以下の定理が示すように、二つの定義は完全に等価だ。

定理 3.8 (極限による指数関数の定式化)**.** N が自然数

の範囲を動くとき、任意の $x \in \mathbb{R}$ について、

$$e^x = \lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N \tag{3.2.23}$$

が成り立つ。

証明する前に、二つの定義が一致しそうなことを大ざっぱに見ておこう。

まず、二項定理 (3.2.1) を使えば、任意の N について

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{N}\right)^N &= \sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{n!\,(N-n)!}\left(\frac{x}{N}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{N!}{(N-n)!\,N^n}\frac{x^n}{n!}\end{aligned} \tag{3.2.24}$$

である。最後の和に登場した係数は、

$$\frac{N!}{(N-n)!\,N^n} = \frac{\overbrace{N(N-1)\cdots(N-n+1)}^{n\text{ 個}}}{N^n} \tag{3.2.25}$$

と書き直せるので、n を固定して $N\to\infty$ とすれば、これは 1 に収束する。つまり、(3.2.24) の最右辺で、和

の上限を ∞ とし、和の各項で $N \to \infty$ とすれば、指数関数の定義 (3.2.11) が得られるということだ。もちろん、このままでは極限の扱いがいい加減なので証明にはなっていない。

上の論法をがんばって厳密化してもいいのだが、私の趣味では次の論法の方が好きだ。x を固定し N を大きくしていくことを考えると、定義 (3.2.11) より $e^{x/N} = 1 + (x/N) + O(1/N^2)$ である。すると、指数関数の基本的な性質 (3.2.12) より、

$$\begin{aligned} e^x = (e^{x/N})^N &= \left\{1 + \frac{x}{N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right\}^N \\ &= \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N + O\left(\frac{1}{N}\right) \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

となる。最後の等号では、N 乗を二項定理で展開し初項以外をすべてまとめた（すぐ下に厳密なやり方を書く）。$N \to \infty$ とすれば (3.2.23) が得られる。

<u>定理 3.8 の証明</u>：二つ目の論法を厳密化しよう[*26]。任

[*26] 証明のやり方が気になる人だけが読めばいいだろう。

意の $x \in \mathbb{R}$ を固定する。最後は $N \to \infty$ とするので、$N \geq |x|$ を仮定する。

定義 (3.2.11) より

$$\begin{aligned} e^{x/N} - \left(1 + \frac{x}{N}\right) &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{N}\right)^n \\ &= \left(\frac{x}{N}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{N}\right)^{n-2} \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

となる。よって、$|x/N| \leq 1$ と 215 ページの定理 2.17（の不等式と同じ議論）より、

$$\begin{aligned} \left| e^{x/N} - \left(1 + \frac{x}{N}\right) \right| &\leq \left(\frac{x}{N}\right)^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \left(\frac{x}{N}\right)^2 (e - 2) \end{aligned} \tag{3.2.28}$$

がいえる。ここで、任意の実数 a, b に対して、$|a| \leq c$, $|b| \leq c$ を満たす実数 c をとる。因数分解 $a^N - b^N = (a-b)(a^{N-1} + a^{N-2}b + a^{N-3}b^2 + \cdots + b^{N-1})$ より、

$$|a^N - b^N| \leq N\, c^{N-1}\, |a - b| \tag{3.2.29}$$

が言える。$e^{x/N} \leq e^{|x|/N}$ および $|1+(x/N)| \leq e^{|x|/N}$ に注意し、(3.2.28) を使えば、

$$\begin{aligned}\left|e^x - \left(1+\frac{x}{N}\right)^N\right| &= \left|(e^{x/N})^N - \left(1+\frac{x}{N}\right)^N\right| \\ &\leq N\, e^{(N-1)|x|/N} \left(\frac{x}{N}\right)^2 (e-2) \\ &\leq (e-2)\, x^2\, e^{|x|}\, \frac{1}{N} \qquad (3.2.30)\end{aligned}$$

が得られる。$N \to \infty$ とすれば、(3.2.23) が示される。
∎

■指数関数の微分　指数関数を定義する無限級数 (3.2.11) の各項を微分すると、第一項目は消え、二項目以降は

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{n!}\right) = \frac{n\, x^{n-1}}{n!} = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \qquad (3.2.31)$$

となる。もし、無限級数の各項を別々に微分してよいのなら、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}e^x &= \frac{d}{dx}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots\right)\\ &= 0+1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots\\ &= e^x \qquad (3.2.32)\end{aligned}$$

となり、指数関数は微分しても形を変えないことになる。美しい結果だ。

もちろん、この導出は厳密ではないが、次節で示すように、この結果は厳密に正しい。

定理 3.9 (指数関数の微分)**.**

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \qquad (3.2.33)$$

が成り立つ。

問 3.2.2.b　a, b, c を実定数、$f(\cdot)$ を一般の微分可能

$m \backslash n$	0	1	2	3
0				
1				
2				
3				

$m \backslash n$	0	1	2	3
0	↙	／	／	／
1	↙	／	／	
2	↙	／		
3	↙			

図 3.3　n, m は左のような表（が、さらに続いたもの）のすべての「ます」について足す。足す順番を工夫し、右のように、$n+m$ が 1, 2, 3 と増えていくように、足すことができる。

な関数とするとき、以下の関数の導関数を求めよ。

$$e^{a\,x+b}, \quad e^{a\,x^2+b\,x+c}, \quad \exp(f(x)), \quad f(e^x) \quad (3.2.34)$$

3.2.3　指数関数についての定理の証明

前節で結果だけ示した定理の証明に入ろう。ただし、ふつうの読者は最初の「お気楽バージョン」というところだけ読めば十分だと思う。そこから先は、本格的な証明に少し触れてみたいという読者のために書いた。

■$e^x\,e^y = e^{x+y}$ **の証明（お気楽バージョン）**　厳密な証明に移る前に、数列が無限であることや収束のことを気にしない「物理屋的証明[*27]」をみておこう。無限級数による定義 (3.2.11) をそのまま使い、

$$e^x\,e^y = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{y^m}{m!}\right) = \sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{x^n\,y^m}{n!\,m!}$$

とする。なお、ここで（厳密さにこだわらず）n, m の和をひとまとめに書いたが、二つの変数は独立にすべての非負の整数について足しあげる。ここで、前節の (3.2.15) や問 3.2.2.a の経験をいかして、一工夫する。新しい変数 k を $k = 0, 1, 2, \ldots$ と増やしながら、各々の k について $n + m = k$ を満たす全ての n, m の組み合わせを足しあげる（図 3.3）。これでも、決して何かを足し損（そこ）なう心配はない。こうして、和は

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}\frac{x^n\,y^{k-n}}{n!\,(k-n)!}\right)$$

[*27] こういう議論を、数学者は「形式的な」議論とよぶ。

という形になる。m だったものが $k-n$ になったこと、n の和の範囲が有限になったことに注意。ここで二項係数の定義 (3.2.2) と二項定理 (3.2.1) を思い出せば、この和は簡単になり、

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{k}\binom{k}{n}\frac{x^n\,y^{k-n}}{k!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(x+y)^k = e^{x+y} \qquad (3.2.35)
\end{aligned}
$$

と、求める結果が得られる。

■以下の証明についての注意　ここから先では、厳密な数学的証明を述べる。あえてハードな数学をみたいという読者向けなので、（あくまで初心者向けを意識しつつも）今までよりは少し簡潔で不親切な書き方になると思う。時間と手間をかけて消化してほしい。

以下の三つの定理の証明の論法は、どれも数学ではきわめてスタンダードなものである。

実は、指数関数についての定理を証明する際には、指数関数ならではの便利な性質を使って証明を簡潔にす

ることもできる。しかし、ここでは、敢えてそういう「エレガントな証明」はせず、べき級数の基本的な性質だけを使った地道な証明を紹介する。物理を学ぶ学生さんたち（の中の数学に興味を持っている人たち）に、典型的な数学の論法に接してほしいからである。実際、ε-δ 論法の本当の威力は、こういった証明にじっくりと接することで、はじめて体感できるものだと思う。

指数関数ならではの証明を避けたため、以下の証明は実はかなり汎用性（はんようせい）のあるものになっている。これらをほんの少し拡張すれば、はるかに一般的な無限級数で定まる関数についての定理が証明できるのだ。この本ではそういった一般化には踏み込まないことにするが、以下の証明をきちんと理解した読者は、数学書にあるそれら一般定理の証明をすんなりと理解できるはずだ。

■$e^x\,e^y = e^{x+y}$ **の証明（厳密バージョン）**　式を簡単にするため、

$$E_N(x) := \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}, \quad R_N(x) := \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{3.2.36}$$

とおく（同じ定義を以下の証明でも用いるが、これは、この節に限定した定義である）。任意の x, y を固定し、$A = |x| + |y|$ とする。

任意の $\varepsilon > 0$ をとる。無限級数 (3.2.11) が絶対収束するので（もちろん、2.3.2 節を参照）、十分に大きい N をとれば、$R_N(A) \leq \varepsilon$ が成り立つようにできる。ここで、もっとも重要な評価は (3.2.35) の計算を有限和についてやり直した、

$$\begin{aligned} E_N(x)\,E_N(y) &= \sum_{n,m=0}^{N} \frac{x^n\,y^m}{n!\,m!} \\ &= \sum_{k=0}^{N} \frac{(x+y)^k}{k!} + \sum_{\substack{n,m=1 \\ (n+m>N)}}^{N} \frac{x^n\,y^m}{n!\,m!} \end{aligned} \tag{3.2.37}$$

である。和が有限になったために、おつりが出てきてしまった。図 3.3 の右の図で矢印が描かれていない「わく」がおつりの項に相当する。右辺第一項は $E_N(x+y)$ だから、

$$E_N(x)\,E_N(y) - E_N(x+y) = \sum_{\substack{n,m=1 \\ (n+m>N)}}^{N} \frac{x^n\,y^m}{n!\,m!} \tag{3.2.38}$$

である。両辺の絶対値をとり、三角不等式 (2.2.47) を使えば、

$$\begin{aligned} &|E_N(x)\,E_N(y) - E_N(x+y)| \\ &\leq \sum_{\substack{n,m=1 \\ (n+m>N)}}^{N} \frac{|x|^n\,|y|^m}{n!\,m!} \leq R_N(|x|+|y|) \leq \varepsilon \end{aligned} \tag{3.2.39}$$

と評価できる[*28]。あとは、簡単で、$|R_N(x)| \leq$

[*28] 和を $R_N(|x|+|y|)$ でおさえたところは自明ではない。$R_N(|x|+|y|)$ を展開し、(3.2.35) を逆にたどるような計算をすれば、和に登場する項がすべて現れることをみればよい。

$R_N(A) \leq \varepsilon$, $|E_N(x)| \leq e^{|x|} \leq e^A$ などに注意すれば、

$$
\begin{aligned}
&|e^x\, e^y - E_N(x)\, E_N(y)| \\
&= \Big|(E_N(x) + R_N(x))\,(E_N(y) + R_N(y)) \\
&\quad - E_N(x)\, E_N(y)\Big| \\
&\leq |E_N(x)R_N(y)| + |E_N(y)R_N(x)| + |R_N(x)R_N(y)| \\
&\leq 2\varepsilon e^A + \varepsilon^2 \qquad (3.2.40)
\end{aligned}
$$

および

$$
\left|e^{x+y} - E_N(x+y)\right| = |R_N(x+y)| \leq R_N(A) \leq \varepsilon \qquad (3.2.41)
$$

が得られる。よって、(3.2.39), (3.2.40), (3.2.41) をす

べて使えば、

$$
\begin{aligned}
&\left|e^x\,e^y - e^{x+y}\right| \\
&= \Big|e^x\,e^y - E_N(x)\,E_N(y) + E_N(x)\,E_N(y) \\
&\quad - E_N(x+y) + E_N(x+y) - e^{x+y}\Big| \\
&\le |e^x\,e^y - E_N(x)\,E_N(y)| \\
&\quad + |E_N(x)\,E_N(y) - E_N(x+y)| \\
&\quad + |E_N(x+y) - e^{x+y}| \\
&\le 2\varepsilon(1+e^A) + \varepsilon^2 \qquad (3.2.42)
\end{aligned}
$$

という不等式が得られる。ところが、$\varepsilon > 0$ は任意だったから、この不等式と矛盾しないためには、

$$e^x\,e^y = e^{x+y} \qquad (3.2.43)$$

でなくてはならない[*29]。これで定理 3.6 が証明された。

[*29] もし (3.2.43) が成り立たないとすると、(3.2.42) の最左辺は 0 より大きい数 a になる。ところが、ε を小さくすれば (3.2.42) の最右辺は a より小さくできる。これで矛盾。

■指数関数の連続性　連続性の証明で本質的なのは次の補題。

補題 3.10 (指数関数の無限級数の一様収束)**.** $a > b$ を満たす任意の実数 a, b を選び固定する。任意の正の実数 ε に対して、ある自然数 N が存在し、$i \geq N$ を満たす任意の自然数 i について

$$|e^x - E_i(x)| \leq \varepsilon \tag{3.2.44}$$

が任意の $x \in [a, b]$ について成立する。

収束の定義 (2.2.4 節の定義 2.11) と見比べると、「任意の $x \in [a, b]$ について」というところが新しい。つまり、この範囲の x すべてについて、同じ ε と N で精度についての「掛け合い漫才」が成立してしまう—というのが一様収束のポイントだ (266 ページの一様連続性の定義 2.29 を参照)。この後の注意の項を参照。

証明：$|a|, |b|$ のうち大きい方を c と呼ぶ。$x \in [a, b]$ に

ついては $|x| \leq c$ だから、$i \geq N$ なら

$$|e^x - E_i(x)| = |R_i(x)| \leq \sum_{n=i+1}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$$
$$\leq \sum_{n=i+1}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \tag{3.2.45}$$

である。2.3.2 節でみたように右辺は十分大きい N について ε より小さくできる。▮

任意の $x_0 \in \mathbb{R}$ を固定し、x_0 における e^x の連続性を（定義 2.24 にしたがって）示そう。ε-δ 論法だから、まず、任意の正の実数 ε をとる。また、任意の $a > 0$ をとって、x_0 を含む閉区間 $[x_0 - a, x_0 + a]$ を考える。

閉区間 $[x_0 - a, x_0 + a]$ について、上の一様収束の性質を、ε を $\varepsilon/3$ に置き換えて、使う[*30]。つまり、ある

[*30] 精度 ε としては何を宣言してもよかった。今、総元締めの人が ε という精度を宣言したのだが、ここでは下請けの人が（自分の相方に）$\varepsilon/3$ という精度を宣言している。なぜ $\varepsilon/3$ なのかは、先をみるとわかる。

N が存在し、任意の $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ について、

$$|e^x - E_N(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.2.46}$$

である。ところで、$E_N(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n/n!$ は単なる多項式なので、連続。よって、ある $\delta > 0$ があり[*31]、任意の $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ について、

$$|E_N(x) - E_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \tag{3.2.47}$$

とできる。(3.2.46) と (3.2.47) の評価をあわせると、任意の $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ について、

$$\begin{aligned}
|e^x - e^{x_0}| &= \Big| e^x - E_N(x) + E_N(x) \\
&\qquad - E_N(x_0) + E_N(x_0) - e^{x_0} \Big| \\
&\leq |e^x - E_N(x)| + |E_N(x) - E_N(x_0)| \\
&\qquad + |E_N(x_0) - e^{x_0}| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.2.48}$$

[*31] $\delta \leq a$ とする。もし $\delta > a$ となるものを選んでしまった場合、δ は小さいほど有利なわけだから、$\delta = a$ に取り直せばよい。

が得られる。落ち着いて全体の流れをみて、連続性の定義と見比べれば、e^x が x_0 において連続であることが示されたことがわかる。x_0 は任意だったから定理 3.5 が証明された。

注意： 上の証明をみると、$E_N(x)$ という関数が任意の N について連続関数であることを使って、それを $N \to \infty$ として得られる関数 e^x が連続であることを示している。だからといって、連続関数 $f_N(x)$ の極限 $f(x) = \lim_{N\to\infty} f_N(x)$ がいつでも連続になるわけではない。

典型的な反例は、$x \in [0,1]$ の範囲での関数 $f_N(x) = x^N$ だ。各々の $x \in [0,1]$ について、$f_N(x) = x^N$ の極限は存在し、

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} f_N(x) = \begin{cases} 0 & x \in [0,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \tag{3.2.49}$$

となる。$f(x)$ が $x = 1$ で不連続なのは明らか。

$x \in [0,1]$ を一つ固定したとき、数列 $(f_N(x))_{N\in\mathbb{N}}$ は

$N \to \infty$ で収束し極限 $f(x)$ をもつ。このようなタイプの収束を各点収束という。この場合、ε と N の「掛け合い」は、固定された一つの x についてのみ行われていることに注意。補題 3.10 に示された一様収束と比較せよ。一様収束する関数列はかならず各点収束するが、逆はかならずしも真ではない。

■指数関数の微分　上と同じ区間 $[x_0 - a, x_0 + a]$ をとり、c を $|x_0 - a|$, $|x_0 + a|$ のうちの大きい方とする。x_0 における導関数についての

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \tag{3.2.50}$$

を示す。つまり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$（上と同じ理由で $\delta \leq a$ とできる）がとれて、任意の $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ について

$$\left| \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0} \right| \leq \varepsilon \tag{3.2.51}$$

とできることをいいたい。

任意の $\varepsilon > 0$ をとり固定する。まず $R_N(c) \leq \varepsilon/3$ となるように、十分に大きい $N \in \mathbb{N}$ をとる。もちろん、

$$|e^{x_0} - E_N(x_0)| = |R_N(x_0)| \leq R_N(c) \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.2.52)$$

が成り立つ。$E_{N+1}(x) = \sum_{n=0}^{N+1} x^n/n!$ は（多項式だから）微分可能で、$\dfrac{d}{dx}E_{N+1}(x) = E_N(x)$ である。よって、ある $\delta > 0$ がとれて、任意の $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ について

$$\left| \frac{E_{N+1}(x) - E_{N+1}(x_0)}{x - x_0} - E_N(x_0) \right| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad (3.2.53)$$

とできる。最後に、

$$\begin{aligned} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{(x_0)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{E_{N+1}(x) - E_{N+1}(x_0)}{x - x_0} + \sum_{n=N+2}^{\infty} \frac{x^n - (x_0)^n}{(x - x_0)n!} \end{aligned} \quad (3.2.54)$$

に注意する。最右辺第二項は、多項式の割り算を実行

して、

$$\left|\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{x^n-(x_0)^n}{(x-x_0)n!}\right|$$
$$\leq\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{|x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\cdots+x(x_0)^{n-2}+(x_0)^{n-1}|}{n!}$$
$$\leq\sum_{n=N+2}^{\infty}\frac{n\,c^{n-1}}{n!}=R_N(c)\leq\frac{\varepsilon}{3}\tag{3.2.55}$$

のように評価する。(3.2.54) とあわせて、

$$\left|\frac{e^x-e^{x_0}}{x-x_0}-\frac{E_{N+1}(x)-E_{N+1}(x_0)}{x-x_0}\right|\leq\frac{\varepsilon}{3}\tag{3.2.56}$$

がいえた。こうして、(3.2.52), (3.2.53), (3.2.56) をあ

わせれば、

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - e^{x_0}\right| \\
=&\left|\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - \frac{E_{N+1}(x) - E_{N+1}(x_0)}{x - x_0}\right. \\
&\left. + \frac{E_{N+1}(x) - E_{N+1}(x_0)}{x - x_0} - E_N(x_0) + E_N(x_0) - e^{x_0}\right| \\
\leq&\left|\frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} - \frac{E_{N+1}(x) - E_{N+1}(x_0)}{x - x_0}\right| \\
&+ \left|\frac{E_{N+1}(x) - E_{N+1}(x_0)}{x - x_0} - E_N(x_0)\right| \\
&+ |E_N(x_0) - e^{x_0}| \\
\leq&\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\
=&\varepsilon
\end{aligned}
\tag{3.2.57}
$$

となり、よく見ると目標だった (3.2.51) が示されている。x_0 は任意だったから定理 3.9 が証明された。

3.2.4　対数関数

■対数関数の定義と微分　指数関数 $\exp(\cdot)$ は、実数全体で定義されており、単調増加関数だから単射である。3.1.4 節のようにして、逆関数を定義することができる。

指数関数 $\exp(\cdot)$ の逆関数を**対数関数** (logarithmic function) と呼び、$\log(\cdot)$ と表す[*32]。任意の $x \in \mathbb{R}$ について $\exp(x) > 0$ だから、$\log(\cdot)$ は正の実数上の関数である。

これだけで十分かも知れないが、念のためにしつこく書いておけば、もし実数 x, y が

$$x = e^y \tag{3.2.58}$$

[*32] ただし対数関数という言い方は、あまり用いない。a という量を対数関数に代入するときは、「a のログをとる」という言い方をする。また、対数を数式で書くときには $\log x$ のように括弧を省略することが多い。

で結ばれているなら、

$$y = \log x \tag{3.2.59}$$

が成り立つという意味だ。よって、これらをくり返し使えば、

$$\boxed{x = e^{\log x}, \quad y = \log e^{y} \qquad (3.2.60)}$$

という関係が得られる。上の一連の式では $y \in \mathbb{R}$, $x > 0$ であることに注意。

　せっかくだから、この関係を図式で書いておこう。正の実数の集合を

$$\mathbb{R}_+ := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > 0 \right\} \tag{3.2.61}$$

と書けば、指数関数と対数関数は、それぞれ、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\exp} & \mathbb{R}_+ \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{\log} & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ x & \longmapsto & \log x \end{array} \tag{3.2.62}$$

という写像になる。

(3.2.12) でみたように、指数関数の基本の性質は $e^a\,e^b = e^{a+b}$ $(a, b \in \mathbb{R})$ である。ここで、$x = e^a$, $y = e^b$ として上の関係の両辺のログをとってやると、$\log(xy) = a + b$ となる。これは、任意の $x, y > 0$ について、

$$\log(xy) = \log x + \log y \tag{3.2.63}$$

が成り立つことを意味している。対数関数は積を和に変換するのだ[*33]。

さて、(336 ページの系 3.7 でみたように) $e^0 = 1$ であること、$y \to \infty$ で $e^y \to \infty$ となること、$y \to -\infty$ で $e^y \searrow 0$ となることを使えば、まず $\log 1 = 0$ であり、$x \to \infty$ で $\log x \to \infty$ となり、$x \searrow 0$ で $\log x \to -\infty$ となることが、それぞれ、わかる。図 3.4 に e^x と $\log x$

[*33] 同じように、$e^{x+y} = e^x\,e^y$ を「指数関数は和を積に変換する」と読むことができる。

図 3.4　(a) 指数関数 e^x と (b) 対数関数 $\log x$ のグラフ。$\log x$ は $x > 0$ のみで定義され、$x \searrow 0$ で $-\infty$ に発散する。グラフを描く際は、$e^0 = 1$ と $\log 1 = 0$ に注意すること。

のグラフを示した。

対数関数 $\log x$ の導関数を求めるには、逆関数の微分についての (3.1.55) で $f(x) = e^x$, $f^{-1}(y) = \log y$ としてやればよい。$f'(x) = e^x$ を用いてこれまでと同様に計算すれば、

$$\frac{d \log y}{dy} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \tag{3.2.64}$$

となる。公式として整理するため変数を書き換えておけば、

$$\frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} \tag{3.2.65}$$

である。これと、合成関数の微分についての連鎖律 (3.1.30) を使うと、任意の微分可能な関数 $f(\cdot)$ について、

$$\frac{d}{dx}\log f(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{3.2.66}$$

を示すことができる（やってみよう）。この関係は、けっこう役に立つ。

■一般のべき乗　対数関数を使うと、任意の正の実数 a と任意の実数 b について、a^b というべき乗を定義することができる。

まず (3.2.60) より $a = e^{\log a}$ と書こう。この式を (形式的に) b 乗してやれば、$a^b = (e^{\log a})^b = e^{(\log a)\,b}$ とな

る。最右辺は指数関数だから、任意の $a > 0$ と $b \in \mathbb{R}$ についてきちんと定義されている。そこで、

$$a^b := e^{(\log a)\, b} \tag{3.2.67}$$

によって、a^b を定義してやることにする。こうすると、$a^1 = a$ が成り立つし、任意の $b, c \in \mathbb{R}$ について

$$\begin{aligned} a^b\, a^c &= e^{(\log a)\, b}\, e^{(\log a)\, c} = e^{(\log a)\, b + (\log a)\, c} \\ &= e^{(\log a)(b+c)} = a^{b+c} \end{aligned} \tag{3.2.68}$$

がいえる。これを使えば、b が整数や有理数の場合は、(3.2.67) で定義した a^b が、2.2.4 節で素朴に定義したべき乗そのものだということがわかる。また、(3.2.67) と (3.2.60) より、$\log a^b = \log e^{(\log a)\, b} = b \log a$ となることもいえる。大事な関係なので、まとめておこう。

$$\boxed{\log a^b = b \log a \qquad (3.2.69)}$$

対数関数はべき乗をかけ算に変換する。この関係を使

えば、任意の正の実数 a と任意の実数 b, c について

$$(a^b)^c = e^{(\log a^b)\,c} = e^{(\log a)\,bc} = a^{bc} \tag{3.2.70}$$

であることも示される。

このようにべき乗を拡張したことにより、任意の実定数 α について関数 x^α $(x > 0)$ を考えることができる。導関数は、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^\alpha) &= \frac{d}{dx}\exp((\log x)\alpha) \\ &= \alpha\frac{1}{x}\exp((\log x)\alpha) = \alpha\, x^{\alpha-1}\end{aligned} \tag{3.2.71}$$

となり (計算の詳細を追ってみよ)、けっきょく (3.2.10) が任意の実数 α について成立することがわかった。

また、任意の $a > 0$ について a^x という関数を考えることもできる。その導関数は、

$$\boxed{\frac{d}{dx}a^x = (\log a)\, a^x \qquad (3.2.72)}$$

となる。

問 3.2.4.a　(3.2.72) を導け。

3.2.5　べき乗、指数、対数の大小の比較

$a > 1$, $\alpha > 0$ を実数とする。実数 x をどんどん大きくしていくと、a^x も x^α も $\log x$ も、限りなく大きくなる。このとき、これらの量の大きくなり具合については、今、並べた順番に

$$a^x \gg x^\alpha \gg \log x \quad \text{ただし、} a > 1,\ \alpha > 0 \tag{3.2.73}$$

という序列がある。このような大小関係を体得しておくことは、物理への応用でもきわめて重要だ。

(3.2.73) では $\gg$ を使ったややいい加減な書き方をしたので、以下、きちんとした関係を書いておこう。ま

ず任意の $a > 1$, $\alpha > 0$ について、

$$x \to \infty \text{ のとき } \quad \frac{a^x}{x^\alpha} \to \infty \tag{3.2.74}$$

となる。a が 1 よりほんの少しでも大きければ、α がどんなに大きかろうと、a^x は（x を大きくしていけば、最終的には）x^α に「勝つ」のだ。

(3.2.74) の証明はいろいろな方法でできるが、この本での指数関数の定義のみを使う短い証明を書いておこう。n を α よりも大きい任意の自然数とする。指数関数のべき級数展開による定義 (3.2.11) で n 乗の項だけを残して残りを捨てると、$y > 0$ について、

$$e^y \geq \frac{y^n}{n!} \tag{3.2.75}$$

という不等式が成り立つ（項を捨てて不等式になったのは、展開の各項が正だから）。これを使えば、

$$\frac{a^x}{x^\alpha} = \frac{e^{(\log a)\,x}}{x^\alpha} \geq \frac{(\log a)^n\, x^n}{n!\, x^\alpha} = \frac{(\log a)^n}{n!}\, x^{n-\alpha} \tag{3.2.76}$$

が得られる。この最右辺は $x \to \infty$ で限りなく大きくなる。

(3.2.74) で $\alpha = 1$ とし、$a = e^{\alpha}$ と書き、x のかわりに y を使えば、$y \to \infty$ で $(e^{\alpha\, y}/y) \to \infty$ がいえる。ここで $y = \log x$ とすれば、任意の $\alpha > 0$ について

$$x \to \infty \text{ のとき} \quad \frac{x^{\alpha}}{\log x} \to \infty \tag{3.2.77}$$

がいえる。つまり、$\alpha > 0$ が何であろうと、x が大きくなると、$\log x$ は x^{α} に「負ける」のだ。

問 3.2.5.a　$x \searrow 0$ のとき、$\log x \to -\infty$ である。このとき、任意の $\alpha > 0$ について、$x^{\alpha} \log x \to 0$ であることを示せ。

3.2.6　三角関数

ここで、念のために、**三角関数** (trigonometric function) の基本について復習しておこう。復習の必要のない読者はざっと目を通すだけで次の 3.2.7 節に進んで

図 3.5　角度の測り方。二つの線分にはさまれた円弧の長さ a と半径 r によって、二つの線分のなす角を $\theta = a/r$ と定める。

もらってかまわない。

■弧度法　まず角度の測り方から。

図 3.5 のように端点を共有する二つの線分があり、これらのあいだの角度を決めたい。そのために、（分度器をあてる代わりに）二つの線分が交わる点を中心にした半径 r の円を描く。そして、（分度器の目盛りをよむ代わりに）円周のうち、二つの線分に挟まれた部分（つまり、円弧）の長さ a を測る。半径と円弧の長さの比

$$\theta := \frac{a}{r} \tag{3.2.78}$$

を二つの線分のなす角度とする。このように角度を決

める方法を**弧度法**という。弧度法は理論的にもっとも自然な（実質的に唯一の）角度の測り方であり、大学以上の数学で角度を議論する際にはかならず弧度法を用いる。

半径 r の円の円周の長さは $2\pi r$ なので[*34]、日常的な角度の測り方での $360°$（つまり、ぐるりと一周する角度）に対応する角は 2π となる。同様に、典型的な角度の対応関係を書いておこう。

$$\begin{aligned} &180° \leftrightarrow \pi, \quad 90° \leftrightarrow \frac{\pi}{2}, \quad 45° \leftrightarrow \frac{\pi}{4}, \\ &120° \leftrightarrow \frac{2\pi}{3}, \quad 60° \leftrightarrow \frac{\pi}{3}, \quad 30° \leftrightarrow \frac{\pi}{6} \end{aligned} \tag{3.2.79}$$

これらの角度の弧度法での値はごく自然に頭に入っているようにしたいものだ。

本書ではいろいろな量の単位 (次元) のことは気にかけないことにしているのだが (1.3.4 節を参照)、ここで少しだけ角度の単位について注意しておこう。(3.2.78)

[*34] というより、これが円周率 π の定義である。

で決まる角度 θ は、二つの長さの比だから（諸量の単位をきちんと考える扱いをしても）単位を持たない量、つまり無次元量である。弧度法で測った角度を表すために、rad（ラジアン）という「単位」を用いることがあるが、これは混乱を避けるための目安に過ぎず、本物の単位ではないことに注意しよう[*35]。実際、もし rad が（本物の）単位だとすれば、半径 $r \simeq 1.00$ m の円の面積は $\pi r^2 \simeq 3.14$ m^{2}rad ということになる。そうだとすると、m^2 を単位とする通常の面積（たとえば、正方形の面積）と円の面積を比較したり足し合わせたり

[*35] 中高の教育現場で rad を単位として扱う動きがあると耳にした。これは「立場の違い」ではなく、単なる誤りである。

してはいけないことになってしまう！

問 3.2.6.a　ファインマン[*36]のエッセイ集 “Surely you’re joking, Mr. Feynman!” (Norton, 1997) の中の “Who Stole the Door?” というエッセイの一部分を引用する。

> I was never any good in sports. I was always terrified if a tennis ball would come over the

[*36] Richard Phillips Feynman (1918–1988) アメリカの理論物理学者。量子力学の経路積分による定式化の発見、場の量子論におけるファインマンダイアグラムの方法の開発など、現代物理学の基本に関わる多くの業績がある。量子電磁力学への貢献で、朝永、シュヴィンガーとともに 1965 年にノーベル物理学賞を受賞。独特の物理学のスタイルと自由奔放な生き方や発言で知られる人気者でもある。学部生のための彼の講義を本にした The Feynman Lectures on Physics は今日でも物理の学生にすすめられる「ノリのいい」好著である (特に、1 巻と 3 巻をすすめる。日本語版を買う意味はない)。この教科書は今では以下のカリフォルニア工科大学のサイトで（この数学の教科書と同じように）完全な形で公開されている。
`https://www.feynmanlectures.caltech.edu/`

> fence and land near me, because I never could get it over the fence — it usually went about a radian off of where it was supposed to go. (p. 33)

特に最後の一文のニュアンスをうまく活かすよう翻訳せよ[*37]。

■三角関数の定義　もっとも重要な三角関数であるサインとコサインを定義しよう。

読者は図 3.6 のように直角三角形の辺の比を用いたサインとコサインの定義に慣れているはずだ。もちろ

---

*37 「ご冗談でしょう、ファインマンさん」（大貫昌子訳、岩波現代文庫）では最後の部分は「投げ返そうにも僕が投げれば、垣根を越えるどころかとんでもない方向にとんでいってしまうからだ。」となっていて（もちろん、文意は正しく取られているが）ファインマンの軽い「理系ネタ」があっさり無視されている。また、本題とは関係ないけれど、「投げ返そうにも僕が投げれば」とか「・・どころか・・」といった原文では明示されていないことをわざわざ説明している「お節介」が多いのも鼻につく。

図 3.6　直角三角形の斜辺と二つの辺の比をもとにしたサインとコサインの定義。もちろん、こちらの定義も自然に使いこなせるべきだ。理論的な考察をするときには、図 3.7 の単位円を利用した定義を使うほうが有利である。

ん、大学での数学や物理でもこのような三角関数の特徴付けは重要なので、この図もしっかりと頭に入れておくべきだ。ただし、理論的な考察の際には、以下のような単位円を使った定義のほうが自然で、便利である。

図 3.7 の左図のように、二次元平面に x と y の直交座標を取り、原点を中心にした半径 1 の円周を描く。次に、原点を端点にして、x 軸から左回りに測って角度が θ の線分を描く。この線分と円周の交点をとり、そ

図 3.7　左図は三角関数の定義。単位円周上の、x 軸から左回りに測って θ の角度の点を $(\cos\theta, \sin\theta)$ とすることで、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ を定義する。
右図は角度の測り方についての注意。x 軸を基準にして左回りを正と約束するので、たとえば、$7\pi/4$ と $-\pi/4$ は同じ角度を表すことになる。

の x 座標を $\cos\theta$、y 座標を $\sin\theta$ と定義する[*38]。

θ は角度なので、初めは 0 以上 2π 未満（つまり 0° 以上 360° 未満）の値をとると考えるわけだが、この範囲をもっと広げておくと便利である。今までは x 軸から左回りに角度を測っていたので、逆に x 軸から右回

[*38] sin も cos も関数だから、引数をかっこに入れて $\sin(\theta)$, $\cos(\theta)$ のように書くのが正式である。ただ、慣習的に $\sin\theta$, $\cos\theta$ と書くことになっているので、混乱の余地がないときにはそれに従う。

りにまわるとき、角度はマイナスだと考えるのが自然だ。もちろん、これで新しい角度が得られるわけではなく、同じ角度を別の言い方で表せるようになっただけだ。たとえば、図 3.7 の右図のように、右回りに $\pi/4$（つまり 45°）まわることと、左回りに $7\pi/4$（つまり 315°）まわることは全く同じである。だから、$-\pi/4$ と $7\pi/4$ は同じ角度とみなす。あるいは、単位円の上を一周以上まわっても、最後に落ち着くところが同じならやはり同じ角度とみなす。たとえば、$7\pi/4$ に 2π を足した $15\pi/4$ も、また同じ角度を表している。以上を一般化すれば、任意の $\theta \in \mathbb{R}$ と整数 $n \in \mathbb{Z}$ について、θ と $\theta + 2n\pi$ は同じ角度を表すといえる。

角度 θ についてこのように約束すると、三角関数 $\sin\theta$ と $\cos\theta$ は、実数 $\theta \in \mathbb{R}$ の関数であり、周期 2π の周期関数であるとみるのが自然だ。周期関数であることを念のために式で書けば、任意の整数 n について

$$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta, \quad \cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta \tag{3.2.80}$$

図 3.8　見せるまでもないだろうが、$\sin\theta$（左）と $\cos\theta$（右）のグラフ。どちらも周期 2π の関数である。物理や数学の現場で、サインとコサインのふるまいを勘違いするとまったく議論について行けなくなることが少なくない。三角関数が登場したら、このグラフを本の余白や計算用紙に（こっそり）書いて、参照しながら考えを進めるとよい（私は、今でも、そうするときがある）。

となる。図 3.8 はサインとコサインのグラフである。

$(\cos\theta, \sin\theta)$ は単位円周上の点なので、この点と原点 $(0,0)$ との距離はちょうど 1 である。よってピタゴラスの定理により

$$(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = 1 \tag{3.2.81}$$

が任意の θ について成り立つ[*39]。

$\sin\theta$ と $\cos\theta$ が定義されたので、他の三角関数を

$$\tan\theta := \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta := \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$
$$\operatorname{cosec}\theta := \frac{1}{\sin\theta}, \quad \sec\theta := \frac{1}{\cos\theta} \tag{3.2.82}$$

と定義する[*40]。それぞれ、タンジェント (tangent)、コタンジェント (cotangent)、コセカント (cosecant)、セカント (secant) と読む。

問 3.2.6.b　$\tan\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$, $\cot\theta$ のグラフの概形を描け。

[*39] ご存知と思うが、$(\sin\theta)^2$, $(\cos\theta)^2$ を、$\sin^2\theta$, $\cos^2\theta$ と書くのが定着した慣習になっている。一般の関数 $f(\cdot)$ について $f^2(x)$ と書けば、これは合成関数 $f(f(x))$ の意味だとみなすのが標準なので、三角関数の二乗の書き方は特殊だ。私は、いつの頃からか $\cos^2\theta$ が生理的に嫌いになってしまったので、もっぱら $(\cos\theta)^2$ という（くそまじめな）書き方をしようと思う。しかし、$\cos^2\theta$ は数学書、物理学書で完全に標準として使われているので、そのつもりでいてほしい。

[*40] 私の趣味により、この本では、（ほとんど）$\sin, \cos, \tan$ の三つしか使わない。cosec は csc と表記することも多い。

図 3.9　$\sin x$ のグラフ (左) とその逆関数 $\sin^{-1}(x) = \arcsin(x)$ のグラフ。$\arcsin(x)$ は $-1 \leq x \leq 1$ の範囲の x についてのみ定義されることに注意。

■三角関数の逆関数　最後に三角関数の逆関数について少し詳しくみておこう。逆関数の基本については 3.1.4 節を見よ。以下では、3.1.4 節にあわせて三角関数の引数を θ ではなく x と書く。

サイン関数 $\sin x$ はすべての実数 x について定義されているが、図 3.9 の左のグラフのように、2π を周期とする周期関数で、明らかに単射ではない。そこで、仮に定義域を $D = [-\pi/2, \pi/2]$ という区間に限ることにすると、単射になる。値域は $R = [-1, 1]$ である。そこで、逆関数 $\sin^{-1}(x)$ は、$x \in [-1, 1]$ について定

義され、図 3.9 の右のグラフのような関数になる。なお、$\sin^{-1}(x)$ には特別な名前があって $\arcsin(x)$ と書き、**アークサイン** (arcsine, inverse sine) と呼ぶ[*41]。

コサイン関数 $\cos x$ の逆関数である**アークコサイン** (arccosine, inverse cosine) $\cos^{-1}(x)$ あるいは $\arccos(x)$ も同じように定義できる。今度は、コサインの定義域をたとえば $[0, \pi]$ などにとる必要がある。自分でグラフを描いてみよう。

タンジェント関数 $\tan x = \sin x / \cos x$ の逆関数は、また少し様子がちがう。$\tan x$ は、図 3.10 の左のグラフのように、$x = (2n+1)\pi/2$（n は整数）という点で発散する関数である。そこで、定義域をたとえば $D = (-\pi/2, \pi/2)$ という開区間にとる[*42]。すると、値域 R は実数全体になる。逆関数は**アークタンジェント**

[*41] arc とは「弧」の意味。$\sin x$ の変数 x は単位円の円周上の弧の長さ（それがラジアンだった）だから、この名称はもっともだ。

[*42] 開区間 $(-\pi/2, \pi/2)$ とは、$-\pi/2 < x < \pi/2$ を満たす x の集合。

図 3.10　$\tan x$ のグラフ（左）とその逆関数 $\tan^{-1}(x) = \arctan(x)$ のグラフ。$\arctan(x)$ はすべての実数 x について定義される。

(arctangent, inverse tangent) であり $\tan^{-1}(x)$ あるいは $\arctan(x)$ と書く。図 3.10 の右のグラフのように、実数全体で定義され、$x \to \pm\infty$ で $\pm\pi/2$ に収束する関数である。

3.2.7　複素変数の指数関数と三角関数

■複素数の指数関数　(3.2.11) で指数関数を定義したときは実数 x だけを考えていた。まったく同じ式を使って、任意の複素数 z について

$$\exp(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \tag{3.2.83}$$

により指数関数 $\exp(z)$ を定義しよう。2.3.3 節の最後にみたように、この無限級数は任意の複素数 z について絶対収束する。一般に $\exp(z)$ は複素数なので、これによって複素数上の複素数値関数が定まることになる。

指数関数のもっとも重要な性質だった定理 3.6 は、まったくそのままの形で複素数の場合にも成立する。

定理 3.11 (指数関数の基本的な性質)**.** 任意の $z, w \in \mathbb{C}$ について、

$$\exp(z + w) = \exp(z)\,\exp(w) \tag{3.2.84}$$

が成り立つ。

証明は（いい加減バージョンも厳密バージョンも）実数の場合とほとんど同じなので、くり返さない。また、複素共役については (2.2.61) の性質があるから、

$$\{\exp(z)\}^* = \exp(z^*) \tag{3.2.85}$$

が成り立つ。

(3.2.84) の性質は、いかにも「e の z 乗」を思わせる。そこで、一般の複素数 z についても、$\exp(z)$ を e^z という形に書くことにする。われわれは、3.2.2 節で、実数 x について $\exp(x)$ を e^x と書いてよいかということを、じっくりと手間をかけて検討した。その際、x が有理数の場合には、これは当然の書き方であることを見て、一般の実数 x については連続性を鍵にしてこのような書き方を正当化した。それに比べると、複素数 z について $\exp(z)$ を e^z と書くことは、はるかに大胆で本質的な拡張になっていることに注意しよう。

たしかに $e^{\sqrt{2}}$ というのは今までに出会ったことのなかった数だった。それでも e^1, $e^{1.4}$, $e^{1.41}$, $e^{1.414}$, $e^{1.4142}$ といった数はきちんと意味をもっていて、それ

らの極限として $e^{\sqrt{2}}$ を定義するというのはすなおな発想だった。これと比べると、e^i という数をどう定義するのが自然かというのは、何かを考えるきっかけさえつかめないような問題だといえる。そこまでわからないならば、いっそのこと (3.2.83) という単純なべき級数で定義される指数関数 $\exp(z)$ が e^z なのだと思ってしまうのが、ひとつの自然な進み方だと思われる。

複素数上の複素数値関数 e^z の性質を詳しく調べるのは、重要な課題だが、この問題には複素関数論をあつかう？？？章でじっくりと取り組むことにしよう。ここでは、一つの複素数の定数 a と実変数 x を使って $e^{a\,x}$ と書ける実数上の複素数値関数についてみておきたい。べき級数展開による定義 (3.2.83) を使えば、

$$e^{a\,x} = 1 + a\,x + \frac{a^2\,x^2}{2} + \cdots + \frac{a^n\,x^n}{n!} + \cdots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\,x^n}{n!} \tag{3.2.86}$$

となる。(3.2.31) でやったように、この無限級数 (3.2.86) の各項を微分すると、第一項は消え、第二項以降は、

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^n\,x^n}{n!}\right) = a\,\frac{a^{n-1}\,x^{n-1}}{(n-1)!} \tag{3.2.87}$$

となる。よって、(3.2.86) を（形式的に）項ごとに微分すれば、

$$\frac{d}{dx}e^{a\,x} = a\,e^{a\,x} \quad (a \text{ は複素定数、} x \text{ は実変数}) \tag{3.2.88}$$

を得る。

■三角関数の再発見　指数関数の引数が純虚数になる場合を考えてみよう。以下では任意の実数値をとる変数を x ではなく θ と書き、純虚数の $i\theta$ を指数関数の引数とする。つまり、実変数 θ の関数 $e^{i\theta}$ を考えようということだ。

$e^{i\theta}$ は一般に複素数だから、実部と虚部にわけて、

$$e^{i\theta} =: c(\theta) + i\, s(\theta) \tag{3.2.89}$$

と書いてみよう。$c(\theta)$, $s(\theta)$ は、どちらも実数上の実数値関数だ（隠すことはないだろう。これらはコサインとサインであることがすぐにわかる）。$e^{i0} = e^0 = 1$ だから、

$$c(0) = 1, \quad s(0) = 0 \tag{3.2.90}$$

である。

ここで (3.2.88) より関数 $e^{i\theta}$ の導関数は、

$$\frac{d}{d\theta} e^{i\theta} = i\, e^{i\theta} \tag{3.2.91}$$

である。(3.2.89) を代入すれば、

$$\frac{d}{d\theta}c(\theta) + i\,\frac{d}{d\theta}s(\theta) = i\{c(\theta) + i\,s(\theta)\} = -s(\theta) + i\,c(\theta) \tag{3.2.92}$$

となる。もちろん、等号は実部と虚部それぞれについて成立すべきなので、

$$\frac{d}{d\theta}c(\theta) = -s(\theta), \quad \frac{d}{d\theta}s(\theta) = c(\theta) \tag{3.2.93}$$

という関係が得られる。

(3.2.90) と (3.2.93) を満たす関数 $c(\theta)$, $s(\theta)$ は何かを調べよう[*43]。

まず、(3.2.93) と積の導関数の公式 (3.1.27) から

$$\frac{d}{d\theta}\{(c(\theta))^2 + (s(\theta))^2\} = 2c(\theta)\frac{d}{d\theta}c(\theta) + 2s(\theta)\frac{d}{d\theta}s(\theta)$$
$$= 2c(\theta)s(\theta) - 2s(\theta)c(\theta) = 0 \tag{3.2.94}$$

[*43] サインとコサインの微分を知ってれば（そして、常微分方程式の解の一意性（8.1 節）という性質を使えば)、この答は明らかである。ただし、この本では、まだサインとコサインの微分は導出していないという立場で話を進める。

図 3.11　点 $(c(\theta), s(\theta))$（図中では黒い丸）は、単位円周上の、$(1, 0)$ から円周に沿った距離が θ の位置にある。

となり、$(c(\theta))^2 + (s(\theta))^2$ は θ に依存しない定数とわかる。(3.2.90) より、その定数は 1 だから、任意の θ について

$$(c(\theta))^2 + (s(\theta))^2 = 1 \tag{3.2.95}$$

が成り立つ。2 次元の座標を取り、x 座標が $c(\theta)$ で y 座標が $s(\theta)$ となる点 $(c(\theta), s(\theta))$ を考えよう。(3.2.95) より、この点は単位円周上にある。

さらに、(3.2.90) と (3.2.93) から、点 $(c(\theta), s(\theta))$ が単位円周上のどの位置にあるかもわかる。先に答えを書くと、図 3.11 のように、x 軸上の点 $(1, 0)$ から

図 3.12　点 O を中心にした半径 1 の円周上に点 A, B をとる。A を通る円への接線が OB の延長と交わる点を C とする。また A から直線 OC に降ろした垂線を AD とする。

円周に沿って左回りに距離 θ だけ進んだところに点 $(c(\theta), s(\theta))$ があるのだ。この事実を示そう（ただし、以下の証明はややこしい上に完璧とは言えないので、まずは飛ばしてその先の結論を読むのがいいかもしれない)。

証明：ちょっとした幾何の問題を解いて準備をする。図 3.12 を見よ。点 O を中心にした半径 1 の円を描き、円周上に点 A, B を取る。点 A を通る円の接線を引き、それが OB を延長した直線と交わる点を C とする。また、A から OC に向けて降ろした垂線を AD とする。

$\overline{\mathrm{AC}} = \Delta\theta$ とする（$\overline{\mathrm{AC}}$ は A, C 間の距離）。よって三角形 OAC の面積は $\Delta\theta/2$ である。ピタゴラスの定理から $\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{1+(\Delta\theta)^2}$ であり、三角形 OAC と三角形 ODA は相似だから、三角形 ODA の面積は $\Delta\theta/[2\{1+(\Delta\theta)^2\}]$ である。

円弧 AB の長さを Δa と書く。明らかに、(三角形 OAD の面積) $\leq$
(扇形 OAB の面積) $\leq$ (三角形 OAC の面積) が成り立つ。面積を代入すれば、

$$\frac{\Delta\theta}{2\{1+(\Delta\theta)^2\}} \leq \frac{\Delta a}{2} \leq \frac{\Delta\theta}{2} \tag{3.2.96}$$

となる。$1/\{1+(\Delta\theta)^2\} \geq 1-(\Delta\theta)^2$ に注意すれば、

$$\Delta\theta - (\Delta\theta)^3 \leq \Delta a \leq \Delta\theta \tag{3.2.97}$$

であることがわかる。つまり、$\Delta\theta$ が微小なら Δa と $\Delta\theta$ はほぼ等しいのである。また、

$$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{1+(\Delta\theta)^2} - 1 \leq \frac{(\Delta\theta)^2}{2} \tag{3.2.98}$$

にも注意しておく[*44]。最後に、図には描かなかったが、点 A から円周に沿って距離 $\Delta\theta$ だけ左回りに進んだ円周上の点を B′ とする。B′ は、B よりも少しだけ先にある。ここで、

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{B'C}} &\leq (\text{円弧 BB}' \text{ の長さ}) + \overline{BC} \\ &= (\Delta\theta - \Delta a) + \overline{BC} \\ &\leq (\Delta\theta)^3 + \frac{(\Delta\theta)^2}{2} = o(\Delta\theta) \qquad (3.2.99)\end{aligned}$$

が成り立つことに注意しよう。これをこの先で使う。

さて、微分についての (3.2.93) を、微小変化の書き方 (3.1.12) を使って、

$$\begin{aligned}&(c(\theta + \Delta\theta), s(\theta + \Delta\theta)) \\ &= (c(\theta), s(\theta)) + \Delta\theta\,(-s(\theta), c(\theta)) + o(\Delta\theta)\end{aligned} \qquad (3.2.100)$$

と表わす。ベクトルの和の形を先取りして使ってしまったが、これは問題ないだろう。今、θ を固定して実

[*44] 導出：$2(\sqrt{1+(\Delta\theta)^2} - 1) \leq (\sqrt{1+(\Delta\theta)^2} + 1)(\sqrt{1+(\Delta\theta)^2} - 1) = (\Delta\theta)^2$ とすればよい。

図 3.13　半径 1 の円と円周上の点 $(c(\theta), s(\theta))$ を通る接線。円の中心と点 $(c(\theta), s(\theta))$ を結ぶ線分は接線と垂直だから、図の三角形は合同。よって、接線の座標が (3.2.101) で表されることがわかる。ここでは、$c(\theta) > 0$, $s(\theta) > 0$ の場合を描いたが、点が他の象限にあるときにも同様に作図できる。

数のパラメター t を動かすとき、

$$(c(\theta), s(\theta)) + t\,(-s(\theta), c(\theta)) \tag{3.2.101}$$

が、点 $(c(\theta), s(\theta))$ を通る円の接線を描き出すことは高校で学んだ知識からわかるはずだ（高校数学は既に得意ではないのだが、たとえば、図 3.13 のような作図をして考えるのが手っ取り早い気がする。他にいい方法

があったら教えてください)。

$(c(\theta), s(\theta))$ を先ほどの点 A としよう。すると、$(c(\theta), s(\theta)) + \Delta\theta\,(-s(\theta), c(\theta))$ は点 C に対応する。よって、(3.2.99) と (3.2.100) から、

> 点 $(c(\theta), s(\theta))$ から円周に沿って左回りに $\Delta\theta$ 進んだ点（これは点 B′）と
> 点 $(c(\theta+\Delta\theta), s(\theta+\Delta\theta))$ の距離が $o(\Delta\theta)$ である

と結論できる。これが任意の θ について成り立つことから、ほしい事実がでる[*45]。まず $\theta = 0$ のときは (3.2.90) により $(c(0), s(0)) = (1, 0)$ である。$(1, 0)$ から円周に沿って左周りに距離 θ だけ進んだ点と、点 $(c(\theta), s(\theta))$ を比較したい。そこで、正の整数 N をとり、$\Delta\theta := \theta/N$ とする。そして θ の距離を $\Delta\theta$ ずつの距離 N 個に分割して、各々の部分に、上の評価を用

[*45] 以下の議論は証明というにはかなり乱暴である。実際には、「常微分方程式の解の一意性」という性質を証明することになるので、しっかりした証明はかなり長くなる。より正確には、8.1 節で述べる一般論を使えばよい。

いる。すると、考えている二つの点の距離は、大きくても $o(\Delta\theta) \times N = o(\theta/N) \times N$ とわかるが、これは $N \to \infty$ でゼロになる。▮

点 $(1, 0)$ から円周に沿って左回りに距離 θ だけ進んだ点が $(c(\theta), s(\theta))$ だとわかった（図 3.11）。3.2.6 節で復習したコサインとサインの定義を思い出せば（図 3.7）、まさに、$c(\theta) = \cos\theta,\ s(\theta) = \sin\theta$ であることがわかる。

指数関数の引数に純虚数を入れたら、三角関数が出てきた！

■オイラーの公式　こうして、$c(\theta),\ s(\theta)$ が、それぞれ $\cos\theta, \sin\theta$ と呼んでいたものであることが確定したので、これからは、その呼び方を使うことにしよう。(3.2.89) をもう一度書いておけば、任意の実数 θ について、

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta \tag{3.2.102}$$

である。あるいは、以前の三角関数の定義はいったん忘れて、この式の右辺によってサインとコサインを定義するのだと宣言するのも（如何にも大学の数学らしくて）気持ちがいい。

(3.2.102) の関係は、**オイラー**[*46]**の公式** (Euler formula) と呼ばれる。(3.2.85) より $(e^{i\theta})^* = e^{-i\theta}$ となることに注意し、複素数の実部と虚部についての (2.2.62) を思い出せば、三角関数を指数関数で表す関係

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \mathrm{Re}\,e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2},\\ \sin\theta &= \mathrm{Im}\,e^{i\theta} = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\end{aligned} \tag{3.2.103}$$

が得られる。

[*46] 340 ページの脚注 *25 を見よ。

オイラーの公式 (3.2.102) を知ってしまったら、もはや三角関数の和の公式や倍角の公式などは忘れてしまってかまわない。指数関数の基本の関係 (3.2.84) を使えば、任意の実数 θ, φ について、$e^{i\theta}e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$ がいえる。右辺と左辺それぞれにオイラーの公式 (3.2.102) を代入すれば、

$$(\cos\theta + i\,\sin\theta)(\cos\varphi + i\,\sin\varphi) = \cos(\theta+\varphi) + i\,\sin(\theta+\varphi) \tag{3.2.104}$$

となる。左辺を展開し、両辺の実部と虚部がそれぞれ等しいことを使えば、おなじみの公式（加法定理）

$$\begin{aligned} &\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\,\cos\varphi - \sin\theta\,\sin\varphi, \\ &\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\,\cos\varphi + \cos\theta\,\sin\varphi \end{aligned} \tag{3.2.105}$$

が得られる。

ところで、$\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$ だったから、オイラーの公式 (3.2.102) で $\theta = \pi$ とすれば、

$$e^{i\pi} = -1 \tag{3.2.106}$$

という美しい関係が得られる。-1 と i という（それぞ

れ中学と高校で出会った）二つの「変な数」、そして、π と e という数学の基本定数（これらは、小学校と高校？）が、このような単純な一つの式で結びついているのは驚異だ。ガウス[*47]によれば、(3.2.106) の関係がぱっと当たり前だと思えない人は一流の数学者にはなり得ないそうだ[*48]。

■三角関数の導関数と無限級数　「三角関数の再発見」に用いた基本的な関係 (3.2.93), (3.2.95) を（本来の）新しい名前で書きなおしておこう。

[*47] 201 ページの脚注 *96 を見よ。

[*48] 私にとっては、もちろん (3.2.106) は完璧にお馴染みの関係で、$e^{i\pi}$ はほぼ直感的に -1 に見える。しかし、自分自身が、本当の意味でこの関係の自然さを「見通している」という気はしないので、ガウスの判定基準からすれば、私は確実に不合格だ。

$$\frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta, \quad \frac{d}{d\theta}\sin\theta = \cos\theta \tag{3.2.107}$$

$$(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1 \tag{3.2.108}$$

サインとコサインの導関数についての (3.2.107) と商の導関数の公式 (3.1.28) を使えば、(3.2.82) で定義したタンジェント、コタンジェント、コセカント、セカントの導関数も

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\theta}\tan\theta &= \frac{1}{(\cos\theta)^2} = (\sec\theta)^2, \\
\frac{d}{d\theta}\cot\theta &= -(\operatorname{cosec}\theta)^2, \\
\frac{d}{d\theta}\operatorname{cosec}\theta &= -\cot\theta\ \operatorname{cosec}\theta, \\
\frac{d}{d\theta}\sec\theta &= \sec\theta\ \tan\theta
\end{aligned} \tag{3.2.109}$$

のように求められる。

無限級数による指数関数の定義 (3.2.83) で $z = i\theta$ と

すれば、

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + i\frac{\theta^5}{5!} - \cdots \tag{3.2.110}$$

という無限級数が得られる。これを実部と虚部に分けて、オイラーの公式 (3.2.102) と見比べれば、

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j}}{(2j)!} \tag{3.2.111}$$

および

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j \theta^{2j+1}}{(2j+1)!} \tag{3.2.112}$$

という三角関数の無限級数による表示が得られる。これらは、もちろん、絶対収束する。それにしても、三角関数という 2π の周期をもつ関数が、すべての θ について (3.2.111) と (3.2.112) のような形に表現できるのは、驚くべきことだ。

問 3.2.7.a　(3.2.109) を導け。

■三角関数の逆関数の導関数　3.2.6 節の最後に定義した三角関数の逆関数の微分を求めておこう。もちろん、3.1.4 節にある逆関数の微分の一般公式 (3.1.55) を使うだけなのだが、少し丁寧にみておこう。

3.1.4 節の書き方にあわせて、$f(x) = \sin x$, $f^{-1}(y) = \arcsin(y)$ としよう。変数の動く範囲は $x \in [-\pi/2, \pi/2]$, $y \in [-1, 1]$ である。導関数は $f'(x) = \cos x$ なので、公式 (3.1.55) を素直に使えば

$$\frac{d\arcsin(y)}{dy} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos(x)} \tag{3.2.113}$$

となる。ここで $y = \sin(x)$ とするわけだが、このまま

最右辺を y の関数に直そうとすると $1/\cos(\arcsin(y))$ となってしまって、きれいではない。しかし、三角関数の性質から $(\sin(x))^2+(\cos(x))^2=1$ だから、$\cos(x)=\pm\sqrt{1-(\sin(x))^2}$ である。さらに $x\in[-\pi/2,\pi/2]$ だから符号はプラスをとればいい。$\cos(x)=\sqrt{1-y^2}$ ということになり、(3.2.113) の最右辺がきれいな y の関数になる。いつものように変数を x に戻して最終的な形を書けば、

$$\frac{d}{dx}\arcsin(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{3.2.114}$$

となる。

問 3.2.7.b　$\arccos(x)$, $\arctan(x)$ の導関数を求めよ。もとの関数 $\cos x$, $\tan x$ の定義域に注意すること。

■複素数の極表示　複素数の絶対値の定義 (2.2.64) を思い出せば、オイラーの公式 (3.2.102) より、任意の実数 θ について

$$|e^{i\theta}|=\sqrt{(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}=1 \tag{3.2.115}$$

が成り立つ。つまり $e^{i\theta}$ は絶対値 1 の複素数である。

この事実を使うと、複素数の**極形式** (polar form) という便利な表現が得られる。任意の複素数 $z = x + iy$ を、**偏角** (complex argument) と呼ばれる実数 θ により

$$z = |z|\, e^{i\theta} \tag{3.2.116}$$

と書くのである。絶対値が 1 の $e^{i\theta}$ の部分は、複素数 z の**位相** (phase) と呼ばれる。

もちろん $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ だから、θ は、

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \tag{3.2.117}$$

を満たすように決めることになる。これは、

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \tag{3.2.118}$$

と同じことである。

二つの複素数 z, w を極形式で $z = r\, e^{i\theta}$, $w = s\, e^{i\varphi}$

と書いておけば、これらの積や商は、

$$z\,w = r\,s\,e^{i(\theta+\varphi)}, \quad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}\,e^{i(\theta-\varphi)} \tag{3.2.119}$$

となる。また任意の整数 n について、

$$z^n = r^n\,e^{i\,n\,\theta} \tag{3.2.120}$$

である。

問 3.2.7.c　虚数単位 i を極形式で表せ。それを用いて、$i^{1/2}$ を $\alpha + \beta i$ の形に表せ。

3.2.8　双曲線関数

指数関数による三角関数の表現 (3.2.103) を参照しながら、新たに**双曲線関数** (hyperbolic function) を定義しよう。双曲線関数は、物理のさまざまな場面に顔を出す重要な関数である。

サインやコサインが円の性質と対応して定義されたように、双曲線関数を（まさに、そのまんまだが）双曲

図 3.14　$\cosh x$, $e^x/2$, $\sinh x$ のグラフを重ねて描いた（真ん中の $e^x/2$ は見えにくいが）。定義から明らかに、$\cosh x > e^x/2 > \sinh x$ という大小関係がある。x がある程度以上大きいところでは三つのグラフは完全に重なってしまっている。$\cosh x$ は $\cosh x \geq \cosh 0 = 1$ を満たす。

図 3.15　$\tanh x$ のグラフ。原点を傾き 1 で通過し、$x \to \pm\infty$ で ± 1 に漸近する。

線の性質に対応させて定義することもできる。しかし、そのような定義をみても、物理への応用にとりたてて役立つわけでもないので、ここでは天下(あまくだ)りに定義を書いてしまう。コサイン、サイン、タンジェントに対応する双曲線関数は、

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$
$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \tag{3.2.121}$$

であり、それぞれハイパボリック・コサイン (hyperbolic cosine)、ハイパボリック・サイン (hyperbolic sine)、ハイパボリック・タンジェント (hyperbolic tangent) と読む[*49]。三角関数についての (3.2.103) と見比べれば、対応関係は一目瞭然だろう。$\cosh x$ は x についての偶関数であり、$\sinh x$ と $\tanh x$ は奇関数である。

[*49] cosh については、見たまま「コッシュ」と読むこともある。sinh, tanh はそのままでは発音不能。

コサインとサインの (3.2.108) に対応して、

$$(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1 \tag{3.2.122}$$

という関係が成り立つ。これは平面上の点 $(\cosh x, \sinh x)$ が双曲線上の点であることを意味している。また、導関数については、定義からただちに

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x,$$
$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{(\cosh x)^2} \tag{3.2.123}$$

がいえる。三角関数の場合とちがってマイナスがでてこないので覚えやすい。

x が 1 に比べて非常に大きいとき（これを、$x \gg 1$ と書く）では $e^x \gg e^{-x}$ なので、$\cosh x \simeq \sinh x \simeq e^x/2$ であり、$\tanh x \simeq 1$ である。x が負の側で大きくなるときのふるまいは、関数の偶奇性から定まる。つまり、$\cosh x$ のグラフは y 軸について反転対称であり、

$\sinh x$ と $\tanh x$ のグラフは原点について点対称になる (図 3.14, 3.15)。

$y = \tanh x$ としよう。(3.2.121) より $y = (e^{2x} - 1)/(e^{2x} + 1)$ である。これを変形すれば $e^{2x} = (1 + y)/(1 - y)$ つまり、$x = (1/2)\log[(1 + y)/(1 - y)]$ が得られる。つまり、ハイパボリック・タンジェントの逆関数を、対数を使って

$$\tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} \tag{3.2.124}$$

という簡単な形に表わせるということだ。

3.2.9　導関数のまとめ

後の便利のため、これまで見てきたものを含めて、代表的な関数について導関数をまとめて表にしておく。双曲線関数の逆関数はまったく議論しなかったので、練習問題と思って自分で考えてみよう。

関数 $f(x)$	x の範囲	導関数 $f'(x)$
x^n $(n \in \mathbb{N})$		$n\,x^{n-1}$
x^{-n} $(n \in \mathbb{N})$	$x \neq 0$	$-n\,x^{-n-1}$
x^{α} $(\alpha \in \mathbb{R})$	$x > 0$	$\alpha\,x^{\alpha-1}$
$\sin x$		$\cos x$
$\cos x$		$-\sin x$
$\tan x$		$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$
$\arcsin(x)$	$-1 \leq x \leq 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-1 \leq x \leq 1$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$		$\dfrac{1}{1+x^2}$

$e^{a\,x}\ (a \in \mathbb{C})$		$a\,e^{a\,x}$
$a^x\ (a \in \mathbb{R})$		$(\log a)\,a^x$
$\log x$	$x > 0$	$\dfrac{1}{x}$
$\sinh(x)$		$\cosh(x)$
$\cosh(x)$		$\sinh(x)$
$\tanh(x)$		$\dfrac{1}{(\cosh(x))^2}$
$\sinh^{-1}(x)$		$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\cosh^{-1}(x)$	$x > 1$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh^{-1}(x)$	$-1 < x < 1$	$\dfrac{1}{1-x^2}$

3.3　高階の導関数とテイラー展開

高階の導関数を定義し、それを用いて、テイラー展開（とマクローリン展開）を議論する。テイラー展開は解析学においてもっとも強力な手法の一つで、物理のあらゆる局面で使われる。ここでは、マクローリン級数を関数の近似多項式という観点から導入する。数

学的な理論面をおさえるだけでなく、数字の感覚に根ざした直感をもっておくことも重要だ。

3.3.1　マクローリン級数とテイラー級数

■高階の導関数　$f(x)$ を微分可能な実数上の実数値関数とする。$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ もまた関数だから、さらに微分できるかもしれない。$f'(x)$ の導関数を $f''(x)$ あるいは $\dfrac{d^2 f(x)}{dx^2}$ と書き、$f(x)$ の**二階の導関数** (second derivative) と呼ぶ。同じように、$f(x)$ を n 回くり返し微分して得られる関数を $f^{(n)}(x)$ あるいは $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ と書き、$f(x)$ の n 階の導関数 (n-th derivative) と呼ぶ。実数のある範囲で、n 階の導関数 $f^{(n)}(x)$ が存在するとき、$f(x)$ はその範囲で n **回微分可能** (n-times differentiable) であるという。

■マクローリン級数の導入　まず、数学的な厳密さは意識せず、マクローリン展開を大ざっぱに導いてみよう。

$f(\cdot)$ を何度でも微分できる関数とする。

いま、x が十分に小さい範囲で変化するとして、$f(x)$ の近似値を求めてみたい。まず、はじめに思いつくのは、x が小さいのだから x を 0 として、

$$f(x) \simeq f(0) \tag{3.3.1}$$

のように $f(x)$ を定数にしてしまうという近似だ。実際、場合によっては、これも十分に「使える」近似だと思われる。

しかし、x が変化するとき $f(x)$ も変化するはずだから、そのことも取り入れた近似をした方がいいだろう。そこで、微分の基本の式 (3.1.12) で x_0 を 0 とおき、微小量 Δx を x とおくことで、

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0)\,x \tag{3.3.2}$$

という一次式による近似をつくる。(3.1.12) より、この式の誤差は $o(x)$（実際は $O(x^2)$）だから、x が小さければ、これはかなりよい近似だ。

定数 (3.3.1) から、一次式 (3.3.2) へと近似を「進化」させたように、さらに、二次式、三次式と多項式の次数を上げながら、よりよい近似を作っていくことができるはずだ。そこで、ためしに

$$f(x) \simeq a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + a_4\,x^4 + a_5\,x^5 + \cdots \tag{3.3.3}$$

のような（べき級数の形の）近似があると仮定しよう。$a_0, a_1, a_2, \ldots$ は何らかの定数である。ここで、和は有限か無限かといった微妙なことは、さしあたって考えないことにしよう。

係数 $a_0, a_1, a_2, \ldots$ をどうやって決めればいいかを考えよう。まず、(3.3.3) で $x = 0$ とおいてやれば、右辺はほとんど消えてしまって、$f(0) = a_0$ となる。つまり、これで a_0 が決まる。次に、(3.3.3) の両辺を x で微分し、

$$f'(x) \simeq a_1 + 2a_2\,x + 3a_3\,x^2 + 4a_4\,x^3 + 5a_5\,x^4 + \cdots \tag{3.3.4}$$

とし、それから $x = 0$ とおいてみる。すると、再び右辺

はほとんど消えて、$f'(0) = a_1$ が得られる。こうして、a_0, a_1 は一次近似 (3.3.2) と一致するように決まった。

この考えは使える。まず、任意の自然数 m と n について、

$$\frac{d^n}{dx^n} x^m = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!}\, x^{m-n} & n \leq m \\ 0 & n > m \end{cases} \tag{3.3.5}$$

であることに注意しておこう（ただし $0! = 1$ とした）。これは、(3.2.5) をくり返し用いれば簡単に示せる。とくに、$\dfrac{d^n}{dx^n} x^n = n!$ である。そこで、(3.3.3) の両辺を x で n 回微分すれば、$n-1$ 番目までの項が消えて、

$$f^{(n)}(x) \simeq n!\, a_n + (n+1)!\, a_{n+1}\, x + \frac{(n+2)!}{2!}\, a_{n+2}\, x^2 + \cdots \tag{3.3.6}$$

となる。さらに、ここで $x = 0$ とすれば、今度は $n+1$ 番目よりあとの項が消えて、$f^{(n)}(0) = n!\, a_n$ となる。つまり、近似式 (3.3.3) の係数 a_n は、

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \tag{3.3.7}$$

によって決まるのである。

(3.3.7) を (3.3.3) に代入すれば、

$$f(x) \simeq f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\,x^4 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \cdots \tag{3.3.8}$$

となる。この無限級数が厳密にどういう意味をもつかは別として、$x = 0$ における $f(x)$ の高階の導関数を係数にして、$f(x)$ を表す式が得られた。(3.3.8) の無限級数を $f(x)$ の**マクローリン**[*50]**級数** (Maclaurin series) と呼ぶ。また、関数をマクローリン級数で表すことを、**マクローリン展開** (Maclaurin expansion) という。

[*50] Colin Maclaurin (1698–1746) スコットランドの数学者で、ニュートンの弟子となった。

■マクローリン級数の例　マクローリン展開の感覚をつかみ、その威力（と限界）を実感するため、例を一つみておこう。何でやってもいいが、たとえば、$\tan x$ を使ってみよう。まずは、$\tan x$ の高階の導関数を求めなくてはならない。これは、ひたすら計算するしかないと思うかもしれないが[*51]、$\tan x$ の微分の性質を使うと能率的に計算できる。$\tan x$ の導関数は (3.2.109) でみた通りだが、これは $(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2$ と書き直せる。連鎖率を使えば、一般の $n = 0, 1, 2, \ldots$ について、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\tan x)^n &= n(\tan x)'\,(\tan x)^{n-1} \\ &= n\{(\tan x)^{n-1} + (\tan x)^{n+1}\} \qquad (3.3.9)\end{aligned}$$

がわかる。つまり、$\tan x$ のベキ乗の微分は $\tan x$ のベキ乗だけで表せるということだ。ということは、(3.3.9)

[*51] 実は私もそう思ってこの本の以前のバージョンでは単にコンピューターで愚直に計算した結果を示していた。

をくり返し使うだけで、$\tan x$ の高階の導関数が次々と計算できる。たとえば七階くらいまで求めると、

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\tan x &= 1+(\tan x)^2 \\
\frac{d^2}{dx^2}\tan x &= 2\tan x+2(\tan x)^3 \\
\frac{d^3}{dx^3}\tan x &= 2+8(\tan x)^2+6(\tan x)^4 \\
\frac{d^4}{dx^4}\tan x &= 16\tan x+40(\tan x)^3+24(\tan x)^5 \\
\frac{d^5}{dx^5}\tan x &= 16+136(\tan x)^2+240(\tan x)^4+120(\tan x)^6 \\
\frac{d^6}{dx^6}\tan x &= 272\tan x+1232(\tan x)^3+1680(\tan x)^5 \\
&\quad +720(\tan x)^7 \\
\frac{d^7}{dx^7}\tan x &= 272+3968(\tan x)^2+12096(\tan x)^4 \\
&\quad +13440(\tan x)^6+5040(\tan x)^8 \qquad (3.3.10)
\end{aligned}$$

となる。愚直に微分するのとは違って、四階くらいまでなら手計算で簡単に示せる[*52]。

マクローリン級数 (3.3.8) をつくるには、ここに $x = 0$ を代入するわけだが、$\tan x = 0$ だから、$\tan x$ を含まないただの数の部分だけが残る。特に偶数の n については、すべて $\left.\dfrac{d^n}{dx^n}\tan x\right|_{x=0} = 0$ である。どうせ 0 になるなら偶数階の導関数は計算しなくてもよかったのでは — などと思わないように。上の階の導関数を知るためには、とうぜん、下の階の導関数が必要なのだ[*53]。奇数階について、使い勝手を考えて階乗でわっ

[*52] そこから先はコンピューターを使いました。

[*53] とはいっても、例えば $d^7 \tan x/dx^7|_{x=0}$ を知りたいだけなら、$d^6 \tan x/dx^6$ は $\tan x$ に比例する項だけ知っていれば十分なのだが。

た結果を書いておくと、

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}\tan x\bigg|_{x=0} = 1,\\
&\frac{1}{3!}\,\frac{d^3}{dx^3}\tan x\bigg|_{x=0} = \frac{1}{3},\\
&\frac{1}{5!}\,\frac{d^5}{dx^5}\tan x\bigg|_{x=0} = \frac{2}{15},\\
&\frac{1}{7!}\,\frac{d^7}{dx^7}\tan x\bigg|_{x=0} = \frac{17}{315}
\end{aligned}
\tag{3.3.11}
$$

となる。これらをもとに、マクローリン級数 (3.3.8) を途中までで止めた近似多項式

$$
\begin{aligned}
\tau_1(x) &= x\\
\tau_3(x) &= x + \frac{1}{3}x^3\\
\tau_5(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5\\
\tau_7(x) &= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7
\end{aligned}
\tag{3.3.12}
$$

を定義しよう。一次式の近似からはじまって、三次式、

五次式、七次式と近似が「進化」しているのがわかるだろう。

実際に数値をいれてみる。
$\tan(0.1) = 0.100334672085\cdots$ に対して、上の多項式で求めた近似値は、それぞれ、

$$\begin{aligned}&\tau_1(0.1) = 0.1,\ \tau_3(0.1) \simeq 0.100333,\\&\tau_5(0.1) \simeq 0.10033466,\ \tau_7(0.1) \simeq 0.100334672063\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

である。最後は小数点以下十桁まで一致している。近似の「進化」が実感できるだろう。同じことは、五つの関数 $\tan x$, $\tau_1(x)$, $\tau_3(x)$, $\tau_5(x)$, $\tau_7(x)$ のグラフを重ねて描いた図 3.16 からも見て取れる。

しかし、x が大きくなっていくと、近似はどんどん不正確になっていく。たとえば $\tan(3/2) \simeq 14.1$ に対して、最良の近似を使っても $\tau_7(3/2) \simeq 4.56$ である。これではお話にならない。考えてみれば、$x \nearrow \pi/2$ では、$\tan x \to \infty$ となるのに、(3.3.12) の近似多項式はすべて有限にとどまる。$x = \pi/2$ の近くで近似が悪い

図 3.16　$\tan x$ と、マクローリン級数で作った近似関数 $\tau_1(x)$, $\tau_3(x)$, $\tau_5(x)$, $\tau_7(x)$ を、$0 \leq x \leq \pi/4$ の範囲で、重ねて描いた。(3.3.12) からもわかるように、1, 3, 5, 7 と次数が上がるほど関数の値は大きくなる。もっとも大きいのが $\tan x$ だ。本当は五つの曲線が描かれているのだが、左の方ではすべて重なってみえる。グラフの右端に行っても、かろうじて $\tau_1(x)$ と $\tau_3(x)$ が分離しているのが見えるだけで、他は（解像度の範囲で、ほぼ）重なっている。

のは当然なのである（図 3.17）。

■テイラー級数　マクローリン級数では、$x = 0$ を（近似の）出発点にして、x のべき乗の和の無限級数 (3.3.8) で $f(x)$ を表した。a を任意の実数として、$x = a$ を出

図 3.17　図 3.16 と同じ五つの関数 $\tan x$, $\tau_1(x)$, $\tau_3(x)$, $\tau_5(x)$, $\tau_7(x)$ を、今度は $0 \leq x \leq \pi/2$ の範囲で、重ねて描いた。$x \nearrow \pi/2$ で $\tan x \to \infty$ となることからもわかるように、x が $\pi/2$ に近づくと、近似は急激に悪くなる。

発点にして同じことをしたのが、テイラー[*54]級数である。本質的にはマクローリン級数と変わるところはない[*55]。

関数 $f(\cdot)$ の a のまわりでのふるまいを見るために、実変数 y をつかって $g(y) = f(a+y)$ と定義する。$g(y)$

[*54] Brook Taylor (1685–1731) イギリスの数学者。

[*55] いずれにせよ、マクローリン級数もテイラー級数も、ずっと以前に、スコットランドの数学者グレゴリー (James Gregory, 1638–1675) らに知られていたという。

についてマクローリン級数 (3.3.8) を書くと、

$$g(y) \simeq g(0) + g'(0)\,y + \frac{g''(0)}{2}\,y^2 + \frac{g^{(3)}(0)}{3!}\,y^3 + \cdots + \frac{g^{(n)}(0)}{n!}\,y^n + \cdots \tag{3.3.14}$$

となる。ここで $a+y$ を x と呼ぶことにすれば、$y = (x-a)$ だから、(3.3.14) は、

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) \simeq & f(a) + f'(a)\,(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\,(x-a)^2 \\ & + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}\,(x-a)^3 \\ & + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(x-a)^n + \cdots \end{aligned} \qquad (3.3.15)}$$

という形に書きかえられる。これが関数 $f(x)$ の a のまわりでの**テイラー級数** (Taylor series) である。関数をテイラー級数に表すことを**テイラー展開** (Taylor

expansion) という。もちろん、テイラー級数 (3.3.15) で $a = 0$ とすればマクローリン級数 (3.3.8) に一致する。

問 3.3.1.a　$f(x) = \sqrt{x}$ の 1 のまわりのテイラー級数で、一次あるいは二次までとった近似多項式をつくれ。それを利用して、たとえば $\sqrt{150}$ を計算せよ。（ヒント：$\sqrt{150} = 12\sqrt{150/144} = 12\sqrt{1 + (6/144)}$ と変形して上で導いた近似多項式を使え。一次近似なら紙の余白の殴り書きの計算だけで速攻でできる（私もやってみた）し、結果は驚くほどよい。）いろいろと他の例も試してみよう。

3.3.2　無限級数としてのテイラー級数

■テイラーの定理　前節では数学的な厳密さは意識せず、単に「近似をつくろう」という姿勢で、マクローリン級数 (3.3.8) とテイラー級数 (3.3.15) を導いた。ここでは、これらの級数が厳密にどのように意味づけら

れるのかをみていこう。厳密な数学に興味のない読者も、証明以外のところには目を通しておいた方がいい。

以下では、式を簡単にするためマクローリン級数だけを議論する。もちろん、これらの結果は、(3.3.14), (3.3.15) のように、変数に定数を足してずらすだけでテイラー級数の結果に翻訳できる。

マクローリン級数やテイラー級数に厳密な意味を与える以下の定理を、ふつうテイラーの定理とよぶ。しかし、実際にテイラーが示したのは無限級数についての結果だそうだ。以下のような（見通しのよい）有限の和についての結果は、百年近く後にコーシー[*56]やラ

[*56] 178 ページの脚注 *85 を見よ。

グランジュ[*57]によって得られた。

[*57] Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) イタリアに生まれ、フランスで過ごした偉大な数学者、理論物理学者。変分法、微分方程式、数論などにも業績がある。解析力学を学んでいけば、彼の名を冠したラグランジアンという関数を多用することになる。彼は自著「解析力学」に図が一つもないことを誇りに思っていたという。図にたよった直感的な議論なしに、すべてが曇りのない解析的な計算で進められることを重視していたのだろう。しかし、厳密な論理が構成できる場合にも、図はあった方がいいと私は思うが。

定理 3.12 (テイラーの定理)**.** $a < 0 < b$ とする。$f(\cdot)$ を開区間 (a, b) で n 回微分可能な関数とする。このとき、任意の *0* でない $x \in (a, b)$ について、

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + R_n(x) \qquad (3.3.16)$$

と書こう。このとき、0 と x のあいだ[*58]の実数 ξ が存在し、

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,x^n \qquad (3.3.17)$$

が成り立つ。

[*58] $x > 0$ ならば $x > \xi > 0$、$x < 0$ ならば $x < \xi < 0$ ということ。

証明は後回しにして、まず、定理の意味と応用を見よう。

(3.3.16) は（厳密さを無視して導いた）マクローリン級数 (3.3.8) とほぼ同じ形をしている。ただし、有限項までで止まっていること、そして、最後の項だけは $R_n(x)$ と書かれていることが違っている。ここで、(3.3.16) は意味のある関係というよりは、むしろ $R_n(x)$ の定義であることに注意しよう。$R_n(x)$ を**剰余項**と呼ぶ。

定理の本質的な主張は剰余項が (3.3.17) のように n 階の導関数で書けるということだ。この形はマクローリン展開の一般項と似ているが、導関数の引数が x ではなく ξ という（0 と x の間にあること以外は）知らない量であるところが違っている。剰余項の表式 (3.3.17) を**ラグランジュの剰余項** (Lagrange remainder) という。4 章の定理 4.7（517 ページ）では、剰余項の別の表式 (4.1.78) をみる。

先に進む前に、テイラーの定理を使って、(3.1.14) で

みた関数の微小変化の関係に（厳密な）意味付けをてしておこう。$g(\cdot)$ を二回微分可能な関数として、(3.3.16) を $n=2$ として用いると、

$$g(x) = g(0) + g'(0)\,x + O(x^2) \tag{3.3.18}$$

が得られる。もちろん、$O(x^2)$ は（剰余項を省略して書いたもので）「x^2 と同程度か、x^2 より小さい、微小な量」の意味である（292 ページを見よ）。次に $f(\cdot)$ を二回微分可能な関数として、x を固定し $g(\Delta x) = f(x+\Delta x)$ と書こう。ここで Δx は単なる変数名である。すると、(3.3.18) は、

$$f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\,\Delta x + O((\Delta x)^2) \tag{3.3.19}$$

となる。これは、(3.1.14) でみた関数の微小変化と導関数の関係そのものである。関数が二回微分可能ならば「微小なおつり」の $O((\Delta x)^2)$ は (3.3.17) の剰余項 $R_2(\Delta x)$ で書けるということだ。

■無限級数としてのマクローリン展開　定理の条件を満たす関数 $f(\cdot)$ と x について、

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \tag{3.3.20}$$

が成り立つとしよう。このときには (3.3.16) の右辺で $n \to \infty$ とする極限が取れるので、マクローリン級数

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}\,x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n \qquad (3.3.21) \end{aligned}}$$

が無限級数として厳密に意味を持つ。これはテイラーの定理の最も重要な帰結である。もちろん、(3.3.20) が成り立つかどうかは、個別の関数 $f(\cdot)$ と個別の x について確かめなくてはならない。

■いくつかの例　無限級数としてのマクローリン級数の典型的な例をいくつかみておこう。

まず、ある x を固定したとき（x に依存してもいい）定数 B があって、0 と x の間の任意の ξ と任意の $n = 1, 2, \ldots$ について、$|f^{(n)}(\xi)| \leq B$ が成り立つとしよう（もちろん、こんな関係はよほど性質のよい $f(\cdot)$ でしか成り立たない）。すると、剰余項 (3.3.17) の絶対値は

$$|R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} x^n \right| \leq \frac{B\,|x|^n}{n!} \tag{3.3.22}$$

と評価できる。B と x がどんな値を取っても $n \to \infty$ で右辺はゼロに収束する (2.3.2 節を見よ)。つまり、この場合には (3.3.20) が成立し、無限級数としてのマクローリン級数 (3.3.21) が正当化されることになる[*59]。

この論法があてはまる典型的な例は $f(x) = e^x$ であ

[*59] 定数 A, B について、$|f^{(n)}(\xi)| \leq B\,A^n$ が成り立つ場合にも、やはり任意の x について (3.3.20) が成り立つ。

る。任意の $n = 1, 2, \ldots$ について $f^{(n)}(x) = e^x$ だから、上の定数 B は、$x > 0$ なら $B = e^x$ と、$x < 0$ なら $B = 1$ と選べばいい。つまりマクローリン級数は任意の x について無限級数として厳密に意味を持つ。$f^{(n)}(0) = 1$ に注意すれば、(3.3.21) は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad (3.3.23)$$

となる。

もちろん、これは、新しい結果ではなく、われわれの e^x の定義 (3.2.11) そのものだ。定義から出発し、微分についての性質を調べ、テイラー展開の理論を発展させ、ぐるっとまわって、定義に戻ってきたわけだ。ここで、級数 (3.3.23) を導くのに使ったのは $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$ と $e^0 = 1$ の二つの関係だけだったことに注意すると、次の事実がはっきりする。

系 3.13 (指数関数の特徴づけ)**.** 実数全体で微分可能で、$f'(x) = f(x)$ および $f(0) = 1$ を満たす関数 $f(x)$

は、指数関数 e^x だけである。

次に、$f(x) = \cos(x)$ あるいは $f(x) = \sin(x)$ としよう。任意の $n = 1, 2, \ldots$ について $f^{(n)}(x) = \pm\sin(x)$ または $\pm\cos(x)$ だから、上の定数は単に $B = 1$ と選べばいい。任意の x のまわりでのテイラー級数が収束することがわかる。たとえば、

$$\begin{aligned}&\frac{d^n}{dx^n}\cos x\bigg|_{x=0}\\ &= \begin{cases}(-1)^{n/2}\,\cos x\big|_{x=0} = (-1)^{n/2} & n\text{ が偶数}\\ (-1)^{(n+1)/2}\,\sin x\big|_{x=0} = 0 & n\text{ が奇数}\end{cases}\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

のように導関数を計算して、(3.3.21) に代入すれば、マクローリン級数

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-1)^j\,x^{2j}}{(2j)!} \tag{3.3.25}$$

が得られる。これは、すでに知っている無限級数 (3.2.111) と一致する。同様に $\sin x$ のマクローリン級

数は (3.2.112) になる。あるいは、特に実用になるというわけではないが、$\pi/4$ での導関数を

$$\frac{d^n}{dx^n}\cos x\Big|_{x=\pi/4}$$
$$=\begin{cases}(-1)^{n/2}\,\cos x\big|_{x=\pi/4}=\dfrac{(-1)^{n/2}}{\sqrt{2}} & n\text{ が偶数}\\ (-1)^{(n+1)/2}\,\sin x\big|_{x=\pi/4}=\dfrac{(-1)^{(n+1)/2}}{\sqrt{2}} & n\text{ が奇数}\end{cases}\tag{3.3.26}$$

と評価すれば、$\pi/4$ のまわりでのコサインのテイラー展開

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{1-(x-\frac{\pi}{4})-\frac{(x-\frac{\pi}{4})^2}{2}\\ &\qquad+\frac{(x-\frac{\pi}{4})^3}{3!}+\frac{(x-\frac{\pi}{4})^4}{4!}-\cdots\Big\}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sigma(n)\,(x-\frac{\pi}{4})^n}{n!}\end{aligned}\tag{3.3.27}$$

が得られる。ここで

$$\sigma(n) = \begin{cases} 1 & j = 0, 1, 2, \ldots \text{ を使って} \\ & n = 4j \text{ または } 4j + 3 \\ -1 & j = 0, 1, 2, \ldots \text{ を使って} \\ & n = 4j + 1 \text{ または } 4j + 2 \end{cases} \tag{3.3.28}$$

とした。

さいごに、もう少し当たり前でない例として、関数 $f(x) = \log(1 + x)$ のマクローリン級数を考えよう。関数 $\log x$ の 1 のまわりのテイラー級数と言っても同じことだ。$n = 1, 2, \ldots$ について

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}\,(n-1)!}{(1+x)^n} \tag{3.3.29}$$

なので、ラグランジュの剰余項 (3.3.17) は、

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n+1}\,(n-1)!}{(1+\xi)^n}\,x^n = \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\xi)^n}x^n \tag{3.3.30}$$

である。$n \to \infty$ で $R_n(x) \to 0$ となるかどうかは、この形を見ただけでは、すぐにはわからない。

まず、$x \geq 0$ の場合を考えよう。このときは $0 \leq \xi \leq x$ だから、$1+\xi \geq 1$ であり、剰余項は

$$|R_n(x)| = \frac{x^n}{n(1+\xi)^n} \leq \frac{x^n}{n} \tag{3.3.31}$$

と評価できる。$0 \leq x \leq 1$ であれば、最右辺の分母の n が x^n に勝つので、$n \to \infty$ で $R_n(x) \to 0$ となることが示される。(3.3.29) で $x = 0$ とすれば $f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$ なので、(3.3.21) より、$\log(1+x)$ のマクローリン級数は、

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, x^n}{n} \tag{3.3.32}$$

となる。これが、$0 \leq x \leq 1$ の範囲で厳密に成り立つことがわかった。特に $x = 1$ とすれば、(2.3.16) で紹介した（絶対収束しないが収束する）無限級数になる。一方、$x > 1$ では x^n/n は n とともにどんどん大きくなるから、無限級数 (3.3.32) は決して収束しない。それでも、左辺の $\log(1+x)$ は $x > 1$ でもきちんと定義

されている。テイラー級数は決して万能ではないということだ。

関数 $\log(1+x)$ は $x > -1$ の範囲で定義されるので、次に $-1 < x \leq 0$ の場合を調べてみよう。今度は $x \leq \xi \leq 0$ なので、$1+\xi \geq 1+x$ であり、剰余項の評価は

$$|R_n(x)| = \frac{|x|^n}{n(1+\xi)^n} \leq \frac{1}{n}\Big(\frac{|x|}{1+x}\Big)^n \tag{3.3.33}$$

となる。ここで、$-1/2 \leq x \leq 0$ であれば $\{|x|/(1+x)\} \leq 1$ である[*60]。よって、この場合には $n \to \infty$ で $R_n(x) \to 0$ となることが示され、マクローリン級数 (3.3.32) は正当化される。しかし、この $-1/2 \leq x \leq 0$ という範囲に何か意味があるのだろうか？　(3.3.32) の右辺の無限級数が $|x| < 1$ ならば収束することは、問 2.3.2.b の結果からすぐに証明できる。そこからも推測されるように、実は、関数 $\log(1+x)$ のマクロー

[*60] $-1 < x < -1/2$ なら $\{|x|/(1+x)\} > 1$ となってしまう。$x = -0.9$ を代入してみよう。

リン級数 (3.3.32) は $-1 < x \leq 1$ の範囲のすべての x において正しいのである。ここで、$-1 < x < -1/2$ の場合の証明ができなかったのは単にラグランジュの剰余項 (3.3.17) が (ξ がわからないという意味で) 情報不足だったからだ。$-1 < x < -1/2$ の場合にも $n \to \infty$ で $R_n(x) \to 0$ となることは、4.1.4 節の最後で定理 4.7 (517 ページ) で示す剰余項の別の表式を使って証明する。

問 3.3.2.a　系 3.13 にならって、$\cos x$ と $\sin x$ を微分の性質で特徴づけることを考えよ。二つの関数をまとめてあつかうのがポイント。

■テイラーの定理と不等式　テイラーの定理 (3.3.16) を用いて関数についての厳密な不等式をつくることができる。二つの例をみて、2.3.2 節で宿題になっていた級数の発散と収束の証明に利用しよう。

テイラーの定理 (3.3.16) で $f(x) = \log(1 + x)$ と選

び $n = 2$ とすると、

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+\xi)^2} \tag{3.3.34}$$

という等式が得られる。ただし、ξ は 0 と x の間の実数というだけで正確な値はわからない。ここで、$x > -1$ と仮定する。$\xi > -1$ だから、(3.3.34) の右辺第二項は (値はわからないが) 有限の負の量である。よって、任意の $x > -1$ について厳密な不等式

$$\log(1+x) \leq x \tag{3.3.35}$$

が示された[*61]。

この不等式を使うと、222 ページの無限級数 (2.3.13) が発散することを簡単に示すことができる。(3.3.35) より任意の $n = 1, 2, \ldots$ について

$$\log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \tag{3.3.36}$$

[*61] 進んだ注：(3.3.35) も、次に示す (3.3.38) も、関数の凸性を使えば簡単に示すことができる。

である。この両辺を $n=1$ から $n=N$ まで足しあげると、

$$S(N) := \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=1}^{N} \bigl\{\log(n+1) - \log n\bigr\} = \log(N+1) \tag{3.3.37}$$

という、級数の途中までの和についての下界が得られる。和の各項が（最初と最後を除いて）打ち消し合うこと、$\log 0 = 1$ であることを使った。右辺は N とともにいくらでも大きくなるので、無限級数 $1 + (1/2) + (1/3) + \cdots$ が発散することが厳密に示された。

続いて、$s > 1$ のときに (2.3.14) の無限級数が収束することを示そう。そのために、$a_i := \sum_{n=1}^{i} n^{-s}$ で定義される数列 $(a_i)_{i=1,2,\ldots}$ がコーシー列であることを示す。$\alpha = s - 1 > 0$ および $n \geq 2$ として、$f(x) = (n+x)^{-\alpha}$ という関数を考えよう (x は $x > -n$ を満たすとする)。なぜこんなものを考えるかは下を読んでいくとわかる。$f'(x) = -\alpha\,(n+x)^{-(\alpha+1)}$, $f''(x) = \alpha(\alpha+1)\,(n+x)^{-(\alpha+2)}$ だから、テイラーの

定理 (3.3.16) で $n=2$（この n は (3.3.16) に登場する n で、ここでの n とは別）とすると

$$\begin{aligned}(n+x)^{-\alpha} &= n^{-\alpha} - \alpha\, n^{-(\alpha+1)}\, x \\ &\qquad + \frac{\alpha(\alpha+1)\,(n+\xi)^{-(\alpha+2)}}{2}\, x^2 \\ &\geq n^{-\alpha} - \alpha\, n^{-(\alpha+1)}\, x \end{aligned} \tag{3.3.38}$$

という不等式が得られる。$x=-1$ とおいて整理すると、

$$n^{-(\alpha+1)} \leq \frac{(n-1)^{-\alpha} - n^{-\alpha}}{\alpha} \tag{3.3.39}$$

となる。これを $n=i+1$ から $n=j$ まで足しあげれば（ただし $0<i<j$）、

$$\sum_{n=i+1}^{j} n^{-(\alpha+1)} \leq \frac{i^{-\alpha} - j^{-\alpha}}{\alpha} \tag{3.3.40}$$

という上界が得られる。この不等式の左辺は $a_j - a_i$ そのもので、右辺は明らかに $i^{-\alpha}/\alpha$ 以下だから、

$$0 \leq a_j - a_i \leq \frac{i^{-\alpha}}{\alpha} \tag{3.3.41}$$

が示された。i を大きくすれば右辺はいくらでも小さくなるので、数列 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ がコーシー列であることがわかる。よって、極限 $\lim_{i\to\infty} a_i$ が存在する（つまり、無限級数 (2.3.14) は収束する）。

問 3.3.2.b　上の考えを進めて、任意の $x > 0$ について、

$$\log(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}, \quad \log(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \tag{3.3.42}$$

のような不等式が成り立つことを示せ。$\sqrt{1+y}$ についても同じ考察をせよ。

■テイラーの定理の証明　標準的な路線にしたがってテイラーの定理 3.12 を証明する。結果の強力さを思うと、証明は驚くほど初等的で明快である。

定理 3.12 と同様に $a < 0 < b$ を満たす実数 a, b を固定する。書き方を楽にするため、$x > 0$ の場合について定理を証明する。$x < 0$ についても証明はまったく同じ。

まず次のロル[*62]の定理を示す。

定理 3.14 (ロルの定理)**.** $F(x)$ を開区間 (a,b) 上で微分可能で $F(0)=0$ を満たす関数とする。ある $c\in(0,b)$ について、$F(c)=0$ が成り立つなら、$\xi\in(0,c)$ が存在して $F'(\xi)=0$ となる。

証明：もし任意の $x\in[0,c]$ について $F(x)=0$ なら、もちろん $F'(x)=0$ で題意はいえる。そこで $F(x)$ は「つねに 0 に等しい」ことはないとする。ずっと 0 でないから、連続関数の基本的な性質（263 ページの定理 2.28）により、$F(x)$ は $(0,c)$ のどこかで最大値ないしは最小値をとる。仮に $\xi\in(0,c)$ で最大値をとるとしよう。つまり、任意の $x\in[0,c]$ について $F(x)\le F(\xi)$。すると、$x<\xi$ については $\{F(x)-F(\xi)\}/(x-\xi)\ge 0$

[*62] Michel Rolle (1652–1719) フランスの数学者。

なので $\lim_{x\nearrow\xi}\{F(x)-F(\xi)\}/(x-\xi)\geq 0$ であり[*63]、$x>\xi$ については $\{F(x)-F(\xi)\}/(x-\xi)\leq 0$ なので $\lim_{x\searrow\xi}\{F(x)-F(\xi)\}/(x-\xi)\leq 0$ である。微分可能ということは左極限と右極限が一致するのだから、$F'(\xi)=\lim_{x\to\xi}\{F(x)-F(\xi)\}/(x-\xi)=0$ である。最小値の場合もまったく同様。 ∎

次にコーシーの定理を示す。

定理 3.15 (コーシーの定理)**.** $g(x)$, $h(x)$ を開区間 (a,b) 上で微分可能で $g(0)=h(0)=0$ を満たす関数とする。ある $c\in(0,b)$ があり、任意の $x\in(0,c)$ につい

[*63] 一般に $x<\xi$ において $g(x)\geq g_0$ という不等式が成り立てば、左極限についても $\lim_{x\nearrow\xi}g(x)\geq g_0$ が成り立つ。これは、定義から簡単に示される。右極限や極限についても同様。また、不等式の向きもどちらでもよい。(ただし、$x<\xi$ について $g(x)>g_0$ が成り立ったとしても $\lim_{x\nearrow\xi}g(x)>g_0$ は言えないことに注意。この場合も $\lim_{x\nearrow\xi}g(x)\geq g_0$ しか言えない。)

て $g'(x) \neq 0$ とする。$\xi \in (0, c)$ が存在して

$$\frac{h(c)}{g(c)} = \frac{h'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{3.3.43}$$

が成り立つ。

証明：$F(x) = g(x)\,h(c) - g(c)\,h(x)$ とおくと、定理の条件より $F(0) = F(c) = 0$ だから、ロルの定理より $\xi \in (0, c)$ があって $F'(\xi) = g'(\xi)\,h(c) - g(c)\,h'(\xi) = 0$ となる。仮定より $g'(\xi) \neq 0$ だから (3.3.43) を得る。∎

以上の準備をして、テイラーの定理を証明する。

$$R(x) = f(x) - \left\{ f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} \right\} \tag{3.3.44}$$

とする。$R(x)$ は $n-1$ 次までのテイラー級数による近似の「おつり」(剰余項) である。明らかに、$R(0) = 0$, $R^{(m)}(0) = 0$ $(m = 1, 2, \ldots, n-1)$ および $R^{(n)}(x) =$

$f^{(n)}(x)$ が成り立つ。$h(x) = R(x)$, $g(x) = x^n$ は、コーシーの定理の条件を満たしている。x をコーシーの定理の c とすれば、$\zeta \in (0, x)$ があって

$$\frac{R(x)}{x^n} = \frac{R'(\zeta)}{n\zeta^{n-1}} \tag{3.3.45}$$

となる。ここで、$h(x) = R'(x)$, $g(x) = n\,x^{n-1}$, $c = \zeta$ とおくと再びコーシーの定理の条件が満たされるから、$\eta \in (0, \zeta) \subset (0, x)$ があって、

$$\frac{R(x)}{x^n} = \frac{R'(\zeta)}{n\zeta^{n-1}} = \frac{R''(\eta)}{n(n-1)\eta^{n-2}} \tag{3.3.46}$$

である。$R(x)$ の条件から、これと同じことを全部で n 回くりかえすことができて、けっきょく $\xi \in (0, x)$ があって、

$$\frac{R(x)}{x^n} = \cdots = \frac{R^{(n)}(\xi)}{n!} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \tag{3.3.47}$$

となることがわかる。これより $R(x)$ を求めれば、(3.3.16) が得られる。

第 4 章

一変数関数の積分

この章では積分を扱う。微分とともに物理を学ぶためには必須の数学の「ことば」である。

高校数学で「積分とは微分の逆」と教わった人がいるかもしれない。しかし、この考え方は(一変数関数については正しいが) 積分の定義としてはふさわしくないし、多変数関数の積分には全く通用しない。微分の心が「引き算」だった

のと同じように、積分の心は「足し算」なのだ。もう少し詳しく言えば、「細かく分けて足しあげる」計算法をまとめたのが積分の体系である。

この章では[*1]、まず 4.1 節で一変数関数の積分の基礎的な概念を丁寧に解説したあと、4.2 節で具体的な積分の計算について典型的な例を通して詳しく述べる。

- **実数と実数上の実数値関数（についての大まかなイメージ）。**
- **関数の微分。**
- **高校で身につけた、具体的な関数を積分する技術（←できれば）。**

[*1] この章の構成と素材について向田寿光さんに多くのことを教えていただいた。

4.1　積分の基礎

この節では積分の基本的な定義や定理、そして、重要な性質をまとめる。積分とは、上に書いたように、「細かく分けて足しあげる」操作であることをしっかりと理解した上で、さらに、なぜ「微分の逆」という考えが成立するのかも学んでほしい。

4.1.1 節で物理的な設定で積分の基本的な考え方を述べた後、4.1.2 節で数学的に厳密な議論を展開する。特に、連続関数が積分可能であるという重要な定理（475 ページの定理 4.3）を証明する。4.1.3 節で示す積分の様々な性質は 4.2 節での具体的な計算でも役に立つ。

4.1.1　積分とは何か

せっかくだから物理を意識して運動学[*2]の例題を扱う。1 次元の世界を動いている点状の粒子が時刻 0 から時刻 t のあいだに移動する距離 $x(t)$ について考えながら積分を導入しよう。

■一定の速度の場合　当たり前の例から始める。粒子の速度は一定でつねに v_0 に等しいとする。v_0 は負でもかまわないが簡単のため[*3]正の定数としよう。時刻 0 から時刻 $t > 0$ のあいだに粒子が動く距離 $x(t)$ はもちろん

$$x(t) = v_0\, t \tag{4.1.1}$$

[*2] 物体の運動を定量的に記述する方法のこと。6.4 節（949 ページ）を見よ。

[*3] v_0 が負なら x 軸の負の方向に粒子が動くだけ。ちなみに、数学や物理の文献では、簡単のため、「本質を損なわない範囲で話を簡単にするため」という意味で「簡単のため」と書くことがある。この表現は英語の “for simplicity” とほぼ完全に対応している。

である。小学校以来おなじみの「距離 = 速さ × 時間」という「公式」だが、これはむしろ速度の定義と考えるべきだろう。なお、時刻 0 に粒子が原点 $x = 0$ にいるとすれば、$x(t)$ は時刻 t における粒子の位置座標である[*4]。

次に少しだけ当たり前でない例として、速度が途中の時刻で不連続に変わる場合を考えてみよう。$t > 0$ は最後の時刻を表わすのに使っているから、ゼロから刻々と変化して行く時間の変数を s と書こう。そして時刻 s での粒子の速度を $v(s)$ と書く。考える例題は、

$$v(s) = \begin{cases} v_0 & 0 \leq s \leq t_1 \text{ のとき} \\ v_1 & t_1 < s \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.1.2}$$

である。ここで v_0, v_1, t_1 は正の定数である。つまり時刻が 0 から t_1 までのあいだ粒子の速度は v_0 であり（t_1 でなぜか唐突に速度が変わり）時刻 t_1 より後では速度は v_1 ということだ。

[*4] 座標の考え方は 6.1.1 節で詳しく取り上げるが、ここで先取りして使っても問題はないだろう。

図 4.1　粒子の移動距離とグラフから定まる面積の関係。横軸に時間、縦軸に速度をとった。(a) 一定速度 v_0 で時間 t のあいだ運動したときの移動距離 $x(t)$ は灰色の長方形の面積に等しい。(b) 速度が途中で変わる例で $t > t_1$ なら移動距離 $x(t)$ は二つの長方形の面積に和に等しい。

この場合にも「距離 = 速さ × 時間」だけで答がでる。t が t_1 より大きいか小さいかに注意すれば、

$$x(t) = \begin{cases} v_0\, t & 0 \le t \le t_1 \text{ のとき} \\ v_0\, t_1 + v_1(t - t_1) & t_1 < t \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

となる。場合分けの二つ目では、それぞれの速度にその速度で動いている時間をかけていることに注意。

また、(4.1.1), (4.1.3) の移動距離は、時間を横軸、速度を縦軸にとったとき速度を表わすグラフと時間軸にはさまれた領域の面積に対応している。図 4.1 を見よ。

■速度が時間変化する場合　次は速度が何回か（唐突に）変化する場合を扱ってもいいのだが、本質は上の例と変わらない。さっさと先に進んで、粒子の速度 $v(s)$ が時刻 s の関数という場合を扱う。これが一変数関数の積分の「本命」だ。

厳密な議論は次の 4.1.2 節にまわし、ここでは大らかに議論を進めよう。以下では、速度 $v(s)$ は s の連続関数と仮定する。時刻 0 から時刻 t までのあいだの粒子の移動距離 $x(t)$ を求めたい。使うのは基本的には「距離 = 速さ × 時間」という（小学校以来の）関係だけだ。

今度は速度が時々刻々と変化してしまうので工夫がいる。まず、大きな自然数 N を使って、0 から t までの時間を N 等分する。分割した一つ分の時間間隔を $\delta = t/N$ とし、$i = 0, 1, \ldots, N$ に対して $t_i = i\,\delta$ と定める。もちろん、$t_0 = 0$ が初期時刻で、$t_N = N\,\delta = t$

が最後の時刻だ。

さて、はじめの時刻 t_0 での粒子の速度は $v(t_0)$ である。仮に粒子がこのままの速度で運動を続けるなら、(時間が δ だけ経った) 時刻 $t_0+\delta=t_1$ までのあいだの移動距離は $v(t_0)\,\delta$ ということになる。次に、時刻 t_1 での粒子の速度は $v(t_1)$ だ。再び、粒子がこの速度のまま時間 δ のあいだ運動するなら $v(t_1)\,\delta$ の距離だけ移動することになる。先ほどの結果と足せば、時刻 0 から時刻 t_2 までのあいだに $v(t_0)\,\delta+v(t_1)\,\delta$ の距離を移動するということになる。同じことをひたすらくり返せば、時刻 0 から時刻 $t=t_N$ までの移動距離は

$$\begin{aligned} x(t) &\overset{??}{=} v(t_0)\,\delta+v(t_1)\,\delta+\cdots+v(t_{N-1})\,\delta \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\,\delta \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

と見積もられる。ただし、一般に速度 $v(s)$ は時々刻々と変化するから (4.1.4) の見積もりは正確ではない。問題はどれくらいの「ずれ」がありうるかだ。

時刻 t_0 から t_1 までの時間間隔を考える。この間に

速度は（途中はどうなるかわからないが）$v(t_0)$ から $v(t_1)$ まで変化する。移動距離は $v(t_0)\,\delta$ とは異なるのが普通だろう。ここで、時間の幅 δ をどんどん小さくすることを考える。$v(s)$ は s について連続なので、こうすれば時間 δ の間の $v(s)$ の変化はどんどん小さくなっていき、粒子が $v(t_0)$ という等速で動くとした近似はどんどん正確になっていくだろう。移動距離の δ に比例する主要部分は $v(t_0)\,\delta$ になり、「ずれ」は δ に比べて小さい量になると期待される。ランダウの記号 $o(\delta)$（292 ページを参照）を使えば、

$$(\text{時刻 } t_0 \text{ から } t_1 \text{ の間の移動距離}) = v(t_0)\,\delta + o(\delta) \tag{4.1.5}$$

ということである。ちなみに、もし $v(s)$ が s について微分可能と仮定すれば[*5]、時間 δ の間の速度の変化は $O(\delta)$ なので、(4.1.5) の右辺は $v(t_0)\,\delta + O(\delta^2)$ とできる（このほうが「ずれ」をより小さく見積もる強い評価）。

[*5] 物理への応用を考えるならまったく無理のない仮定である。

他の時間間隔についても同じことがいえるから、けっきょく時刻 0 から t までの移動距離は、(4.1.5) に可能な「ずれ」を付け加えて、

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{i=0}^{N-1} \bigl\{ v(t_i)\,\delta + o(\delta) \bigr\} \\ &= \left(\sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\,\delta \right) + \frac{o(\delta)}{\delta} \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

と書ける。最後は $N = t/\delta$ を使った。

$\lim_{\delta\to 0} o(\delta)/\delta = 0$ が $o(\delta)$ の定義だったことを思い出せば、(4.1.6) で $N \to \infty$（つまり $\delta \to 0$）の極限をとれば、

$$x(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} v(t_i)\,\delta \tag{4.1.7}$$

という等式が得られる。これが、目標としていた、速度を使って移動距離を求める表式である。章の冒頭で予告したとおり「細かく分けて足しあげる」計算になっている。

任意の連続関数 $v(s)$ に対して極限 (4.1.7) が存在することを定理 4.3（475 ページ）で、また、$x(t)$ を t の関数と見て微分すれば元になった速度 $v(t)$ が得られること — つまり $\dot{x}(t) = v(t)$ となること — を定理 4.6（497 ページ）で証明する。

■積分、面積との関係　(4.1.7) 右辺に登場した「細かく分けて足し上げる」計算をひとまとめにして、

$$\int_0^t ds\, v(s) := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \delta\, v(t_i) \qquad (4.1.8)$$

という記号で表わす。$\int_0^t ds\, v(s)$ は関数 $v(s)$ の 0 から t までの**定積分**、あるいは、単に**積分**と呼ばれる（厳密な定義を 4.1.2 節で述べる）。

記号の「気持ち」を見ておこう。まず $\int$ が「細かく分けたものを足すぞ」という宣言。さらに $\int_0^t$ のように上下に値を指定することで「変数を 0 から t まで動かし

ながら足す」ということが示される。また、ds は「s という変数を動かす」という宣言であり、ここに $ds\,v(s)$ と書くことで「s の微小な変化（右辺の δ に対応）と $v(s)$（右辺の $v(t_i)$ に対応）の積を足し上げる」という意味になっている。

微分の表式 df/dx が「df 割る dx という分数」ではないのと同様（299 ページを参照)、ここでも ds が何らかの意味での微小量だといったことは考えず[*6]、$\int_0^t ds\,v(s)$ という記号全体が (4.1.8) の右辺の和と極限を表現していると考えるのがいいだろう。なお、(高校ではこちらが主流だが）同じ積分を $\int_0^t v(s)\,ds$ のように ds を最後に書いて表わすこともある。この順番はどちらもでかまわないが[*7]、多重積分（9 章）や場の量の積分（10 章）などでは微小量を先に書く方が普通なの

[*6] 3.1.2 節の最後でも述べたが、微分形式という数学を使えば ds そのものに意味を持たせることもできる。

[*7] とはいえ、関数の積の積分 $\int_a^b dx\{f(x)g(x)\}$ を $\int_a^b f(x)\,dx\,g(x)$ と書くことは普通ない。

で、この本では原則として ds を先に書く流儀を使う。

変数 s（積分変数と呼ぶ）はダミー変数（1.3.3 節を見よ）であることに注意しよう。これは積分の（暫定的な）定義 (4.1.8) の右辺に s という変数が登場しないことからも明らかだろう。0 から t まで過ぎて行く時間を仮に s という名前で呼んで、$v(s)$（に微小間隔の幅をかけたもの）を足し上げているのである。だから、積分変数にはどんな名前をつけてもよく、

$$x(t) = \int_0^t ds\, v(s) = \int_0^t dx\, v(x) = \int_0^t d\xi\, v(\xi) = \cdots \tag{4.1.9}$$

と好きなように書き換えられる。一方、積分の範囲を決めている t は粒子が運動している時間を指定する「生きた」変数である。実際、左辺の位置 $x(t)$ は t の関数になっている。t を勝手に他の名前に書き換えることはできない。

一般の $v(s)$ の積分もグラフから定まる面積と関係している。

図 4.2　太い曲線が時刻 s での速度 $v(s)$ のグラフである。和 (4.1.4) は灰色の短冊形の図形の面積の総和と解釈できる。ここでは $N = 7$ とした。

まず極限を取る前の和 (4.1.4) を見よう。速度を縦軸、時間を横軸にして表わすと、時刻 t_i での速度 $v(t_i)$ と時間幅 δ の積 $v(t_i)\,\delta$ は、図 4.2 にあるような、短冊(たんざく)形の図形 (縦長の長方形) の面積になる。よって和 (4.1.4) はこのような短冊の面積の総和に等しい。

分割数 N を大きくするということは、図 4.3 (a) のように、短冊の数を増やし幅を狭くしていくことに対応する。よって極限 $N \to \infty$ をとれば、短冊の面積の総和は、図 4.3 (b) に灰色で示した領域 — これは、

図 4.3　(a) 図 4.2 と同じ状況で分割数を $N = 14$ に増やした。(b) 分割数をどんどん増やしていった極限では短冊の面積の総和は図の灰色の部分の面積に収束する。

$v(s)$ のグラフ、時間軸、$s = 0$ の直線、$s = t$ の直線で囲まれる範囲である — の面積に収束すると考えられる。

ここまで速度 $v(s)$ はつねに正としてきたが、もちろん、$v(s)$ が正と負の値をとる場合も議論はまったく同じだ。正の速度とは物体が座標の値が増える方向に進むことであり、負の速度とは逆向きに進むことである。積分はそのまま (4.1.8) によって定義できる。

一つだけ異なるのは、面積による解釈である。速度が負のときには、グラフから決まる面積はプラスでも、積分への寄与はマイナスになる。つまり、速度が（一般には、積分したい関数が）正と負の値を取るときには、積分とはグラフから決まる符号付きの面積になるのである。図 4.4 を見よ。

4.1.2　積分の厳密な取り扱い

積分の厳密な取り扱いに進もう。やや数学的に重くなるが、それでも（物理への応用にとって）無用な部分

図 4.4　関数 $f(x)$ のグラフから定まる灰色の領域の符号付き面積（薄い灰色の領域の面積から濃い灰色の領域の面積を引いた量）が定積分 $\int_a^b dx\, f(x)$ である。

に踏み込まないことで通常の数学の教科書よりはずっと身軽な筋立てになっているはずだ（と言っても、もちろん、厳密さは失っていない）。我々にとっての一つの目標は連続関数が積分可能であることを示す定理 4.3（475 ページ）だ。そのために「積分できる」というのはどういうことかを反省することから始めよう。

■積分可能性　実数値をとる一変数関数 $f(x)$ と $a < b$ を満たす定数 a, b について定積分 $\int_a^b dx\, f(x)$ を厳密に定義しよう。x が時間、$f(x)$ が速度とは限らないので、移動距離という意味付けはできない。図 4.4 のように、

$f(x)$ のグラフ、x 軸、$x = a$ の直線、$x = b$ の直線に囲まれた領域の「符号付きの面積」を求める問題だと考えることにしよう。「符号付き」というのは、図 4.4 に示したように、$f(x)$ が正の部分（薄い灰色の領域）の面積はそのまま、負の値をとる部分（濃い灰色の領域）の面積にはマイナスをつけるということである。

ただし、$f(x)$ が一般的な（実数値をとる）関数の場合、グラフから定まる領域の「面積」が正確にどういうものなのかはまだ定義されていないことに注意しよう。以下で積分を定式化するということは一般的な図形の「面積」を厳密に定義することでもあるのだ。

前の節と同じように区間 $[a, b]$ を分割して短冊の面積を足し上げるという方針で進める。ただ、(4.1.4) では、区間を完全に等間隔に分割し、また、短冊の高さを決めるのに分割した区間の一番左で評価した関数の値（つまり $v(t_i)$）を使ったわけだが、考えてみれば、これ

はかなり恣意的な[*8]定義である。分割を等間隔にしなかったり、短冊の高さをたとえば微小区間の中心での関数の値にとったらどうなるのかも気になる。それで結果が変わってしまうようでは「符号付き面積」は定義できない。

そのため、ここではもっと一般的な和を考える。まず区間 $[a,b]$ を N 個の区間に分割する。$N+1$ 個の点 $x_0, x_1, \ldots, x_N$ を $x_{i-1} < x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ を満たすようにとる。両端については $x_0 = a$, $x_N = b$ とする。これらの点をまとめて $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ と書き分割と呼ぼう。また、$i = 1, 2, \ldots, N$ について区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の間隔を $\delta_i = x_i - x_{i-1}$ と書く。さらに $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_N$ の中で最大のものを $\delta_{\max}(\boldsymbol{x})$ とする。次に各々の $i = 1, 2, \ldots, N$ について区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の中から代表点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ を任意に選んでくる。ξ_i を使って短冊の高さを決めるのである。N 個の代表点を

*8 「しいてき」と読む。「勝手な」とか「気ままな」といった意味。

図 4.5　分割 $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_6)$ と代表点 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_6)$ に対応する和 $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}}$ は短冊の符号付き面積の総和である。薄い灰色の短冊の面積はプラス、濃い灰色の短冊の面積はマイナスとする。

まとめて $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N)$ と書く。

分割 $\boldsymbol{x}$ と代表点 $\boldsymbol{\xi}$ を選んだら、それに対応する和（リーマン和と呼ばれる）を

$$S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} = \sum_{i=1}^{N} \delta_i \, f(\xi_i) \tag{4.1.10}$$

と定義する。i 番目の短冊の幅が δ_i で高さが $f(\xi_i)$ ということだ。図 4.5 を見よ。

これら短冊の和の面積を図 4.4 の灰色の領域の（符号付き）面積に近づけるには、短冊の幅、つまり分割した区間の長さを小さくすればよい。これは $\delta_{\max}(\boldsymbol{x}) \to 0$ とするということだ。この極限で和 $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}}$ が一定値に収束するなら関数 $f(x)$ の積分が定義できたことになる。

定義 4.1 (積分可能性と定積分)**.** $a < b$ とする。$\delta > 0$ に対して、$\delta_{\max}(\boldsymbol{x}) = \delta$ を満たす全ての分割 $\boldsymbol{x}$ とそれに対応するすべての代表点 $\boldsymbol{\xi}$ を考える（このような $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\xi}$ は無数にある）。δ をゼロに近づけたとき、これら全ての $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ について、和 $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}}$ が（$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ に依存しない）一定値に収束するなら、関数 $f(\cdot)$ は区間 $[a, b]$ で**積分可能** *(integrable)* あるいは**可積分**であるという。また、この極限を

$$\int_a^b dx\, f(x) := \lim_{\delta \to 0} S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} \tag{4.1.11}$$

と書き、$f(\cdot)$ の区間 $[a, b]$ での[*9]**定積分** *(definite inte-*

[*9] 「a から b までの積分」と言うことも多い。

gral)、あるいは、単に**積分** *(integral)* と呼ぶ。

定積分 $\int_a^b dx\, f(x)$ において、a を下端、b を上端、x を積分変数、$f(\cdot)$ を被積分関数と呼ぶ。既に注意したように積分変数はダミー変数なので（一貫して）他の変数名に置き換えてもよい。

定義 4.1 では $a < b$ の場合だけを扱ったが、それ以外の場合の定積分は以下のように定義する。

定義 4.2 (定積分の定義の補足)**.** $a > b$ であり、$f(\cdot)$ が $[b, a]$ で積分可能なときには

$$\int_a^b dx\, f(x) := -\int_b^a dx\, f(x) \tag{4.1.12}$$

と定義する。また、$a = b$ なら

$$\int_a^a dx\, f(x) := 0 \tag{4.1.13}$$

とする。

$a = b$ ならば積分区間の幅がゼロなのだから (4.1.13) はもっともらしい。(4.1.12) のルールのほうはそれほ

ど明らかではないだろう。これは、いくつかの関係式（たとえば和のルール (4.1.35)）が一般に成立するように工夫された「お約束」ととらえていいと思う。

どのような関数が積分可能かは難しい問題だが、物理への応用を考えるなら、次の定理を知っていればほぼ十分である。

定理 4.3 (閉区間上の連続関数は積分可能)**.** $a < b$ とする。閉区間 $[a, b]$ 上で連続な関数 $f(\cdot)$ は積分可能である。

これから定理 4.3 を二段階に分けて証明する。先を急ぐ読者は証明をとばして 484 ページの「積分可能性についての注意」に進んでもいいだろう。また、証明を学ぶ場合も（より重要な）前半の極限の構成をだけを読んで（より技術的な）後半はとばしてもいいかもしれない。

■極限の構成　定義 4.1 では、あらゆる分割 $\boldsymbol{x}$ とそれに対応する代表点の選び方 $\boldsymbol{\xi}$ の全てを考えることになっている。しかし分割の仕方や代表点の選び方は文字通り無数にあり、全ての可能性を考えろなどと言われると頭がクラクラする。証明の前半では、ともかく分割と代表点を具体的に定めて、極限（つまり積分）が存在することを示そう。

正整数 n をとる。区間 $[a,b]$ を 2^n 等分するため、$i=0,1,\ldots,2^n$ に対して

$$x_i^{(n)} = a + \frac{b-a}{2^n}\, i = a + \delta^{(n)}\, i \tag{4.1.14}$$

と定義する。$\delta^{(n)} = (b-a)2^{-n}$ は分割した微小区間の幅である。両端は $x_0^{(n)} = a$ および $x_{2^n}^{(n)} = b$ となっている。これを用いて

$$\tilde{S}_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} \delta^{(n)}\, f(x_i^{(n)}) \tag{4.1.15}$$

という和を定義する。図 4.2 と同じタイプの「短冊の

面積の和」である。

補題 4.4. $f(\cdot)$ が $[a,b]$ 上で連続なら極限 $\tilde{S} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n$ が存在する。

定理 4.3 の証明という観点からは、これは単なる補題である。しかし、数学的に深いところにこだわらないのなら、補題 4.4 によって任意の連続関数の閉区間上での積分が定まることが示されたと思ってもいい。そういう意味で、この補題は本質的に重要である。

補題 4.4 の証明：数列 $(\tilde{S}_n)_{n=1,2,\ldots}$ がコーシー列（179 ページの定義 2.12）であることを証明する。すると、定理 2.13 により、行く先 $\tilde{S}$ を知らなくても、$\tilde{S}_n$ が $n \to \infty$ の極限をもつことが示される。これがコーシー列の概念の威力だ。

任意の $\varepsilon > 0$ に対して（十分に大きな）N が存在し、$n, n' \geq N$ を満たす任意の n, n' について $|\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n'}| \leq \varepsilon$ が成り立つことを示す。

閉区間上の連続関数は一様連続でもあるという定

理 2.30 を思い出そう。つまり、任意の $\varepsilon' > 0$ に対して $\delta' > 0$ が存在し、$|x - x'| \leq \delta'$ ならば必ず $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon'$ が成り立つ[*10]。この事実を用いて証明を進める。

与えられた任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\varepsilon' = \varepsilon/\{2(b-a)\}$ としよう。この ε' に対して、$f(\cdot)$ の一様連続性から、ある $\delta' > 0$ が決まる。そうしたら、$2^{-N} \leq \delta'/(b-a)$ を満たす最小の正整数 N をとる。以下では N はこの値に固定されている。

$n \geq N$ とする。変数 $i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$ を $i = 2^{n-N}j + k$（ただし、$j = 0, 1, \ldots, 2^N - 1$, $k = 0, 1, \ldots, 2^{n-N} - 1$）と表わすことで、(4.1.15) の和を

$$\tilde{S}_n = \delta^{(n)} \sum_{j=0}^{2^N-1} \sum_{k=0}^{2^{n-N}-1} f(x^{(n)}_{2^{n-N}j+k}) \qquad (4.1.16)$$

[*10] ε は上で使ってしまったので ε' という新しい量を使った。別にプライムをつけると特別な意味を持つわけではない。

と書き直そう。$\delta^{(N)} = 2^{n-N}\,\delta^{(n)}$ に注意すれば、

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}_n - \tilde{S}_N \\
&= \delta^{(n)} \sum_{j=0}^{2^N-1} \sum_{k=0}^{2^{n-N}-1} f(x^{(n)}_{2^{n-N}j+k}) \\
&\quad - \delta^{(n)} 2^{n-N} \sum_{j=0}^{2^N-1} f(x^{(N)}_j) \\
&= \delta^{(n)} \sum_{j=0}^{2^N-1} \sum_{k=0}^{2^{n-N}-1} \left\{ f(x^{(n)}_{2^{n-N}j+k}) - f(x^{(N)}_j) \right\}
\end{aligned}
\tag{4.1.17}
$$

と整理できる。ここで定義 (4.1.14) より $x^{(n)}_{2^{n-N}j+k} - x^{(N)}_j = \{(b-a)/2^n\}k$ だから、k の動く範囲に注意すれば $|x^{(n)}_{2^{n-N}j+k} - x^{(N)}_j| \leq (b-a)2^{-N} \leq \delta'$ である。一様連続性より

$$
\left| f(x^{(n)}_{2^{n-N}j+k}) - f(x^{(N)}_j) \right| \leq \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{4.1.18}
$$

がいえる。よって、(4.1.17) の絶対値をとり、三角不等

式 (2.2.47) より

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{S}_n - \tilde{S}_N| \\
&\leq \delta^{(n)} \sum_{j=0}^{2^N-1} \sum_{k=0}^{2^{n-N}-1} \left| f(x^{(n)}_{2^{n-N}j+k}) - f(x^{(N)}_j) \right| \\
&\leq \delta^{(n)} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4.1.19)
\end{aligned}
$$

が示される。

任意の $n, n' \geq N$ について、

$$|\tilde{S}_n - \tilde{S}_{n'}| \leq |\tilde{S}_n - \tilde{S}_N| + |\tilde{S}_{n'} - \tilde{S}_N| \leq \varepsilon \qquad (4.1.20)$$

なので $(\tilde{S}_n)_{n=1,2,\ldots}$ がコーシー列であることが示された。 ▮

■一般の分割（定理 4.3 の証明）　一般の分割 $\boldsymbol{x}$ と代表点の選び方 $\boldsymbol{\xi}$ を扱い、定理 4.3 を証明しよう。既に補題 4.4 により極限 $\tilde{S} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}^{(n)}$ の存在が示されているので証明は（ややこしいけれど）難しくはない。特に興味のある読者以外はとばしてもいいと思う。

以下では、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$\delta > 0$ が存在し、$\delta_{\max}(\boldsymbol{x}) \leq \delta$ を満たす全ての $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ について $|S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} - \tilde{S}| \leq \varepsilon$ が成り立つことを証明する。これは、定理でいう「δ をゼロに近づけたとき、$\delta_{\max}(\boldsymbol{x}) = \delta$ を満たす全ての $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ について、和 $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}}$ が一定値に近づく」ことのより厳密な表現である。

ここでも $f(\cdot)$ の一様連続性を用いる。$\varepsilon > 0$ が与えられたとき、$\varepsilon'' = \varepsilon/(b-a)$ に対して $\delta > 0$ が存在し、$|x - x'| \leq \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon''$ が成り立つということだ。ここで選ばれた $\delta > 0$ は証明したい命題での δ になる。

$\delta_{\max}(\boldsymbol{x}) \leq \delta$ を満たす任意の分割 $\boldsymbol{x}$、それに対応する任意の代表点 $\boldsymbol{\xi}$、そして任意の（大きな）正整数 n をとる。分割 $\boldsymbol{x}$ に応じて、

$$I_i = \left\{ j \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\} \,\middle|\, x_j^{(n)} \in [x_{i-1}, x_i) \right\} \tag{4.1.21}$$

とする（$x_j^{(n)}$ は (4.1.14) で定義した）。これで $\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\} = \bigcup_{i=1}^{N} I_i$ のように、

$\{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ が重なりなく分解された（ここは簡単な図を描きながら読むといい）。これをふまえ、定義 (4.1.10) と (4.1.15) を使えば、

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} - \tilde{S}_n &= \sum_{i=1}^{N} \Big\{ \delta_i \, f(\xi_i) - \sum_{j \in I_i} \delta^{(n)} f(x_j^{(n)}) \Big\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \Bigg\{ \Big(\delta_i - \sum_{j \in I_i} \delta^{(n)} \Big) f(\xi_i) \\ &\qquad + \sum_{j \in I_i} \delta^{(n)} \Big(f(\xi_i) - f(x_j^{(n)}) \Big) \Bigg\} \end{aligned} \tag{4.1.22}$$

と書ける。ここで、定義から明らかに

$$\Big| \delta_i - \sum_{j \in I_i} \delta^{(n)} \Big| \leq \delta^{(n)} \tag{4.1.23}$$

であり、また連続関数 $f(\cdot)$ は閉区間上で最大値と最小値を持つこと（263 ページの定理 2.28）から、ある定数 $f_{\max}$ について

$$|f(\xi_i)| \leq f_{\max} \tag{4.1.24}$$

がいえる。さらに、$j \in I_i$ ならば、$x_j^{(n)} \in [x_{i-1}, x_i)$ であること、$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ であることから、$|\xi_i - x_j^{(n)}| \leq \delta_i \leq \delta_{\max}(\boldsymbol{x}) \leq \delta$ である。よって一様連続性から

$$\left| f(\xi_i) - f(x_j^{(n)}) \right| \leq \varepsilon'' = \varepsilon/(b-a) \tag{4.1.25}$$

がいえる。(4.1.23), (4.1.24), (4.1.25) を (4.1.22) に代入して整理すれば、

$$\begin{aligned} |S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} - \tilde{S}_n| &\leq \sum_{i=1}^{N} \left\{ \left| \delta_i - \sum_{j \in I_i} \delta^{(n)} \right| |f(\xi_i)| \right. \\ &\qquad \left. + \sum_{j \in I_i} \delta^{(n)} \left| f(\xi_i) - f(x_j^{(n)}) \right| \right\} \\ &\leq N\delta^{(n)} f_{\max} + \sum_{j=1}^{2^n-1} \delta^{(n)} \varepsilon'' \\ &= N\delta^{(n)} f_{\max} + \varepsilon \end{aligned} \tag{4.1.26}$$

が得られる。ここで（$\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{\xi}$ はそのままにして）$n \to \infty$ とすれば、目標だった $|S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} - \tilde{S}| \leq \varepsilon$ が示される。定理 4.3 が証明された。

■積分可能性についての注意　もちろん全ての関数が（定義 4.1 の意味で）積分可能というわけではない。積分可能ではない有名な例として

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ が有理数のとき} \\ 1 & x \text{ が無理数のとき} \end{cases} \tag{4.1.27}$$

という関数がある。x が有理数か無理数かでバタバタと 0 と 1 の間を行き来する、かなり病的な関数だ。もちろん連続関数ではない。この関数の場合、閉区間 $[a, b]$ の任意の分割 $\boldsymbol{x}$ に対して、代表点 ξ_i をすべて有理数に選べば $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} = 0$ となるし、すべて無理数に選べば $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} = 1$ となる。どんな小さな区間にも無理数と有理数がたっぷりと含まれているから、いくら分割を細かくして行ってもこの状況は変わらないのである。

ただし、これほど病的な関数が物理への応用に（自然に）登場することはほぼない。

連続ではないが積分可能な関数として、ほとんど当たり前だが、一カ所だけで不連続になる例をみてお

こう。

$a < b < c$ を満たす定数 a, b, c をとり、$g(\cdot)$ を $[a, b]$ 上で連続な関数、$h(\cdot)$ を $[b, c]$ 上で連続な関数とする。$[a, c]$ 上の関数 $f(\cdot)$ を

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & a \leq x < b \text{ のとき} \\ f_0 & x = b \text{ のとき} \\ h(x) & b < x \leq c \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.1.28}$$

により定める。つなぎ目である $x = b$ での関数の値 f_0 は $g(b)$ でも $h(b)$ でも全く別の有限の定数でもかまわない。このとき $f(\cdot)$ は $[a, c]$ 上で積分可能であり、

$$\int_a^c dx\, f(x) = \int_a^b dx\, g(x) + \int_b^c dx\, h(x) \tag{4.1.29}$$

が成り立つ。

証明：当たり前に見えるだろうし、実際に当たり前なのだが、念のため定義に忠実に証明しておこう。区間 $[a, c]$ の任意の分割 $\boldsymbol{x}$ と対応する代表点 $\boldsymbol{\xi}$ を用意する。分割 $\boldsymbol{x}$ を b 未満と b より大きい部分に分けよう。こ

のときの切れ目を i とする。つまり、$a = x_0 < x_1 < \cdots x_{i-1} < b < x_i < \cdots < x_{N-1} < x_N = c$ ということ[*11]。このとき、$\boldsymbol{x}_1 = (x_0, \ldots, x_{i-1}, b)$ は $[a, b]$ の分割、$\boldsymbol{x}_2 = (b, x_i, \ldots, x_N)$ は $[b, c]$ の分割になる。$\boldsymbol{\xi}$ も前後に分割し（一つだけ足りないところは任意の要素を加えて）代表点 $\boldsymbol{\xi}_1$, $\boldsymbol{\xi}_2$ を作る。作り方からして、$S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}}$ と $S_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\xi}_1} + S_{\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\xi}_2}$ は「切れ目」の部分だけが異なっている。「切れ目」からの寄与を大きめに評価すれば、

$$|S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} - (S_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\xi}_1} + S_{\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\xi}_2})| \leq 2\delta_i f_{\max} \tag{4.1.30}$$

がいえる。ただし $f_{\max}$ は $|g(x)| \leq f_{\max}$, $|h(x)| \leq f_{\max}$, $|f_0| \leq f_{\max}$ となる定数。分割を細かくすれば、$S_{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{\xi}_1} \to \int_a^b dx\, g(x)$, $S_{\boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{\xi}_2} \to \int_b^c dx\, h(x)$ となり、また $\delta_i \to 0$ なので、望む結果が示された。∎

これとまったく同様に、有限個の有界な連続関数をつないで作った関数も一般に積分可能である。

[*11] x_j の中にちょうど b になるものはないと仮定した。ちょうど b が含まれているときはもっと簡単なので考えてほしい。

連続とはほど遠い関数が積分可能ということもある。物理との関連はそれほどないが重要な一般的な結果を紹介しておこう。

関数 $f(\cdot)$ が非減少関数であるとは、任意の $x < y$ について $f(x) \leq f(y)$ となることをいう。非減少関数には有限の区間内で無限個の不連続点をもつような病的な関数も含まれる。それでも、以下の定理がある。

定理 4.5. 閉区間 $[a, b]$ 上の任意の非減少関数 $f(\cdot)$ は積分可能である。

以下の証明は特に興味のある読者だけが読めばいいだろう（しかし、なかなか面白い証明である）。やや簡潔に書くので自分で絵を描きながら読んでほしい。

証明：任意の分割 $\boldsymbol{x}$ に対して二つの和

$$S_{\boldsymbol{x}}^{+} = \sum_{i=1}^{N} \delta_i f(x_i), \quad S_{\boldsymbol{x}}^{-} = \sum_{i=1}^{N} \delta_i f(x_{i-1}) \tag{4.1.31}$$

を定義する。リーマン和 (4.1.10) ですべての代表点を

区間の右の端にとれば $S_{\boldsymbol{x}}^{+}$ になり、左の端にとれば $S_{\boldsymbol{x}}^{-}$ になる。$f(\cdot)$ が非減少だから、任意の代表点 $\boldsymbol{\xi}$ について、$S_{\boldsymbol{x}}^{-} \leq S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}} \leq S_{\boldsymbol{x}}^{+}$ がわかる。さらに、

$$\begin{aligned} S_{\boldsymbol{x}}^{+} - S_{\boldsymbol{x}}^{-} &= \sum_{i=1}^{N} \delta_i \bigl\{ f(x_i) - f(x_{i-1}) \bigr\} \\ &\leq \delta_{\max}(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{N} \bigl\{ f(x_i) - f(x_{i-1}) \bigr\} \\ &= \delta_{\max}(\boldsymbol{x}) \bigl\{ f(b) - f(a) \bigr\} \qquad (4.1.32) \end{aligned}$$

がいえる。よって $\delta_{\max}(\boldsymbol{x})$ が小さくなれば、$S_{\boldsymbol{x}}^{+}$, $S_{\boldsymbol{x}}^{-}$ および $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}}$ は互いに近づいて行く。

次に、$n = 1, 2, \ldots$ について、(4.1.15) と同じ記号を使って、

$$\begin{aligned} \tilde{S}_n^{+} &= \sum_{i=1}^{2^n} \delta^{(n)} f(x_i^{(n)}), \\ \tilde{S}_n^{-} &= \sum_{i=0}^{2^n-1} \delta^{(n)} f(x_i^{(n)}) \qquad (4.1.33) \end{aligned}$$

とする（$\tilde{S}_n^-$ は (4.1.15) の $\tilde{S}_n$ と同じだが対応がきれいに見える記号を使った)。(短冊の絵を描けばすぐにわかるが）$\tilde{S}_n^+ \geq \tilde{S}_{n+1}^+$ という単調性があり、また、明らかに $\tilde{S}_n^+ \geq (b-a)f(a)$ である。有界単調列は収束するという定理（181 ページの定理 2.14）より、$\tilde{S} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n^+$ が存在する。一方、$0 \leq \tilde{S}_n^+ - \tilde{S}_n^- = \delta^{(n)}\{f(b)-f(a)\}$ なので、$\tilde{S} = \lim_{n\to\infty} \tilde{S}_n^-$ でもある。

明らかに、$\tilde{S}_n^- \leq S_{\boldsymbol{x}}^+$ および $\tilde{S}_n^+ \geq S_{\boldsymbol{x}}^-$ だから、$n \to \infty$ とすれば $S_{\boldsymbol{x}}^- \leq \tilde{S} \leq S_{\boldsymbol{x}}^+$ となる。(4.1.32) より、$\delta_{\max}(\boldsymbol{x}) \to 0$ とすれば、$S_{\boldsymbol{x}}^+, S_{\boldsymbol{x}}^-$ は $\tilde{S}$ に収束する。よって $S_{\boldsymbol{x},\boldsymbol{\xi}}$ も $\tilde{S}$ に収束する。∎

定義 4.1 で定まる積分は、より詳しくはリーマン[*12]積分と呼ばれる。ここでの積分可能性もリーマン積分の意味での積分可能性である。

一方、現代的な数学では、測度論という体系に立脚

[*12] 12 ページの脚注 *13 を見よ。

したルベーグ[*13]積分の概念を用いるのが一般的だ。通常の簡単な関数の積分を考えるかぎりリーマン積分もルベーグ積分も同じ結果を出すのだが、どのような関数が積分可能かという問いへの答は異なる。一般にルベーグ積分のほうが強力であり、たとえば、病的な (4.1.27) の関数もルベーグ積分の意味では積分可能なのである[*14]。

そういう事情もあるので、どのような関数が（定義 4.1 の意味で）積分可能かを追求するのはそれほど実り多いことではない。また、既に強調したことだが、物理を学ぶ上では、閉区間上の連続関数が積分可能という定理 4.3 を知っていればほとんど十分だと思う。

[*13] Henri Leon Lebesgue (1875–1941) フランスの数学者。

[*14] $f(x)$ を (4.1.27) の関数とする。ルベーグ積分では任意の $a < b$ について $\int_a^b dx\, f(x) = b - a$ となる。これは $[a, b]$ の中の実数の「圧倒的多数」が無理数であるという事実を反映した結果になっている。

■複素数値をとる関数の定積分　ここまでは実数値関数 $f(\cdot)$ の積分だけを考えたが、当然、複素数値をとる（実数の区間上の）関数 $\varphi(\cdot)$ も同様に扱える。関数を $\varphi(\cdot) = f(\cdot) + ig(\cdot)$ のように実部と虚部に分け、二つの実数値関数 $f(\cdot)$ と $g(\cdot)$ を考えればいいのだ。$f(\cdot)$ と $g(\cdot)$ がいずれも区間 $[a, b]$ で積分可能なら関数 $\varphi(\cdot)$ も $[a, b]$ で積分可能であるとし、その定積分を

$$\int_a^b dx\,\varphi(x) := \int_a^b dx\,f(x) + i\int_a^b dx\,g(x) \quad (4.1.34)$$

と定義すればいい。これは全く自明なので、これ以降、特に必要がある場合（特に 4.2.5 節での例題）以外は実数値関数だけを考える。

4.1.3　積分の性質

定義 4.1 により積分可能性の概念と定積分の定義がはっきりしたので、これから積分の主な性質を見ていこう。特に、積分と微分の本質的な関係を明らかにす

る微分積分学の基本定理（定理 4.6）は重要である。不定積分という考えを導入し、積分の具体的な計算にも役立つ部分積分と積分の変数変換（置換積分）の関係式も導く。

■基本的な性質　まず、（ほとんど当たり前のことだが）関数 $f(\cdot)$ が区間 $[\alpha, \beta]$ で積分可能なら、$[\alpha, \beta]$ に含まれる任意の区間 $[a, b]$ でも $f(\cdot)$ は積分可能であることに注意しておく[*15]。

関数 $f(\cdot)$ が区間 $[\alpha, \beta]$ で積分可能とする。任意の $a, b, c \in [\alpha, \beta]$ について、和のルール

$$\int_a^c dx\, f(x) = \int_a^b dx\, f(x) + \int_b^c dx\, f(x) \qquad (4.1.35)$$

が成り立つ。証明はほとんど当たり前だ。まず、$a < b < c$ としよう。積分とグラフでの面積の関係から、

[*15] 証明：$f(\cdot)$ が $[a, b]$ で積分不可能とする。定義により $[a, b]$ の分割と代表点の列が二種類選べてリーマン和 (4.1.10) の極限が異なるようにできる。ここから $f(\cdot)$ が全区間 $[\alpha, \beta]$ で積分不可能となり、矛盾。

図 4.6　$a < b < c$ のとき、和のルール (4.1.35) が成り立つ理由。右辺は薄い灰色の部分の面積と濃い灰色の部分の面積の和であり、左辺は灰色の部分すべての面積である。

図 4.6 を見れば、和のルール (4.1.35) が成り立つことは明らかだろう。真面目に証明したければ次のようにする。$[a, c]$ の分割として b が分割点となるようなものだけを取ってくる。積分可能性からこのような分割から左辺の定積分が正しく計算できる。ところが、この場合のリーマン和 (4.1.10) は、$[a, b]$ 上のリーマン和と $[b, c]$ 上のリーマン和の足し算だから、(4.1.35) が成り立つことが示される。$a < b < c$ 以外の場合も和のルール (4.1.12)（あるいは、必要なら (4.1.13)）を適切に使えば上と同じになる。例えば、$b < c < a$ のときに

は (4.1.35) と同様に

$$\int_b^a dx\, f(x) = \int_b^c dx\, f(x) + \int_c^a dx\, f(x) \quad (4.1.36)$$

だが、(4.1.12) を使えば、これは

$$-\int_a^b dx\, f(x) = \int_b^c dx\, f(x) - \int_a^c dx\, f(x) \quad (4.1.37)$$

となり、適切に移項すれば (4.1.35) そのものになる。

関数 $f(\cdot)$ と $g(\cdot)$ が区間 $[a,b]$ で積分可能とする。任意の定数 $c, c' \in \mathbb{R}$ について、$c\, f(\cdot) + c'\, g(\cdot)$ は $[a,b]$ で積分可能であり、その定積分は

$$\int_a^b dx\, \{c\, f(x) + c'\, g(x)\} = c \int_a^b dx\, f(x) + c' \int_a^b dx\, g(x) \quad (4.1.38)$$

である。この関係は自明だろう。同じ条件で関数の積 $f(x)\, g(x)$ が積分可能であることも証明できる。また、同じ条件で、さらに任意の $x \in [a,b]$ において $f(x) \leq g(x)$ なら、定積分についても不等式

$$\int_a^b dx\, f(x) \leq \int_a^b dx\, g(x) \quad (4.1.39)$$

が成り立つ。ただし、この不等式を使うときには $a < b$ が必須であることに注意。

■微分積分学の基本定理　関数 $f(\cdot)$ が区間 $[\alpha, \beta]$ で積分可能とする。$c \in [\alpha, \beta]$ を適当に固定し、$x \in [\alpha, \beta]$ について、

$$F(x) = \int_c^x dy\, f(y) \tag{4.1.40}$$

としよう。これまで x は積分変数として使ってきたが、ここでは「生きた変数」として使っている。積分変数は y という名前にした（積分変数はダミー変数なのでどんな名前でもかまわないことを思い出そう）。変数 x は $[\alpha, \beta]$ 上を動いてもいいので、こうして、**積分を使って新しい関数が定義された**ことになる（すぐ後で述べるように、この関数を不定積分と呼ぶ）。これは積分の方法の核心といってもいい重要な考えである。

さて、ここで任意の $x \in (\alpha, \beta)$ と $x + \Delta x \in [\alpha, \beta]$ となるような（小さな）Δx をとり、和のルール (4.1.35)

を使うと、

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) &= \int_c^{x+\Delta x} dy\, f(y) \\ &= \int_c^{x} dy\, f(y) + \int_x^{x+\Delta x} dy\, f(y) \\ &= F(x) + \int_x^{x+\Delta x} dy\, f(y) \qquad (4.1.41) \end{aligned}$$

となる。ここで、Δx が十分に小さければ $\int_x^{x+\Delta x} dy\, f(y) \simeq \Delta x\, f(x)$ と近似できるだろう（後でもっと厳密に議論する）。すると、(4.1.41) は $F(x+\Delta x) \simeq F(x) + \Delta x\, f(x)$ となり、整理すれば、

$$\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} \simeq f(x) \qquad (4.1.42)$$

となる。左辺で $\Delta x \to 0$ の極限を取れば微分の定義（286 ページの定義 3.1）そのものだから、ここから

$$F'(x) = f(x) \qquad (4.1.43)$$

が得られる。ここで、Δx が小さいほど上の近似は正確になるはずだから、$\simeq$ を $=$ に昇格させた。つまり、

関数 $f(x)$ を積分して作った $F(x)$ を微分すると、元の $f(x)$ に戻るのである。これを**微分積分学の基本定理** (fundamental theorem of calculus) という。「積分とは微分の逆」という簡略版の教え方は（一変数の積分について成り立つ）この定理に基づいている。

これまで厳密さを意識せずに議論してきたので、定理としてまとめ証明もしておこう。

定理 4.6 (微分積分学の基本定理)**.** 実数値関数 $f(\cdot)$ が区間 $[\alpha, \beta]$ 上で連続なら、任意の $c \in [\alpha, \beta]$ と任意の $x \in (\alpha, \beta)$ について、

$$\frac{d}{dx}\int_c^x dy\, f(y) = f(x) \quad \text{あるいは}$$
$$F'(x) = f(x) \tag{4.1.44}$$

が成り立つ。ただし、$F(x)$ は (4.1.40) で定義した。

証明：$x \in (\alpha, \beta)$ を固定し、$f(\cdot)$ が x において連続

であることを用いる。連続性の定義（250 ページの定義 2.24）より、任意の（小さな）$\varepsilon > 0$ に対して（十分に小さな）$\delta(\varepsilon) > 0$ があり、$|x - y| \leq \delta(\varepsilon)$ を満たす任意の y に対して $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ が成り立つ。ここで、$0 < \Delta x \leq \delta(\varepsilon)$（あるいは、$0 > \Delta x \geq -\delta(\varepsilon)$）となる Δx を選ぶと、$x \leq y \leq x + \Delta x$（あるいは、$x + \Delta x \leq y \leq x$）を満たす y について

$$f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon \tag{4.1.45}$$

が成り立つ。この不等式の各辺を x と $x + \Delta x$ の間で y について積分し、(4.1.39) に注意すれば

$$\begin{aligned} \Delta x\{f(x) - \varepsilon\} &\leq \int_x^{x+\Delta x} dy\, f(y) \\ &\leq \Delta x\{f(x) + \varepsilon\} \end{aligned} \tag{4.1.46}$$

が得られる（左辺と右辺は単に定数の積分であることに注意）。$\Delta x > 0$ としたときは、この不等式は見た目で当たり前だろう。$\Delta x < 0$ としたときは、符号のルール (4.1.12) を使ってきちんと考えれば、やはり (4.1.46)

が正しいことがわかる。(4.1.41) を使って整理すれば、

$$-\varepsilon \leq \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} - f(x) \leq \varepsilon \qquad (4.1.47)$$

となる。ε はいくらでも小さくできるので（ただし、その際、Δx も連動して小さくする）

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x) \qquad (4.1.48)$$

が示された。▮

■原始関数　$[\alpha, \beta]$ 上の連続関数 $f(\cdot)$ が与えられたとき、すべての $x \in (\alpha, \beta)$ において $G'(x) = f(x)$ となるような関数 $G(x)$ があったとしよう。このような関数 $G(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**と呼ぶ。$G(x)$ に任意の定数 C を足した $\tilde{G}(x) = G(x) + C$ も明らかに同じ $f(x)$ の原始関数であることに注意しよう。例えば、$f(x) = x$ ならば、$G(x) = (x^2/2) + C$ が原始関数である。

このように原始関数には任意の定数を足す不定性があるが、この不定性さえ除けば原始関数は一通りに

決まることが以下のようにわかる。一つの $f(x)$ に対して二つの原始関数 $G_1(x)$, $G_2(x)$ があったとする。$G_1'(x) = f(x)$ および $G_2'(x) = f(x)$ だから、二式の差をとって、

$$\frac{d}{dx}\{G_1(x) - G_2(x)\} = 0 \tag{4.1.49}$$

がすべての x について成り立つ。微分がつねにゼロになる関数は定数だけだから、$G_1(x) = G_2(x) + (\text{定数})$ が成り立つ。

■不定積分　(4.1.40) では $[\alpha, \beta]$ 上の連続関数 $f(\cdot)$ を c と x の間で積分することで新しい関数 $F(x)$ を作った。この関数 $F(x)$ のことを $f(\cdot)$ の**不定積分**と呼ぶ。

(4.1.40) で下端 c を別の $b \in [\alpha, \beta]$ に変更すると、和のルール (4.1.35) により、積分は

$$\begin{aligned}\int_b^x dy\, f(y) &= \int_c^x dy\, f(y) + \int_b^c dy\, f(y) \\ &= F(x) + C \end{aligned} \tag{4.1.50}$$

となる。ここで $C = \int_b^c dy\, f(y)$ とした。つまり、不定積分を決める (4.1.40) で下端の値を変えても単に x によらない定数が足されるだけである。そこで、不定積分を考える際には、下端の値はさして重要ではないとみなし、c はなんでもよいと考える習慣になっている。そうすると積分の値は一通りには決まらないが、定数を足す不定性があることを覚えていれば別に困ることはない。実際の計算でも定数の不定性を表わす任意定数 C を明記するのが普通だ。このような不定性（つまり、決まらない要素）があるから、不定積分という名前がついているのだ（と思う）。

そこで、不定積分を表わす (4.1.40) は、

$$F(x) = \int^x dy\, f(y) \tag{4.1.51}$$

と書くのがいい。下端を書かないことで、下端はなんでもいいこと、下端の選び方だけの不定性があること

が示唆されるのだ[*16]。しかし、残念ながら、この書き方は全く標準的ではない。標準の書き方は、

$$F(x) = \int dx\, f(x) \tag{4.1.52}$$

なのだ。この書き方は（少なくとも本書のこれまでの考えに沿って考える限り）筋が通っているとは言い難い。肝心の積分の上端を省略してしまっているのも悲しいし、ダミー変数である積分変数に（「生きた変数」を表わす）x を使ってしまっているのも感じが悪い。とはいえ、(4.1.52) の書き方は世界標準なので諦(あきら)めて使うことにしよう。実際、(4.1.52) には変数が x 一つしか登場しないので使い慣れると便利なのも事実だ。

(4.1.40), (4.1.51) では定積分の上端を x にすることで不定積分を定義した。逆に不定積分から定積分を求めることもできる。$a, b \in [\alpha, \beta]$ のとき、和のルール

[*16] この書き方は、江沢洋『微分積分の基礎と応用』（サイエンス社）にならった。

(4.1.35) と符号のルール (4.1.12) より

$$\begin{aligned}\int_a^b dx\, f(x) &= \int_a^c dx\, f(x) + \int_c^b dx\, f(x) \\ &= \int_c^b dy\, f(y) - \int_c^a dy\, f(y) \\ &= F(b) - F(a) \qquad (4.1.53)\end{aligned}$$

となることがわかる。不定積分 $F(x)$ には任意の定数を足す不定性があったわけだが、ここには $F(b)$ と $F(a)$ の差が現れたので、不定性の影響はなくなることに注意しよう。

■不定積分と原始関数、定積分の基本的な求め方　さて、ここまで話を少しわざとらしく進めてきたが、もちろん、原始関数と不定積分には深い関係がある。というより、これらは同じものだ。

ここでも $f(\cdot)$ を区間 $[\alpha, \beta]$ 上での連続関数としよう。すると、(4.1.40) で定義した $f(\cdot)$ の不定積分 $F(x)$ は微分積分学の基本定理（定理 4.6）により、任意の $x \in (\alpha, \beta)$ において $F'(x) = f(x)$ を満たす。つまり、

$F(x)$ は $f(\cdot)$ の原始関数なのである。不定積分にも原始関数にも定数を足し引きするだけの不定性があったことを思い出すと、これらが全く同じものだということがわかる。たとえば、$f(x) = x$ の原始関数の一つが $x^2/2$ とわかっているので、不定積分は、

$$\int dx\, x = \frac{x^2}{2} + C \tag{4.1.54}$$

となる。ここでの C が不定性を表わす任意定数だ[*17]。

不定積分と原始関数が等しいことを用いると、定積分を求めるための基本的な方法が得られる。ある関数 $f(\cdot)$ について（なんらかの方法で）その原始関数がわかったとして、それを $F(x)$ と書こう。$F(x)$ は不定積分でもあるから、(4.1.53) により、任意の $a, b \in [\alpha, \beta]$ について、

[*17] この本では不定積分に含まれる任意定数はほとんどのいつでも C と書く。よって（少し厳密ではないが）複数の式で C が出て来たときにそれらが等しいとは考えないことにする。

$$\int_a^b dx\, f(x) = F(b) - F(a) \tag{4.1.55}$$

によって定積分が求められる（具体例はすぐに 4.2.1 節でみる）。

$$\Big[F(x)\Big]_a^b := F(b) - F(a) \tag{4.1.56}$$

という記号を導入し、これからもずっと使うことにしよう。(4.1.55) は、

$$\int_a^b dx\, f(x) = \Big[F(x)\Big]_a^b \tag{4.1.57}$$

というきれいな形に書ける。

最後に、$f(\cdot)$ が (α, β) で一回連続的微分可能（一回微分可能で導関数が連続）とする。導関数 $f'(\cdot)$ は (α, β) で連続である。また、$f(x) + C$ は $f'(\cdot)$ の原始関数になっている。よって、(4.1.55) を、$f(\cdot)$ を $f'(\cdot)$ に置き

換えて使えば、任意の $a, b \in (\alpha, \beta)$ について、

$$\int_a^b dx\, f'(x) = f(b) - f(a) = \big[f(x)\big]_a^b \quad (4.1.58)$$

という関係が得られる[*18]。「微分してから積分すると元に戻る」と言っているわけだから、これを見ても「積分は微分の逆」というのは（一変数の関数に限れば）確かに正しい。(4.1.58) は（導出からして明らかに）微分積分学の基本定理（定理 4.6）の言い換えに過ぎないが、様々なところで役に立つ。

■広義積分　これまで定積分 $\int_a^b dx\, f(x)$ を考える際には必ず $a \leq x \leq b$ の範囲で $f(x)$ が有限だとして来た。しかし、積分区間の下端 a あるいは上端 b で $f(x)$ が有

[*18] 細かい注意：定義域が開区間 (α, β) になってしまったので、$a, b \in [\alpha', \beta'] \subset (\alpha, \beta)$ となるような α', β' を選んでこれまでの結果を使う。

限でなくても定積分がきちんと定義されることがある。このような定積分を**広義積分**と呼ぶ。

これは単なる記法の問題なので、ごく簡単に例を見ておこう。$0 < a < b$ として、定積分

$$\int_a^b dx\,\frac{1}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_a^b = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \tag{4.1.59}$$

を考える。ここで、最右辺で $b \to \infty$ とする極限が存在して $1/a$ に等しい。これを省略して、

$$\int_a^\infty dx\,\frac{1}{x^2} := \lim_{b\to\infty}\int_a^b dx\,\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a} \tag{4.1.60}$$

と書くことにする。同様に、$0 < a < b$ について、

$$\int_a^b dx\,\frac{1}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\,\right]_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \tag{4.1.61}$$

だが、この場合も $a \to 0$ の極限を省略して

$$\int_0^b dx\,\frac{1}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{b} \tag{4.1.62}$$

と書く。このような広義積分の書き方はこの本のこれから先で断りなく使う。

■部分積分　部分積分は、具体的な積分の計算においても、一般的な理論においても、重要な役割を果たす。

二つの関数 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ が (α, β) で一回連続的微分可能とする。積の微分の公式 (3.1.27) は

$$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \qquad (4.1.63)$$

だった。$a, b \in (\alpha, \beta)$ について、(4.1.63) の両辺を a と b の間で積分し、(4.1.58) を使うと、

$$\boxed{\begin{aligned} &\int_a^b dx\, f(x)\,g'(x) \\ &= \Big[f(x)\,g(x)\Big]_a^b - \int_a^b dx\, f'(x)\,g(x) \qquad (4.1.64) \end{aligned}}$$

という**部分積分** (integration by parts) の公式が得られる。

定積分の場合を見たが、この積分の上端を x にすれば不定積分についての部分積分の公式

$$\int dx\, f(x)\, g'(x)$$
$$= f(x)\, g(x) - \int dx\, f'(x)\, g(x) \qquad (4.1.65)$$

が得られる[*19]。

例として、$\log x$ の不定積分を考えよう。$x' = 1$ に注意して (4.1.65) を使えば、

$$\begin{aligned}\int dx\, \log x &= \int dx\, (\log x)\, x' \\ &= x\, \log x - \int dx\, (\log x)'\, x \\ &= x\, \log x - \int dx \\ &= x\, \log x - x + C \qquad (4.1.66)\end{aligned}$$

[*19] 右辺に任意の定数を足してもこの等式は正しいわけだが、不定積分には任意定数の不定性が含まれていると考えるので、このような等式にはわざわざ任意定数は書かない。

と求められる。$(\log x)' = 1/x$ を用いた。また、$\int dx$ は $\int dx\,1$ の意味で、これは $\int dx 1 = x + C$ である（C は任意定数）。

■積分の変数変換（置換積分）　積分の変数変換（置換積分）が具体的な（ときにはマニアックな）積分計算で威力を発揮することは高校の数学で学んでいるだろう。さらに、同じ変数変換の公式が基礎的な考察で役に立つこともある。5.6.2 節で取り上げる変数分離法での常微分方程式の解法がその好例である。

設定は少しややこしい。$x(\cdot)$ を (γ, η) 上の一回連続的微分可能な関数とする。s が (γ, η) 上を動くとき、$x(s)$ は区間 $[\alpha, \beta]$ の中にあるとする。また、$f(\cdot)$ を $[a, b]$ 上の連続関数とする。

$p, q \in (\gamma, \eta)$ をとり、$x(p) = a$, $x(q) = b$ としよう。このとき、(一変数関数の）積分の変数変換、あるいは、置換積分の公式

$$\int_a^b dx\, f(x) = \int_p^q ds\, x'(s)\, f(x(s)) \qquad (4.1.67)$$

が成り立つ。ここで左辺の x はいつも通りの積分変数であり、右辺の x は全て関数 $x(\cdot)$ であることに注意。同じ文字を使っているので混乱しそうだと思うかもしれないが、実は、この方が後々便利なのである。

証明は後回しにして、まず、この等式の「気持ち」を見ておこう。左辺では、いつものように x を a から b まで変化させながら $f(x)$ を「足し上げて」いる。右辺でも $f(\cdot)$ を「足し上げる」のだが、今度は関数を $f(x(s))$ というの形に書いて、s を動かしながら「足し上げ」ている。ここで、何の配慮もせず単に $\int_p^q ds\, f(x(s))$ という積分を計算してしまうと明らかに左辺とは異なる結果が出てしまう。下端と上端での x の値は左辺と同じになるが、その間での x の変化の仕方が違うからだ。

x のある範囲で $x(s)$ が急激に変化すると、その部分での積分は小さく評価されてしまうし、逆に、x のある範囲で $x(s)$ が緩(ゆる)やかに変化するなら、その部分での積分は大きめに評価されてしまう。(4.1.67) の右辺の被積分関数の中の $x'(s)$ は、まさに、これを補正する働きをしている。$x(s)$ が急激に変化するときには大きな $x'(s)$ をかけ、緩やかに変化するときには小さな $x'(s)$ をかけるというわけだ。

この公式も不定積分で書き直しておくと便利だが、左辺と右辺で積分変数が違うので少し注意が必要である。また、ここでは関数 $x(s)$ は s について単調増加、あるいは単調減少だと仮定する。左辺での積分の上端 b をこれまでのように x としよう。すると、右辺での上端 q は $x(q) = x$ の解に取ればいい[*20]。この解を $s(x)$ と書こう（$s(x)$ は $x(s)$ の逆関数)。これらを積分の上端に代入し、混乱のないように積分変数を書き直せば、

[*20] $x(s)$ が単調増加あるいは単調減少と仮定したので解は一つに定まる

(4.1.67) は

$$\int_a^x dy\, f(y) = \int_p^{s(x)} du\, x'(u)\, f(x(u)) \qquad (4.1.68)$$

となる。これを不定積分の形に書けば、

$$\boxed{\int dx\, f(x) = \int ds\, x'(s)\, f(x(s))\Big|_{s=s(x)} \qquad (4.1.69)}$$

となる。右辺の不定積分 $\int ds\, x'(s)\, f(x(s))$ は s の関数だから、そのままでは x の関数である左辺とは比べられない。s に $s(x)$ を代入して得られる x の関数が左辺と等しいということである。同じ不定積分の関係を

$$\int dx\, f(x)\Big|_{x=x(s)} = \int ds\, x'(s)\, f(x(s)) \qquad (4.1.70)$$

と書いたほうが便利なこともある。今度は、右辺がいつものように s の関数であり、左辺で x に $x(s)$ という関数を代入して s の関数に揃えている。

ところで、(4.1.69) の関係を、導関数を「分数」の形にし（299 ページを参照)、また関数の引数を全て省略して書くと、

$$\int dx\, f = \int ds\, \frac{dx}{ds}\, f \tag{4.1.71}$$

となる。右辺で分子と分母の ds を「約分」すれば完全に左辺の形と一致する！　もちろんこれは証明ではないが、この関係がもっともらしいことを納得できるだろう[*21]。

実際、この書き方は具体的な積分の計算を実行する際にも便利である。たとえば、（ちょっと簡単すぎる例だが）α を定数として $e^{\alpha x}$ の不定積分を計算したいとする。この場合は $s = \alpha x$ のように新しい積分変数を定義し（真面目に書けば $x(s) = s/\alpha$ ということ)、

$$dx = ds\, \frac{dx}{ds} = ds\, \frac{1}{\alpha} \tag{4.1.72}$$

[*21] こういう関係がもっともらしく見えるように微分や積分の記号が作られているという側面もあるが。

という（やや形式的な）書き換えをして、それを積分に代入して、

$$\begin{aligned}\int dx\, e^{\alpha x} &= \frac{1}{\alpha}\int ds\, e^{s} \\ &= \frac{1}{\alpha}e^{s} + C \\ &= \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + C \end{aligned} \tag{4.1.73}$$

のように計算できる。最後は e^s の原始関数が e^s であることを用いた。これで (4.1.69) に沿ってきちんと計算したことになっていることを確認しておこう。

(4.1.67) の証明：$F(x)$ を $f(x)$ の原始関数として、$G(s) = F(x(s))$ と置く。合成関数の微分についての連鎖律 (3.1.30) より、

$$G'(s) = x'(s)\, F'(x)\Big|_{x=x(s)} \tag{4.1.74}$$

だが、$F'(x) = f(x)$ だったので、

$$G'(s) = x'(s)\, f(x(s)) \tag{4.1.75}$$

である。両辺を s について p から q まで積分し、左辺で「導関数を積分すれば元に戻る」という (4.1.55) の関係を使えば、

$$G(q) - G(p) = \int_p^q ds\, x'(s)\, f(x(s)) \tag{4.1.76}$$

が得られる。$G(s)$ の定義と $a = x(p), b = x(q)$ を思い出せば、左辺は $F(b) - F(a)$ となるが、これは (4.1.55) により (4.1.67) の左辺に等しい。 ∎

4.1.4　テイラーの定理

この節では、微分積分学の基本定理（497 ページの定理 4.6）の興味深い応用として、テイラー級数、マクローリン級数に厳密な意味を与えるテイラーの定理（433 ページの定理 3.12）の少し違うバージョンを証明する。証明はエレガントで見通しがよく、読んで楽し

いと思う[*22]。

また、ここで示す剰余項の積分形 (4.1.78) を使うと、3.3.2 節で証明しきれなかった $\log(1+x)$ のマクローリン級数の正当性も証明できる。

■テイラーの定理の別バージョン　ここでは次の定理を証明する。定理の成立条件は前に見たテイラーの定理（定理 3.12）の場合とほとんど同じだが、定理 4.6 の条件に合わせて $f^{(n)}(\cdot)$ の連続性を仮定しておく[*23]。

定理 4.7 (テイラーの定理 (別バージョン))**.** $a < 0 < b$ とする。$f(\cdot)$ を、開区間 (a, b) で n 回微分可能であり n 階導関数も連続な関数とする。このとき、任意の *0*

[*22] 私はこの証明を東北大学数学科の黒木玄さんのツイッターへの投稿から学んだ。

[*23] 条件はもっと緩められるはずだが、ここでは、そういう努力はしない。

でない $x \in (a, b)$ について、

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\,x^{n-1} + R_n(x) \tag{4.1.77}$$

と書こう。このとき、剰余項は、

$$R_n(x) = \int_0^x d\xi\,\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}\,(x-\xi)^{n-1} \tag{4.1.78}$$

と表わされる。

もちろん、ここでの剰余項 $R_n(x)$ は定理 3.12 (433 ページ) での $R_n(x)$ と同じものである。ただ、別の表わし方をしたということだ。以前の (3.3.17) では「0 と x のあいだにある」という以外は素性のよくわからない ξ が登場したが、ここでの (4.1.78) では ξ は積分変数になっている。剰余項が（計算できるかどうかは別として）正確に表現されていることに注意しよう。(4.1.78) は積分形の剰余項と呼ばれる。

定理 4.7 の証明：任意の $x \in (a,b)$ を固定する。0 と x のあいだでは $f(\cdot), f'(\cdot), \ldots, f^{(n)}(\cdot)$ は全て連続なので、微分積分学の基本定理の言い換えである (4.1.58) から、$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について、

$$f^{(k)}(x) = f^{(k)}(0) + \int_0^x dy\, f^{(k+1)}(y) \tag{4.1.79}$$

がわかる。実は、この関係をくり返して用いるだけで定理が証明できる。

まず、(4.1.79) で $k = 0$ とした表式に、$k = 1$ とした表式を代入すると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \int_0^x dx_1\, f'(x_1) \\ &= f(0) + \int_0^x dx_1 \Big\{ f'(0) + \int_0^{x_1} dx_2\, f''(x_2) \Big\} \end{aligned} \tag{4.1.80}$$

となる。変数名が足りなくならないように積分変数を x_1, x_2 とした。ここで $f'(0)$ は定数だから $\int_0^x dx_1\, f'(0) = f'(0)\, x$ である。また、次に出てく

る $\int_0^x dx_1\{\int_0^{x_1} dx_2\, f''(x_2)\}$ を、かっこを省略して $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2\, f''(x_2)$ と書くことにしよう。もちろん、「まず x_2 について積分し、その結果として得られる x_1 の関数を x_1 について積分する」という意味だ。（なお、「$\int$ と dx で被積分関数を挟む」という（高校では主流の）書き方を使えば、これは $\int_0^x \int_0^{x_1} f''(x_2)\, dx_2\, dx_1$ となる。）以上を (4.1.80) に戻せば、

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2\, f''(x_2) \tag{4.1.81}$$

となる。右辺の第三項に (4.1.79) で $k = 2$ としたものを代入すると、

$$\begin{aligned}&((4.1.81)\text{ の第三項})\\ &= \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \Big\{ f''(0) + \int_0^{x_2} dx_3\, f^{(3)}(x_3) \Big\}\end{aligned} \tag{4.1.82}$$

となる。$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2\, f''(0) = (x^2/2) f'(0)$ だから、

(4.1.81) に戻せば、

$$\begin{aligned} f(x) =& f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2}\,x^2 \\ &+ \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} dx_3\, f^{(3)}(x_3) \end{aligned} \tag{4.1.83}$$

となる。マクローリン展開の形が自然に現れてきた！

あとは同じことをひたすらくり返せばいい。自分で落ち着いて考えてみるのが楽しいと思うが、一応、帰納法で示しておこう。$k < n$ となる正整数 k について

$$f(x) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f^{(j)}(0)}{j!}\,x^j + \int_0^x dx_1 \cdots \int_0^{x_{k-1}} dx_k\, f^{(k)}(x_k) \tag{4.1.84}$$

が成り立ったとする（上で $k = 1, 2, 3$ の場合は示した)。ここに (4.1.79) を代入し、

$$\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{k-1}} dx_k = \frac{x^k}{k!} \tag{4.1.85}$$

に注意すれば (気になる人は帰納法で証明しておこう)、(4.1.84) で k を $k+1$ に置き換えた関係が得られる。

こうして、求める (4.1.77) の形の展開が得られた。ただし、今のところ剰余項は、

$$R_n(x) = \int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n\, f^{(n)}(x_n) \tag{4.1.86}$$

と表わされている。これを (4.1.78) の形に書き直そう。$x > 0$ とする（負の場合も全く同じである）。(4.1.86) では、まず x_n について 0 から x_{n-1} の範囲まで積分し、得られた結果を x_{n-1} について 0 から x_{n-2} の範囲まで積分し、ということをくり返す構造になっている。しかし、もう少し大きな視点からは、ここでは

$$0 < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_2 < x_1 < x \tag{4.1.87}$$

という大小関係を保った範囲で、積分変数 $x_1, \ldots, x_n$ を自由に動かして積分していると見てよい。すると、全く同じ量を

$$R_n(x) = \int_0^x dx_n \int_{x_n}^x dx_{n-1} \cdots \int_{x_3}^x dx_2 \int_{x_2}^x dx_1\, f^{(n)}(x_n) \tag{4.1.88}$$

と表現できることがわかる[*24]。今度は、まず x_1 について x_2 から x まで積分し、得られた結果を x_2 について x_3 から x まで積分し、ということをくり返すのだ[*25]。

(4.1.88) の形だと被積分関数は x_n のみに依存するから、$x_1, \ldots, x_{n-1}$ について先に積分できる。これは簡

[*24] これは全く正しいのだが、しかし、こうやって言葉で説明しただけでは証明になっていない。本来なら積分の定義に戻って証明すべきなのだが、今はそこまでやる余裕がないので、これで許してもらうことにする。また、証明は実は多変数関数の積分の中でした方が見通しがいいはずなので、9 章を書く際の宿題にしておこうと思う。なお、次に紹介するこの定理の別証明は一変数の積分の知識だけで理解できる。

[*25] こんな書き換えができるのかと疑問に思う人は、対応する和の書き換え $\sum_{i=1}^{N}\{\sum_{j=1}^{i} f(i,j)\} = \sum_{j=1}^{N}\{\sum_{i=j}^{N} f(i,j)\}$ を吟味することをお勧めする。ここで $f(i,j)$ は（$f(i,j) = f(j,i)$ とは限らない）任意の関数である。例えば、$N = 3$ として、この等式を書き下してみよう。

単で、順番に積分していけば、

$$\int_{x_n}^{x} dx_{n-1} \cdots \int_{x_2}^{x} dx_1 = \int_{x_n}^{x} dx_{n-1} \cdots \int_{x_3}^{x} dx_2 \, (x - x_2)$$
$$= \int_{x_n}^{x} dx_{n-1} \cdots \int_{x_4}^{x} dx_3 \, \frac{(x - x_3)^2}{2} = \cdots = \frac{(x - x_n)^{n-1}}{(n-1)!} \tag{4.1.89}$$

となる。これを (4.1.88) に戻せば目標だった $R_n(x)$ の表式 (4.1.78) が得られる。 ∎

<u>定理 4.7 の別証明</u>：実は、定理 4.7 はもっと簡潔に証明できる。ただ、「同じ (4.1.79) をくり返して使うだけで自然に展開と剰余項が出てくる」という上の証明に比べると、技巧的で面白みに欠ける。念のため、ここで解説しておこう。$x \in (a, b)$ を固定し、s の関数

$$\mathcal{R}(s) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(s)}{k!} (x - s)^k \tag{4.1.90}$$

を定義する。明らかに $\mathcal{R}(x) = 0$ 及び $\mathcal{R}(0) = R_n(x)$

なので、(4.1.58) より

$$R_n(x) = -\int_0^x ds\,\frac{d}{ds}\mathcal{R}(s) \tag{4.1.91}$$

がいえる。微分を計算すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{ds}\mathcal{R}(s) \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}\,(x-s)^k + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(k)}(s)}{(k-1)!}\,(x-s)^{k-1} \\
&= -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}\,(x-s)^k + \sum_{k=0}^{n-2}\frac{f^{(k+1)}(s)}{k!}\,(x-s)^k \\
&= -\frac{f^{(n)}(s)}{(n-1)!}\,(x-s)^{n-1}
\end{aligned} \tag{4.1.92}$$

となる。二つ目の $=$ を得るために、二つ目の和で $k-1$ と呼んでいたものを k と呼び直した。(4.1.91) に代入すれば、定理の主張である (4.1.78) がいえる。∎

■関数 $\log(1+x)$ のマクローリン級数　3.3.2 節で関数 $\log(1+x)$ のマクローリン級数 (3.3.32) を導いたが、

これが正しいことは $-1/2 \leq x \leq 1$ を満たす x についてしか証明できなかった。ここでは、剰余項の新しい表現 (4.1.78) を使って、残っている $-1 < x < -1/2$ の場合にも (3.3.32) が成立することを示そう。

(4.1.78) に導関数の具体形 (3.3.29) を代入すると、

$$R_n(x) = \int_0^x d\xi\, (-1)^{n+1} \frac{(x-\xi)^{n-1}}{(1+\xi)^n} \tag{4.1.93}$$

となる。以下では、$-1 < x < 0$ としよう。積分変数 ξ も負の値をとるので、便利のため $s = -\xi$ と変数変換すると、

$$\begin{aligned} R_n(x) &= -\int_0^{|x|} ds\, \frac{(|x|-s)^{n-1}}{(1-s)^n} \\ &= -\int_0^{|x|} ds\, \frac{1}{1-s} \Big(\frac{|x|-s}{1-s}\Big)^{n-1} \end{aligned} \tag{4.1.94}$$

と書き直せる。$0 \leq s \leq |x|$ の範囲では $(|x|-s)/(1-s)$ は s について非増加である（s で微分すればすぐわか

る)。よって

$$0 \leq \frac{|x|-s}{1-s} \leq |x| \tag{4.1.95}$$

なので、これを (4.1.94) に代入すれば、

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \int_0^{|x|} ds\, \frac{1}{1-s}\Big(\frac{|x|-s}{1-s}\Big)^{n-1} \\ &\leq |x|^{n-1} \int_0^{|x|} \frac{ds}{1-s} = |x|^{n-1}\,\big|\log(1-|x|)\big| \end{aligned} \tag{4.1.96}$$

が得られる。$|x| < 1$ だから、$n \to \infty$ で右辺はゼロに収束する。つまり、目標だった $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ が証明された。

4.2　積分の計算

ここからは定積分と不定積分の具体的な計算方法を見ていこう。積分の実践編だ。以下では、代表的な計算方法について典型的な例を見ながら解説する。

4.2.1　原始関数を用いる

4.1.3 節で見たように、ある関数 $f(x)$ の原始関数と不定積分は同じものだった。だから、原始関数がみつかれば、それで不定積分ができたことになる。

与えれた関数の原始関数がいつでもみつけられるというわけではない。探すのが難しい場合もあるし、関数 $f(x)$ が簡単な形に書けても原始関数は簡単には書き表せないということもある[*26]。ただ、運がよければ、3.2 節で学んだ微分の知識を利用して原始関数がみつけられる。たとえば、$(x^3)' = 3x^2$ つまり $(x^3/3)' = x^2$ と知っているから、$f(x) = x^2$ という関数の原始関数（の一つ）が $x^3/3$ だとわかる。よって、この場合の不

[*26] たとえば、$f(x) = e^{-x^2}$ という関数の原始関数は我々の知っている普通の関数の組み合わせでは書けないことが知られている。

定積分は

$$\int dx\, x^2 = \frac{x^3}{3} + C \tag{4.2.1}$$

とわかる（C は任意定数)。不定積分（あるいは、原始関数）がわかれば、定積分は (4.1.57) によってすぐに求められる。今の例なら、

$$\int_a^b dx\, x^2 = \left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3 - a^3}{3} \tag{4.2.2}$$

となる（もちろん、こんな計算は高校数学で完全に学んでいるのだが)。

■原始関数の表　このような計算をスムーズに進めるには、3.2 節での微分の知識をもとに関数 $f(x)$ と原始関数 $F(x)$ を対応させる表を作っておくと便利だ[*27]。こういう表は自分で作った方がためになるとも思うが、ここに掲載しておこう。また「x の範囲」のところは特

[*27] 414 ページの導関数の表を（変数の範囲に注意して）逆に見てもいいわけだが。

に注意すべきものだけを書いた[*28]。

[*28] 一つ目の x^α は、α が正整数なら全て $x \in \mathbb{R}$ について正しい。

関数	x の範囲	原始関数
$x^{\alpha}\ (\alpha \neq -1)$	$x > 0$	$\dfrac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$
x^{-1}	$x \neq 0$	$\log\lvert x\rvert$
$\sin x$		$-\cos x$
$\cos x$		$\sin x$
$\dfrac{1}{(\cos x)^2}$		$\tan x$
$\tan x$		$-\log\lvert\cos x\rvert$
e^x		e^x
$\log x$	$x > 0$	$x\log x - x$
$\sinh x$		$\cosh x$
$\cosh x$		$\sinh x$
$\dfrac{1}{(\cosh x)^2}$		$\tanh x$
$\tanh x$		$\log\cosh x$
$\{f(x)\}^{\alpha}f'(x)\ (\alpha \neq -1)$		$\dfrac{1}{\alpha+1}\{f(x)\}^{\alpha+1}$
$\dfrac{f'(x)}{f(x)}$		$\log\lvert f(x)\rvert$

最後の二つは、具体的な関数ではなく、一般的な微分可能な関数 $f(x)$ についての関係である。$\log x$ の原始関数は (4.1.66) で求めた。

なお、たとえば $f(x) = \cos(\alpha x)$（ただし、α を定数）という関数は表の中にはないわけだが、これも簡単だ。$\{\sin(\alpha x)\}' = \alpha \cos(\alpha x)$ であることから $\int dx \cos(\alpha x) = \alpha^{-1} \sin(\alpha x) + C$ とわかるし、(4.1.72), (4.1.73) で説明したように変数変換（置換積分）を使ってもいい。

表の二つ目にあるように x^{-1} の原始関数は $\log|x|$ なのだが、これは混乱しやすいので少し丁寧に見ておこう。まず、$\log x$ は $x > 0$ のみで定義されており、この範囲では $(\log x)' = 1/x$ だった。次に、$x < 0$ では、$\log(-x)$ が定義されている。これを x で微分すれば、$(\log(-x))' = -1/(-x) = 1/x$ となる。これらをまとめれば $x \neq 0$ において $(\log|x|)' = 1/x$ ということになる $\log|x|$ と x^{-1} のグラフを描いて納得しておくといいだろう。

同様に、正とは限らない実定数 a と b（ただし $a \neq 0$）について、$a\,x + b \neq 0$ ならば

$$\frac{d}{dx}\log|a\,x+b| = \frac{a}{a\,x+b} \tag{4.2.3}$$

となる。ここから、不定積分

$$\int \frac{dx}{a\,x+b} = \frac{1}{a}\log|a\,x+b| + C \tag{4.2.4}$$

が得られる[*29]。この不定積分は 4.2.4 節でみる有理関数の積分で重要な役割を果たす。

■逆三角関数と逆双曲線関数が原始関数になる場合

414 ページの $f(x)$ と $f'(x)$ の表には三角関数と双曲線関数の逆関数の導関数も載っている。これらの方が（原始関数がすぐにはわからないという点で）重宝するので、ここにまとめておこう[*30]。

[*29] $\displaystyle\int \frac{dx}{a\,x+b}$ というのは、もちろん $\displaystyle\int dx\,\frac{1}{a\,x+b}$ のこと。この本ではこの書き方がよくでてくる（私の癖のようです）。

[*30] 表に arccos が入っていないのは書き忘れではない。なぜか考えてみよう。

関数	x の範囲	原始関数
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert < 1$	$\arcsin(x)$
$\dfrac{1}{1+x^2}$		$\arctan(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\sinh^{-1}(x)$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$x > 1$	$\cosh^{-1}(x)$
$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$（範囲に注意！）	$\tanh^{-1}(x)$

表の最後の $1/(1-x^2)$ のところに「範囲に注意！」と書いたが、これは重要。この節の最後と 4.2.4 節を見よ。

この表の最初の応用例として、$a > 0$ を定数として、定積分

$$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \tag{4.2.5}$$

を計算してみよう[*31]。まず不定積分 $\int dx/\sqrt{a^2-x^2}$ を求めるわけだが、表を見れば arcsin が使えそうなの

[*31] 表が手元になくても、この積分は変数変換（置換積分）で簡単に計算できる。4.2.3 節を見よ。

は明らかだ。ただし、単純に $\arcsin(x)$ としたのでは a が出てこない。

ここでの正攻法のやり方は (4.1.72), (4.1.73) で説明した変数変換 (置換積分) である。新しい変数 s を使って $x = as$ とすれば、$dx = a\,ds$ なので、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \int \frac{a\,ds}{a\sqrt{1 - s^2}} \\ &= \arcsin(s) + C = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + C \qquad (4.2.6)\end{aligned}$$

となり、正しい原始関数は $\arcsin(x/a)$ とわかる。あとは求める定積分に戻して、

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= \left[\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a \\ &= \arcsin(1) - \arcsin(0) = \frac{\pi}{2} \qquad (4.2.7)\end{aligned}$$

となる。なお、逆三角関数の計算をする際には定義域に注意する必要がある。不安な人は 3.2.6 節を見直してほしい。

さて、上で不定積分 $\int dx/\sqrt{a^2 - x^2}$ を求める際に真面目に変数変換をしたわけだが、表から arcsin が候補

だと知っているのだから、$\arcsin(x/a)$ という正解も計算しなくても勘でわかりそうなものだ。実際、闇雲に試すとしても、まず例えば $\arcsin(ax)$ を微分してみてダメとわかれば、次に考えるのは $\arcsin(x/a)$ だろうから、すぐに正解に到達すると思われる。しかし、もう少し賢いコツがある。今、われわれは数学の問題として定積分 (4.2.5) を計算したいのだが、あえて、これが「物理っぽい」問題だと思うことにして、a は長さを表わす定数で、x も長さの次元を持った変数だと（勝手に）みなすことにしよう[*32]。そう思い込んだところで問題は変わらないのだが、長さの次元に注目した次元解析ができるようになる。まず、arcsin などの逆三角関数の引数は、元々は三角比なのだから、無次元の量でなくてはならない。となると、x や ax は無理で、（簡単な形は）x/a しかない。さらに、定積分 (4.2.5) の次元を調べると、分子の dx が長さの次元を

[*32] もちろん、これが許されるのは被積分関数が $a^2 - x^2$ という「次元のそろった」量だけに依存するから。

もち、分母の $\sqrt{a^2-x^2}$ も長さの次元をもつので、結局、全体としては無次元になる。arcsin そのものは無次元量だから、arcsin が係数なしで（あるいは、なんらかの無次元の係数がかかった形で）顔を出すと推測される。そこで、次元解析から予想される「第一候補」は $\arcsin(x/a)$ である。これを実際に x で微分してみれば、確かに $1/\sqrt{a^2-x^2}$ が出てくることが確かめられる。

せっかくなので、同じ方法で不定積分

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} \tag{4.2.8}$$

を求めてみよう（a は正の定数)。まず、上の表を見ると、二つ目に $1/(1+x^2)$ が出ているので、明らかにこれが使える。求める不定積分は arctan で書ける。上と同じように a と x が長さの次元を持っていると（勝手に）思うことにする。まず、積分については、分子の dx が長さの次元、分母の x^2+a^2 が (長さ)^2 の次元なので、全体として 1/(長さ) の次元をもっている。ま

た、arctan の引数は無次元量である x/a しかなさそうだ。よって、原始関数の第一候補は $a^{-1}\arctan(x/a)$ である。もちろん、これだけでは本当にこの形でいいかどうかはわからないが、真面目に微分を計算してみると、

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right\} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+(x/a)^2} = \frac{1}{x^2+a^2} \tag{4.2.9}$$

となり、これが正解だとわかる[*33]。

問 4.2.1.a　以下の定積分を求めよ。$a > 0$ は定数である。

$$\text{(a)}\ \int_{-a/2}^{a/2}\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}},\quad \text{(b)}\ \int_{-a}^{a}\frac{dx}{x^2+a^2} \tag{4.2.10}$$

問 4.2.1.b　以下の不定積分を求めよ。$a, b > 0$ は定

[*33] この不定積分の変数変換（置換積分）による導出を問題 4.2.3.b（550 ページ）でみる。

数である。

$$\text{(a)} \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \text{(b)} \int \frac{dx}{a\,x^2+b} \tag{4.2.11}$$

さて、上の表の最後を見ると、$1/(1-x^2)$ の原始関数が $\tanh^{-1}(x)$ だとわかる。つまり、定積分については

$$\int_a^b \frac{dx}{1-x^2} = \tanh^{-1}(b) - \tanh^{-1}(a) \tag{4.2.12}$$

が成り立つということになりそうだ。しかし、この等式には問題がある。411 ページの図 3.15 のように $\tanh(y)$ は -1 から 1 のあいだを動くから、逆関数 $\tanh^{-1}(x)$ は $|x|<1$ についてしか定義できないのだ。確かに $1/(1-x^2)$ は $x=1$ で発散するので、(4.2.12) でたとえば $a=0$, $b=2$ とした定積分には意味がない。しかし、$|x|>1$ ならば $1/(1-x^2)$ は有限の負の値をとるわけだから、当然、その範囲での定積分にも意味があるはずだ。例えば、$\int_2^3 dx/(1-x^2)$ はちゃんと定まっていて、数値計算するとだいたい -2.027 くら

いになる。しかし、これは $\tanh^{-1}(3) - \tanh^{-1}(2)$ からは求められない。つまり、より広い x の範囲で成立する $1/(1-x^2)$ の原始関数が必要なのだ。それについては、4.2.4 節でみる。

4.2.2　部分積分を用いる

部分積分の公式 (4.1.64), (4.1.65) は具体的な積分の計算のためにも役に立つ。少しだけ例を見よう。

重要な $\log x$ の積分はすでに (4.1.66) で導いた。a を 0 でない実定数として関数 $x\,\cos(ax)$ の不定積分を求めてみよう。$(\sin(ax))' = a\,\cos(ax)$ に注意して不定積分についての部分積分の公式 (4.1.65) を用いれば、

$$\begin{aligned}\int dx\,x\,\cos(ax) &= \frac{1}{a}\int dx\,x(\sin(ax))' \\ &= \frac{1}{a}x\,\sin(ax) - \frac{1}{a}\int dx\,\sin(ax) \\ &= \frac{1}{a}x\,\sin(ax) + \frac{1}{a^2}\cos(ax) + C\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

となる。

問 4.2.2.a　$x\,e^{cx}$ の不定積分を求めよ。c は 0 でない実定数とする。

a, b を実定数、c を 0 でない実定数として、定積分 $\int_a^b dx\,x\,e^{cx}$ を求めておこう。問 4.2.2.a の結果を用いてもいいが、定積分の部分積分の公式 (4.1.64) を直接用いると、

$$\begin{aligned}\int_a^b dx\,x\,e^{cx} &= \frac{1}{c}\int_a^b dx\,x\,(e^{cx})' \\ &= \frac{1}{c}\Big[x\,e^{cx}\Big]_a^b - \frac{1}{c}\int_a^b e^{cx} \\ &= \frac{1}{c}\Big[x\,e^{cx}\Big]_a^b - \frac{1}{c^2}\Big[e^{cx}\Big]_a^b \qquad (4.2.14)\end{aligned}$$

となる。ここで、特に $a=0$, $b=\infty$, $c=-\gamma<0$ と

すると、

$$\int_0^\infty dx\, x\, e^{-\gamma x} = -\frac{1}{\gamma}\left[x\, e^{-\gamma x}\right]_0^\infty - \frac{1}{\gamma^2}\left[e^{-\gamma x}\right]_0^\infty$$
$$= \frac{1}{\gamma^2} \tag{4.2.15}$$

が得られる。この結果は減衰の微分方程式の解について議論するときに用いる。(5.2.14) を見よ。

特殊関数の一種であるガンマ関数は、$x > 0$ について、定積分

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^{x-1} \tag{4.2.16}$$

で定義される。明らかに

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty dt\, e^{-t} = -[e^{-t}]_0^\infty = 1 \tag{4.2.17}$$

である。$x > 0$ として部分積分の公式 (4.1.64) を用い

ると、

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty dt\, e^{-t}\, t^x = -\int_0^\infty dt\, t^x\, (e^{-t})'$$
$$= -[t^x\, e^{-t}]_0^\infty + \int_0^\infty dt\, x\, t^{x-1}\, e^{-t} \tag{4.2.18}$$

となる。最右辺は $x\int_0^\infty dt\, t^{x-1}\, e^{-t} = x\,\Gamma(x)$ だから、

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \tag{4.2.19}$$

という漸化式が示された。特に正の整数 n について、この漸化式をくり返し用い、最後に (4.2.17) を使うと、

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n) = n(n-1)\,\Gamma(n-1) = \cdots = n! \tag{4.2.20}$$

が得られる[*34]。$\Gamma(x+1)$ は階乗を正の実数 x にまで拡張したものなのである。

もう一つの応用例として量子力学の例題で出てくる

[*34] 別の計算方法を 4.2.6 節で紹介する

定積分

$$\int_0^\pi dx\, x^2\, (\sin x)^2 \tag{4.2.21}$$

を計算してみよう[*35]。こういう計算はまずは倍角の公式 $(\sin x)^2 = (1-\cos(2x))/2$ を使って変形するのが見通しがいい。最初の 1/2 の方は、(4.2.2) にも出てきたが、もちろん、

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi dx\, x^2 = \frac{1}{6}[x^3]_0^\pi = \frac{\pi^3}{6} \tag{4.2.22}$$

となる。定積分 $\int_0^\pi dx\, x^2\, \cos(2x)$ を部分積分で計算しよう[*36]。まず、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi dx\, x^2\, \cos(2x) &= \int_0^\pi dx\, x^2 \left(\frac{1}{2}\sin(2x)\right)' \\ &= \left[\frac{x^2\, \sin(2x)}{2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi dx\, x\, \sin(2x)\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

[*35] 有限区間に閉じ込められた自由粒子の位置のゆらぎの期待値の計算に出てくる。ぼくのテストではみんなちゃんとできていました。

[*36] 別の計算方法を 4.2.6 節で紹介する

最右辺第一項はゼロだから第二項を再び部分積分で評価すると、

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^\pi dx\, x\, \sin(2x) = \int_0^\pi dx\, x \left(\frac{1}{2}\cos(2x)\right)' \\
&= \left[\frac{x\, \cos(2x)}{2}\right]_0^\pi - \frac{1}{2}\int_0^\pi dx\, \cos(2x) = \frac{\pi}{2} \qquad (4.2.24)
\end{aligned}
$$

となる。今度は積分がゼロだった。符号や係数を間違えないように足し合わせれば、目標の定積分が

$$
\int_0^\pi dx\, x^2\, (\sin x)^2 = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} \qquad (4.2.25)
$$

と求められる。

4.2.3　変数変換（置換積分）を用いる

積分の変数変換（置換積分）(4.1.67), (4.1.69) が実際の積分計算でも役に立つことは高校の数学ですでにお馴染みだろう。ここでは基本的な例を簡単に見る。

まず（わざとらしい例だが)、積分変数 x は正の範囲

を動くとして、不定積分

$$\int dx\, x^3\, e^{x^2} \tag{4.2.26}$$

を求てみよう。e^{x^2} というのが扱いづらいので、新しい積分変数を $s = x^2$ とする。逆に解けば $x = \sqrt{s}$ である。(4.1.67) のような真面目な書き方をすれば $x(s) = \sqrt{s}$ ということだ。ここでは、省略版の (4.1.71) に沿って計算しよう。$dx/ds = 1/(2\sqrt{s})$ なので、(4.1.71) に代入すれば、

$$\int dx\, x^3\, e^{x^2} = \int ds\, \frac{1}{2\sqrt{s}}\, s^{3/2}\, e^s = \frac{1}{2}\int ds\, s\, e^s \tag{4.2.27}$$

となる。最後の積分は問 4.2.2.a や (4.2.14) で見たように部分積分で簡単に計算できて、$\int ds\, s\, e^s = (s-1)e^s + C$ である。よって、s を x に書き戻せば、

$$\int dx\, x^3\, e^{x^2} = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + C \tag{4.2.28}$$

のように不定積分が求まる。右辺を実際に微分して確かめてみよう。

次に定番の例だが、$a > 0$ を定数として、

$$\int_0^a dx\sqrt{a^2 - x^2} \tag{4.2.29}$$

という定積分を計算してみよう。これは半径 a の円の四分の一の図形の面積だから、答えが $\pi a^2/4$ であることは知っているわけだが。

$\sqrt{a^2 - x^2}$ という形を見たら、新しい積分変数 θ によって $x(\theta) = a\sin\theta$ と変数変換するのが常套(じょうとう)手段だ。x（真面目に書けば $x(\theta)$）と θ の値の対応は、

x	0	$\to$	a
θ	0	$\to$	$\pi/2$

となる。$x'(\theta) = a\cos\theta$ であり、また、この θ の範囲では $\cos\theta \geq 0$ に注意すれば、$\sqrt{a^2 - \{x(\theta)\}^2} = a\cos\theta$

である。これらを (4.1.67) に代入すれば、

$$\int_0^a dx\sqrt{a^2-x^2} = \int_0^{\pi/2} d\theta\, a\cos\theta\, a\cos\theta$$
$$= a^2\int_0^{\pi/2} d\theta(\cos\theta)^2 \tag{4.2.30}$$

が得られる。あとは、コサインの二乗についての定積分

$$I := \int_0^{\pi/2} d\theta(\cos\theta)^2 = \frac{\pi}{4} \tag{4.2.31}$$

を示せばよい。

(4.2.31) はいろいろなやり方で示せるが、個人的に好きなのは以下のやり方。θ が 0 から $\pi/2$ まで変化するとき $\cos\theta$ はちょうど 1 から 0 まで変化する。この事実とサインとコサインは同じ形をした関数だったことから $I = \int_0^{\pi/2} d\theta(\sin\theta)^2$ が言える（わからなければグラフを描いて、この定積分がどういう面積に対応す

るかを考えてみよう)。よって、

$$2I = \int_0^{\pi/2} d\theta\{(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2\} = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2} \tag{4.2.32}$$

である。より標準的なやり方は、倍角の公式 $(\cos\theta)^2 = (1+\cos 2\theta)/2$ を使う方法だろう。やや大げさだが、後で示す (4.2.65) で $n = 2$ としてもよい。

上で使った変数変換を用いれば、以前に原始関数の表の助けを借りて導いた不定積分 (4.2.6) を簡単に導出できる。実際、サインの逆関数の導関数など普通は覚えていないので、そちらをわざわざ再導出するくらいならば、最初から変数変換を使って計算した方が（間違いもおきないし）早い。簡単な計算なので見ておこう。上と同様に $x = a\sin\theta$ とすると、$ds/d\theta = a\cos\theta$ かつ $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$ である。不定積分の変数変換

の簡易版の公式 (4.1.71) に代入すれば、

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int d\theta \, \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta} = \int d\theta = \theta + C \tag{4.2.33}$$

となる。最右辺に $\theta = \arcsin(x/a)$ を代入すれば求める不定積分 (4.2.6) が得られる。

問 4.2.3.a　次の定積分を計算せよ。

$$\text{(a)} \int_a^b dx \, x^5 \, e^{x^3}, \quad \text{(b)} \int_0^{\pi/2} d\theta \, \sin\theta \, \cos\theta \, e^{\sin\theta} \tag{4.2.34}$$

問 4.2.3.b　$a > 0$ とする。(4.2.9) で見た不定積分

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{4.2.35}$$

を $x = a\tan\theta$ という変数変換によって導け。

4.2.4　有理関数の積分

$f(x) = \dfrac{(x\text{ の実係数の多項式})}{(x\text{ の実係数の多項式})}$ という形の関数を x の有理関数と呼ぶ。有理関数の積分 $\int dx\, f(x)$ は必ず計算できることが知られている。ここでは、$f(x)$ の分子と分母がどちらも 2 次式の場合だけを詳しく扱う。初めに見る $1/(x$ の 2 次式$)$ の形の関数の不定積分は様々な場面で登場する。

■$1/(x$ の 2 次式$)$ **の不定積分**　4.2.1 節の最後で、関数 $1/(1-x^2)$ を積分するには、手持ちの原始関数の表 (534 ページ) から導いた (4.2.12) では不十分であることを見た。ここでは、まず、関数 $1/(a^2-x^2)$ の積分を計算しよう（a は正の定数)。a^2-x^2 が因数分解できることを思い出して、被積分関数を

$$\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{(a+x)(a-x)} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right) \tag{4.2.36}$$

のように、部分分数に分解する。(4.2.4) を思い出せば、かっこの中の関数の不定積分は、それぞれ

$$\int \frac{dx}{a+x} = \log|a+x|, \quad \int \frac{dx}{a-x} = -\log|a-x| \tag{4.2.37}$$

である（積分定数 C を省略した）。よって求める不定積分は

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \tag{4.2.38}$$

となる。以前に見た $\tanh^{-1}(x)$ とは似ても似つかない気がするが、実は、$|x| < a$ ならば右辺はまさに $(2a)^{-1}\tanh^{-1}(x/a)$ に等しいのだ。(3.2.124) を見よ。つまり、(4.2.38) は 4.2.1 節で見た結果を含む一般的な不定積分の表式なのである。

次に、$1/(x^2+a^2)$ という関数（a は正の定数）の不定積分は、(4.2.9), (4.2.35) で見たように、

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \tag{4.2.39}$$

とわかっている。

$1/(x$ の 2 次式) という形の関数としては、あとは $1/x^2$ がある。もちろん、これが最も簡単で、不定積分は

$$\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C \tag{4.2.40}$$

である。

一般に、$1/(x$ の 2 次式) という形の関数の積分は、上の (4.2.38), (4.2.39), (4.2.40) のいずれかの形に帰着することが簡単にわかる。b, c を任意の実定数として $f(x) = x^2 + b\,x + c$ という 2 次式を考えよう（もちろん、一般の形は $ax^2 + bx + c$ だが、積分する前に全体を a で割ればこの形になる)。平方完成して、

$$f(x) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \gamma \tag{4.2.41}$$

と書いておく。ここで、平方の「お釣り」を $\gamma := c - b^2/4$ と書いた。明らかに γ の値に応じて積分の形が変わる。

まず、最も簡単な $\gamma = 0$ の場合は、

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{(x+b/2)^2} = -\Big(x + \frac{b}{2}\Big)^{-1} + C \tag{4.2.42}$$

となる。次に $\gamma > 0$ の場合は、$y = x + (b/2)$ と変数変換して (4.2.39) を使うことで、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{f(x)} &= \int \frac{dy}{y^2+\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \arctan\Big(\frac{y}{\sqrt{\gamma}}\Big) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \arctan\Big(\frac{x+(b/2)}{\sqrt{\gamma}}\Big) + C \end{aligned} \tag{4.2.43}$$

となる。最後に、$\gamma < 0$ の場合も同じ変数変換をして (4.2.38) を使えば、

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{f(x)} &= -\int \frac{dy}{|\gamma| - y^2} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}} \log\Big|\frac{\sqrt{|\gamma|}+y}{\sqrt{|\gamma|}-y}\Big| + C \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{|\gamma|}} \log\Big|\frac{x+\frac{b}{2}+\sqrt{|\gamma|}}{x+\frac{b}{2}-\sqrt{|\gamma|}}\Big| + C \end{aligned} \tag{4.2.44}$$

と不定積分が求められる。

■(x の 2 次式)/(x の 2 次式) **の不定積分**　一般の (x の 2 次式)/(x の 2 次式) という形の関数の不定積分を考えよう。まだ道は遠そうだと思うかもしれないが、実は、肝心の部分は上で終わっているのだ。

まず、注意するのは、

$$\int dx \frac{2x+b}{x^2+bx+c} = \int dx \frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c}$$
$$= \log|x^2+bx+c| + C \tag{4.2.45}$$

という簡単な不定積分だ。530 ページの原始関数の表の一番下の関係を使ったと言ってもいい。これで (x の 1 次式)/(x の 2 次式) という関数の不定積分は本質的には終わってしまった。

あとは、b, c, p, q を任意の実定数として、分子も分母も 2 次の有理式を

$$\frac{x^2+px+q}{x^2+bx+c} = 1 + A\frac{2x+b}{x^2+bx+c} + B\frac{1}{x^2+bx+c} \tag{4.2.46}$$

のように分解すればいい。ここに現れた係数は

$$A = \frac{p-b}{2}, \quad B = q - c - \frac{b(p-b)}{2} \tag{4.2.47}$$

である。(4.2.46) の右辺の三つの項はそれぞれ不定積分できる。

問 4.2.4.a　a を正の定数とする。$n = 1, 2, 3, \ldots$ について、

$$\int dx\, \frac{x}{(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(1-n)} \frac{1}{(x^2+a^2)^{n-1}} + C \tag{4.2.48}$$

を示せ。（ヒント：530 ページの原始関数の表の下から二つ目の関係式を使う。）

問 4.2.4.b　a を正の定数とし、$n = 1, 2, \ldots$ について、

$$I_n := \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} \tag{4.2.49}$$

とする。当たり前の関係

$$I_1 = \int dx\, \frac{(x)'}{x^2+a^2} \tag{4.2.50}$$

に部分積分を使うことで、右辺を I_2 を使って表わせ。それと I_1 についての (4.2.39) から

$$I_2 = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C \quad (4.2.51)$$

を示せ[*37]。同じやり方で I_{n+1} を I_n で表わす漸化式を作ることもできる。興味のある人はやってみよう。

4.2.5　複素数の指数関数を用いる

3.2.7 節で定義した複素数 z の指数関数 $e^z = \exp(z)$ は積分を計算するためにも役に立つ。高校では複素数の指数関数は扱わないので、高校数学では面倒だった指数関数や三角関数の積分計算が簡単にできてしまうこともある[*38]（ただし、すべてが簡単になるわけではない)。

[*37] 同じ結果の別の計算法を 4.2.6 節でみる。

[*38] ここで扱うのは複素積分ではない。

■基本の関係　a をゼロでない複素定数、x は実変数とする。$e^{a\,x}$ は、実数 x を複素数 $e^{a\,x}$ に写す関数である。

(3.2.88) でみたように、

$$\frac{d}{dx}e^{a\,x} = a\,e^{a\,x} \tag{4.2.52}$$

だった。もちろん、この式は、

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Re}\,[e^{a\,x}] = \mathrm{Re}\,[a\,e^{a\,x}]$$
$$\frac{d}{dx}\mathrm{Im}\,[e^{a\,x}] = \mathrm{Im}\,[a\,e^{a\,x}] \tag{4.2.53}$$

のように、この関数の実部と虚部それぞれについての関係とみることもできる。

さて、(4.2.52) の両辺を複素数 a で割ると、$(1/a)\{d\,e^{a\,x}/dx\} = e^{a\,x}$ だが、$1/a$ は定数だから微分の中に入れてもかまわないので、

$$\frac{d}{dx}\frac{e^{a\,x}}{a} = e^{a\,x} \tag{4.2.54}$$

となる。これもまた実部と虚部それぞれについての関係とみることもできる。

(4.2.54) を逆に見て不定積分の関係を書けば、

$$\int dx\, e^{a\,x} = \frac{e^{a\,x}}{a} + C \tag{4.2.55}$$

となる。ここで C は複素数の任意定数である。しつこいが、これももちろん、実部と虚部それぞれについての関係

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left[\int dx\, e^{a\,x}\right] &= \int dx\, \mathrm{Re}\,[e^{a\,x}] = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{a\,x}}{a}\right] + A \\ \mathrm{Im}\left[\int dx\, e^{a\,x}\right] &= \int dx\, \mathrm{Im}\,[e^{a\,x}] = \mathrm{Im}\left[\frac{e^{a\,x}}{a}\right] + B\end{aligned} \tag{4.2.56}$$

とみてもよい。ただし、$C = A + iB$ とした（つまり、$A = \mathrm{Re}\,[C], B = \mathrm{Im}\,[C]$ である）。C が複素数の任意定数だから、A, B が実数の任意定数だとみなしてもよい。

■指数関数と三角関数の積の積分　$\alpha,\ \beta$ を実定数、x を実変数として、$e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x)$ という関数の不定積分

を求めよう。これは実数上の実数値関数の問題で、部分積分で求めることができるのだが、数の範囲を複素数まで広げることで、かなり簡単に求められる。

まずオイラーの公式 (3.2.102) から $\cos(\beta\,x) = \mathrm{Re}\,[e^{i\beta\,x}]$ である。一般に u が実数なら、$u\,\mathrm{Re}\,[z] = \mathrm{Re}\,[u\,z]$ だから、

$$\begin{aligned} e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x) &= e^{\alpha\,x}\,\mathrm{Re}\,[e^{i\beta\,x}] \\ &= \mathrm{Re}\,[e^{\alpha\,x}\,e^{i\beta\,x}] \\ &= \mathrm{Re}\,[e^{(\alpha+i\beta)\,x}] \end{aligned} \tag{4.2.57}$$

と書ける。よって (4.2.55)（あるいは、(4.2.56)）から直ちに

$$\begin{aligned} \int dx\,e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x) &= \int dx\,\mathrm{Re}\,[e^{(\alpha+i\beta)\,x}] \\ &= \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(\alpha+i\beta)\,x}}{\alpha+i\beta}\right] + A \end{aligned} \tag{4.2.58}$$

となる。上で見たように、A は実数の任意定数。

ここで、実部を計算するために、(2.2.57) の「分母の

有理化」のテクニックを用いて、

$$\begin{aligned}\frac{e^{(\alpha+i\beta)\,x}}{\alpha+i\beta} &= \frac{e^{\alpha\,x}\,e^{i\beta\,x}}{\alpha+i\beta}\\ &= \frac{e^{\alpha\,x}\{\cos(\beta x)+i\,\sin(\beta x)\}}{\alpha+i\beta}\\ &= \frac{e^{\alpha\,x}\{\cos(\beta x)+i\,\sin(\beta x)\}(\alpha-i\beta)}{(\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta)}\\ &= \frac{e^{\alpha\,x}}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\{\alpha\,\cos(\beta x)+\beta\,\sin(\beta x)\}\\ &\qquad +i\{-\beta\,\cos(\beta x)+\alpha\,\sin(\beta x)\}\Big]\end{aligned} \tag{4.2.59}$$

と変形する。この実部をとるのは簡単で、

$$\int dx\,e^{\alpha\,x}\cos(\beta\,x) = \frac{e^{\alpha\,x}\{\alpha\,\cos(\beta x)+\beta\,\sin(\beta x)\}}{\alpha^2+\beta^2}+A \tag{4.2.60}$$

となる。念のため右辺を微分してこの式が正しいことをチェックしておこう。

■定積分の計算　定積分への応用として、n を正の整数として $\int_0^{2\pi} dx(\cos x)^n$ を求めよう。高校数学ではこ

の定積分は部分積分と漸化式を用いて求めるのだが、三角関数を指数関数で表わすと（あの苦労はなんだったのかと思うほど）簡単に計算できる。

m を 0 ではない整数とすると、(4.2.55) より

$$\int_0^{2\pi} dx\, e^{imx} = \frac{1}{im}[e^{imx}]_0^{2\pi} = 0 \tag{4.2.61}$$

である。$m = 0$ の場合の積分は（$e^0 = 1$ だから）自明で、

$$\int_0^{2\pi} dx\, e^{imx} = \begin{cases} 2\pi & m = 0 \text{ のとき} \\ 0 & m = \pm 1, \pm 2, \ldots \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.2.62}$$

がわかる。三角関数を指数関数で表わす (3.2.103) を

用いると、求めたい定積分は、

$$
\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} dx(\cos x)^n \\
&= \int_0^{2\pi} dx \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n \\
&= \int_0^{2\pi} dx \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n!-m!)} (e^{ix})^m (e^{-ix})^{n-m} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n!-m!)} \int_0^{2\pi} dx\, e^{i(2m-n)x} \qquad (4.2.63)
\end{aligned}
$$

と書き換えられる。もちろん、二項定理 (3.2.1) を用いた。(4.2.62) より最後の積分は $2m-n=0$ になるとき（つまり、$m=n/2$ のとき）だけ 2π に等しく、それ以外ではゼロとわかる。よって、これ以上は何も計算しないで、

$$
\int_0^{2\pi} dx\,(\cos x)^n = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2^n} \dfrac{n!}{((\frac{n}{2})!)^2} & n \text{ が偶数のとき} \\ 0 & n \text{ が奇数のとき} \end{cases} \qquad (4.2.64)
$$

という結果が得られる。n が偶数のときはコサインの対称性を考えれば、

$$\int_0^{\pi/2} dx\,(\cos x)^n = \frac{\pi}{2^{n-1}}\frac{n!}{((\frac{n}{2})!)^2} \tag{4.2.65}$$

が言えたことになる。

4.2.6　パラメターで微分する

被積分関数に含まれるパラメターを微分することで、簡単な積分の結果からもっと複雑な積分を求める方法を紹介しておこう。

4.2.2 節では部分積分をくり返し使うことで、(4.2.20) の $\Gamma(n+1) = n!$ という結果を示した。積分変数を x にしてこの結果を書けば、$n = 1, 2, \ldots$ について、

$$I_n := \int_0^\infty dx\, x^n\, e^{-x} = n! \tag{4.2.66}$$

である。これを別の方法で導いてみよう。ここで、(4.2.66) の被積分関数が、新しいパラメター α を使

って、

$$x^n\, e^{-x} = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x}\Big|_{\alpha=1} \tag{4.2.67}$$

と書けることに注意しよう。これを使えば、求める積分は

$$I_n = \int_0^\infty dx\, (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial \alpha^n} e^{-\alpha x}\Big|_{\alpha=1} = (-1)^n \frac{d^n}{d\alpha^n} \tilde{I}(\alpha)\Big|_{\alpha=1} \tag{4.2.68}$$

と書き直せる。ここで、

$$\tilde{I}(\alpha) := \int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x} \tag{4.2.69}$$

と定義した。

(4.2.68) の式変形で、x についての積分と α による n 回微分の順番を交換していることが気になった人もいるだろう。数学的に厳密に進めるなら（そして、この本の少なからぬ部分では数学的に厳密に進めているわけだが）順番が交換できることを証明する必要がある。実際に交換可能性は証明できるのだが、ここでは

ともかく具体的な計算方法を見ているので、厳密さにはこだわらず「積分と微分の順序は交換できる」と楽観的に信じてどんどん計算を進めることにしよう（そして、普通はそれで困ることはない)。

計算に戻ると、(4.2.69) の積分は一瞬でできて $\tilde{I}(\alpha) = 1/\alpha$ である。あとは、これを α でどんどん微分するだけだが、

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad \frac{d^2}{d\alpha^2}\frac{1}{\alpha} = 2\frac{1}{\alpha^3}, \quad \frac{d^3}{d\alpha^3}\frac{1}{\alpha} = -6\frac{1}{\alpha^4}, \ldots \tag{4.2.70}$$

と順番に計算していけば、すぐに

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{1}{\alpha} = (-1)^n n! \frac{1}{\alpha^{n+1}} \tag{4.2.71}$$

がわかる（気になる人は帰納法で証明しておこう)。(4.2.68) に代入すれば目標だった (4.2.66) が得られる。

次の例として、(4.2.23), (4.2.24) で部分積分を使って示した

$$\int_0^\pi dx\, x^2 \cos(2x) = \frac{\pi}{2} \tag{4.2.72}$$

という定積分をパラメターで微分する方法で求めてみよう。被積分関数を

$$x^2\,\cos(2x) = -\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\cos(\alpha x)\Big|_{\alpha=2} \tag{4.2.73}$$

と表わし、積分と微分の順番を気軽に交換すれば、求める定積分は、

$$\begin{aligned}\int_0^\pi dx\,x^2\,\cos(2x) &= -\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big(\int_0^\pi dx\,\cos(\alpha x)\Big)\Big|_{\alpha=2}\\ &= -\frac{d^2}{d\alpha^2}\Big(\frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha}\Big)\Big|_{\alpha=2}\end{aligned} \tag{4.2.74}$$

と表わせる。ここで実行した積分はものすごく簡単だった。あとは (少し面倒だが) 微分を計算して $\alpha = 2$ を代入すれば (4.2.72) が得られる。個人的には（剰余の部分などにいろいろと気を使う）部分積分よりもこのやり方のほうが好きなのだが、試験やレポートの答案を見ていると、ほどんどの大学生は (4.2.72) を部分積分で計算するようだ (慣れの問題もあるでしょうね)。

最後に、問題 4.2.4.b（556 ページ）に出題した不定

積分

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C \tag{4.2.75}$$

をパラメターで微分する方法で導出しておこう。ここでも、まず、

$$\frac{1}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{1}{x^2+\alpha}\bigg|_{\alpha=a^2} \tag{4.2.76}$$

に注目すれば、

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = -\frac{d}{d\alpha}\left(\int \frac{dx}{x^2+\alpha}\right)\bigg|_{\alpha=a^2} \tag{4.2.77}$$

と書ける。一方、(4.2.9), (4.2.35), (4.2.39) で見たように、$\alpha > 0$ については、

$$\int \frac{dx}{x^2+\alpha} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right) + C \tag{4.2.78}$$

である。あとは、(必要なら 416 ページの表などを見て) arctan の微分などを慎重に計算すれば求める (4.2.75) が得られる。

ここで、(4.2.78) を α で微分したら定数 C が消えるので (4.2.75) には積分定数が入らないのではないかと悩む人がいるかもしれないが、そんなことはない。そもそも (4.2.75) が不定積分である以上、定義からして積分定数は絶対に必要である。あるいは、(4.2.78) での積分定数には α への依存性があるので、微分したときに新しい任意定数が出てくると考えてもいいだろう (504 ページの脚注 *17 で注意したように、積分定数については、C と書かれるものがいつでも等しいわけではない)。

第 5 章

微分方程式 — 入門と初等的な解法

物理を学んでいくと、実にいろいろなところに、微分方程式が顔をだす。物理における本質的な基本法則が微分方程式であらわされていることもあるし、近似的な関係や法則が微分方程式で書けているということ

もある。時間がわずかに経過したとき物理的な系[*1]がどのように変化していくかを記述するために、微分方程式は最良の「ことば」なのだ。まったく同じ内容であっても、日常的なことばで書いていたものを微分方程式の「ことば」で書きなおすことによって、現象についてのわれわれの理解が圧倒的に深まることを味わってほしい（特に 5.2.1 節）。日常的な言葉での表現と、微分方程式による表現のあいだを自在に行き来できるようになれば、物理や工学にかぎらず多くの場面で非常に役に立つはずだ。

この章は大ざっぱに「入門編」と「解法編」の二つに

[*1] 大学の物理では「系 (system)」ということばがしょっちゅうでてくる。たとえば、「太陽系」という言い方によく現れているように、「系」というのは、物理の対象としてあつかえるような、世界のなかの手頃な一部分を指す。もちろん太陽系が宇宙のすべてではないが、宇宙のなかから太陽系だけを切り出してきて、そのふるまいを物理の観点から議論することに大いに意味がある。同じように、「振り子三つからなる系」とか「無数の量子スピンが相互作用し合う系」といった言い方をする。

分かれている。「入門編」では微分の知識だけを用い、「解法編」では積分の知識を用いる。

「入門編」では、微分方程式についての経験がまったくない読者を想定して、ごく基本的な例から入って、微分方程式の基本的な意味、微分方程式と日常的な言葉での表現との対応、微分方程式の解とはなにかといった点をしっかりと理解してもらうことをめざす。とくに、公式的な解法はいっさい使わず、基本的な関数の微分についての知識だけを用いて「解を推測して確認する」という方法で微分方程式を解く経験を積んでもらう。はじめ 5.1 節でごく軽く微分方程式についての解説をする。そして、5.2 節で、もっとも基本的な微分方程式ともいえる、減衰の方程式とその変形について詳しく調べる。5.3 節では、一次元運動の力学を題材にとり、外力による運動、空気抵抗のもとでの運動、そして振動運動など、物理としても重要な典型的な問題をみる。最後の 5.5 節では簡単に用語のまとめをする。

「解法編」では、定積分を用いて、常微分方程式のい

くつかの定番の解き方（たとえば、「変数分離」の方法）を議論する。5.6 節では一階の常微分方程式について、5.7 節では二階の常微分方程式について、それぞれ、いくつかの解法を紹介する。

- **基本的な関数（x のべき乗、指数関数、三角関数）の微分**
- **複素数の基本のあつかい、とくに指数関数**
- **基本的な関数の積分（5.6 節、5.7 節）**

5.1　微分方程式とその解

「入門編」のもっとも最初のこの節では、微分方程式とは何か、微分方程式の解とは何かということを気楽に見ていこう。

5.1.1　微分方程式とはなにか

まず普通の方程式 (equation) について考えよう。たとえば、「ある数を二乗して、そこから同じ数の 5 倍を引いて 6 たすと 0 になる」という風に（かなり、まだるっこしい形で)「ある数」についての情報が与えられたとしよう。このような情報は、そのままの形で扱かうより、「ある数」を未知変数 x と置き、

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \tag{5.1.1}$$

という方程式、つまり**未知の数 x を含む等式**、として扱かう方がはるかに便利だ。この方程式の解というのは、

$$x = 2, 3 \tag{5.1.2}$$

のように、この未知の数が何であるかを（まだるっこしくなく）はっきりと示した答えである。

大ざっぱにいうと、**微分方程式** (differential equation) とは、**未知の関数とその導関数（微分）を含む等**

式であり、未知の関数について（まだるっこしいやり方で）情報を与えてくれるものだ。

とても簡単な例だが、「ある時間の関数があり、その変化率は一定である」という問題を考えよう。時間を実変数 t で表し、その未知の関数を $x(t)$ と名付ける。変化率は微分 $dx(t)/dt$ で表されるから（5.2.1 節参照)、一定値を表す定数を a とすれば、上の問題は、

$$\frac{dx(t)}{dt} = a \tag{5.1.3}$$

と書ける。これが微分方程式だ。

微分方程式の**解** (solution) とは、その未知の関数が何であるかを示した答えのことをいう。(5.1.3) の場合には、解は見た瞬間にわかるはずで、C を任意の定数として、

$$x(t) = a\,t + C \tag{5.1.4}$$

となる。これを t で微分して見てれば、たしかに a に等しい。もちろん、ただ $x(t) = a\,t$ と答えても、微分方程式 (5.1.3) の正しい解にはなっている。しかし、こ

れだと、(5.1.1) の二次方程式の解を $x = 2$ とだけ答えるのと同じで、片手おちになってしまう。解がたくさんあるときは、それらをすべて求めるのが正しい態度だ。任意の定数 C について、関数 (5.1.4) は、微分方程式 (5.1.3) の解になっている。

上では、物理の運動方程式を意識して変数に t という名前をつけた。言うまでもないが、関数や変数の名前の付け方はまったく本質的ではない。名前にまどわされてはいけない。たとえば、変数を x、関数を $y(x)$ として、

$$\frac{dy(x)}{dx} = a \tag{5.1.5}$$

という微分方程式を考えることもできる。これは、見た目はちがうけれど、(5.1.3) と完璧に同じ方程式だ。こんな簡単な例ならそれに気づかないことはないだろうけれど、方程式が複雑になると、そういう当たり前のことを見過ごすことが多くなるので注意。

一気にむずかしくなってしまうが、

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -\frac{MG\,x(t)}{\{(x(t))^2+(y(t))^2\}^{3/2}},\\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} &= -\frac{MG\,y(t)}{\{(x(t))^2+(y(t))^2\}^{3/2}}\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

のようなものも微分方程式だ。これは、原点 $(0,0)$ にある太陽のまわりを回る惑星の運動を記述するニュートン[*2]の運動方程式である。もちろん、$M \simeq 1.99 \times 10^{30}$ kg は太陽質量で $G \simeq 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{m}^3/(\mathrm{s}^2\,\mathrm{kg})$ は万有引力定数、$(x(t), y(t))$ は時刻 t での惑星の位置座標である。この方程式には、$x(t)$ と $y(t)$ という二つの未知関数があって、方程式を連立して、ふたつを一度に決めてやらなくてはならない。連立方程式を解くとき、二つの未知数を一度に決めなくてはならなかったのと同じことだ。こんなややこしいものは、ちょっとやそっとでは解けそうにない。実は、この微分方程式

[*2] 278 ページの脚注 *1 を見よ。

の解を完全に決定するのは、ケプラー[*3]問題と呼ばれる古典力学の重要な問題のひとつで、力学の講義で学ぶことになるだろう。

古典力学の本質をあらわすニュートンの運動方程式を書いたので、せっかくだから、（見せるだけの意味しかないけれど）量子力学の本質をあらわすシュレディンガー[*4]方程式も書いておこう。ポテンシャル $V(x)$ からの力を受けて一次元の空間を運動する質量 m の粒子の波動関数 $\varphi(t,x)$ は、

$$i\hbar\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\varphi(t,x)}{\partial x^2} + V(x)\,\varphi(t,x) \quad (5.1.7)$$

[*3] Johannes Kepler (1571–1630) ティコ・ブラーエの観測データを解析して惑星の運動の法則をみいだしたのは人類の歴史のなかで不滅の業績だが、それ以外にも幾何学などについての業績もある。三次元での球の最密充填についての彼の仕事はケプラー予想とよばれ数学の未解決問題のひとつであったが、実に 1998 年になって解決されたそうだ。

[*4] Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961) オーストリアの理論物理学者。量子力学の基礎方程式を定式化し、多くの問題の解を自ら求めた。1933 年にノーベル賞。

という微分方程式で決定される。ここで、$\hbar \simeq 1.05 \times 10^{-34}$ J s はプランク[*5]定数というミクロな世界を特徴づける基本的な物理定数で、i は虚数単位（量子力学の方程式では、純虚数がぜったいに必要なのだ！）。もちろん量子力学を学んでいない読者にはなんのことやらわからないはずで、それはかまわない。ここで強調したかったのは、ここでは未知関数 $\varphi(t, x)$ は t と x という二つの変数をもつ二変数関数だということ。そして、微分方程式 (5.1.7) には、これらの変数についての偏微分が顔をだすのだ。これが偏微分方程式の例である。

5.1.2　微分方程式の解とはなにか

微分方程式が与えられたとする。上でも少し書いたように、微分方程式にある関数を代入したとき、**変数の任意の値について**方程式が等式として満たされれば、

[*5] Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947) いわゆる黒体輻射の問題を研究し、量子論の扉をひらいた。1918 年にノーベル賞。

その関数は微分方程式の**解** (solution) だという。

ここで、「変数の任意の値について[*6]」というただし書きはだいじだ。簡単な微分方程式 (5.1.3) に、たとえば $x(t) = a\,t^2/2$ みたいな関数を代入して微分してみると、$\dfrac{d}{dt}x(t) = a\,t$ となる。$t = 1$ という特別なところでは、たしかに (5.1.3) が等式として成り立っている。だからといって、「$x(t) = a\,t^2/2$ は $t = 1$ において微分方程式 (5.1.3) の解だ」などという話にはならない[*7]。

微分方程式が与えられたとき、その解をみつけるのは、一般にはむずかしい仕事だ。解をさがすための決まった方法があるわけではなく、いくら努力しても解がみつからないということもよくある。

これに対して、**誰かが解の候補をあげたとき、それが**

[*6] 88 ページの脚注 *27 で注意したように、数学での「任意の値について」は、「どんな値についても」あるいは「すべての値について」という意味である。

[*7] 長年、大学で教えていると、それに類する答案（もちろん、もっとややこしい微分方程式と闘って混乱しているわけだけど）に出会うこともちょくちょくある。

本当に解になっているか、それとも解でないかは、確実に判断できることに注意しよう。要するに、その解の候補を微分方程式に代入してみて、変数のすべての値について、等式として成り立つかどうかをみてやればいいのだ。これは、微分さえ確実にできれば、誰にでも機械的にできることだ。

だから、微分方程式を解きなさいと言われたとき、どうがんばっても答えがでないということはあるかもしれないが、**まちがった答えを書いてそれで満足してしまうということは絶対にあり得ない。**自分で微分方程式の解をみつけたと思ったとき、それが正解かまちがいかを確実にチェックできるからだ。微分方程式を解くときは、答えだと思うものがでてきたら、とにかく落ち着いて微分して、本当に解になっていることをチェックすることを習慣にしてほしい。

また、これによって、微分方程式を解くための一つの非常に強力な手法が得られる。つまり、

1. 直感的な推測で「えいやっ」と解の候補をつくり、
2. それが本当に解になっているかを確かめる

のだ。たいていはダメだろうが、くり返している内に本当の解に出くわすかも知れない。出会いさえすれば、もうこちらの勝ち。どんな方法でみつけたにせよ、微分方程式を満たしていれば、それはなんら恥じることのない厳密な解なのだ[*8]。

さらに、**解の候補をつくるときには、そのなかにいくつかの未知の定数を入れておく**のがよい。そうすると、ある意味で、一度に多くの候補を試すことができ

[*8] ある条件が成り立つ範囲で、ある初期条件を満たす微分方程式の解は一つしかないという一意性が成り立つ。「恥じることない」と言い切れるのは、正しくは、この一意性をふまえているからである。一意性については、8.1 節で詳しくあつかう。

るわけで、未知定数をうまく調節して解になるかを吟味することができる。この章の「入門編」では、この路線で微分方程式を解く例をいくつかみていくことにする。

せっかくなので、一例として、太陽のまわりをまわる惑星の運動を表す (5.1.6) の解をさがしてみよう。楕円軌道などは難しそうだが、初期条件をうまく選べば、惑星は太陽のまわりをきれいな円軌道を描いて一定の角速度でまわりつづけるにちがいない。そう信じて、ともかく円運動を式で表してしまおう。軌道の半径 $a > 0$ と角速度 ω を未知の定数として、解の候補を

$$x(t) = a\,\cos(\omega\,t), \quad y(t) = a\,\sin(\omega\,t) \tag{5.1.8}$$

としよう。もちろん、この候補がそのままでニュートン方程式 (5.1.6) の解になるなどとは思ってはいない。少なくともパラメターをうまく調整する必要があるだろう。そこで、解の候補 (5.1.8) を方程式 (5.1.6) に代入し、真面目に左辺と右辺を計算してみる。すると (基本的には簡単な三角関数と微分の計算なので、実際に

やってみてほしいのだが)、解の候補に含まれる二つのパラメターが

$$a^3\omega^2 = MG \tag{5.1.9}$$

という関係を満たすなら、方程式 (5.1.6) がすべての t において等式として満たされることがわかる。惑星の運動を記述するニュートン方程式の厳密な解が求まり[*9]、軌道半径 a と角速度 ω の間に成立するケプラーの法則が導出された！

5.2　指数減衰の微分方程式とその変形

前節はお話だったので、ここから本格的な議論にはいる。微分方程式のもっとも典型的な例ともいえる減衰の微分方程式と、そのいくつかの変形についてみていこう。指数関数の微分の知識を使うだけで、かなり

[*9] ただし、すべての解が求められたわけではないので、「ニュートン方程式が解けた」とは言わない。

複雑な微分方程式が解けることがわかるだろう。基本的な例をとおして、微分方程式がどういう物理を表すのか、言葉による表現と微分方程式がどう対応するのか、また、微分方程式を解くというのはどういうことかを体得してもらいたい。

5.2.1　最初の例 — 減衰の微分方程式

■微分方程式の導出　不安定な放射性同位元素の崩壊を例に、減衰の微分方程式を導出しよう。

　ここに、(同種の) 不安定な原子核をたくさん含んだ物質があるとしよう[*10]。不安定な原子核は、一定の確

[*10] そのような物質を放射性物質という。

率で崩壊をおこし、別の原子核に変化する[*11]。もとの不安定な原子核の総量が時間的にどのように変化するかを調べたい。

まず、不安定な原子核の総量の時間変化を決める基本的なルールをはっきりさせておこう。各々の不安定な原子核が同じ一定の確率で崩壊するのだから、全体として崩壊する不安定な原子核の数は、その時点での

[*11] 不安定な原子核の崩壊というのは、徐々に時間をかけて腐っていきついにダメになったときに壊れるといったものではない。不安定と言っても原子核はずっと「しっかりした」状態を保っていて、あるときに突然こわれてしまうのだ。この状況を（いささか表面的にではあるが）理解したければ、それぞれの不安定な原子核が一定の（きわめて短い）時間間隔ごとにルーレットをまわし、たまたま（非常に低い確率の）「はずれ」を出してしまったときに崩壊すると想像するのがよい。このようなミクロな世界での確率的な現象は、正確には、量子力学で記述される。

不安定な原子核の総量に比例するはずだ。よって、

不安定な原子核の総量の減少率は、
その時点での不安定な原子核の総量に比例する
(5.2.1)

ことになる。このように言葉で書かれた法則を、より数理的な言葉で表すことにしよう。

まず、時刻を表す実変数を t と書く。時刻は、ある瞬間に測りはじめて、それからどんどんと増えていく。はじめの時刻を $t = 0$ と決めて、一般に $t \geq 0$ としよう。また、ある時刻 t における不安定な原子核の総量を $N(t)$ と書く。これは、t の関数ではあるが、まだどういう関数かはわからない。

(5.2.1) によれば、時刻 t における総量 $N(t)$ の減少率は、その時点での総量 $N(t)$ に比例する。この比例定数を $\gamma > 0$ とすれば、減少率は $\gamma N(t)$ と書ける。次に、非常に短い時間間隔 Δt のあいだに何がおこるかを考えよう。この時間間隔のあいだには、不安定な原子核の総量 $N(t)$ はほぼ一定なので、減少率 $\gamma N(t)$ も

ほぼ一定。よって、崩壊する不安定な原子核の総量は、減少率に時間間隔 Δt をかけたものに（ほぼ）等しいはずだ。崩壊する不安定な原子核の総量は、時刻 t での総量から時刻 $t+\Delta t$ での総量をひいたものなので、$N(t)-N(t+\Delta t)$ である。つまり、

$$N(t)-N(t+\Delta t)=\gamma\,N(t)\,\Delta t+o(\Delta t) \qquad (5.2.2)$$

という関係が成り立つことになる。ここで $o(\Delta t)$ は、$\Delta t \searrow 0$ としたとき Δt よりも速く 0 に近づく量の総称である（(3.1.11) を参照)。減少率が完全に一定ではないかもしれないので、このような項をたしたのである。

(5.2.2) の両辺を $-\Delta t$ で割れば、

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=-\gamma\,N(t)+\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \qquad (5.2.3)$$

となる[*12]。微分の定義 (3.1.7) を思い出し、$\Delta t \searrow 0$ のとき $o(\Delta t)/\Delta t \to 0$ になることを使うと、$\Delta t \searrow 0$ で

[*12] 式をまじめに変形していくと、$o(\Delta t)$ の前にマイナスをつけたくなるけれど、$o(\Delta t)$ と書いたときは係数や符号はいっさい気にしない。

(5.2.3) は、

$$\frac{d}{dt}N(t) = -\gamma\, N(t) \tag{5.2.4}$$

という、きれいな関係になる。

物理の世界では、時刻 t の関数がしょっちゅう現れるので、t についての導関数 $\dfrac{d}{dt}N(t)$ を通例の $N'(t)$ ではなく、$\dot{N}(t)$ のように書く（そして、「エヌ・ドット・ティー」と読む[*13]）習慣がある。この本でも、時間微分をとりあつかっていることがはっきりしているときには、この書き方を使うことにする。すると、(5.2.4) は

$$\dot{N}(t) = -\gamma\, N(t) \tag{5.2.5}$$

となる。

微分方程式 (5.2.4), (5.2.5) が、不安定な原子核の総量の時間変化についての (5.2.1) の規則を数式で表現したものである。このように、**時間（あるいは、ほかの物理的なパラメター）がわずかに変化したときの系の**

[*13] 英語でも、“N dot of t” だ。

ふるまいの規則性や法則を書き表すとき、微分方程式はとても自然で便利な「ことば」なのである。

■微分方程式の解　微分方程式 (5.2.5) の解を求めよう。つまり、すべての $t \geq 0$ について (5.2.5) を満たすような関数 $N(t)$ をみつけたい。

今のところ、これといった戦略もないから、ともかく知っている関数を使って解ができないかを試してみるのが一手だ。5.1.2 節に書いたように、ある関数が解になっているかどうかの判定ならば、確実にできるのだ。たとえば、手近なところでは、C を定数として、$N(t) = C - \gamma t$ なんて、いかにも減っていきそうだ。しかし、微分してみると、$\dot{N}(t) = -\gamma$ だから、(5.2.5) の右辺と比べると $N(t)$ がたりない。これは解ではない。他にも、t の二次関数、三次関数など、いろいろとそれらしいのを試してみてほしいのだが、それでも、解は出てこない。

すでに気づかれている読者もいるだろうが、ここで、指数関数の導関数についての (3.2.33)（または、

(3.2.88)）を思い出すとよい。指数関数というのは、微分すると（定数倍がついて）自分自身にもどるような関数だった。微分して自分に戻るというのは、まさに微分方程式 (5.2.5) そのものである。

そこで、((3.2.88) と (5.2.5)）を見比べつつ）解の候補として、$N(t) = e^{-\gamma t}$ という関数を考える。すると、$\dfrac{d}{dt}e^{-\gamma t} = -\gamma e^{-\gamma t} = -\gamma N(t)$ となり、たしかに、微分方程式 (5.2.5) の形がでてきた。解がみつかった。

しかし、この解では、時刻を $t = 0$ とすると $N(0) = e^0 = 1$ となってしまう。時刻 0 での総量がいつでも 1 に決まっているというのでは困る。ここで、考えている問題では、時間の原点（いつの時刻を $t = 0$ と決めるかということ）を変えても問題は変わらないことに注意しよう。そこで、t_0 を任意の定数として、時間 t を $t - t_0$ に置き換えた $N(t) = e^{-\gamma(t-t_0)} = e^{\gamma t_0}e^{-\gamma t}$ を考えてみよう。同じことだが[*14]、C を任意の実定数

[*14] $C = e^{\gamma t_0}$ である。

として、

$$N(t) = C\,e^{-\gamma\,t} \tag{5.2.6}$$

という関数を考えるということだ。微分を計算すればすぐにわかるが、この形も微分方程式 (5.2.5) の解になっている[*15]。このように、すでに得られていた解を定数倍しても解になるのは、微分方程式 (5.2.5) が $N(t)$ と $\dot{N}(t)$ の一次式だけを含んでいるからだ。後で 5.5.1 節で整理するが、このような性質をもつ方程式を線形であるという。

(5.2.6) に現れた定数 C は、(そのまんまだが) **任意定数**と呼ばれる。このように微分方程式の解が任意定数を含むのは一般的なことである。

(5.2.6) の解で、$t = 0$ での不安定な原子核の総量は $N(0) = C$ になっている。そこで、今の $N(0)$ を使っ

[*15] たとえば、$N(t) = e^{-\gamma t} + C$ のように定数 C を足したのでは（$C = 0$ でないかぎり）微分方程式 (5.2.5) の解にはならない。左辺と右辺を計算して確認しておこう。

て、同じ解を

$$N(t) = N(0)\, e^{-\gamma\, t} \tag{5.2.7}$$

と書くこともできる。こうすると、時刻 0 での不安定な原子核の総量 $N(0)$ を教えてやれば一般の時刻での総量 $N(t)$ が出てくることになっていて、便利だ。

ここで、$N(0)$ は、はじまりの時刻での系の状況を指定する量で、$N(t)$ の**初期値** (initial value) とよばれる。今の場合、初期値 $N(0)$ を決めれば、$\dot{N}(0) = -\gamma\, N(0)$ などの量も自動的に決まってしまい、これ以上なにかを決める余地は残らない。このように、必要なだけの初期値を与えることを、一般に、**初期条件** (initial condition) を与えるという。(5.2.7) (あるいは (5.2.6)) は考えうるすべての初期条件に対応する解であることがわかる。このような完璧な答を、微分方程式の**一般解**と呼ぶ[*16]。

[*16] 「完璧な答」と言い切る背景には解の一意性がある。583 ページの脚注 *8 をみよ。

微分方程式の一般解は、(5.2.6) のように勝手な名前をつけた任意定数を含んだ形で表すか、(5.2.7) のように初期値を含んだ形で表すかが標準である[*17]。後者では、任意定数としてとくに初期値を選んだと思えばいい。

■半減期と寿命　一般解 (5.2.7) のグラフの概形を図 5.1 に描いた。$N(t)$ は時間とともに一定の割合で減衰していく。とくに、不安定な原子核の総量が初期の半分となる時刻を求めてみよう。つまり、$N(t) = N(0)\,e^{-\gamma\,t} = N(0)/2$ ということなので、$e^{-\gamma\,t} = 1/2$ となる。両辺の対数をとると、$-\gamma\,t = \log(1/2) = -\log 2$ だから、けっきょく $t = \log 2/\gamma$ である。この時刻を

$$t_{\mathrm{HL}} := \frac{\log 2}{\gamma} \tag{5.2.8}$$

と書き、**半減期** (half-life) とよぶ。

[*17] 問題などで指示がなければ、どちらで答えてもかまわないだろう。

図 5.1　不安定な原子核の総数のしたがう微分方程式 (5.2.5) の一般解 (5.2.7) の概形。半減期を $t_{\mathrm{HL}} := \log 2/\gamma$ と定義する。初期時刻から t_{HL} だけ時間がたつと、$N(t_{\mathrm{HL}}) = N(0)/2$ のように不安定な原子核の総量は半分になる。さらに t_{HL} だけ時間がたつと、$N(2\,t_{\mathrm{HL}}) = N(0)/4$ となり、不安定な原子核の総量はさらに半分になる。

実は、はじめの時刻にかぎらず、一般の $t \geq 0$ につ

いて、

$$
\begin{aligned}
N(t+t_{\mathrm{HL}}) &= N(0)\, e^{-\gamma\,(t+t_{\mathrm{HL}})} \\
&= N(0)\, e^{-\gamma\, t}\, e^{-\gamma\, t_{\mathrm{HL}}} \\
&= \frac{N(t)}{2}
\end{aligned}
\tag{5.2.9}
$$

が成り立つ。いつから数えても、t_{HL} だけ時間が経過すると、不安定な原子核の量は半減する。半減期という名称は適切だ（図 5.1）。

半減期とよく似ているが、

$$
t_{\mathrm{L}} := \frac{1}{\gamma} \tag{5.2.10}
$$

を不安定元素の**寿命** (lifetime) あるいは平均寿命とよぶ。寿命を使うと、指数的減衰の式 (5.2.7) は、

$$
N(t) = N(0)\ \exp[-\frac{t}{t_{\mathrm{L}}}] \tag{5.2.11}
$$

と書ける。減衰を特徴づける時間が t_{L} であることが読み取れるだろう。t_{L} だけ時間がたつと仲間の数が $1/e \simeq 0.37$ になるということだ。

寿命の意味について考えよう。$\Delta t > 0$ を小さな時間間隔とする。最初に (5.2.2) で見たように、時刻 t と $t + \Delta t$ の間に崩壊する不安定な原子核の総数は、

$$\begin{aligned}\Delta N(t) &:= N(t) - N(t + \Delta t) = \gamma\, N(t)\, \Delta t + o(\Delta t) \\ &= \gamma\, N(0)\, e^{-\gamma t}\, \Delta t + o(\Delta t) \qquad (5.2.12)\end{aligned}$$

である (最後は解 (5.2.7) を代入した)。$n = 0, 1, \ldots$ について $t_n = n\Delta t$ とする。各々の時間間隔 $[t_n, t_{n+1}]$ の間に崩壊する原子核の個数 $\Delta N(t_n)$ を足し上げると、

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \Delta N(t_n) &= \sum_{n=0}^{\infty} \bigl\{\gamma\, N(0)\, e^{-\gamma t_n}\, \Delta t + o(\Delta t)\bigr\} \\ &\to \gamma N(0) \int_0^{\infty} dt\, e^{-\gamma t} \qquad (5.2.13)\end{aligned}$$

となる。最後は $\Delta t \to 0$ として、積分の定義 (4.1.8) を

使った[*18]。$\int_0^\infty dt\, e^{-\gamma t} = 1/\gamma$ だから、(5.2.13) の総和の結果はちょうど $N(0)$ になる。これは、全ての不安定な原子核がいつかは崩壊することを表わしているだけだから、当たり前の結果だ。次に、崩壊数 $\Delta N(t_n)$ に崩壊する時刻 t_n をかけた和を考えると、

$$\sum_{n=0}^{\infty} t_n\, \Delta N(t_n) = \sum_{n=0}^{\infty} t_n \bigl\{\gamma\, N(0)\, e^{-\gamma t}\, \Delta t + o(\Delta t)\bigr\}$$
$$\to \gamma N(0) \int_0^\infty dt\, t\, e^{-\gamma t} \qquad (5.2.14)$$

という積分が得られる。この積分も部分積分で (4.2.15) のように簡単に評価できて、$\int_0^\infty dt\, t\, e^{-\gamma t} = 1/\gamma^2$ である。よって、(5.2.14)

[*18] 細かい注：ここでの $o(\Delta t)$ の取り扱かいにはもう少し注意がいる。Δt を固定して $\sum_{n=0}^{\infty} o(\Delta t)$ という無限和を考えてしまうとこれは発散するかもしれない。一つのやり方は、まず和を $t_n \le T$ の範囲に限ることだ。すると、和は $\Delta t \to 0$ で積分 $\gamma N(0) \int_0^T dt\, e^{-\gamma t}$ に収束する。最後に $T \nearrow \infty$ の極限を取ればいい。

は $N(0)/\gamma$ に等しい。(5.2.13) と (5.2.14) の比は

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} t_n\, \Delta N(t_n)}{\sum_{n=0}^{\infty} \Delta N(t_n)} \to \frac{1}{\gamma} = t_{\mathrm{L}} \tag{5.2.15}$$

となる。左辺はまさに t_n の平均値の式だから、t_{L} は崩壊時刻の平均値、つまり、平均寿命だということがわかる。

数学ではなく物理の範疇(はんちゅう)になるが、不安定な原子核の寿命について大事な注意をひとつ。指数的減衰の式 (5.2.7) からも、図 5.1 のグラフからもわかることだが、寿命が来たからと言って不安定な原子核がみないっせいに死んでしまうわけではない。単に数が $1/e$ まで減衰するだけだ。しかも、(ここがもっとも混乱しやすいところなのだが) 減衰したあとの生き残りは、別に「年をとっている」わけでも「古びている」わけでもなく、最初と同じ「フレッシュな」不安定な原子核の集団だ。実際、t_{L} だけ時間がたったところで時間を 0 にリセットして、生き残った不安定な原子核たちを見ていれば、(単に全体の量が減っただけで) 最初とまったく同じよ

うに減衰していく。不安定な原子核の集団は、夜店の亀[*19]とはちがうのだ。このおかげで、たとえば、不安

[*19] 「おっちゃん、昨日買(こ)うた亀、死んでもうたで。亀は万年生きるゆうたやんか。おっちゃん、嘘つきや。」「ああ、そりゃ運わるかったな、坊主。その亀、きのうで生まれてからちょうど九千九百九十九年と三百六十四日目やったんやな。」という故事（？）をふまえております。

定な同位元素を使った年代測定が可能になる[*20]。

このように微分方程式 (5.2.4) の解についての理解が進んだところで、もう一度 (5.2.1) のような日常の言葉による問題の定式化を見直してほしい。これは、微

[*20] 炭素の同位体 ^{14}C の原子核は不安定だ。ベータ崩壊をおこして ^{14}N となる。半減期は 5730 年。これに対して、^{12}C と ^{13}C の原子核は安定である。さて、地球の大気中では、宇宙線が引き起こす核反応のため、すべての炭素（ほとんどが二酸化炭素として存在するわけだが）のうちの ^{14}C の比率は（ほぼ）一定に保たれている（正確には、保たれていた（脚注の最後を見よ））。ところが、大気中の炭素がたとえば植物の組織に取り込まれ、その植物が死んでしまうと、もはや大気からの炭素の補充はなくなる。そこで、^{14}C の総量は (5.2.7) にしたがって指数的に減衰していき、^{12}C と ^{13}C の値は一定に保たれる。この結果、組織の中の炭素のうちの ^{14}C の比率が減少していくことになる。そこで、たとえば遺跡から発掘された材木中の炭素のうちの ^{14}C の比率を測定すれば、その材木に使われている木がいつ伐採されたかが推定できるのだ。（かつて学習院の理学部には ^{14}C による年代測定の有名な施設があり、年代測定を依頼する人々が世界中からさまざまな試料を送ってきていた。私が学習院に来た頃には、南一号館の地下に（本物の）ミイラの入った棺（ひつぎ）が安置してあった。誰かが年代測定のために送ってきたのだが、その後、なぜか引き取り手がいなくなってしまったという話だった（こわい））。

分方程式 (5.2.4) と全く同じ内容を含んだ文章なのだ。しかし、少なくともわれわれ人間には、(5.2.1) の文章を読んだだけでは、指数的減衰や半減期といった解のふるまいは一向に「見えて」来ない。同じ内容を数理的なことばで書きなおすことにより、われわれは「解のふるまいを正確に定量的に理解する力」を手に入れるのだ。

問 5.2.1.a　解 (5.2.7) において、「桁減期 (decimal life)」t_{DL} を $N(t_{\mathrm{DL}}) = N(0)/10$ によって定義する[*21]。不安定な原子核の総数が初期値よりも一桁小さくなるまでの時間だ。t_{DL} を γ で表わせ。$N(2t_{\mathrm{DL}})$,

---

ところで、1950 年代、60 年代に一部の大国が大気圏内で核爆発兵器の実験を行なった影響で、現在の地球の大気中の ^{14}C の比率は通常よりもかなり高くなっている。今から数万年後の人々が ^{14}C を用いた年代測定をしても、20 世紀以降のしばらくの時代についてはまともな推定ができないということになってしまうのだ。

[*21] これは正式の用語ではない。半減期よりも桁減期のほうが一般の人に分かりやすいのではないかという提案をネットで見てこの問題を作った。

$N(3t_{\mathrm{DL}})$, $N(4t_{\mathrm{DL}})$ を $N(0)$ で表わせ。一般の t について、$N(t+t_{\mathrm{DL}})$ と $N(t)$ の関係を求めよ。桁減期 t_{DL} を半減期 t_{HL} を使って表わせ。セシウム 134、セシウム 137 の半減期はそれぞれ 2.06 年、30.17 年である。これら放射性物質の桁減期を求めよ（有効数字にも注意)。

■成長の方程式　ある生物集団における個体の総数が、

個体の総数の増加率は、
その時点での個体の総数に比例する　　(5.2.16)

という規則に従って時間変化するとしよう。餌をとって自己増殖していくような生き物を考えると、これは(大ざっぱなルールとしては）もっともらしい。

これも、微分方程式の言葉に書き直してみよう（自分で考えよう)。時間変数を t とし、個体の総数をたとえば $N(t)$ とする。また、比例係数を $\alpha > 0$ とすれば、

$$\dot{N}(t) = \alpha\, N(t) \tag{5.2.17}$$

という微分方程式が得られる。これは、単に、微分方程式 (5.2.5) の定数 $-\gamma$ を α に置き換えたものになっている。

α が正の定数の場合にも、もちろん、一般解は (5.2.7) とまったく同じ

$$N(t) = N(0)\, e^{\alpha\, t} \tag{5.2.18}$$

である。たしかに、$\alpha > 0$ のときには $N(t)$ はどんどんと増加していく。3.2.5 節でみたように指数関数は、非常に「根性のある」増加関数だから、時間がたつとこの解はすさまじい勢いで成長する。人口爆発だ。

■「公式丸暗記派」への注意　いろいろとものごとを考えるためには、様々な知識をしっかりとみにつけておくことが重要だ。できるだけいろいろな関係式を記憶して自分のものにしておくのがよい。

ただし — 当たり前のことだが — 関係式の中身を無視して形だけを覚えこんでいてもほとんど何の意味もない。むしろ害がある。たとえば、微分方程式 (5.2.17)

の解が (5.2.18) だということを、式の形と雰囲気だけで覚えていると、a, ω を定数として、

$$\dot{N}(t) = a\,\cos(\omega t)\,N(t) \tag{5.2.19}$$

というような微分方程式に出会ったとき、「α が $a\,\cos(\omega t)$ に化けただけだ」などとアホなことを思って、

$$N(t) = C\,e^{a\,\cos(\omega t)\,t} \quad \textbf{これは、まちがい！！} \tag{5.2.20}$$

と書いてしまうというようなことがおきる。もちろん、微分してみればすぐにわかるけれど、こんなものは解ではあり得ない。正しい解がどうなるかも、考えてみよう（ヒントがほしい人は、下の問 5.2.1.d を参照)。

■非線形な方程式の例　今度は、

ある物質の総量の減少率は、
その時点での物質の総量の二乗に比例する　(5.2.21)

という問題を考えよう。実際にこのようなルールに従う現実の例があるかどうかは微妙なところだが、ここ

では、ここから導かれる微分方程式とその解に注目しよう。

これまでと同じように、$t \geq 0$ を時間変数、$N(t) \geq 0$ を物質の総量とすると、(5.2.21) のルールは、微分方程式

$$\dot{N}(t) = -\gamma \{N(t)\}^2 \tag{5.2.22}$$

で表される。ここで、γ は正の比例定数。

このように未知変数の二次以上の項を含んでいる微分方程式は、非線形であるという。この方程式も、解を推測して解いてみよう。

微分すると自分自身の二乗になるというのだから、指数関数や三角関数ではだめ。t^a の形を試してみると、左辺の微分は $\dfrac{d}{dt}t^a = a\,t^{a-1}$。これが、右辺に出てくる $(t^a)^2 = t^{2a}$ と同じ形になるには、$a - 1 = 2a$ だから $a = -1$。t^{-1} が解に近そうだ。そこで、A を定数として、

$$N(t) = \frac{A}{t} \tag{5.2.23}$$

とおいてみよう。この A は任意定数ではない！　この

形を (5.2.22) に代入してみると、簡単な計算より（かならず、やろう）$A = 1/\gamma$ とすれば、(5.2.23) が解になることがわかる。ここでは、解の全体にかかる定数 A が勝手に変えられないのは、非線形微分方程式の特徴である[*22]。

定数がいじれないとわかったので、このままでは任意定数が一つもない。一般解にはなっていない。しかし、よく考えれば、任意定数 C を使って

$$N(t) = \frac{1}{\gamma t + C} \tag{5.2.24}$$

としたものも、(5.2.22) を満たす。よって、これが一般解になる。初期値 $N(0)$ を使えば、明らかに $C = 1/N(0)$ となる。

問 5.2.1.b　ある生物種の個体の総数が、「個体の総数の増加率は、その時点での個体の総数の二乗に比例す

[*22] というよりも、解を勝手に定数倍してよい、というのが線形微分方程式の特殊性なのだ。

る」という規則にしたがって時間変化する。このとき、個体の総数を記述する微分方程式を書き、その一般解を求めよ。なお、一般解は個体総数の初期値を含む形で解を書け。この解は、なんと有限の時間で無限大に発散してしまい、そこから先の時刻では解は存在しない[*23]。このことを確かめよ。

問 5.2.1.c　α を正の定数とし、$t \geq 0$, $N(t) > 0$ についての微分方程式

$$\dot{N}(t) = \alpha \sqrt{N(t)} \tag{5.2.25}$$

の一般解を求めよ。初期値 $N(0)$ を含む形で解を書け。

問 5.2.1.d　$\Gamma(t)$ を t の任意の関数として、$N(t) =$

[*23] これぞ、本当に深刻な「人口爆発」である。もちろん、現実の世界では、ある時刻から先が「存在しない」などということはない（と期待する）。何らかの現象を記述するはずの微分方程式で、このような「解の爆発」が生じてしまうということは、微分方程式の作り方に問題があった（今の場合なら、個体数があまりにも大きいときの方程式には変更が必要）と考えるべきである。

$C\,e^{\Gamma(t)}$ という関数を考える（C は任意定数）。時間微分 $\dot{N}(t)$ を求めよ。その結果をもとに、微分方程式 (5.2.19) の一般解を求めよ。初期値 $N(0)$ を含む形で解を書け。

5.2.2　定数項をふくむ減衰の方程式

β を任意の正の定数として、

$$\dot{N}(t) = \beta \tag{5.2.26}$$

という微分方程式を考えよう。未知関数の微分が定数、ということだ。t で微分して定数になるのは何かを考えればたちまち解けて、

$$N(t) = N(0) + \beta\,t \tag{5.2.27}$$

が一般解だとわかる。これは、(5.2.18) で $\alpha > 0$ とした場合の自己増殖とはちがって、外から一定の供給を受けてなにかの量が増えていくという状況に対応している。

このような一定の供給と、前節のはじめに見たような一定の割合での崩壊が共存していたらなにがおこるだろうか？　たとえば、不安定な放射性同位元素が外から一定の割合でつねに流入しているような状況だ。時間変化を決めるルールは、少しややこしいが、

> 不安定な原子核の総量の変化は、その時点での不安定な原子核の総量に比例して減少する効果と、一定の割合で増加する効果の和になる

と書ける。対応する微分方程式は、崩壊だけがおきるときの (5.2.5) と供給だけがあるときの (5.2.26) をあわせて、

$$\dot{N}(t) = -\gamma\, N(t) + \beta, \quad (t \geq 0) \tag{5.2.28}$$

としたものになる。以下では、この微分方程式を二通りの方法で解いてみよう。どちらの解法からも、これから様々な複雑な微分方程式を解いていくときに役に立つ考え方を学ぶことができる。

■変数変換による方法　まず、解くべき微分方程式を

$$\dot{N}(t) = -\gamma\{N(t) - \frac{\beta}{\gamma}\} \tag{5.2.29}$$

と書きなおす。この形をみていると、

$$x(t) = N(t) - \frac{\beta}{\gamma} \tag{5.2.30}$$

という新しい変数を定義したくなる。この両辺を t で微分すれば、(定数の微分が消えるので) $\dot{x}(t) = \dot{N}(t)$ がわかる。ということは、新しい変数を使えば、微分方程式 (5.2.29) は

$$\dot{x}(t) = -\gamma\, x(t) \tag{5.2.31}$$

と書けてしまう。これは、(5.2.5) そのものだから、一般解は任意定数 C を使って $x(t) = C\, e^{-\gamma\, t}$ である。

(5.2.30) を使って $N(t)$ に戻せば、(5.2.28) の一般解が

$$N(t) = C\, e^{-\gamma\, t} + \frac{\beta}{\gamma} \tag{5.2.32}$$

のように求まる。このままでもかまわないが、初期条件を使って解を表した方がいいだろう。(5.2.32) で $t=0$ とおけば $N(0)=C+(\beta/\gamma)$ だから、これを C について解いて代入し、

$$N(t)=\left\{N(0)-\frac{\beta}{\gamma}\right\}e^{-\gamma t}+\frac{\beta}{\gamma} \tag{5.2.33}$$

という一般解が得られる。一般解 (5.2.32) で単に C を $N(0)$ と書いてしまうと、正しく初期値があらわされないことを自分でなっとくしておいてほしい。

解 (5.2.33) は、どんな初期値 $N(0)$ から出発しても、t が大きくなると、けっきょく β/γ という一つの値に収束していく（図 5.2)。外からの供給による増加と崩壊による現象がバランスして、ちょうど安定した値が達成されるのである。

■特解を利用した解き方　後に学ぶ線形非斉次方程式の強力な手法を少しだけ先取りしてみておくため、微分方程式 (5.2.28) のもう一つの解き方をみよう。

ついでなので、少しだけ用語を導入するが、これら

図 5.2　一定の供給と一定の割合での崩壊が共存する微分方程式 (5.2.28) の解 (5.2.33) をいくつかの初期条件についてプロットした。初期値がなんであろうと、最終的には、唯一の安定した値 β/γ に近づいていくことがわかる。

は後にきちんとまとめるので、はじめて学ぶ読者はさほど気にしなくてよい。(5.2.5) や (5.2.28) のように、未知関数の二次以上の項[*24]を含まない方程式は、線形であるという。そして、(5.2.5) のように、すべての項が未知関数ないしはその微分の一次であるものは、線

[*24] $(N(t))^3$ とか $\dot{N}(t)\,N(t)$ とか。

形斉次(せいじ)の方程式という。(5.2.28) は定数項を含んでいるので、斉次ではない。非斉次の方程式という。

第二の解法では、まず非斉次の微分方程式の解を、**なんでもいいからともかく一つ**みつけてくる。このような「一つの解」のことを一般解と対比させて**特解**(とっかい) (particular solution) と呼ぶ。「特別の解」という意味ではなく「特定の解、あるいは、個別の解」という意味だ。

特解を求めるには、たとえば (5.2.28) で $\dot{N}(t) = 0$ となるような解をさがすのが簡単だ。すると $-\gamma\, N(t) + \beta = 0$ という条件がでてくるので、ここから、時間変化のない解

$$N_{\mathrm{ps}}(t) = \frac{\beta}{\gamma} \tag{5.2.34}$$

が得られる。添え字 “ps” は particular solution の頭文字でこれが特解であることを示している。当たり前だが、

$$\dot{N}_{\mathrm{ps}}(t) = -\gamma\, N_{\mathrm{ps}}(t) + \beta \tag{5.2.35}$$

が（両辺が 0 で）成り立つ。

次に、今度は (5.2.28) から定数項をとった斉次の方程式 (5.2.5) の一般解 (5.2.6) を思い出し、$N_0(t) = C\,e^{-\gamma\,t}$ と書いておく。これは、もちろん、

$$\dot{N}_0(t) = -\gamma\,N_0(t) \tag{5.2.36}$$

を満たす。

さて、ここで、非斉次の方程式の特解 (5.2.34) と斉次の方程式の一般解を足し合わせた $N(t) = N_{\rm ps}(t) + N_0(t)$ という関数を考える。和の微分の関係 (3.1.25) と各々の関数が満たす (5.2.35), (5.2.36) を使えば、

$$\begin{aligned}\dot{N}(t) &= \dot{N}_{\rm ps}(t) + \dot{N}_0(t)\\ &= \{-\gamma\,N_{\rm ps}(t) + \beta\} - \gamma\,N_0(t)\\ &= -\gamma\{N_{\rm ps}(t) + N_0(t)\} + \beta\\ &= -\gamma\,N(t) + \beta \end{aligned}\tag{5.2.37}$$

となり、$N(t)$ が非斉次の微分方程式 (5.2.28) の解であることがわかる。実際、この $N(t)$ は (5.2.32) の一般解と一致している。

このように、非斉次方程式の特解と斉次方程式の一般解の和によって、非斉次方程式の一般解を構成するのは、一般的な線形非斉次方程式に適用できるだいじなテクニックだ。これからも多くの例に出会うことになると思う（さっそく問 5.2.2.b で出会える）。

■途中の時刻で状況が変わる場合　ちょっとした応用。γ, β, t_0 を正の定数とし、微分方程式

$$\dot{N}(t) = \begin{cases} -\gamma\, N(t) & 0 \leq t < t_0 \\ -\gamma\, N(t) + \beta & t_0 < t \end{cases} \tag{5.2.38}$$

を考えてみよう。時刻 t_0 を境目に (5.2.5) から (5.2.28) へ、微分方程式の形が変化している。つまり、初めのうちは単に不安定な原子核が崩壊していくばかりだったのが、（見るに見かねたのか）時刻 t_0 以降は一定の

供給がおこなわれるようになった、という状況だ[*25]。

こういった微分方程式を解くのは難しいことではないが、任意定数の決定に注意が必要なので、少し詳しく見ておこう。

まず、(5.2.38) の形からして、$0 \leq t < t_0$ と $t > t_0$ の時間領域で解の形が変わるのは明らかだろう。$0 \leq t \leq t_0$ については、初期値を $N(0)$ として、(5.2.7) で求めた

$$N(t) = N(0)\, e^{-\gamma\, t} \tag{5.2.39}$$

[*25] 細かいので、普通は気にしないでいい注：(5.2.38) では時刻 t_0 での導関数が定まっていないけれど、実際、解はここで微分不可能になるので、仕方がないのである。少し気持ちが悪いが、これは供給を 0 から β にとつぜん変化させる場合はどうしようもない。供給を（急ではあるけれど）連続的に変化させることにすれば、こういう気持ちの悪さは消えるが、話が面倒になる。同じようなことは、微分方程式を「つなぐ」場合、これから先でも出てくるが、いちいちこういう断り書きはしない。

が解になる。$t > t_0$ でも、やはり (5.2.32) の

$$N(t) = C\,e^{-\gamma\,t} + \frac{\beta}{\gamma} \tag{5.2.40}$$

が解だ。

ここで (5.2.40) の任意定数 C を決めなくてはいけない。(5.2.33) で決めたのは、$t = 0$ からずっと (5.2.28) の微分方程式が成立しているときの初期値にあわせた結果だから、ここでは使えない。まず、(5.2.39) に $t = t_0$ を代入すると、$N(t_0) = N(0)\,e^{-\gamma\,t_0}$。解が切り替わった直後は、これと連続につながらないと物理的におかしい（不安定な原子核の総量が一瞬にして変化してしまう)。解が連続であることを要請しよう。よって、(5.2.40) に $t = t_0$ を代入したものもこれと同じ値になるべきなので、

$$C\,e^{-\gamma\,t_0} + \frac{\beta}{\gamma} = N(0)\,e^{-\gamma\,t_0} \tag{5.2.41}$$

という条件が出る。これを C について解き、(5.2.40) に代入すれば、最終的な解になる。(5.2.39) とあわせ

れば、

$$N(t) = \begin{cases} N(0)\, e^{-\gamma\, t} & 0 \le t \le t_0 \\ \left(N(0) - \dfrac{\beta}{\gamma}\, e^{\gamma\, t_0} \right) e^{-\gamma\, t} + \dfrac{\beta}{\gamma} & t_0 \le t \end{cases} \tag{5.2.42}$$

が、(5.2.38) の最終的な一般解である[*26]。

ここで、だいじな注意。前にも書いたように、微分方程式の一般解は、初期値を使って書いてもよいし、任意定数を残した形に書いてもよい。それならば、というので、A と B を二つの任意定数だとして、

$$N(t) = \begin{cases} A\, e^{-\gamma\, t} & 0 \le t < t_0 \\ B\, e^{-\gamma\, t} + \dfrac{\beta}{\gamma} & t_0 \le t \end{cases} \tag{5.2.43}$$

を (5.2.38) の一般解だとしてはいけない。このままだと、A と B の両方を好き勝手に選べることになってし

[*26] これも細かい注意：脚注 *25 で注意したように、時刻 t_0 での微分係数 $\dot{N}(t_0)$ は定まらない。しかし、$N(t_0)$ はきちんと定まっているので、(5.2.42) での不等号には、イコールが（両方の場合分けに）含まれている。

まう。しかし、この問題では、(たとえば) 初期値 $N(0)$ を決めればすべての $t \geq 0$ での解が一通りに決まってしまうのだから、一つの定数を自由に選ぶ余地しかないのだ。だから、たとえば A を任意定数として残すのはかまわないが、それなら B を解に残すことはできない[*27]。これは、数学的な細かい問題ではなく、「与えられた問題で、なにを自由に選ぶ余地があるか？」という物理的な問題であることを理解してほしい。

問 5.2.2.a　途中の時刻で状況がかわる問題の別な例をみよう。落ち着いて解けば、それで大丈夫。γ, κ, t_0 を正の定数とし、微分方程式

$$\dot{N}(t) = \begin{cases} -\gamma\, N(t) & 0 \leq t < t_0 \\ -\kappa\, N(t) & t_0 < t \end{cases} \tag{5.2.44}$$

を考える。一般解を、初期値 $N(0)$ を含む形で求めよ。

問 5.2.2.b　少しむずかしい問題だから、じっくりと

[*27] もちろん、B を任意定数として残し、A を消去してもよい。

解いてほしい。γ, α を正の定数として、微分方程式

$$\dot{N}(t) = -\gamma\, N(t) + \alpha\, t, \quad (t \geq 0) \tag{5.2.45}$$

の一般解を求めよ。これは、一筋縄ではいかないので、(5.2.28) の「特解を利用した解き方」を真似して解いてみよ。まず、特解をさがすところでは、定数 a, b によって $N(t) = a + bt$ と書くことのできる解をさがせ。それがみつかれば（ちょうど一つだけみつかる）あとは上の方針の通りにやればよい。解の中の任意定数を初期値 $N(0)$ によって表わせ（これができれば、任意の初期値に対応する解、つまり一般解が求まったことがわかる）。

5.2.3　連立微分方程式の例

もう少し込み入った微分方程式で、やはり同じような指数減衰の解をもつ例をみておこう。

$t \geq 0$ を時間、$x(t)$, $y(t)$ を未知の実数上の実数値関

数とする。β, γ を $0 < \beta < \gamma$ を満たす定数とし、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\gamma\, x(t) + \beta\, y(t) \\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, y(t) + \beta\, x(t) \end{aligned} \tag{5.2.46}$$

という連立の微分方程式を考えよう。あまり現実的な方程式ではないが、たとえば、二種類の物質 X, Y があり、それぞれが減衰していくだけでなく、X は Y に、Y は X に、一定の割合で変化するなら、それぞれの物質の総量 $x(t), y(t)$ についてこのような関係が成り立つだろう。この微分方程式を解けということは、すべての $t \geq 0$ で (5.2.46) の式を二つとも満たすような関数 $x(t)$, $y(t)$ をさがせ、ということだ。ちょっと大変そうだ。

さすがに何が解になるか、すぐにはわからない。これまで見てきたような指数的減衰があるだろうと推測して、

$$x(t) = e^{-\nu\, t}, \quad y(t) = \eta\, e^{-\nu\, t} \tag{5.2.47}$$

という形の解をさがしてみよう。ν, η は（今のところ

は未知の）定数。

解の候補 (5.2.47) を微分方程式 (5.2.46) に代入して微分を計算すると、

$$\begin{aligned} -\nu\, e^{-\nu\, t} &= -\gamma\, e^{-\nu\, t} + \beta\eta\, e^{-\nu\, t} \\ -\nu\eta\, e^{-\nu\, t} &= -\gamma\eta\, e^{-\nu\, t} + \beta\, e^{-\nu\, t} \end{aligned} \tag{5.2.48}$$

となる。これがすべての $t \geq 0$ について成立しなくてはならないのだが、よく見ると、t に依存するのは $e^{-\nu\, t}$ だけで、しかも、これはすべての項に同じように含まれている。全体を $e^{-\nu\, t}$ で割れば、

$$\begin{aligned} -\nu &= -\gamma + \beta\eta \\ -\nu\eta &= -\gamma\eta + \beta \end{aligned} \tag{5.2.49}$$

という、ただの連立方程式が得られる。これを、未知の定数である η, ν について解くと[*28]、うれしいことに、解が二つみつかって、

$$\eta = \pm 1, \quad \nu = \gamma \mp \beta \quad \text{(複号同順)} \tag{5.2.50}$$

[*28] まず、一つ目の式を二つ目に代入して ν を消去するのがよい。二次方程式になるが、簡単。

となる。これら二つの解を、それぞれ微分方程式の解の候補 (5.2.47) に代入すれば、

$$x(t) = C\,e^{-(\gamma-\beta)\,t}, \quad y(t) = C\,e^{-(\gamma-\beta)\,t} \tag{5.2.51}$$

および

$$x(t) = D\,e^{-(\gamma+\beta)\,t}, \quad y(t) = -D\,e^{-(\gamma+\beta)\,t} \tag{5.2.52}$$

という二つのタイプの解が得られる。ちょっとフライング気味だが、それぞれ、任意の定数 C, D をかけておいた。それでも解であることは明らかだろう。

さらに面白いことに、(5.2.51) と (5.2.52) の二つの解を強引にたしてやった

$$\begin{aligned} x(t) &= C\,e^{-(\gamma-\beta)\,t} + D\,e^{-(\gamma+\beta)\,t} \\ y(t) &= C\,e^{-(\gamma-\beta)\,t} - D\,e^{-(\gamma+\beta)\,t} \end{aligned} \tag{5.2.53}$$

も、任意の定数 C, D について、微分方程式 (5.2.46) の解になっている。こういうことは、人の説明を百回聞くより、自分で一回計算してみる方が理解が早いので、ともかく、鉛筆をとって計算してみてほしい。つ

まり、(5.2.53) の解（の候補）を微分方程式 (5.2.46) に代入し、ひたすらすなおに計算して、すべての $t \geq 0$ において等式が成立することを確かめるのだ。やってみれば、C を含む項は C を含む項どうしで、D を含む項は D を含む項どうしで、きちんと等しくなることが確認できるはずだ。この計算は、今後、線形微分方程式や量子力学でくり返しくり返し使うことになる「重ね合わせの原理」の基本になる。

こうして、二つの任意定数 C, D を含んだ解 (5.2.53) が得られた。実は、これは一般解になっている。今の問題では、初期条件として、$t = 0$ での関数の値 $x(0), y(0)$ を自由に設定することができる。$x(0), y(0)$ が与えられたなら、(5.2.53) で $t = 0$ とした式から、$C = \{x(0) + y(0)\}/2$, $D = \{x(0) - y(0)\}/2$ のように任意定数が定まる。こうして、一般解 (5.2.53) は、初

期値を使って

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{x(0)+y(0)}{2}\,e^{-(\gamma-\beta)\,t} + \frac{x(0)-y(0)}{2}\,e^{-(\gamma+\beta)\,t} \\
y(t) &= \frac{x(0)+y(0)}{2}\,e^{-(\gamma-\beta)\,t} - \frac{x(0)-y(0)}{2}\,e^{-(\gamma+\beta)\,t}
\end{aligned}
\tag{5.2.54}
$$

と書くことができる。この解をよくみると、$x(t)$ と $y(t)$ の差は $e^{-(\gamma+\beta)\,t}$ のようにすばやく減衰し、$x(t)$ と $y(t)$ の和は $e^{-(\gamma-\beta)\,t}$ のようにゆっくりと減衰することがわかる（図 5.3）。

■定数項を含む方程式　$\alpha > 0$ を定数として、次のような（線形で非斉次の）微分方程式を考えよう。

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -\gamma\,x(t) + \beta\,y(t) + \alpha \\
\dot{y}(t) &= -\gamma\,y(t) + \beta\,x(t)
\end{aligned}
\tag{5.2.55}
$$

上で解いた微分方程式 (5.2.46) とそっくりだが、$x(t)$ の方に、外から供給する項が付け加わった。この方程式も、5.2.2 節でみた特解を利用する方法で簡単に解くことができる。

図 5.3　解 (5.2.54) の様子。$\gamma = 3\beta/2 > 0$ と定数を選び、$x(0) = 3y(0)$ となるように初期値をとった。$x(t)$ と $y(t)$ は、まず急激に「引っ張り合って」ほぼ等しくなり、いっしょに減衰していく。

特解としては、やはり、すべての $t \geq 0$ において $\dot{x}(t) = \dot{y}(t) = 0$ となるものを、さがす。単に連立方程式を解けばよいわけで、ただちに、

$$x_{\mathrm{ps}}(t) = \frac{\alpha\gamma}{\gamma^2 - \beta^2}, \quad y_{\mathrm{ps}}(t) = \frac{\alpha\beta}{\gamma^2 - \beta^2} \tag{5.2.56}$$

という時間によらない解が得られる。

この特解と、対応する斉次の微分方程式の一般解

(5.2.53) を足し合わせた

$$
\begin{aligned}
x(t) &= C\,e^{-(\gamma-\beta)\,t} + D\,e^{-(\gamma+\beta)\,t} + \frac{\alpha\gamma}{\gamma^2-\beta^2} \\
y(t) &= C\,e^{-(\gamma-\beta)\,t} - D\,e^{-(\gamma+\beta)\,t} + \frac{\alpha\beta}{\gamma^2-\beta^2}
\end{aligned}
\tag{5.2.57}
$$

が、(5.2.55) の一般解になっている (確かめよう)。$x(t)$ のみを外から供給したことによって、最終的には $x(t)$ の方が大きな値に落ち着くことがみてとれるだろう。

問 5.2.3.a　γ を正の定数として、

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= -\gamma\,y(t) \\
\dot{y}(t) &= -\gamma\,x(t)
\end{aligned}
\tag{5.2.58}
$$

という微分方程式の一般解を求めよ（$x(t)$, $y(t)$ は正とはかぎらない)。任意定数は、初期値 $x(0)$, $y(0)$ を用いて表せ。$x(0) = y(0)$, $x(0) > y(0)$, $x(0) < y(0)$ の三つの場合それぞれで、t が大きくなったときの解のふる

まいはどうなるか？

問 5.2.3.b　γ, α を正の定数として、

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -\gamma\, y(t) + \alpha\, t \\ \dot{y}(t) &= -\gamma\, x(t) - \alpha\, t \end{aligned} \tag{5.2.59}$$

という微分方程式の一般解を求めよ。問 5.2.2.b が参考になるだろう。

5.3　一次元での運動

より物理的な例として、一次元を運動する粒子のニュートン方程式をあつかう。

はじめに位置の情報を気にせずに速度についての微分方程式を解けば十分な例をみる (5.3.1 節、5.3.2 節)。これらは初歩的だが、それだけに、きちんと理解しておくべきだ。つづいて、力学の定番ともいえる線形振動の微分方程式をいくつか解いてみよう (5.3.3 節、5.3.4 節、5.3.5 節)。指数関数を複素数に拡張したこ

とが、いかに強力な武器になるかが実感できるはずだ。最後の 5.3.7 節では非線形の振動の方程式でカオスと呼ばれる不思議な現象が出ることを簡単にみよう。

具体的な問題に入る前に、力学で学んだニュートンの運動方程式について復習しておこう。まず、言葉で書けば、

> 粒子の加速度に質量をかけたものは、その時点で粒子に働く力に等しい

ということになる。これだけでは進んだことは何一つわからないので、問題を数学的に表現しよう。質量 $m > 0$ の粒子が一次元的な領域を運動している。$t \geq 0$ を時間とし、$x(t)$ を時刻 t での粒子の位置を表す実数上の実数値関数とする。粒子の（一次元的な）速度は、$x(t)$ の導関数そのもので、

$$v(t) = \dot{x}(t) \tag{5.3.1}$$

である。ニュートンの運動方程式は、

$$m\,\dot{v}(t) = f \tag{5.3.2}$$

という速度 $v(t)$ の導関数（つまり、加速度）を含む微分方程式だ。ここで、右辺にある f は、時刻 t に粒子にはたらく力である。

式をわざとあいまいに書いてしまったのだが、この力 f は一般には、時間、粒子の位置、粒子の速度のすべてに依存してかまわない。力が何にどのように依存するかによって、微分方程式 (5.3.2) に対する攻め方も変わってくる[*29]。以下、それを順にみていこう。

[*29] だいたい、力がややこしい場合には、こんな簡単そうな微分方程式だって解くことはできない（大学一年生に解けないといっているのでなく、誰にも解けない）。5.3.7 節でそういう例をみる。

5.3.1　力が時間のみに依存する状況

もっとも簡単なのは、力が、位置にも速度にも依存せず、（あらかじめ決められた）時間のみの関数 $f(t)$ になっている場合だ。このとき、ニュートン方程式 (5.3.2) は、

$$\dot{v}(t) = \frac{f(t)}{m} \tag{5.3.3}$$

という、与えられた関数 $f(t)$ と未知関数 $v(t)$ だけを含む微分方程式になる。この微分方程式を解けば、速度 $v(t)$ が決まる。そうしたら、今度は (5.3.1) を位置 $x(t)$ についての微分方程式とみて、その解を求めればよい。

速度のふるまいを決める際に位置のことを考えなくていいというのが、こういう方程式の楽なところだ。具体例をみながら、勘を養（やしな）っていこう。

■一定の力　一定の力がひきおこす等加速度運動は完璧に頭にはいっていると思うが、せっかくなので、一般的な設定のなかで見直しておこう。

f_0 を実定数として、(5.3.3) の力が $f(t) = f_0$ で与えられるとしよう。つまり、速度の満たす微分方程式が、

$$\dot{v}(t) = \frac{f_0}{m} \tag{5.3.4}$$

だとする。導関数が定数になるというのだから、もとの関数は明らかに一次関数。初期条件を $t = 0$ で与えることにすると、解は

$$v(t) = v(0) + \frac{f_0}{m}\,t \tag{5.3.5}$$

となる。この解は任意定数を一つ含むわけだが、それを初期値 $v(0)$ で表した。

こうして速度 $v(t)$ が完全に決まった。位置 $x(t)$ を決める微分方程式 (5.3.1) にこれを代入すれば、

$$\dot{x}(t) = v(0) + \frac{f_0}{m}\,t \tag{5.3.6}$$

となる。これについても悩む必要はないだろう。導関数が t の一次式なのだから[*30]、もとの関数は t の二次

[*30] $v(0)$ も f_0/m も、ただの定数であることを思い出そう。

式だ。すぐに

$$x(t) = x(0) + v(0)\,t + \frac{f_0}{2m}\,t^2 \tag{5.3.7}$$

が解になるのがわかるはずだ（微分してみよ）。ここで、(5.3.6) を解く際に、新しい任意定数が必要だったので、それを初期値 $x(0)$ で表しておいた。

こうして、最終的なニュートン方程式の一般解 (5.3.7) には、$x(0)$ と $v(0)$ という二つの任意定数が含まれることになる。物理的にいえば、一次元の運動では粒子の位置と速度についての二つの初期条件（だけ）を選ぶ余地があることに対応している[*31]。これは、一定の力の問題にかぎらず、一次元での一粒子の運動については一般的に成り立つことだ。

■時間的に振動する力　もう少し当たり前でない例として、(5.3.3) の力が、実定数 α, ω を使って、

$$f(t) = \alpha\,\cos(\omega\,t) \tag{5.3.8}$$

[*31] 位置と速度を決めてしまったら、加速度は自由には選べない。

図 5.4　時間的に振動する外力 (5.3.8) がひきおこす運動の概略。

と書ける場合をあつかおう。力は位置には依存しないが、時間とともに振動する。たとえば、平行平板コンデンサーに時間的に振動する電圧をかけて、時間的に振動する電場をつくり、その中に荷電粒子を置けば、このような力を受けるはずだ。

これも簡単だが、順をおってみていこう。速度の微分方程式は、

$$\dot{v}(t) = \frac{\alpha}{m}\,\cos(\omega\,t) \tag{5.3.9}$$

である。微分してコサインになるのはサインだと知っているから、係数に注意して、

$$v(t) = v(0) + \frac{\alpha}{m\,\omega}\,\sin(\omega\,t) \tag{5.3.10}$$

となる（微分してみよう）。ここでも定数 $v(0)$ を忘れないこと。よって位置は

$$\dot{x}(t) = v(0) + \frac{\alpha}{m\,\omega}\,\sin(\omega\,t) \tag{5.3.11}$$

にしたがう。サイン、コサインの微分を考え、さらに任意定数を決定すれば、

$$x(t) = x(0) + v(0)\,t + \frac{\alpha}{m\,\omega^2}\{1 - \cos(\omega\,t)\} \tag{5.3.12}$$

という一般解が得られる。$x(t)$ は振動しながら一定の速度で動いていくことがわかる（図 5.4）。

■途中で力の形が変わる問題　f_0 を実定数、$t_0 > 0$ を実定数として、

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{f_0}{t_0}\,t & 0 \leq t \leq t_0 \\ f_0 & t_0 \leq t \end{cases} \tag{5.3.13}$$

という力を考えよう。$0 \leq t \leq t_0$ の範囲では力は時間に比例して増加し、t_0 以降は一定の値に落ち着く、ということだ。

5.2.2 節での経験からわかると思うが、このような微分方程式は、時間の範囲を $0 \le t \le t_0$ と $t_0 \le t$ に分けて、落ち着いて解けばよい。ただし、任意定数の選び方には注意する必要がある。

そろそろ詳細は略すが、これまでと同じように、「微分したらこうなるのは何か」ということを推理しながら微分方程式を解くと、速度については、

$$v(t) = \begin{cases} v(0) + \dfrac{f_0}{2m\,t_0}\,t^2 & 0 \le t \le t_0 \\ C + \dfrac{f_0}{m}\,t & t_0 \le t \end{cases} \tag{5.3.14}$$

となる。前半では、任意定数を初期値 $v(0)$ で表し、後半では、（よくわからないので）任意定数をただ C と書いておいた。しかし、初期条件を選ぶのは一回だけだから、C が任意のはずはない。実際、$t = t_0$ では速度 $v(t)$ は連続でなくてはならない（そうでなければ無限大の力が働くことになる）。$v(t)$ の連続性を使えば、

$$v(0) + \frac{f_0}{2m\,t_0}\,(t_0)^2 = C + \frac{f_0}{m}\,t_0 \tag{5.3.15}$$

という関係が出て、ここから C が決まる。こうして、速度の一般解は、

$$v(t) = \begin{cases} v(0) + \dfrac{f_0}{2m\,t_0}\,t^2 & 0 \le t \le t_0 \\ v(0) - \dfrac{f_0\,t_0}{2m} + \dfrac{f_0}{m}\,t & t_0 \le t \end{cases} \tag{5.3.16}$$

という、唯一の任意定数 $v(0)$ を含む形に書ける。

ここでも、(5.3.16) を (5.3.1) に代入して、$x(t)$ の微分方程式をつくり、その解を求める。またしても注意すべきなのは、任意定数のことくらいだ。後半の任意定数をさしあたって D と書いておけば、

$$x(t) = \begin{cases} x(0) + v(0)\,t + \dfrac{f_0}{6m\,t_0}\,t^3 & 0 \le t \le t_0 \\ D + \left(v(0) - \dfrac{f_0\,t_0}{2m}\right)t + \dfrac{f_0}{2m}\,t^2 & t_0 \le t \end{cases} \tag{5.3.17}$$

となる。ここでも、$t = t_0$ で $x(t)$ が連続であることか

ら D を決めると（やってみよう）、

$$x(t) = \begin{cases} x(0) + v(0)\,t + \dfrac{f_0}{6m\,t_0}\,t^3 & 0 \le t \le t_0 \\ x(0) + \dfrac{f_0\,(t_0)^2}{6m} + \left(v(0) - \dfrac{f_0\,t_0}{2m}\right) t + \dfrac{f_0}{2m}\,t^2 & t_0 \le t \end{cases} \tag{5.3.18}$$

という一般解が得られる。

問 5.3.1.a　本文と同様の 1 次元の運動を考える。γ を正の定数、f_0 を実定数とする。$t \ge 0$ について、力が $f(t) = f_0\,(1 - e^{-\gamma\,t})$ と書ける状況で、$x(t)$, $v(t)$ を求めよ。任意定数として $x(0)$, $v(0)$ を使え。

問 5.3.1.b　本文と同様の 1 次元の運動を考える。ω, f_0 を実定数とする。力が

$$f(t) = \begin{cases} f_0\,\sin(\omega\,t) & 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2\omega} \\ f_0 & \dfrac{\pi}{2\omega} \le t \end{cases} \tag{5.3.19}$$

と書ける状況で、$v(t)$, $x(t)$ を求めよ。任意定数として $x(0)$, $v(0)$ を使え。

5.3.2　力が速度のみに依存する状況 — 空気抵抗

次に、力が粒子の速度のみに依存する状況を考えてみよう。これは、物理的にも自然で面白い問題である。

ここでも、位置のことは気にせずに、まず速度のふるまいを議論してしまうことができる。

■空気抵抗を受ける運動　粒子が空気中を運動するときには、空気による抵抗がはたらく。空気が一様で静止しているなら、空気抵抗は、粒子の速度だけに依存し、時間や位置にはよらないはずだ。

空気抵抗が速度にどのように依存するかというのは、実はデリケートな問題だ。ここでは、速度が小さいときに成り立つ近似を採用して、ある正の定数 μ が

あって、

$$f(t) = -\mu\, v(t) \tag{5.3.20}$$

が成り立つとしよう[*32]。すると、速度の微分方程式 (5.3.2) は、

$$\dot{v}(t) = -\frac{\mu}{m}\, v(t) \tag{5.3.21}$$

となる。前節でみた例とはちがって、右辺は決まった時間の関数ではなく、未知関数 $v(t)$ をもろに含んでいる。そういう意味で、少し高級になった。

高級になったものの、お気づきのように、これはすでによく知っている微分方程式 (5.2.5) そのものであ

[*32] $v = \dot{x}$ は速度の定義、$m\dot{v} = f$ は（われわれの世界で）普遍的に成り立つ美しい運動の法則。これに対し、$f = -\mu v$ は v が小さいときに近似的に成り立つ経験則。かなり格が落ちる。同じように等式で書かれていても、このように、科学の中での位置づけは実に様々なのだ。高校物理の一つの大きな欠陥は、このような格付けのまったく異なった様々な等式を十把一絡げ（じゅっぱひとから）に「公式」として暗記させてしまうことだと思う。式を覚えるのは重要だが、それとともに、その式のもっている深い意味を見すえる目をもとう。

る。一般解 (5.2.7) の変数と定数をきちんと読みかえてやれば、

$$v(t) = v(0)\,\exp[-\frac{\mu}{m}\,t] \tag{5.3.22}$$

という解が得られる。$x(t)$ は、単に微分したらこの形になる関数だから、

$$x(t) = C - \frac{m\,v(0)}{\mu}\,\exp[-\frac{\mu}{m}\,t] \tag{5.3.23}$$

である（しつこいが、自分で微分してみよう）。ここで、慎重を期して、任意定数を単に C と書いておいた。実際、(5.3.23) の両辺に $t = 0$ を代入してみると、C は $x(0)$ に等しくないことがわかる。ちゃんと計算して、初期値 $x(0)$ を含む一般解を書けば、

$$x(t) = x(0) + \frac{m\,v(0)}{\mu}\left(1 - \exp[-\frac{\mu}{m}\,t]\right) \tag{5.3.24}$$

となる。$t \to \infty$ とすると $x(t) \to x(0) + (m/\mu)\,v(0)$ だから、空気抵抗のために粒子は、たかだか距離 $(m/\mu)\,v(0)$ しか進まないことがわかる。

■空気抵抗と外力を受ける運動　粒子に重力のような一定の力 f_0 と、速度に比例する空気抵抗の両方が働く状況を考えてみよう。空気中での落下運動のもっとも簡単なモデルだ。速度のしたがう微分方程式は、(5.3.21) に一定の力を付け加えた

$$\dot{v}(t) = -\frac{\mu}{m}\,v(t) + \frac{f_0}{m} \tag{5.3.25}$$

になる。これも、前にみた崩壊と供給が共存する問題 (5.2.28) とまったく同じ方程式になっている。腕試しにはちょうどよいので、練習問題にしよう。

問 5.3.2.a　微分方程式 (5.3.25) で表される問題について、$v(t)$ と $x(t)$ を求めよ。解は、初期値 $v(0)$, $x(0)$ を使って表すこと。解のふるまいの様子について、グラフを描いて議論せよ。

5.3.3　単振動の方程式と複素数の指数関数

力が粒子の位置に依存する状況の典型例として、粒子が理想的なバネにつながっている問題を考える。力学の定番だ。「理想的なバネにつながった粒子」の問題というと高校生的だが、大学の物理では、これを**調和振動子** (harmonic oscillator) の問題とよぶ。ただし、調和振動子というときは、「バネと粒子」という設定にかぎらず、運動方程式 (5.3.29) にしたがう一般的な物理系を念頭に置いている[*33]。

バネがちょうど自然長になるような粒子の位置を座

[*33] バネ以外に、物理的に意味のある調和振動子があるのかと聞きたくなるだろう。一般に、安定点のまわりでの微小振動は調和振動子の集まりとして記述できる。また、固体結晶の振動モードも（かなりややこしいものだが）調和振動子の集まりだ。さらには、電磁場も数学的な変換によって調和振動子の集まりに書きかえられる。場の量子論の出発点になるのも、時空間の各点に（量子的な）調和振動子が並んだ問題だ。「バネ（調和振動子）は、あなどれない」というのが、ある物理学科の三年生の率直な（実に正しい）感想だった。

標の原点にとると（もちろん、原点はわれわれが好きなようにとってよい)、バネが粒子におよぼす力は、

$$f = -k\,x(t) \tag{5.3.26}$$

となる。k はバネ定数と呼ばれる正の定数である。

この場合、速度についての微分方程式は、

$$\dot{v}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t) \tag{5.3.27}$$

となる。右辺に未知関数 $x(t)$ が登場するから、このままでは、手も足もでない。この場合には、もう $v(t)$ の方程式にはこだわらず、(5.3.1) より

$$\dot{v}(t) = \ddot{x}(t) := \frac{d^2}{dt^2}x(t) \tag{5.3.28}$$

であることを使って、

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t) \tag{5.3.29}$$

という $x(t)$ についての微分方程式を考える方がいい。二階の導関数を含んだ微分方程式 (2 階微分方程式とい

う）を解くことになるので、それだけ話は高級になっている。

とはいえ、微分方程式 (5.3.29) も、微分についての堅実な知識があれば、簡単に解けてしまう。要するに、「二回微分したら負の定数がついて自分に戻る関数は何だ」と聞かれているのだ。指数関数だと、a を実定数とすると、

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{a\,t} = a^2\, e^{a\,t} \tag{5.3.30}$$

だから、二回微分すると正の定数 a^2 がついてしまう。マイナスを出すのは、もちろん、コサインとサインだ。念のため、ω を実定数として計算しておくと、

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dt^2} \cos(\omega t) = -\omega^2\, \cos(\omega t), \\ &\frac{d^2}{dt^2} \sin(\omega t) = -\omega^2\, \sin(\omega t) \end{aligned} \tag{5.3.31}$$

であり、これは合格。さらに微分操作の線形性 (3.1.25)

から、任意の定数 C, D について、

$$\begin{aligned}&\frac{d^2}{dt^2}\{C\ \cos(\omega t) + D\ \sin(\omega t)\}\\&\quad = -\omega^2\,\{C\ \cos(\omega t) + D\ \sin(\omega t)\}\end{aligned} \tag{5.3.32}$$

となる。コサインとサインを「重ね合わせ」ても、微分のルールは同じ形になるのだ[*34]。

(5.3.29) と (5.3.32) を見比べて、

$$\omega := \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5.3.33}$$

のように角振動数 ω を定めれば、

$$x(t) = C\ \cos(\omega t) + D\ \sin(\omega t) \tag{5.3.34}$$

が微分方程式の解になる。任意定数を二つ含んでいるから、これは一般解である。角振動数 ω は、この調和振動子の固有振動数（正しくは、固有角振動数だが）と

[*34] これが、線形微分方程式で威力を発揮する「重ねあわせの原理」。

よばれる。この解が周期 $T = 2\pi/\omega$ の単振動を表していることはいうまでもないだろうが、念のために見ておこう。任意の t について

$$x(t+T) = x(t) \tag{5.3.35}$$

が成り立つような正の T のうちの最小のものを $x(\cdot)$ の**周期** (period) と呼ぶ。今の場合は、$T = 2\pi/\omega$ として (5.3.34) の関数形を使うと、

$$\begin{aligned} x(t+T) &= C\ \cos(\omega t + \omega\, T) + D\ \sin(\omega t + \omega\, T) \\ &= C\ \cos(\omega t + 2\pi) + D\ \sin(\omega t + 2\pi) \\ &= C\ \cos(\omega t) + D\ \sin(\omega t) \\ &= x(t) \end{aligned} \tag{5.3.36}$$

となり、たしかに (5.3.35) が成り立っている。

初期値を使って任意定数を表すことにすれば、

$$x(t) = x(0)\ \cos(\omega t) + \frac{v(0)}{\omega}\ \sin(\omega t) \tag{5.3.37}$$

となる。確かめておこう。

解 $x(t)$ が単振動する様子をはっきり表すために、A と φ を任意定数として、

$$x(t) = A\,\cos(\omega t + \varphi) \tag{5.3.38}$$

という形に一般解を表現することもある。任意定数 A は粒子が振動する範囲の幅を表しているので振幅、任意定数 φ は初期位相[*35] と呼ばれる（図 5.5)。加法定理を使えばわかるが、これは (5.3.34) の任意定数と、$C = A\,\cos\varphi$, $D = -A\,\sin\varphi$ で結ばれている。

問 5.3.3.a　バネからの復元力の他に一定の力が働く（たとえば、重力中にバネでつるす）場合のニュートン方程式

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t) + \frac{f_0}{m} \tag{5.3.39}$$

の一般解を求めよ。任意定数を初期値 $x(0)$, $v(0)$ で表せ。5.2.2 節を参考にすれば簡単に解ける。二つの解き

[*35] 三角関数の中身を位相 (phase) と呼ぶ。

図 5.5　単振動の一般解 (5.3.38) のグラフ。基本的にはコサインのグラフだが、コサインの中身が 0 になりコサインが最大値をとるのは、$\omega t + \varphi = 0$ つまり $t = -\varphi/\omega$ のところ。振動の振幅は A、周期は $2\pi/\omega$ である。

方でやってみよう。

問 5.3.3.b　力が位置のみに依存する方程式の、もう一つの典型例として、不安定平衡点近傍での運動を表す方程式

$$m\ddot{x}(t) = \alpha\, x(t) \tag{5.3.40}$$

がある。ただし α を正の定数。つまり $x = 0$ から離そうとする力が働く。この方程式の一般解を求め、任意定数を初期値 $x(0)$, $v(0)$ で表せ。

問 5.3.3.c　力が位置のみに依存する状況の重要な例として、原点にむかって、原点からの距離の二乗に反比例する力が働く、という問題を考える。もちろん、太陽に引っ張られて運動する軽い星の運動に相当する。ただし、三次元、二次元の問題をあつかうのは大変なので、一次元にして、星が太陽からまっすぐ遠ざかっていく様子を表す解を求めてみよう。微分方程式は、K を正の定数とし、$x(t) > 0$ として、

$$m\ddot{x}(t) = -\frac{K}{\{x(t)\}^2} \tag{5.3.41}$$

(これは、(5.1.6) で $x(t) > 0$, $y(t) = 0$ としたもの) である。星が遠ざかる解として、正の定数 A, B, α を使って

$$x(t) = A\,(t + B)^{\alpha} \tag{5.3.42}$$

と書けるようなものを探してみよう。もちろん、A, B, α のすべては任意定数ではないが、逆に、すべてが決まってしまうわけではない。得られた結果を吟味し、(一次元に制限した上での) 一般解が得られているかを検討せよ。

■複素数の指数関数を使った解法　ここで、同じ微分方程式 (5.3.27) の少し異なった解法をみておこう。3.2.7 節で論じた複素数の指数関数と三角関数の関係を有効に使った方法で、これから先で、もっと複雑な微分方程式を解く際に威力を発揮する。

実数上の複素数値関数 $z(t)$ が[*36]、微分方程式

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2\, z(t) \tag{5.3.43}$$

を満たしているとする ((5.3.33) を使って k/m を ω^2 と書いた)。

複素数値関数の微分が登場するのは初めてだが、定義は簡単だ。複素数値関数を $z(t) = x(t) + i\, y(t)$ のよ

[*36] つまり変数 t は実数だが、関数の値 $z(t)$ は複素数ということ。

うに実部と虚部に分ければ、$x(t)$, $y(t)$ は普通の実数値関数である。これらの導関数 $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$ を使い、$z(t)$ の導関数を $\dot{z}(t) := \dot{x}(t) + i\,\dot{y}(t)$ と定義すればいい。

よって、微分方程式は (5.3.43) は、

$$\ddot{x}(t) + i\,\ddot{y}(t) = -\omega^2\,x(t) - i\,\omega^2\,y(t) \tag{5.3.44}$$

となる。もちろん、等号は実部と虚部それぞれについて成立していなくてはならない。よって、実数値関数 $x(t)$, $y(t)$ は、それぞれ、微分方程式

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\,x(t), \quad \ddot{y}(t) = -\omega^2\,y(t) \tag{5.3.45}$$

を満たすことになる。これは、もちろん、(5.3.27) そのものである。

つまり、**複素数値関数についての微分方程式** (5.3.43) **の解をみつけ、その実部をとれば、微分方程式** (5.3.27) **の解になっている**ことがわかる[*37]。

[*37] 虚部をとってもいいのだが、同じことだから、実部ということにしよう。

この事実を使って (5.3.27) を解いてみよう。今や、複素数の世界でものを考えていいことになったので、α を複素定数、t を実変数として、$z(t) = e^{\alpha\, t}$ を解の候補に選ぶ。(3.2.88) より

$$\ddot{z}(t) = \frac{d^2}{dt^2} e^{\alpha\, t} = \alpha^2\, e^{\alpha\, t} = \alpha^2 z(t) \tag{5.3.46}$$

が成り立つので、これと (5.3.43) を見比べれば、$\alpha^2 = -\omega^2$。つまり、$\alpha = \pm i\,\omega$ とおいた $e^{i\,\omega\, t}$ と $e^{-i\,\omega\, t}$ が解になる。

(5.3.32) と同じ「重ね合わせ」の考えで、二つの解の定数倍を足し合わせて、

$$z(t) = A\, e^{i\,\omega\, t} + B\, e^{-i\,\omega\, t} \tag{5.3.47}$$

としたものが、複素数値関数についての微分方程式 (5.3.43) の一般解だ。ただし、A, B は複素数の任意定数。これら任意定数を実定数をつかって $A = a + i\, c$, $B = b + i\, d$ と書いておこう。オイラーの公式 (3.2.102)

を使って、(5.3.47) の実部をとってやると、

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,[z(t)] &= \mathrm{Re}\,[(a+i\,c)\{\cos(\omega\,t)+i\,\sin(\omega\,t)\} \\ &\quad + (b+i\,d)\{\cos(\omega\,t)-i\,\sin(\omega\,t)\}] \\ &= (a+b)\,\cos(\omega\,t)+(d-c)\,\sin(\omega\,t)\end{aligned} \tag{5.3.48}$$

となる。いったん複素数値関数にふくらませてしまったので任意定数が四つに増えてしまったが、この式をみれば任意定数が四つもいらないのは明らか。$C=a+b$, $D=d-c$ としてやれば、先ほど求めた一般解 (5.3.34) が得られる。

実は、このように $z(t)$ についての微分方程式 (5.3.43) の一般解まで出してしまうのは、ちょっと馬鹿正直な解き方だった。$e^{i\,\omega\,t}$ と $e^{-i\,\omega\,t}$ の二つの解がみつかったところで、二つ目は（実部を取ったあとでは）似たようなものだろうというので捨ててしまい、一つ目に複素数の任意定数 A をかけた

$$z(t)=A\,e^{i\,\omega\,t} \tag{5.3.49}$$

という解を考える。そして実定数を使って $A = C - iD$ と書いてやれば、たちまち

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\,[A\,e^{i\,\omega\,t}] \\ &= \mathrm{Re}\,[(C - iD)\,\{\cos(\omega\,t) + i\,\sin(\omega\,t)\}] \\ &= C\,\cos(\omega t) + D\,\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{5.3.50}$$

と、先ほどの一般解 (5.3.34) が出てくる。複素数値関数の二つの解のうちの一つを捨ててしまっても、実数値関数の微分方程式 (5.3.29) の一般解を出すには十分だったのだ[*38]。実用的には、こっちが正しい解き方だ。

複素数値に拡張したり、一方の解を捨ててしまったりといった「荒技(あらわざ)」をみていると、本当にこんなことをしていいのだろうか、と不安になる人がいるかもしれない。そういうときこそ、「どんな方法でみつけたにせよ、微分方程式を満たしていれば、それが解だ！」とい

[*38] 当然だが、本当に複素数値関数を調べたいときは、片方を捨ててしまったりしてはいけない。複素数値関数としては、$e^{i\,\omega\,t}$ と $e^{-i\,\omega\,t}$ の性質はちがう。いずれ量子力学を学ぶとき、そういう状況に出会うことになる。

う微分方程式の解についての大原則を思い出そう。解き方がどんなにアクロバティックだろうと、得られたものが、微分方程式を満たしていて、かつ、必要な数だけの任意定数を含んでいれば、それが求める一般解なのだ。どんな進んだ解法を学んで使いこなせるようになっても、どんなややこしい微分方程式をあつかうようになっても、この原則だけは忘れてはいけない。

さいごに、複素数値関数に拡張する方法がうまく行ったのは、解きたい微分方程式 (5.3.27) が $x(t)$ や $\ddot{x}(t)$ の一次の項だけを含んでいる（つまり、線形の微分方程式である）からだということを注意しておく。もし $\{x(t)\}^2$ のような項があったとすると、この方法はまったく使えないことをなっとくしておこう[*39]。

[*39] $\{x(t)\}^2$ に対応させて、複素数値関数の方程式に $\{z(t)\}^2$ をいれてしまうと、これは $\{x(t)+i\,y(t)\}^2 = \{x(t)\}^2 - \{y(t)\}^2 + 2i\,x(t)\,y(t)$ になってしまって、実部と虚部が混ざってしまう。$|z(t)|^2$ を使っても、やはりうまくいかない。

5.3.4　減衰振動の問題

複素数値関数を考える方法の威力が発揮される例として、減衰振動の問題をあつかう。考えたいのは、粒子に、バネからの復元力と、空気による抵抗の両方が働く、つまり、正の定数 μ があって、力が

$$f = -k\,x(t) - \mu\,v(t) \tag{5.3.51}$$

となるような状況だ。この場合も、位置についての微分方程式

$$\ddot{x}(t) = -\frac{k}{m}\,x(t) - \frac{\mu}{m}\,\dot{x}(t) \tag{5.3.52}$$

を解くのがよいだろう。式を簡単にするため、ω を (5.3.33) で定義し、

$$\gamma := \frac{\mu}{2m} \tag{5.3.53}$$

とすれば、(5.3.52) は、

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\,x(t) - 2\gamma\,\dot{x}(t) \tag{5.3.54}$$

となる。

さて、微分方程式 (5.3.54) は、なかなかやっかいだ。一回微分と二回微分が両方あらわれるから、三角関数では解にならない。見ているだけでは先に進めないので、最初から新しい技(わざ)に頼ることにする。実数上の複素数値関数 $z(t)$ が微分方程式

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2\, z(t) - 2\gamma\, \dot{z}(t) \tag{5.3.55}$$

を満たすとしよう。$z(t)$ の実部をとってやれば、目標とする方程式 (5.3.54) の解になることは、先ほどとまったく同様。

というわけで、$z(t)$ についての微分方程式 (5.3.55) を解こう。α を未知の複素定数として、$z(t) = e^{\alpha\, t}$ を解の候補とする。これを微分方程式 (5.3.55) に代入し、すなおに微分を計算すると

$$\alpha^2\, e^{\alpha\, t} = -\omega^2\, e^{\alpha\, t} - 2\gamma\, \alpha\, e^{\alpha\, t} \tag{5.3.56}$$

となる。これがすべての t について等式として成り立たなくてはいけないのだが、t に依存する $e^{\alpha\, t}$ はすべ

ての項に共通に含まれている。よって、

$$\alpha^2 + 2\gamma\,\alpha + \omega^2 = 0 \tag{5.3.57}$$

という、未知の複素定数 α についての二次方程式が得られる。これが、解の候補 $z(t) = e^{\alpha\,t}$ が本当の解になるための条件だ。

二次方程式 (5.3.57) は、もちろん簡単に解けて

$$\alpha = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega^2} \tag{5.3.58}$$

となる。以下、判別式 $\gamma^2 - \omega^2$ の符号で場合分けして、微分方程式の解を調べよう。

■過減衰の場合　まず $\gamma > \omega$ が成り立ち、(5.3.58) が二つの実根になる場合をみよう。もとのパラメターでいえば、

$$\mu^2 > 4mk \tag{5.3.59}$$

が成り立つということで、ともかく、空気抵抗が大きい状況に対応する。

α が実数という答えが出たので、せっかく複素数にまで拡張したが、解の候補 $z(t) = e^{\alpha\, t}$ は実数値関数になった。もちろん、実数値関数の実部をとってもかわらないので、

$$x(t) = e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})\, t}, \quad x(t) = e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})\, t} \tag{5.3.60}$$

という二つの解が得られた。やはり微分方程式は線形なので、これらを重ね合わせた

$$x(t) = A\, e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})\, t} + B\, e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})\, t} \tag{5.3.61}$$

が微分方程式 (5.3.54) の一般解になる。

空気抵抗が大きいので、せっかくバネが引っ張っていても、粒子はまったく振動しない。ただ自然長の位置に向かって減衰していくのだ（図 5.6)。

■減衰が弱い場合　次に、$\gamma < \omega$ が成り立ち、(5.3.58) が互いに複素共役な複素数の解になる場合をみよう。空気抵抗がそれほど大きくないということだ。

ここで根 (5.3.58) の形をみていると、

$$\omega_{\mathrm{e}} = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2} \tag{5.3.62}$$

と定義したくなる。これを使えば、(5.3.58) は、$\alpha = -\gamma \pm i\omega_{\mathrm{e}}$ と書ける。よって、この場合は、二つの複素数値関数の解

$$z(t) = e^{(-\gamma + i\,\omega_{\mathrm{e}})\,t}, \quad z(t) = e^{(-\gamma - i\,\omega_{\mathrm{e}})\,t} \tag{5.3.63}$$

が得られる。しかし、これらは（実部をとると）いかにも同じ答を出しそうなので、一つは捨てる。一つ目に、複素数の定数 C をかけた

$$z(t) = C\,e^{(-\gamma + i\,\omega_{\mathrm{e}})\,t} \tag{5.3.64}$$

という解を考える。あとは、この関数の実部をとるだけだ。念のため、

$$e^{(-\gamma + i\,\omega_{\mathrm{e}})\,t} = e^{-\gamma\,t}\,e^{i\,\omega_{\mathrm{e}}\,t} = e^{-\gamma\,t}\,\{\cos(\omega_{\mathrm{e}}\,t) + i\,\sin(\omega_{\mathrm{e}}\,t)\} \tag{5.3.65}$$

であることに注意しながら、(5.3.48) と同じ計算をすれば、

$$x(t) = \mathrm{Re}\,[z(t)] = e^{-\gamma\,t}\,\{A\,\cos(\omega_{\mathrm{e}}\,t) + B\,\sin(\omega_{\mathrm{e}}\,t)\} \tag{5.3.66}$$

という、微分方程式 (5.3.54) の一般解が得られる。もちろん、A, B は任意定数。

(5.3.66) は、粒子が $x = 0$ のまわりで振動しながら、$x = 0$ にむかって減衰していく様子をあらわしている（図 5.6)。また、この振動の角振動数は (5.3.62) の ω_{e} であり、抵抗がない場合の角振動数 ω よりも小さくなっている。とくに、抵抗が大きくなり、γ が ω に近づくと、ω_{e} はいくらでも小さくなる。これは、振動がゆっくりになるということだ。過減衰の際にはまったく振動がないことを思うと、話がうまくつながっている。

このように、過減衰の場合も、減衰が弱い場合も、あっという間に一般解を導くことができた。複素数の指数関数とオイラーの公式の実用的な威力がわかると

思う。

■臨界減衰の場合　と、ここで終わりにしてもいいのだが、ちょうど $\gamma = \omega$ が成り立って、(5.3.58) が重根になる場合はどうするのかが気になる人もいるだろう。よく考えてみると、この場合は

$$x(t) = e^{-\gamma\, t} \tag{5.3.67}$$

という実数値の解が一つでてくるだけだ。これを定数倍しても、任意定数が一つしかないので、微分方程式 (5.3.54) の一般解にはなっていない！

　そんなことがあっていいのか、と思うかもしれない。しかし、複素数といった高級な道具を使っていても、ここでは、あくまで「解を勘で推測して、あっているか確かめる」路線で進んでいることを忘れてはいけない。「解が $z(t) = e^{\alpha\, t}$ と書けるのではないか」というのは、あくまで推測だったのだ。たまたま $\gamma \neq \omega$ のときは、その推測がばっちり当たっていたわけだが、$\gamma = \omega$ のときだけは片手落ちだったということに過ぎない。推

図 5.6　減衰振動の様子。ω を一定にして、いくつかの γ/ω の値について、初期値 $v(0) = 0$ をもつ解をプロットした。時間の範囲は、0 から $6\pi/\omega$ まで。臨界減衰の $\gamma/\omega = 1$ のとき、もっとも減衰が速いことがみてとれる。

測の方法がいつも完璧ではないというのは、かえって面白いところだと思う。

$\gamma = \omega$ の場合の微分方程式を解く方法もいろいろある。後に 8.2.3 節で取り上げる一般論を使えば、この場合も確実に解くことができる。ここでは、そういった一般論には踏み込まないが、解を知りたいと思う人も多いだろうから、次の問題をどうぞ。

問 5.3.4.a　臨界減衰の条件 $\gamma = \omega$ が成り立つとき、

$$x(t) = t\,e^{-\gamma\,t} \tag{5.3.68}$$

が、微分方程式 (5.3.54) の解であることを確かめよ。(5.3.67) と合わせることで一般解を構成し、任意定数を初期値 $x(0)$, $v(0)$ を使って表せ。

5.3.5　強制振動の問題

最後に、バネにつながった粒子に、時間的に振動する力が外から働くという状況を考えてみよう。外力の

大きさを f_0、外力の角振動数を ω_0 とすれば（これらは、正の定数とする)、粒子に働く力は、

$$f = -k\,x(t) + f_0\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.69}$$

である。よって、$x(t)$ の微分方程式は、

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\,x(t) + \frac{f_0}{m}\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.70}$$

となる。もちろん $\omega = \sqrt{k/m}$。これは、$x(t)$, $\ddot{x}(t)$ の一次の項の他に、x を含まない項があるので、線形非斉次の微分方程式だ。5.2.2 節（615 ページ周辺）でみた特解を利用する方法が、ここでも役に立つ。もう一度、順を追って、一般解の求め方をみていこう。

まず、何でもいいから、非斉次方程式 (5.3.69) の解をひとつみつけよう。ここでは、外から $\cos(\omega_0\,t)$ に比例する力をかけているから、これにそのまま反応する解があるかもしれない。B を未知の定数として、

$$x(t) = B\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.71}$$

とおいてみよう。この解の候補を微分方程式 (5.3.70) に代入し、微分すると、

$$-(\omega_0)^2 B\,\cos(\omega_0\,t) = -\omega^2 B\,\cos(\omega_0\,t) + \frac{f_0}{m}\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.72}$$

となる。これがすべての t において成立するためには、

$$B = \frac{f_0}{m\,\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}} \tag{5.3.73}$$

であればよい。こうして、微分方程式 (5.3.70) の特解

$$x_{\rm ps}(t) = \frac{f_0}{m\,\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}}\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.74}$$

が得られた。もちろん、これは

$$\ddot{x}_{\rm ps}(t) = -\omega^2\,x_{\rm ps}(t) + \frac{f_0}{m}\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.75}$$

を満たす。

次は、(5.3.70) の非斉次項をゼロにした斉次方程式

$$\ddot{x}_0(t) = -\omega^2\,x_0(t) \tag{5.3.76}$$

を考える。これはもっとも基本的な調和振動子の微分方程式 (5.3.29) そのものなので、一般解は既に (5.3.38) で求めたとおり、

$$x_0(t) = C\,\cos(\omega\,t + \varphi) \tag{5.3.77}$$

である。C, φ は任意定数。

ここで、これまでと同様、$x(t) = x_0(t) + x_{\rm ps}(t)$ とおいて、(5.3.75) と (5.3.76) を使うと、

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= \ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_{\rm ps}(t)\\ &= -\omega^2\,x_0(t) - \omega^2\,x_{\rm ps}(t) + \frac{f_0}{m}\,\cos(\omega_0\,t)\\ &= -\omega^2\,x(t) + \frac{f_0}{m}\,\cos(\omega_0\,t)\end{aligned} \tag{5.3.78}$$

となり、これはみごとに微分方程式 (5.3.70) の解になっている。しかも、任意定数を二つ含んでいるから、一般解である。

あからさまに書いておけば、

$$x(t) = C\,\cos(\omega\,t + \varphi) + \frac{f_0}{m\,\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}}\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.79}$$

である。第一項の角振動数 ω での単振動の項は初期条件に依存するが、第二項の角振動数 ω_0 をもつ項は初期条件によらずにこの形になる。明らかに、第一項がバネ本来の運動を、第二項が外力に強制された運動を表している。このように、異なった物理に対応する項がきれいにわかれて見えるのは、線形の微分方程式の解の特徴だといってよい。

■共振　あえて宣言しなかったが、固有振動数 ω と外力の振動数 ω_0 が等しいときには、上の一般解 (5.3.79) は意味をもたない。そもそも、特解をさがすときに (5.3.71) という形を推測したわけだが、$\omega = \omega_0$ のときには、この推測がはずれたということだ。

$\omega = \omega_0$ という条件は意味ありげだし、ここで何がおきるかには大いに興味がある。なんとか、一般解を求めてみよう。

$\omega = \omega_0$ の微分方程式も解くことのできる一般的な方法は、後に 8.2.3 節で取り上げる（問 8.2.3.b を見よ）。ここでは、特殊な方法を用いて、ともかくこの場合の

図 5.7　強制振動の方程式 (5.3.70) のいくつかの解。ω, f_0 を一定にして、いくつかの ω_0/ω の値について、初期値 $x(0) = 0$, $v(0) = 0$ をもつ解をプロットした。時間の範囲は、0 から $50\pi/\omega$ まで。縦軸のスケールはグラフごとに異なっている。共振がおきる $\omega_0/\omega = 1$ では、振幅が時間に比例して増大する。また ω_0/ω が 1 に近いとき（0.9 と 1.1)、振幅がゆっくりと振動する「うなり」がみえる。

解をみつけることを考えよう。

まず、今までどおり、$\omega \neq \omega_0$ とする。一般解 (5.3.79) のうち、斉次方程式の解 $x_0(t)$ の部分は、任意定数を含んでいるので、いろいろに書きなおしてよい。わざとらしいが、たとえば、これを、

$$x_0(t) = C\,\cos(\omega\,t + \varphi) - \frac{f_0}{m\,\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}}\,\cos(\omega\,t) \tag{5.3.80}$$

に変えても、(5.3.76) は成立する（二つ目のコサインの角振動数も ω にしたことに注意)。特解 $x_{\mathrm{ps}}(t)$ のほうは (5.3.74) をそのまま用いる。こうすると、対応する (5.3.70) の一般解 $x(t) = x_0(t) + x_{\mathrm{ps}}(t)$ は、

$$\begin{aligned} x(t) &= C\,\cos(\omega\,t + \varphi) \\ &\quad + \frac{f_0}{m\,\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}}\,\{\cos(\omega_0\,t) - \cos(\omega\,t)\} \end{aligned} \tag{5.3.81}$$

となる。

ここで、$\omega_0 = \omega + \varepsilon$ と書いて、(5.3.81) の第二項を

書きかえ、

$$\frac{f_0}{m\,\{\omega^2-(\omega_0)^2\}}\,\{\cos(\omega_0\,t)-\cos(\omega\,t)\}$$
$$=-\frac{f_0}{m\,(2\omega+\varepsilon)\,\varepsilon}\,\{\cos((\omega+\varepsilon)\,t)-\cos(\omega\,t)\} \tag{5.3.82}$$

としよう。そして、この右辺の形をみれば $\varepsilon\to 0$（つまり $\omega_0\to\omega$）の極限が、

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f_0}{m\,(2\omega+\varepsilon)\,\varepsilon}\,\{\cos((\omega+\varepsilon)\,t)-\cos(\omega\,t)\}$$
$$=-\frac{f_0}{2m\,\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\cos(\omega\,t)=\frac{f_0}{2m\,\omega}\,t\,\sin(\omega\,t) \tag{5.3.83}$$

のように、あからさまに計算できる。こうして、$\omega=\omega_0$ のときの微分方程式 (5.3.70) の一般解は、

$$x(t)=C\,\cos(\omega\,t+\varphi)+\frac{f_0}{2m\,\omega}\,t\,\sin(\omega\,t) \tag{5.3.84}$$

であることがわかる。

(5.3.84) では、振動する外力の影響を表す第二項が、時間に比例してどんどん大きくなっていく。粒子の振

動の大きさ（振幅）は、時間とともに限りなく大きくなっていくのである。これは、調和振動子の固有振動数と外力の振動数が正確に一致したためにおきる現象で、**共振**あるいは**共鳴** (英語はどちらも resonance) と呼ばれている（図 5.7)。

問 5.3.5.a　(5.3.84) が、$\omega = \omega_0$ のときの微分方程式 (5.3.70) の解になっていることを、すなおに微分して確かめよ。

問 5.3.5.b　$\omega \neq \omega_0$ として、初期値 $x(0) = 0, v(0) = 0$ に対応する解を求めよ。その解の形を吟味することで、$\omega \simeq \omega_0$ のとき、図 5.7 のような「うなり」が見られることを示せ。

■減衰のある強制振動　共振を表わす解 (5.3.84) では時間とともに振幅が限りなく大きくなっていくが、もちろん現実にはそんなことはおきない。振幅が大きくなりすぎれば、何らかの減衰効果が働いて振幅が押さ

えられるとか、振動に耐えきれずに振動子が壊れてしまうといったことがおきるだろう。

ここでは、振動する外力に加えて、速度に比例する空気抵抗が働く状況を考えよう。粒子に働く力を、これまでに考えた力 (5.3.51) と (5.3.69) の「合わせ技」で、

$$f = -k\,x(t) - \mu\,v(t) + f_0\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.85}$$

としよう。解くべき微分方程式は

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\,x(t) - 2\gamma\,\dot{x}(t) + \frac{f_0}{m}\,\cos(\omega_0\,t) \tag{5.3.86}$$

である（ここでも $\omega = \sqrt{k/m}$, $\gamma = \mu/(2m)$ とした）。

微分方程式 (5.3.86) の特解を複素数の方法で求めよう[*40]。つまり、

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2\,z(t) - 2\gamma\,\dot{z}(t) + \frac{f_0}{m}\,e^{i\omega_0\,t} \tag{5.3.87}$$

を満たす実数上の複素数値関数 $z(t)$ を求め、それから $x(t) = \mathrm{Re}\,z(t)$ とするのである。

[*40] この部分の説明はこれまでより簡潔に書いた。しっかり理解したい人は計算しながら時間をかけて読んでほしい。

特解として、(任意定数ではない) 複素定数 C によって $z(t) = C\,e^{i\omega_0\,t}$ と書ける解を探そう。外力と同じ振動数で振動するような解である。この形を (5.3.87) に代入して微分を計算すると、

$$\begin{aligned} &-(\omega_0)^2\,C\,e^{i\omega_0\,t} \\ &= -\omega^2\,C\,e^{i\omega_0\,t} - 2\,i\,\omega_0\,\gamma\,C\,e^{i\omega_0\,t} + \frac{f_0}{m}\,e^{i\omega_0\,t} \end{aligned} \tag{5.3.88}$$

となる。これが任意の t について成り立つことから、係数について、

$$-(\omega_0)^2\,C = -\omega^2\,C - 2\,i\,\omega_0\,\gamma\,C + \frac{f_0}{m} \tag{5.3.89}$$

が成り立つ必要がある。これを解いて C を求めれば、

$$\begin{aligned} C &= \frac{f_0}{m}\,\frac{1}{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\} + 2\,i\,\omega_0\,\gamma} \\ &= \frac{f_0}{m\,\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0\,\gamma)^2}}\,e^{i\psi} \end{aligned} \tag{5.3.90}$$

となる。最後は複素数の極形式 (3.2.116) を使って

$C = |C|\, e^{i\psi}$ と書いた。偏角 ψ は他の量から計算できる定数だが、具体的な形を書き下すことはしない。

こうして、微分方程式 (5.3.86) の特解

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{ps}}(t) &= \mathrm{Re}\,[C\, e^{i\omega_0\, t}] \\ &= \frac{f_0}{m\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0\,\gamma)^2}}\, \cos(\omega_0\, t + \psi) \end{aligned} \tag{5.3.91}$$

が得られた。次は一般解だが、ここでもこの節の冒頭で使った方法がそのまま使える。つまり、解きたい微分方程式 (5.3.86) で外力 f_0 をゼロにした微分方程式 (5.3.54) の一般解と、上で求めた特解を足し合わせるのだ。(5.3.54) の解はパラメターによって異なるが、たとえば過減衰の場合なら、(5.3.61) より、

$$\begin{aligned} x(t) &= A\, e^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega^2})\, t} + B\, e^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega^2})\, t} \\ &\quad + \frac{f_0}{m\sqrt{\{\omega^2 - (\omega_0)^2\}^2 + 4(\omega_0\,\gamma)^2}}\, \cos(\omega_0\, t + \psi) \end{aligned} \tag{5.3.92}$$

微分方程式 (5.3.86) 一般解になる（A, B は実数の任

意定数)。特解の方法と複素数の方法を組み合わせることで、かなり複雑な微分方程式を完全に解くことができた。

一般解 (5.3.92) の最初の二つの項は、外力とは無関係で、時間とともに減衰していく。十分に長い時間が経ったあとでの解のふるまいを決めているのは、初期条件に依存しない、特解 (5.3.91) である。ここでも共振のおきる $\omega = \omega_0$ の付近では振幅は大きくなっているが、減衰の効果があるため、時間とともに振幅が増えていくようなことはない。

5.3.6　バネでつながれた粒子の落下運動

少し面白い応用として、バネでつながれた複数の粒子が一様重力中で落下する問題を扱ってみよう。ここでも重力加速度を g とする。

■設定と基本的な解析　まず、図 5.8 (a) の状況を考えよう。質量 m の二つの粒子が、自然長 ℓ_0 でバネ定数 k

図 5.8　(a) 二つの粒子を理想的なバネでつなぎ、一方を手で持ち、もう一方は自然に垂れさがらせておく。ここで静かに手を放すと、上の粒子は $2g$ の加速度で素早く落下し、下の粒子は t^4 に比例してゆっくりと落下する。(b) 複数の粒子を同じ理想的なバネでつなぎ、やはり一番上の粒子を持って全体を垂れ下げておいて、静かに手を放す。

の質量の無視できるバネでつながれている。始め、一方の粒子（こちらを粒子 1 と呼ぶ）を手で持って固定し、バネともう一つの粒子（こちらは粒子 2）は垂れ下がって静止した状態にしておく。このときのバネの長

さを ℓ とする。粒子 2 には下向きに mg の重力が働き、上向きにバネの引っ張る力 $k(\ell-\ell_0)$ が働く。これらがつり合うことから、バネの長さは $\ell=\ell_0+(mg/k)$ とわかる。

ここで、粒子 1 を静かに放して（初速度ゼロで）落下させたときの運動を考えよう。これまでは一般解を求めることにこだわってきたが、ここでは、この特別な初期条件のもとでの運動だけを考える（それが面白い）。重力の働く向きを x 軸の正の方向に取り、時刻 t での粒子 1 と粒子 2 の位置をそれぞれ $x_1(t)$, $x_2(t)$ とする。以下では、つねに $x_1(t)<x_2(t)$ となる、つまり粒子 2 の方が下にあるとして問題を解くことにする（この条件は自然長 ℓ_0 を長く取ればいつでも成り立つ）。よって、二つの粒子が衝突することを心配しなくてもいい。

粒子 1 の初期の位置を $x_1(0)=0$ とすれば、上で見たことから粒子 2 の初期の位置は $x_2(0)=\ell_0+(mg/k)$ である。また、始めはどちらの粒子も静止していたから、速度についての初期条件は $\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=0$ で

ある。

粒子の運動を決めるニュートン方程式を書こう。それぞれの粒子に働く力を考えて、連立の運動方程式を立てる必要がある。手を放したあとでは、粒子に働く力は重力 mg とバネからの力だけだ。時刻 t でのバネの長さは $x_2(t) - x_1(t)$ だから、自然長からの伸びは $x_2(t) - x_1(t) - \ell_0$ である。自然長に戻ろうとする力が働くことを考えると、運動方程式は

$$m\ddot{x}_1(t) = mg + k\{x_2(t) - x_1(t) - \ell_0\} \tag{5.3.93}$$

$$m\ddot{x}_2(t) = mg - k\{x_2(t) - x_1(t) - \ell_0\} \tag{5.3.94}$$

となる。絵を描いて力の向きを考えて納得しておこう。

これから連立常微分方程式 (5.3.94) を解くわけだが、さすがに、解を直感でみつけるのは難しそうだ。しかし、こういう場合には力学でも頻繁(ひんぱん)に使うことになる常套手段(じょうとうしゅだん)がある。二つの粒子の位置を平均した重心座標

$$x_{\mathrm{CM}}(t) := \frac{x_1(t) + x_2(t)}{2} \tag{5.3.95}$$

とバネの伸び

$$y(t) := x_2(t) - x_1(t) - \ell_0 \tag{5.3.96}$$

を使って方程式を書き換えるのだ[*41]。まず、これらの初期条件を求めておく。$x_1(0)$ と $x_2(0)$ を単に代入すれば、$x_{\mathrm{CM}}(0) = \{\ell_0 + (mg/k)\}/2$ および $y(0) = mg/k$ である。速度については、もちろん $\dot{x}_{\mathrm{CM}}(0) = 0$ および $\dot{y}(0) = 0$ だ。

$x_{\mathrm{CM}}(t)$ と $y(t)$ が従う微分方程式を求めるには、単に (5.3.95) と (5.3.96) を t で二回微分すればいい。$\ddot{x}_{\mathrm{CM}}(t) := \{\ddot{x}_1(t) + \ddot{x}_2(t)\}/2$ および $\ddot{y}(t) = \ddot{x}_2(t) - \ddot{x}_1(t)$ となるので、元の微分方程式 (5.3.94) を代入して少し計算すれば、

$$\ddot{x}_{\mathrm{CM}}(t) = g \tag{5.3.97}$$

$$\ddot{y}(t) = -\frac{2k}{m} y(t) \tag{5.3.98}$$

---

*41 二つの粒子の位置の差（相対座標）$x_2(t) - x_1(t)$ を使うことが多いが、ここではバネの自然長を引いておいた方が便利である。

が得られる。元の微分方程式 (5.3.93), (5.3.94) では二つの未知関数が「絡み合って」いたから困ったわけだが、ここではその絡み合いが「ほどけて」いる。(5.3.97) と (5.3.98) をそれぞれ別個に解けばいい。(5.3.97) は (5.3.4) でみた（というより高校時代から知っている）一定の外力の問題、(5.3.98) は (5.3.29) でみた単振動の方程式だ。どちらの微分方程式もすでに解いた形だから初期条件に合わせることだけを考えればいい。重心座標 $x_{\mathrm{CM}}(t)$ は、一般解が (5.3.7) だから、

$$x_{\mathrm{CM}}(t) = \frac{1}{2}\Big(\ell_0 + \frac{mg}{k}\Big) + \frac{g}{2}t^2 \tag{5.3.99}$$

となる。バネの伸び $y(t)$ についても一般解 (5.3.37) を参照すれば、

$$y(t) = \frac{mg}{k}\,\cos\Big(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\Big) \tag{5.3.100}$$

となる。

微分方程式が解けたからこの結果から二つの粒子の位置を求めよう。(5.3.95) と (5.3.96) を連立させて解

けば

$$x_1(t) = x_{\mathrm{CM}}(t) - \frac{y(t)}{2} - \frac{\ell_0}{2} \tag{5.3.101}$$

$$x_2(t) = x_{\mathrm{CM}}(t) + \frac{y(t)}{2} + \frac{\ell_0}{2} \tag{5.3.102}$$

だから、(5.3.99) と (5.3.100) を代入すれば、

$$x_1(t) = \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 - \frac{mg}{2k}\cos\Bigl(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\Bigr) \tag{5.3.103}$$

$$x_2(t) = \ell_0 + \frac{mg}{2k} + \frac{g}{2}t^2 + \frac{mg}{2k}\cos\Bigl(\sqrt{\frac{2k}{m}}\,t\Bigr) \tag{5.3.104}$$

となる。指定された初期条件での解が完全に求められた。

■解のふるまい　解 (5.3.103), (5.3.104) を眺めていても、二つの粒子が振動しながら等加速度運動で落下していくということがわかるだけで、実際の運動の様子はピンと来ない。特に、ごく初期の時刻（正確にいえば $0 < \sqrt{2k/m}\,t \ll 1$ となる時刻）での振る舞い

に注目することにして、コサインの無限級数表示（あるいはテイラー展開）(3.2.111) で θ^2 までを残して、$\cos(\sqrt{2k/m}\,t) \simeq 1-(\sqrt{2k/m}\,t)^2/2 = 1-(k/m)t^2$ と近似してみよう。まず、この近似式を (5.3.103) に代入すると、定数項は全て消えて、

$$x_1(t) \simeq gt^2 \tag{5.3.105}$$

が得られる。慣れ親しんだ自由落下の形だけれど係数の 1/2 がないので、普通の二倍の加速度で落ちていくということになる。同じコサインの近似式を (5.3.104) に代入すると、今度は t^2 に比例する項が消えて、

$$x_2(t) \simeq \ell_0 + \frac{mg}{k} \tag{5.3.106}$$

となる。なんと、時間が経過しても粒子 2 は初期の位置から動かない!?

実際には粒子 2 は全く動かないというわけではない。コサインの近似が甘かったから動かないという結果が出たのだ。コサインの無限級数 (3.2.111) で次の θ^4 までを取り入れた $\cos(\sqrt{2k/m}\,t) \simeq 1-(\sqrt{2k/m}\,t)^2/2+$

$(\sqrt{2k/m}\,t)^4/24$ という近似式を (5.3.104) に代入すれば、

$$x_2(t) \simeq \ell_0 + \frac{mg}{k} + \frac{g}{12}\frac{k}{m}\,t^4 \tag{5.3.107}$$

となる。確かに粒子 2 も落下していく。ただし、落下距離は t^4 に比例しているから、普通の落下に比べればものすごくゆっくりだ。（普通の倍の加速度で）落下していく粒子 1 に比べたら粒子 2 はほとんど止まっていると言ってもいい[*42]。なかなか面白い（あるいは、驚くべき）結果ではないだろうか？

[*42] $x_2(t)$ を計算するのに t^4 まで含めた近似式を使ったから、$x_1(t)$ にも同じ近似式を使って (5.3.105) よりも精度の高い式を求めるべきだと思うかもしれない。もちろん、そうやっても何も悪いことはない。ただ、(5.3.105) では粒子 1 の動きの主要な部分はわかっているから、ここに t^4 に比例する項を加えても運動の様子についての微妙な補正が得られるだけだ。一方、(5.3.106) だけからは「粒子 2 は動かない」という結論が出てしまうから、ここで t^4 に比例する補正を考えることには本質的な意味がある。

■結果についての考察　実は、これらの結果は、背後にある「物理」を考えれば、連立微分方程式を解かなくても理解できる[*43]。この教科書ではこれまで出てこなかった、ちょっと「雑な」議論になるが、重要な考え方なので説明しよう。自分で図や式をかきながらゆっくりと読んで消化してほしい。

まず粒子 1 の運動を考えよう。はじめ、粒子 1 を手で持っているとき、粒子 1 には下向きに重力 mg とバネの引っ張る力が働いている。バネの力は（それで粒子 2 を引っ張っているのだから）ちょうど mg で、結局、下向きの力の合計は $2mg$ である。これを手が加える上向きの力で打ち消している。よって、$t = 0$ に手を

[*43] 「物理を考える」とか「物理的に考察する」という表現は物理の文献によく出てくる。実際、以下の議論には粒子に働く力のつりあいなどの考察が出てくるので、確かに、一見すると「物理的」と思えるだろう。ただ、真面目に考えれば、ここでは t が小さいとして微分方程式の解を近似的に解析しているだけなので、何が「物理的」なのかは本当のところはよくわからない。

放した直後には粒子 1 には $2mg$ の下向きの力が働く。加速度は $2g$ だから、普通の倍の加速度で落下していくという (5.3.105) が得られる。

次に問題の粒子 2 だ。まず、粒子 1 を手で持っているときには、粒子 2 も静止していて、下向きの重力 mg と上向きにバネが引っ張る力 mg がちょうどつり合っている。$t = 0$ で手を放した直後を考えると、もちろん重力は変わらないし、バネの長さも（一瞬では）変わらないのでバネが引く力も変わらない。つまり、粒子 2 に働く力の合計は相変わらずゼロなのだ。これで、「粒子 2 は動かない」という (5.3.106) が理解できる。

この調子でもう少し進めよう。手を放した直後にはバネの長さは変わらないわけだが、その後は粒子 1 が落下してくるのでバネの長さは縮んでいく。ごく初期

の時刻 t ではバネの長さは gt^2 だけ縮むとしてよい[*44]。すると、バネの張力は kgt^2 だけ小さくなるから、その分だけ重力が勝って、結局、粒子 2 には下向きに kgt^2 の力が働くことになる。運動方程式は $m\ddot{x}_2(t) \simeq kgt^2$ となる。これは (5.3.3) で見たタイプの微分方程式で、t について二回積分すれば解けてしまう。解は係数を含めて (5.3.107) と一致する。簡単に結果が出るだけでなく、落下距離が t^4 に比例する理由も直観的に理解できるだろう。

■N 粒子への拡張　この話はもっと面白くなる。図 5.8 (b) のように、粒子の個数を増やして、同じ質量 m の粒子 N 個を同じバネで一列にずらりとつなぐ。粒子には、端から粒子 1, 粒子 2, ..., 粒子 N と名前をつけ

[*44] より正確に書けば $gt^2 + O(t^4)$ ということ。すでに粒子 2 の落下距離が $O(t^4)$ だということがわかっているので、これで厳密である（ここで $x_1(t)$ と $x_2(t)$ が t の偶関数であることをこっそりと使った。この事実は微分方程式と初期条件から簡単に示せる）。

ておく。そして、やはり粒子 1 を手で持ち、残りを下にだらんと垂らして静止させる。時刻 $t = 0$ で粒子 1 を放したらどういう運動をするだろうか？　真面目にやるとなると N 個の粒子の運動を記述する連立微分方程式を解くことになる。念のために（気になる人のために）微分方程式を書いておくと、

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) &= mg + k\{x_2(t) - x_1(t) - \ell_0\} \\ m\ddot{x}_j(t) &= mg - k\{x_j(t) - x_{j-1}(t) - \ell_0\} \\ &\quad + k\{x_{j+1}(t) - x_j(t) - \ell_0\} \\ m\ddot{x}_N(t) &= mg - k\{x_N(t) - x_{N-1}(t) - \ell_0\} \end{aligned} \tag{5.3.108}$$

となる（ここで、$j = 2, \ldots, N-1$）。これを解くのはなかなか大変だ。しかし、上のように、ごく初期の時刻での振る舞いを知るだけなら簡単に答えが出せる[*45]。

[*45] 以下の議論はさらに「雑」になっているのでそのつもりで気楽に読んでほしい。しかし、その気になれば、ここでの議論は全て数学的に厳密にできる（以下の方法で近似解（の候補）を構成した後でそれが実際に近似解になっていることを示すというのが一つの方針）。

まず、手で持っているとき、粒子 1 には重力 mg とバネの張力 $(N-1)mg$ が働いている (バネは残りの $N-1$ 個の粒子を引っ張っていることに注意)。手を放した直後には下向きの力 Nmg が働くので、加速度は Ng となる。よって粒子 1 の落下距離は $(Ng/2)t^2 + O(t^4)$ とわかる。次は粒子 2 だ。やはり手を放した直後に働く力はゼロ。しかし、粒子 1 が落ちてくるため、バネの長さが $(Ng/2)t^2 + O(t^4)$ だけ縮み、結果として下向きに $(kNg/2)t^2 + O(t^4)$ の力が働く。上と同じようにこれを二回積分することで、粒子 2 の落下距離は $Ng(k/m)t^4/4! + O(t^6)$ とわかる（こういう計算をするときには必ず $N = 2$ として前の結果と一致することをチェックすること)。粒子 3 についても同じ考えが使える。時刻 $t = 0$ では働く力は打ち消し合ってゼロだが、粒子 2 が落ちてくるのでバネが縮んで、結果的に下向きに $kNg(k/m)t^4/4! + O(t^6)$ の力が働く。よって、$m\ddot{x}_3(t) = kNg(k/m)t^4/4! + O(t^6)$ という微分方程式を解くことになるが、これも積分だけで解けて、

$x_3(t) = x_3(0) + Ng(k/m)^2 t^6/6! + O(t^8)$ が得られる。なんと、上から三番目の粒子の落下距離は t^6 に比例する！　この話がずっと続けられるのは明からだろう。すでに一般の形は見えてきていると思うが、粒子 n の位置の短時間での振る舞いは

$$x_n(t) = x_n(0) + Ng\left(\frac{k}{m}\right)^{2(n-1)} \frac{t^{2n}}{(2n)!} + O(t^{2(n+1)}) \tag{5.3.109}$$

となる。

つまり、仮に 100 個のボールをバネでつないだら、一番上のボールは普通の 100 倍の $980\,\mathrm{m/s^2}$ の加速度で落下し、一方、一番下のボールのは落下距離が t^{200} に比例するという、ものすごくゆっくりとした動きをするということだ！！　「時刻 t の 200 乗」などという関数形が（それほど無理のない）物理的な設定で登場したのを見たことがあるだろうか？　（ぼくはこれ以外には知らない。）

実は、この話には「元ネタ」がある。やわらかいバネの先端を手で持って、バネを下にだらりと垂らして静止させておく（これは現実のバネなのでバネ自身が質量を持っていることに注意！）。そして、手を放したときにバネがどういう風に落下するかを観察するのだ。インターネットに多くの動画が上がっているが、YouTube で “Slinky fall” や “Slinky drop” といったキーワードで検索するといいだろう[*46]。例えば、

https://www.youtube.com/watch?v=mAA613hqqZ0

などは（ちょっと長いけれど）楽しいし英語に慣れるのにもいいかもしれない。

動画をご覧になればわかるように、手を放すと、バネの上の端は素早く落下していくが、バネの下の端は見事なほどにピタリと止まったままでいる（ように見える）。まるで、「手を放したことに気づかないのでそ

[*46] スリンキーというのはバネのおもちゃの名称。ぼくが子供の頃はトムボーイという名前で呼ばれていた気がする。

のまま宙に浮いている」といった風情(ふぜい)だ。

このような振る舞いは、ここで調べた（質量のない）バネでつないだ粒子の運動から（だいたいは）理解できる。質量を持ったバネは、大雑把には、粒子の個数 N が大きい「(質量のない) バネでつないだ粒子」に対応すると考えられるからだ。そうすると、ごく短い時間の間は、一番下の粒子の落下距離は t の極めて大きなベキ乗に比例するから、ほとんど動かないということだ。

動画を見ていると、バネの下端はその後もしばらくは（ほぼ）静止しており、上端が近づいてきた頃になって、ようやく落下し始める。まるで、「手を放したことを教えてもらって慌てて落ち始めた」ように見える。残念ながら、このような振る舞いを上の結果だけで説明することはできない。上で調べたのはあくまで t が極めて小さいときの運動だったからだ。ただし、N が大きいときの運動方程式を計算機で解いて運動の様子を見ると、YouTube のビデオで見るのにかなり近い

振る舞いが再現される。図 5.9 に 5 粒子の場合の簡単な数値計算の結果を示した。簡単なモデルでも現象の一側面は捉えているということだ[*47]。理論的には、ニュートン方程式を連立させて解くよりも質量のあるバネを偏微分方程式でモデル化したほうが見通しがよいのだが、それはさすがにこの本の範囲を超えている。

5.3.7　非線形振動子とカオス

一次元運動についての最後の話題として、これまでの（そして、これから先の）例とは違って現在の人類の数学の能力では解くことのできない微分方程式の例をみよう。この節は（この本では珍しく）自分で計算したり考えたりする余地のあまりない「読み物」なので気楽に読んでほしい。

[*47] ただ、実際のバネの落下の様子を見ていると、途中でバネが完全に縮みきった状況が生じているようだ。そうすると、粒子どうしが衝突するようなモデルを考えた方がより現実的ということになる。

図 5.9　5 個の粒子をつないだ場合の粒子の位置の時間変化。連立常微分方程式 (5.3.108) で $N = 5$ としたものを数値的に解いて描いた。横軸は時刻、縦軸は位置だが、どちらも無次元量をプロットしている。バネの自然長を $\ell_0 = 6mg/k$ と選んで粒子どうしが衝突しないようにした（これはかなりわざとらしい)。こんな簡単なモデルでも、一番下の粒子は最初のうちはほとんど動かず、上から押されて「手を放したことを教えてもらって慌てて落ち始める」様子が見られる。

$\alpha > 0$ を定数として、

$$\ddot{x}(t) = -\alpha\,(x(t))^3 - 2\gamma\,\dot{x}(t) + \frac{f_0}{m}\,\cos(\omega_0\,t) \quad (5.3.110)$$

という微分方程式を考えよう。ダフィング[*48]方程式として知られる微分方程式の特別な場合だ。すぐ上で解いた微分方程式 (5.3.86) とそっくりで、$k\,x$ を $\alpha\,x^3$ に置き換えたところだけが違っている。しかし、一見すると些細なこの置き換えで、微分方程式の性質は大きく変わってしまうのだ。

先に進む前に物理的な背景について少しだけ。5.3.3 節以来、振動の問題を考える際には、バネが自然長から x ずれたときの復元力は $-k\,x$ のように、「ずれ」x に正確に比例すると仮定してきた。しかし現実のバネ（あるいは、より一般的な振動子）で

[*48] Georg Duffing (1861–1941) ドイツの工学者。企業で実用的な研究を手がけたが、基礎的な物理学にも深い興味を持っていたという。日本語表記については「ダフィング」と「ダフィン」のどちらが適切なのかわからないので、検索して多数派に従った（しかし、これは推奨できる方針ではない）。

は「ずれ」と力が比例するとは限らない。少しだけ現実に近いモデルとして、$-k\,x - \delta\,x^3$ のように三次の項を足した復元力が考えられる（$\delta > 0$ は定数）。さらに空気抵抗と振動外力があれば、粒子に働く力は $f = -k\,x(t) - \delta\,(x(t))^3 - \mu\,v(t) + f_0\,\cos(\omega_0\,t)$ となる。ここでは式を簡単にするため（あまり現実的ではないが）$k = 0$ の場合を考えた。すると対応するニュートン方程式は (5.3.110) になる（もちろん $\alpha = \delta/m$）。

$-\alpha\,(x(t))^3$ のような未知関数 $x(t)$ の一次式でない項を含む微分方程式は非線形微分方程式である。非線形微分方程式では、これまでわれわれが利用してきた特解の方法や指数関数の方法は役に立たない[*49]。実際、微分方程式 (5.3.110) の一般解を求めた人はいないし、そもそも単純な式で表わされる一般解などはないと考

[*49] 微分方程式 (5.3.110) にこれらの方法を使うことを考えて、どこがうまくいかないのかを調べてみるといいだろう。

図 5.10　$f_0/m = 2.7$ としたダフィング方程式 (5.3.110) の解の数値計算の結果（数値計算では、$\alpha = 1$, $\gamma = 0.025$, $\omega_0 = 1$ と固定する）。時間 t を横軸、変位 $x(t)$ を縦軸にとった。(a) 初期条件から緩和し、一定の振動に落ち着いている様子がみえる。(b) 十分に長い時間が経った後での振動。外力の周期と同じ周期で振動しているが、明らかに単純な三角関数ではない。

えられている[*50]。さらに、単に一般解が求められない

[*50] ただし、こういった微分方程式には全く手が出ないというわけではない。非線形の項が小さい領域では、摂動という数学的手法で解の性質をかなり詳しく調べることができる。江沢洋、中村孔一、山本義隆「演習詳解・力学（第 2 版）」（日本評論社）の問題 3-11 を見よ。なお、この演習書は本気で力学に取り組みたい大学生にはおすすめ。

だけではなく、非線形微分方程式 (5.3.110) の解は、線形微分方程式 (5.3.86) の解とは似ても似つかない複雑で豊かな性質をもっているのだ。

以下では、$\alpha = 1$, $\gamma = 0.025$, $\omega_0 = 1$ の三つのパラメターを固定し、f_0/m のいくつかの値について解の様子を見ていこう。グラフはすべて微分方程式を計算機で数値的に（つまり、近似的に）解いた結果を表わしている。

まず、$f_0/m = 2.7$ とした際の $x(t)$ の様子を図 5.10 に示した。(a) が初期条件 $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ から出発した解の $t = 0$ から $t = 100\pi$ までのふるまいである。$\omega_0 = 1$ で外力の周期は 2π なので、これは外力の 50 周期に相当する。時間が小さいうちは、ばたばたと不規則なふるまいが見えるが、しばらくすると一定の振動に落ち着くようにみえる。(b) は、同じ解のずっと時間が経った $t = 980\pi$ から $t = 1000\pi$ でのふるまいである。きれいに周期的な振動をしているのがわかる。十分に時間が経ったあとの $x(t)$ の振動の周期と外

図 5.11　ダフィング方程式 (5.3.110) の解の数値計算の結果。時間 t を横軸、変位 $x(t)$ を縦軸にとり、初期時刻から十分に時間が経った後の解の様子を示した。(a) $f_0/m = 3.0$ のときの解。外力の周期のちょうど 4 倍の周期をもっている。(b) $f_0/m = 7.0$ のときの解。典型的なカオスのふるまいが見られる。方程式にランダムさはまったくないのに、一見するとランダムでくり返しのない関数である。

力の振動の周期は等しい（周期の定義は (5.3.35) を見よ）。ただし、振動の様子は明らかに単なる三角関数ではなく、もっと複雑な形をしている。

外力を大きくして、$f_0/m = 3.0$ としよう。初期時刻から十分に時間が経って解が安定した $t = 980\pi$ から $t = 1000\pi$ での解の様子を図 5.11 (a) に描いた。この

時間間隔は外力の 10 周期に相当する。確かに $x(t)$ のグラフにも 10 個の山がある。しかし、山の高さは均等ではない。よく見ると四つの山の高低が一つのパターンを作っていて、これが延々とくり返していることがわかる（もっと長い時間をプロットしてもそうなる)。つまり、この場合の解は周期 8π をもっているということになる。外力の周期 2π とは異なった周期が現われるのは非線形微分方程式ならではの現象だ。

外力をさらに大きくして $f_0/m = 7.0$ とした解のふるまいを図 5.11 (b) に描いた。時間を長くとって $t = 940\pi$ から $t = 1000\pi$ までをプロットしたが、くり返しのない不規則な運動にみえる。ノイズや不規則性のない微分方程式 (5.3.110) の解が、まるでランダムな雑音のようなふるまいを見せるのは驚くべきことだ。このようなふるまいは微分方程式における**カオス** (chaos) と呼ばれている。

$f_0/m = 7.0$ のときの解が本当に周期性をもたないことを見るために、別のプロットをしてみよう。

図 5.12 は、自然数 n について $t = 2n\pi$ となる時刻 t での $(x(t), \dot{x}(t))$ を二次元の座標にプロットしたものである[*51]。解全体の様子を見るのではなく、外力の周期ごとに「とばして」解を見ているといってもいい。図 5.10 (b) のような周期 2π の関数についてこのようなプロットを描けば、二次元平面に一つの点が（重ねて）打たれるだけだ。あるいは、図 5.11 (a) の周期 8π の関数なら、四つの点が描かれる。一方、図 5.11 (b) の不規則な解に対応するプロットでは、図 5.12 のように無数の点が複雑で意味ありげな図形を描き出している。解が（少なくとも、まともな周期の）周期関数ではないこと、また（サインやコサインといった）単純な関数の組み合わせでは書き表わせそうにないことが納得できるだろう。

カオス解には、さらに「初期値への敏感な依存性」という重要な性質がある。図 5.13 の (a) と (b) は、同じ

[*51] 初期の緩和の部分を捨てるため、n は 100 から 50000 の間を動かした。

図 5.12　$f_0/m = 7.0$ としたカオス解について、自然数 n について $t = 2n\pi$ となる時刻 t での $(x(t), \dot{x}(t))$ のプロット。解が周期性をもたないこと、また、きわめて複雑な動きをしていることがわかる。ちなみに、この図形が「墨流し」でできるパターンと似ているのには理由がある（が、そこまではこの本では踏み込めない）。

$f_0/m = 7.0$ とした微分方程式で、初期値 $x(0)$ が 0.05 だけ異なる二つの数値解を描いたものだ[*52]。初めのうちは (a) と (b) のふるまいは区別がつかないが、三つ

[*52] 細かい注意：正確に言うと、まず適当な初期値から出発して $x(1000\pi)$, $\dot{x}(1000\pi)$ を求め、これらを (a) の初期値とした。これで（カオス解に緩和していく部分でなく）カオス解そのものの性質を見ることができる。

目の山くらいから様子が異なってきて、その後は、二つは似ても似つかないふるまいを示している。つまり、初期値のごくわずかな相違が短時間で大きく増幅され、二つの解のふるまいは大きく異なってしまったのだ。

このような「初期値への敏感な依存性」はダフィング方程式 (5.3.110) そのものの性質ではないことに注意したい。図 5.13 の (c) と (d) には、周期解の現われる $f_0/m = 3.0$ のときに、上と同様に初期値を 0.05 だけずらした二つの解を描いた。見た目では区別がつかないので、(e) に両者を重ねたものを描いたが、ご覧のように、相違はほとんど見られない（また、しばらく計算を続けると、わずかな相違も消えていく）。

以上、非線形微分方程式であるダフィング方程式 (5.3.110) の解のふるまいを概観した。ここから学べることを簡単にまとめると、

- 微分方程式のパラメターを変化させると、（長時間の後での）解のふるまいが質的に変化する。
- 微分方程式にランダムな要因は何もないが、カ

図 5.13　ダフィング方程式 (5.3.110) の解の数値計算の結果。(a), (b) $f_0/m = 7.0$ としたカオスの領域で、初期値が 0.05 だけずれた二つの解を描いた。少し時間が経つと、初期値のずれが大きく増幅され、両者のふるまいは似ても似つかなくなる。(c), (d) $f_0/m = 3.0$ のときに同様に初期値が 0.05 だけずれた二つの解を描いたが、これでは区別がつかない。二つを重ねて描いた (e) をみると、わずかな相違が残っていることがわかる（しかし、時間がたつとその相違も消えていく）。

オスの出現する状況での解はまるでランダムな雑音を受けているかのように不規則に変化する。

- カオス的な解では、初期値のわずかな違いが時間と共に大きく増幅される。

といったとこだろう。いずれの点ももっと深く議論すべきなのだが、ここではそこまでする余裕はない。いずれにせよ、これまでこの本で見てきた、また、これから先に見ていく微分方程式では、このような性質は現われないことを強調しておこう。これらは、非線形の、そして（今の数学では）解くことのできない微分方程式に特有の性質なのだ。

大学での数学や物理の教育では、既存の方法で解ける方程式だけを取り上げるのが普通である。もちろん、解ける方程式だけでも自然界の多くのことを理解できるし、せっかく解けるものについてしっかりした知識を持つのは本質的に重要なことだ。ただ、「解ける方程式」の世界からほんの少し踏み出したところに、ダフィング方程式 (5.3.110) のような「解けない方程式」が無

数にあり、そこではカオスを初めとした魅力的な現象が見られることも知っておくべきだろう。

問 5.3.7.a　ダフィング方程式 (5.3.110) で $f_0 = 0$ とした（外力のない）非線形振動の問題を考える。エネルギーを $E(t) := (m/2)(\dot{x}(t))^2 + (m\alpha/4)(x(t))^4$ と定義する。$\gamma = 0$ ならば $\dot{E}(t) = 0$（エネルギーが保存する）ことを示せ。$\gamma > 0$ ならば $\dot{E}(t) \leq 0$（エネルギーは減っていく）ことを示せ。

5.4　電気回路

この節では、微分方程式が威力を発揮する例として電気回路の問題を扱かう。電気回路は、電磁気学と物性物理の融合領域での理想的な実験系で、工学的な観点からも重要な対象である。回路素子の性質を理想化して扱かうと、電気回路の挙動は粒子の 1 次元での運動の場合と類似した簡単な線形微分方程式で記述される。このような理想化した扱かいで現実の電気回路

のふるまいがかなり正確に記述されることが知られている。逆に考えると、回路での実験を通して線形微分方程式系の基本的なふるまいが実感できるといってもいい。

以下では、電気回路の基本法則 (5.4.1 節) から出発して、典型的な電気回路の微分方程式をみよう (5.4.2 節)。交流回路での複素インピーダンスは複素数の実用的な応用の代表例と言ってもいいだろう (5.4.3 節)。この題材への補足として、5.4.4 節で電圧についてのキルヒホッフの法則を導出する。

5.4.1　電気回路の基本法則

電気回路とは、いくつかの素子 — ここでは、抵抗、コンデンサー、コイル、そして、電圧源 — を導線でつなげたものをいう。導線は途中で複数に分岐してもよい。導線は電気抵抗がゼロの導体と近似的に扱かう。「回路」と呼ばれるように、通常は開いた端を持たないような素子と導線のつながりを考える。

回路の状況が時間とともに変化しないとき、回路は定常状態にあるという。例えば常に一定の電流が流れ続ける回路は定常状態にある。ここでは時間変化の小さい、十分に定常状態に近い回路だけを考える。例えば、電流は厳密に一定でなくてもいいが、電流の変化は十分に小さいような状況である。

導線の各部分を流れる電流 I とは、単位時間あたりに、定めた方向に通過する電荷の総量である。向きを逆にすると電流の値の正負が逆転することに注意。回路が定常なら、電荷保存則から、回路が分岐しない限りは電流は導線のどの部分で測っても同じ値をとる。これによって、各々の素子を通過する電流が定まることになる。また、n 本の導線が一点から分岐している場合、j 番目の導線から分岐点に向かって流れる電流を

I_j とするとき、電流についてのキルヒホッフ[*53]の法則 (Kirchhoff's current law)

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0 \tag{5.4.1}$$

が成り立つ。これも電荷保存則と定常性の簡単な帰結である。回路が定常に近いときには以上の性質が任意の時刻において（ほぼ正確に）成立すると考える（それが「定常に近い」という意味だと言ってもいい)。

回路の状態が定常に近いとき、各々の素子を通過する際の電圧降下 ΔV という量が定まる（ある種の差の量なので ΔV という記号を使ったが、微小量ではない)。電圧降下は、素子を通過する向きに依存しており、向きを逆にすると符号が反転する。電位が定義で

[*53] Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) ドイツの物理学者。量子力学への道を拓(ひら)いた黒体輻射の問題を提唱した他、音響学、弾性論、熱学などでも業績をあげた。電気回路についての有名なキルヒホッフの法則を報告した 1845 年には、キルヒホッフはまだ若い学生だった。

きる状況では、電圧降下は電位差の符号を反転したものである。一方、コイルやトランスを含む回路ではその解釈は（近似的にも）成り立たない。

各々の素子の電圧降下を適切に定めると、回路上の素子の電圧降下は以下のようなきれいな関係を満たす。回路のなかに任意の向きのついた閉じた道（つまり輪）をとり、輪の上にある m 個の素子の（輪を回る向きに測った）電圧降下を ΔV_j とする（輪の上の素子に $j = 1, \ldots, m$ はと番号をつけた）。このとき、これらの電圧降下は

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta V_j = 0 \tag{5.4.2}$$

を満たす。これを電圧降下についてのキルヒホッフの法則 (Kirchhoff's voltage law) と呼ぶ。

それぞれの素子についての電圧降下は以下のように定める（図 5.14）。

コンデンサー（キャパシター）は電荷をためることのできる素子で、静電容量と呼ばれる正の定数 C で特

図 5.14　(a) コンデンサー、(b) 抵抗、(c) 電圧源、(d) コイルそれぞれでの電圧降下。コンデンサー、抵抗、電圧源での電圧降下は（電位差が定義できるなら）電位差の符号を反転させたものである。コイルでの電圧降下は電位差と直接には結びつかない。

徴付けられる。静電容量 C のコンデンサーを、電荷 Q がたまっている極板から電荷 $-Q$ がたまっている極板に向かって通過する際の電圧降下は

$$\Delta V_{\mathrm{cap}} = \frac{Q}{C} \tag{5.4.3}$$

で与えられる。時間をあからさまに書いて、時刻 t での電荷を $Q(t)$ とする。電荷が保存することから、コンデンサーを時刻 t に通過する（より正確にはコンデン

サー前後の導線を流れる）電流 $I(t)$ と電荷 $Q(t)$ は、

$$I(t) = \frac{d}{dt}Q(t) \tag{5.4.4}$$

の関係で結ばれる。

抵抗器は電流を妨げる素子で、正の定数である抵抗値 R で特徴付けられる。抵抗値 R の抵抗器を通過する際の電圧降下は

$$\Delta V_{\mathrm{reg}} = RI \tag{5.4.5}$$

である。ここで I は抵抗を流れる電流である。もちろん、電圧降下と電流は同じ向きについて考える。

起電力が V_0 の電池（電圧源）を電池のマイナス極からプラス極に向かって通過する際の電圧降下は

$$\Delta V_{\mathrm{source}} = -V_0 \tag{5.4.6}$$

である。当たり前だが、電圧源は電圧を持ち上げるので、起電力 V_0 と電圧降下は逆符号になる。

以上の素子については、適切な静電気学的な状況を設定すれば、電圧降下は電位差の符号を反転したもの

と解釈できる。ただし、回路の中にコイルがあるとそのような解釈はできなくなる。

コイル（インダクター）はその名前の通り導線をぐるぐると芯に巻き付けた素子で、自己インダクタンスと呼ばれる正の定数 L で特徴付けられる。自己インダクタンス L のコイルを通過する際の電圧降下は

$$\Delta V_{\mathrm{ind}}(t) = L\frac{d}{dt}I(t) \tag{5.4.7}$$

である。ここでは時間 t を明示した。$I(t)$ はもちろん時刻 t にコイルを流れる電流であり、電流と電圧降下は同じ向きで測る。(5.4.7) はコイルの自己誘導による誘導起電力と同じ形だが、よく見ると符号が違うことに注意しよう。これは符号のミスでも偶然でもない。定常状態では電場のコイルに沿った成分はゼロなので、自己誘導によって生じる電場と回路の他の素子によって作られる電場がちょうど打ち消し合う必要がある。上の $\Delta V_{\mathrm{ind}}(t)$ は「回路の他の素子によって作られる電場」に対応する電圧降下と解釈できる。電磁気の知識

を持っている読者のために (5.4.7) の導出（より正確に言えば電圧降下をこのように定義した上でのキルヒホッフの法則 (5.4.2) の導出）を 5.4.4 節で述べる[*54]。

5.4.2　電気回路の微分方程式

電流と電圧それぞれについてのキルヒホッフの法則 (5.4.1), (5.4.2) を使えば、電気回路にどのように電流が流れるか完全に決定できる。

■簡単な例　まず基本的な例として図 5.15 にあげた回路をみよう。図 5.15 (a) は一定の起電力 V_0 の電圧源と抵抗 R をつないだ簡単な回路だ。回路を流れる電流を $I(t)$ としよう。ここで右回りの電流を正となるようにした。回路を右回りに辿りながら素子の電圧降下を

[*54] これを書くためにネット上にある (5.4.7) の導出（とされるもの）をいくつか眺めたのだが私にはよく理解できなかった。そもそもこの関係を高校物理だけで導くのはかなり困難に思える。

図 5.15　簡単な電気回路の例。(b), (c), (d) の回路の挙動は一階の常微分方程式で記述される。

見てやると、まず電圧源では $\Delta V_{\mathrm{source}}(t) = -V_0$、抵抗では $\Delta V_{\mathrm{reg}}(t) = RI(t)$ だから、これらを足してキルヒホッフの法則 (5.4.2) を使えば、$-V_0 + RI(t) = 0$ となり、つまり任意の t において

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \tag{5.4.8}$$

が得られる。電流は時間に依存せず、オームの法則で定まる値をとる。まあ、これは当たり前だ。

次に図 5.15 (b) の電圧源と抵抗とコンデンサーを直

列につないだ回路をみよう。時刻 t の電流を $I(t)$、コンデンサーの上の極板にたまった電荷を $Q(t)$ とする。上と同様にキルヒホッフの法則 (5.4.2) を使えば、

$$-V_0 + RI(t) + \frac{Q(t)}{C} = 0 \tag{5.4.9}$$

が得られる。ここで (5.4.4) を用いて $I(t)$ を $Q(t)$ の時間微分に書き換えて少し整理すると、

$$\frac{d}{dt}Q(t) = -\frac{Q(t)}{RC} + \frac{V_0}{R} \tag{5.4.10}$$

という $Q(t)$ についての微分方程式が得られる。これは、5.2.2 節で考えた「減衰と注入のある状況」を表す微分方程式と完全に同じ形をしている。これが簡単に解けることは詳しく見たとおりだ。例えば初期状態として $Q(0) = 0$ とすれば、

$$Q(t) = CV_0(1 - e^{-t/(RC)}) \tag{5.4.11}$$

という解が得られる。コンデンサーにたまる電荷が徐々に増えていって最後は CV_0 に落ち着くことがわか

る。この緩和の時間スケールを決めているのが RC である[*55]。これを微分すれば電流について

$$I(t) = \frac{V_0}{R}\, e^{-t/(RC)} \tag{5.4.12}$$

が得られる。最初はコンデンサーなどないようにオームの法則で決まる電流 V_0/R が流れ、コンデンサーに電荷がたまるにつれて電流が小さくなっていくことがわかる。

コンデンサーのかわりにコイルを使った図 5.15 (c) の回路の挙動を考えて上の回路と比較すると面白い。これは問題にしておこう。

問 5.4.2.a　図 5.15 (c) の電圧源と抵抗とコイルを直列につないだ回路において電流 $I(t)$ の満たす微分方程式を求めよ。初期条件を $I(0) = 0$ として解を求めよ。

[*55] 抵抗値 R と静電容量 C をかけると時間の次元をもった量が得られるということだ。実際にそうなっていることを確認してみるといい。(抵抗の単位はオームで静電容量の単位はファラッドと思っているだけでは考えは進まない。それぞれをより基本的な単位で書き直してみよう。)

図 5.15 (d) のような分岐のある回路も簡単に扱える。図のように、コンデンサーのある分岐、コイルのある分岐を流れる電流を、それぞれ $I_1(t)$, $I_2(t)$ とする。キルヒホッフの法則 (5.4.2) を使う際には、まず回路の中に向きのついた輪をとる。電圧源とコンデンサーを通る輪をとると条件 $V_0 = RI_1(t) + Q(t)/C$ が得られ、電圧源とコイルを通る輪をとると条件 $V_0 = RI_2(t) + L\,dI_2(t)/dt$ が得られる。（コンデンサーとコイルを通って電圧源を含まない輪をとってもいいが、そこから出る条件からは新しい情報は得られない。）もちろん、コンデンサーの電荷と電流は $I_1(t) = dQ(t)/dt$ で結ばれている。これらの関係は明らかに (5.4.9) と問 5.4.2.a で見たものと完全に同じである。つまり、$I_1(t)$ と $I_2(t)$ はそれぞれ独立に上で求めたように定まるということである。電圧源から流れ出す電流は、電流についてのキルヒホッフの法則 (5.4.1) より $I(t) = I_1(t) + I_2(t)$ で与えられる。

■振動の起きる回路　次の例は図 5.16 (a) のコイルとコンデンサーをつないだ回路（LC 回路）である。電圧源がないので、キルヒホッフの法則 (5.4.2) からは $L\,dI(t)/dt + Q(t)/C = 0$ が得られる。(5.4.4) を使って電流を電荷で表現すれば、この関係は

$$\frac{d^2}{dt^2}Q(t) = -\frac{1}{LC}Q(t) \tag{5.4.13}$$

となる。これが単振動の方程式であることはいうまでもないだろう（5.3.3 節を見よ）。(5.3.37) のように初期値 $Q(0)$, $I(0)$ を任意定数とすれば、一般解は

$$Q(t) = Q(0)\,\cos(\omega t) + \frac{I(0)}{\omega}\,\sin(\omega t) \tag{5.4.14}$$

となる。角振動数は $\omega = 1/\sqrt{LC}$ であり、振動の周期は $T = 2\pi\sqrt{LC}$ である。（$\sqrt{LC}$ が時間の次元を持つことも確認しよう。）(5.4.14) を時間 t で微分すれば

$$I(t) = I(0)\,\cos(\omega t) - \omega Q(0)\,\sin(\omega t) \tag{5.4.15}$$

のように電流が求められる。

図 5.16　振動の生じる電気回路の例。コンデンサーとコイルを含む回路の挙動は一般には二階の常微分方程式で記述される。(c), (d) での電圧源は起電力 $V_0 \cos(\omega_0 t)$ を発生する交流電圧源である。

次に図 5.16 (b) のように抵抗とコイルとコンデンサーを直列につないだ回路（LCR 回路）を考える。キルヒホッフの法則 (5.4.2) から $RI(t) + L\,dI(t)/dt + Q(t)/C = 0$ が得られる。これも電荷だけの関係にすれば

$$\frac{d^2}{dt^2}Q(t) = -\frac{1}{LC}Q(t) - \frac{R}{L}\frac{d}{dt}Q(t) \tag{5.4.16}$$

という微分方程式が得られる。今度は 5.3.4 節で扱った減衰振動の微分方程式と全く同じ方程式が現われた。物体の振動現象と電気回路という、似ても似つかない二つの物理系がそっくりな微分方程式で記述できるというのはなかなか面白い。二つの異なった問題を同じ道具で一網打尽にできるところも数学の威力と言っていいだろう。

5.3.4 節での $x(t)$ を $Q(t)$ と読み替えて

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad \gamma = \frac{R}{2L} \tag{5.4.17}$$

とすれば 5.3.4 節の結果がそのまま LCR 回路の微分方程式 (5.4.16) にあてはまる。ここで γ は減衰の度合いを表わすパラメターである[*56]。例えば、$\gamma < \omega$ あるい

[*56] 実験系の扱かいでは γ よりも $Q = \omega/(2\gamma)$ で定義される Q 値がよく用いられる。Q 値は共振幅の目安を与える無次元量である。

は $CR^2 < 4L$ となる[*57]減衰が小さい場合の解は

$$Q(t) = e^{-\{R/(2L)\}t}\left\{A\cos(\omega_{\mathrm{e}}\,t) + B\sin(\omega_{\mathrm{e}}\,t)\right\} \tag{5.4.18}$$

である。A, B は任意定数で、実質的な角振動数を

$$\omega_{\mathrm{e}} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \tag{5.4.19}$$

とした。$R > 0$ ならば、他のパラメターがどんな値を取ろうと、$Q(t)$ も $I(t)$ も時間とともに指数関数的にゼロに向かって減衰していく。

5.4.3　交流回路と複素インピーダンス

図 5.16 (c) のように電圧源、抵抗、コイル、コンデンサーが直列につながった回路を考えよう。ここで電圧源は交流電圧 $V(t) = V_0\cos(\omega_0 t)$ を発生する。V_0 と ω_0 は正の定数である。この場合もキルヒホッフの法則

[*57] Q 値を使えばこの条件は $Q > 1/2$ となる。

(5.4.2) から

$$V(t) = R\,I(t) + \frac{Q(t)}{C} + L\frac{d}{dt}I(t) \tag{5.4.20}$$

が得られる。言うまでもなく $I(t) = dQ(t)/dt$ を使えば (5.4.20) は $Q(t)$ についての微分方程式になる。そして、おそらく多くの読者が予想したように、5.3.5 節の (5.3.86) で見た減衰のある場合の強制振動の問題と完全に同じ微分方程式が現れる。

5.3.5 節でも述べたように、微分方程式 (5.4.20) の一般解は、一つの特解と（左辺をゼロにした）斉次の微分方程式の一般解の和の形に書ける。この場合の斉次の微分方程式は上で調べた (5.4.16) に他ならないから、その一般解は（5.3.4 節の解析から）わかっている。われわれは特解を求めることに専念すればいい。

もちろん 5.3.5 節で既に特解 (5.3.90) を求めているので、それをそのまま電気回路の言葉に焼き直せばここでの問題も解ける。ただし、ここでは、交流回路で標準的に用いられる複素インピーダンスの概念を導入し、

それによって周期的に振動する特解を求めよう。複素インピーダンスを用いるともっと複雑な回路での特解も計算できる。

■複素インピーダンスの定義と性質　以下では、回路を流れる電流が $I_0 \cos(\omega_0 t + \theta)$（$I_0$ と θ は実定数）のように電圧源と同じ角振動数 ω_0 で振動する状況だけを考える。このように仮定しても、微分方程式を満たす解が出てくればそれは立派な特解である。しかも、対応する斉次の微分方程式の一般解は時間が大きい極限でゼロに収束することがわかっているから、このような振動する特解は（電圧源のスイッチを入れてから）十分に時間が経ったあとの回路の挙動を表わしていることになる。

以下では、5.3.3 節から何度かやっているように、電流や電圧といった変数を形式的に複素数に拡張する。もちろんこれらの量は実数なので、これらの実部を

とったものが本当の電流や電圧である[*58]。

以上の設定で、各素子での電圧降下の関係 (5.4.3), (5.4.5), (5.4.7) を書き直したい。各々の素子に流れる電流（を複素化したもの）を $\tilde{I}e^{i\omega_0 t}$、素子での電圧降下（を複素化したもの）を $\Delta\tilde{V}e^{i\omega_0 t}$ と書こう。ここで、$\tilde{I}$ と $\Delta\tilde{V}$ は複素定数である。すると、以下でみるように、いずれの素子についても、電流と電圧降下の関係は、適切な複素定数 Z を用いて

$$\Delta\tilde{V} = Z\tilde{I} \tag{5.4.21}$$

という簡単な形に書ける（正確に言えば、$\Delta\tilde{V}e^{i\omega_0 t} = Z\tilde{I}e^{i\omega_0 t}$ の両辺の実部をとると、本来の関係 (5.4.3), (5.4.5), (5.4.7) が再現される）。複素定数 Z は**複素インピーダンス**と呼ばれる。

抵抗については、電流と電圧降下は単に比例するの

[*58] 実部をとるということを明記しないで電流や電圧を複素数として扱かう文献も多いので注意。

で、複素インピーダンスを

$$Z_R = R \tag{5.4.22}$$

ととれば、(5.4.21) は (5.4.5) をそのまま再現する。これは自明だ。

コイルについては、上で仮定した電流と電圧降下の関数形を (5.4.7) に代入すると

$$\Delta\tilde{V}e^{i\omega_0 t} = L\frac{d}{dt}\{\tilde{I}e^{i\omega_0 t}\} = i\omega_0 L\tilde{I}e^{i\omega_0 t} \tag{5.4.23}$$

となるので、(5.4.21) と見比べて、複素インピーダンスを

$$Z_L = i\omega_0 L \tag{5.4.24}$$

と定めればいい。

コンデンサーについては、(5.4.3) から電荷（を複素数にしたもの）が $C\,\Delta\tilde{V}e^{i\omega_0 t}$ であることに注意して、電流と電荷の時間変化を結ぶ (5.4.4) を使えば

$$\tilde{I}e^{i\omega_0 t} = \frac{d}{dt}\{C\,\Delta\tilde{V}e^{i\omega_0 t}\} = i\omega_0 C\Delta\tilde{V}e^{i\omega_0 t} \tag{5.4.25}$$

が得られる。(5.4.21) と見比べれば、コンデンサーの複素インピーダンスを

$$Z_C = \frac{1}{i\omega_0 C} \tag{5.4.26}$$

と定めればいいことがわかる。

複素インピーダンスが便利なのは、複数の素子を組み合わせた際の全体の複素インピーダンスが簡単な合成則に従うからである。二つの素子 1, 2 の複素インピーダンスを Z_1, Z_2 としよう。これら二つの素子を直列につないだもの全体は、（あくまで交流回路において振動する特解を求めるという範囲で）複素インピーダンス

$$Z_{\mathrm{ser}} = Z_1 + Z_2 \tag{5.4.27}$$

の素子と等価である。同様に、同じ二つの素子を並列につないだものは複素インピーダンス

$$Z_{\mathrm{par}} = \left(\frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}\right)^{-1} \tag{5.4.28}$$

の素子と等価である。これらはよく知られている抵抗の合成則と同じ形をしている。導出もほとんど同じだ。

問 5.4.3.a　合成則 (5.4.27), (5.4.28) を導け[*59]。

■複素インピーダンスの応用　図 5.16 (c) の回路で長時間の後で実現する電流、あるいは、非斉次の常微分方程式 (5.4.20) の振動する特解を、複素インピーダンスを使って求めよう。これは抵抗、コイル、コンデンサーの直列回路だから合成した複素インピーダンスは、

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{tot}} &= Z_R + Z_L + Z_C \\ &= R + i\omega_0 L + \frac{1}{i\omega_0 C} = |Z_{\mathrm{tot}}|\, e^{i\theta_0} \end{aligned} \tag{5.4.29}$$

[*59] ヒント：直列の場合、二つの素子を流れる電流は共通で、全体の電圧降下はそれぞれの素子での電圧降下の和である。並列の場合、二つの素子の電圧降下は等しく、全体の電流はそれぞれを流れる電流の和になる。これらの事実を数式で表わせばいい。

である。最後は複素数の極形式 (3.2.116) を用いた。絶対値と偏角は具体的には

$$|Z_{\mathrm{tot}}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)^2} \tag{5.4.30}$$

$$\theta_0 = \arctan\left[\frac{1}{R}\left(\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C}\right)\right] \tag{5.4.31}$$

と表わされる。

交流電圧源の起電力 $V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t)$（$V_0$ は実定数）を再現するように複素数の起電力を $V_0\, e^{i\omega_0 t}$ としよう。$V_0 = Z_{\mathrm{tot}} \tilde{I}$ より、複素化した電流は

$$\tilde{I}\, e^{i\omega_0 t} = \frac{V_0}{Z_{\mathrm{tot}}} e^{i\omega_0 t} = \frac{V_0}{|Z_{\mathrm{tot}}|} e^{i(\omega_0 t - \theta_0)} \tag{5.4.32}$$

とわかる。実部をとれば回路を流れる電流が

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z_{\mathrm{tot}}|} \cos(\omega_0 t - \theta_0) \tag{5.4.33}$$

のように求められる。これが欲しかった特解である。

ここで、(5.4.33) と (5.4.21) を使い、$i = e^{i(\pi/2)}$ を思い出して、抵抗、コイル、コンデンサーそれぞれで

の電圧降下を求めると、

$$\Delta V_R(t) = V_0 \frac{R}{|Z_{\mathrm{tot}}|} \cos(\omega_0 t - \theta_0) \tag{5.4.34}$$

$$\Delta V_L(t) = V_0 \frac{\omega_0 L}{|Z_{\mathrm{tot}}|} \cos(\omega_0 t - \theta_0 + \pi/2) \tag{5.4.35}$$

$$\Delta V_C(t) = V_0 \frac{1}{\omega_0 C |Z_{\mathrm{tot}}|} \cos(\omega_0 t - \theta_0 - \pi/2) \tag{5.4.36}$$

となる。抵抗での電圧降下の時間的な振動を中心に見ると、コイルとコンデンサーでの電圧降下の振動の位相が逆方向に $\pi/2$ ずつずれていることがわかる。

V_0, R, L, C を固定したまま交流電圧の角振動数 ω_0 を変化させることを考えよう。(5.4.30) から $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ となるとき $|Z_{\mathrm{tot}}|$ が最小値 R をとることがわかる。もちろんこのとき電流は最大値をとる。LC 回路 (5.4.13) での振動を思い出せば、これは電圧源と「コイルとコンデンサーを合わせたもの」が共鳴を起こしていると解釈できる。また、ちょうど共鳴するときには位相のずれ θ_0 はゼロになる。

最後に力学的な振動子には対応物がない例として、図 5.16 (d) の回路で長時間の後に回路を流れる電流を求めてみよう。もちろん電圧源の起電力は $V(t) = V_0 \cos(\omega_0 t)$ とする。今度は L と C が並列なので、合成則 (5.4.27), (5.4.28) を使って、全体の複素インピーダンスは

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{tot}} &= Z_R + \left(\frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}\right)^{-1} \\ &= R + \left(\frac{1}{i\omega_0 L} + i\omega_0 C\right)^{-1} = |Z_{\mathrm{tot}}|\, e^{i\theta_1} \end{aligned} \tag{5.4.37}$$

となる。ここで

$$|Z_{\mathrm{tot}}| = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C\right)^{-2}} \tag{5.4.38}$$

である。電流の表式は自明なのでわざわざ書かない。今度は ω_0 を変化させて $1/\sqrt{LC}$ に近づけると $|Z_{\mathrm{tot}}|$ が限りなく大きくなる、つまり電流が流れなくなることに注意しよう。

5.4.4　電圧降下についてのキルヒホッフの法則の導出（補足）

この節への補足として、最も基本的な関係である電圧降下についてのキルヒホッフの法則 (5.4.2) の導出を解説する。ここでは、この本の今までのスタイルを破って、10 章で解説するベクトル場の線積分と面積分の知識、そして電磁気学の基本的な知識を仮定する。よって、これらを学んでいない読者はこの小節はとばして（後で戻ってきて）いただきたい。ここでの考察

の基盤はマクスウェル[*60]方程式の一つの

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r}) \tag{5.4.39}$$

である。もちろん $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{B}(t, \boldsymbol{r})$ は時刻 t 位置 $\boldsymbol{r}$ における電場と磁場である。

まず、考えている回路の中にコイルやトランスがないとしよう。これは簡単だ。この場合には回路の電流が作る磁場の効果は無視できるので (5.4.39) の右辺をゼロとする。回路に沿った任意の閉じた道 c をとる。より正確には、道 c は導線や素子の芯を通るように決める（図 5.17)。c を境界に持つ面 S をとり、S 上で (5.4.39) を面積分する。ストークスの定理（1808 ペー

[*60] James Clerk Maxwell (1831–1879) スコットランドの物理学者。十九世紀を代表する偉大な物理学者の一人。電磁気学の体系をまとめあげたのは不朽の業績である。土星の輪を構成する塵の運動を議論し、そこで開発した統計的手法を、気体分子運動論に導入した。電磁気学と気体分子運動論は彼の研究の二本の柱だった。実験の腕も優れていたらしく、1861 年には世界で初めてのカラー写真を作ったという。

ジの定理 10.5）によって $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ の面積分は c 上の線積分に書き換えられるので、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in c} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})=0 \tag{5.4.40}$$

が得られる。ここまではかなり一般的な話だが、ここで回路のほぼ定常的な状態を扱っていることを思い出す。定常状態では導線を流れる電流は一定なので、導線の部分では電場（の導線方向の成分）はゼロである。よって (5.4.40) 左辺の線積分にゼロでない寄与をするのは、閉じた道 c のうちでいずれかの素子を通過する部分だけである。道 c の上にある素子に $j=1,\ldots,m$ と番号をつけ、道 c の j 番目の素子を通過する部分を p_j と呼ぶ。そして、道 p_j に沿った電場の線積分を

$$\Delta V_j(t)=\int_{\boldsymbol{r}\in p_j} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.4.41}$$

と書けば、(5.4.40) は

$$\sum_{j=1}^{m}\Delta V_j(t)=0 \tag{5.4.42}$$

となる。これはまさに電圧降下についてのキルヒホッフの法則 (5.4.2) である。また、この場合の電圧降下 (5.4.41) は電場の線積分だから（電位が定義できるなら）まさに素子の両端の電位差（の符号を逆にしたもの）である。

次に、回路にコイルが含まれるとしよう。今度は (5.4.39) の右辺は本質的に重要なので決して無視できない。上と同様に回路に沿った閉じた道 c をとり、道の途中にはコイルもあるとしよう。コイルを通るときには道 c もぐるぐると巻いてある導線の芯を通ってぐるぐると回る（図 5.17）。(5.4.39) の両辺を c を境界にもつ任意の面 S 上で積分すれば

$$\int_{\boldsymbol{r}\in c} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = -\frac{d}{dt}\Phi(t) \tag{5.4.43}$$

が得られる。左辺は (5.4.40) と同じだが右辺には S を貫く磁束

$$\Phi(t) = \int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.4.44}$$

図 5.17　回路に沿った閉じた道 c をとる。定常に近い回路では導線の上では電場（の回路に沿った成分）はゼロなので、電場の線積分に寄与するのは、コイル以外の素子がある p_1, p_2, p_3 の部分だけである。コイルのある p_{ind} の上では全電場（の回路に沿った成分）はゼロである。ただし、(5.4.48) のように、電圧降下は電場のうちの静電場に近い成分の積分で書ける。

が現れた。もちろん、これは単なる電磁気学の基本法則である。ここでも、定常に近い回路を扱っていることを思い出し、導線の上では回路に沿った電場はゼロで

あることを使う。さらに、コイルも基本的には導線を巻いたものなのだから、コイルの上でも回路に沿った電場はゼロである。よって (5.4.43) の左辺の線積分に寄与するのはコイル以外の素子の中での電場だけである。コイル以外の素子での電圧降下を (5.4.41) によって定義すれば、(5.4.43) は

$$\sum_{j=1}^{m} \Delta V_j(t) + \frac{d}{dt}\Phi(t) = 0 \tag{5.4.45}$$

となる。和の中にはコイルは含まれていないことに注意。ここで、コイルによる電圧降下を $\Delta V_{\mathrm{ind}}(t) = d\Phi(t)/dt$ と定め、また $\Phi(t) = L\,I(t)$ であることを使えば、回路がコイルを含む場合の電圧降下についてのキルヒホッフの法則 (5.4.2) が得られる。

これで導出は終わったが、この電圧降下 $\Delta V_{\mathrm{ind}}(t)$ の意味をもう少しはっきりさせるため考察を進めよう。一般の電磁場でなく、定常に近い回路が作る電磁場の場合には、電場を

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{E}_{\mathrm{stat}}(t,\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.4.46}$$

のように二つの部分の和に分けることができる。$\boldsymbol{E}_{\mathrm{stat}}(t,\boldsymbol{r})$ は「静電場的な部分」であり、これは $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_{\mathrm{stat}}(t,\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}$ を満たす。一方、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}(t,\boldsymbol{r})$ は「磁場の変動で作られた部分」である。$\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}(t,\boldsymbol{r})$ は（磁場の変動が激しい）コイルの中だけでゼロではないと考えていい。もちろん $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}(t,\boldsymbol{r})=-\partial\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})/\partial t$ が成り立つので、これを上と同じ面 S 上で面積分すれば

$$\frac{d}{dt}\Phi(t)=-\int_{\boldsymbol{r}\in p_{\mathrm{ind}}}d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.4.47}$$

が得られる。積分路は本来は c だが、ここでは c のうちコイルの中を通過する部分の p_{ind} に置き換えてよい。左辺は $\Delta V_{\mathrm{ind}}(t)$ そのものであることを思い出し、また、コイルの中では $\boldsymbol{E}_{\mathrm{stat}}(t,\boldsymbol{r})+\boldsymbol{E}_{\mathrm{ind}}(t,\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}$ だったことを使うと、(5.4.47) は

$$\Delta V_{\mathrm{ind}}(t)=\int_{\boldsymbol{r}\in p_{\mathrm{ind}}}d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{stat}}(t,\boldsymbol{r}) \tag{5.4.48}$$

と書き直せる。これは、静電場的な成分 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{stat}}(t,\boldsymbol{r})$ だけを考えた際のコイルにおける電圧降下 (5.4.41) に相

当している。これが 5.4.1 節で述べたことのより正確な表現である。

5.5　微分方程式に関する用語や概念

この章のこれまでの部分をていねいに読み、問題を解いて来た読者は、微分方程式とその解について、かなりしっかりとした感覚を身につけているはずだ。

「入門編」のさいごに、微分方程式に関する用語を簡単に整理しておこう。だいじなのは、言葉ではなく、本質の理解や実践的な感覚なのだが、用語を知っておいて損はない。初学者は軽く読み流し、あとで必要に応じて読み返す程度でいいだろう。

5.5.1　微分方程式の分類

微分方程式の分類について簡単にまとめる。

■未知関数の種類についての区別　未知関数が $x(t)$ や $f(x)$ のように、一つの変数の関数であるとき、微分方程式を**常微分方程式** (ordinary differential equation) と呼ぶ。英語名称の頭文字(かしらもじ)をとって ODE と呼ぶと通(つう)っぽい。

未知関数が $\varphi(t,x)$ や $f(x,y,z)$ のように二つ以上の変数の関数であるとき、微分方程式を**偏微分方程式** (partial differential equation) と呼ぶ。こちらも PDE とも呼ぶ。

この章でみた微分方程式は (形だけ書いたシュレディンガー方程式 (5.1.7) をのぞけば) すべて常微分方程式だった。

■微分方程式にあらわれる微分についての区別　方程式にあらわれるもっとも高い階数の導関数が n 階の導関数であるとき、その方程式を n **階の微分方程式**という。これは常微分方程式についても偏微分方程式についても同じである。

5.2 節でみた減衰の方程式とその変形は、みな一階の常微分方程式だった。5.3 節でみた一次元の力学の方程式の場合、速度についての方程式は一階の常微分方程式、位置についての方程式は二階の常微分方程式だった。

■線形と非線形　微分方程式が、未知関数とその導関数の二次以上の項を含まないとき、その方程式は**線形** (linear) 微分方程式であるという。実は、この章でみた例のほとんどが線形微分方程式だった。

線形でない方程式は**非線形** (nonlinear) といわれる。たとえば、減衰率が総量の二乗に比例する微分方程式 (5.2.22) や太陽のつくる重力場中のニュートン方程式 (5.1.6), (5.3.41) が非線形常微分方程式の例である。

線形微分方程式のなかでも、特に未知関数とその導関数の一次の項だけを含むものを、斉次(せいじ) (homogeneous) の線形微分方程式、または線形斉次の微分方程式という。斉次でない微分方程式は非斉次とよばれる。つまり、非斉次の線形微分方程式とは、未知関数とその導

関数の一次の項の他に、定数項や定まった関数の項が含まれているものである。これについては、5.2.2 節や 5.3.5 節で具体例をとおして説明したとおり。

5.5.2　微分方程式の解

■解という意味　微分方程式が与えられたとする。そこに、ある関数を代入したとき、変数の任意の値において、方程式が等式として満たされれば、その関数は微分方程式の**解** (solution) だという。

これまでの「入門編」では、ともかく微分方程式の解を求めることを実践してきたし、ここから先の「解法編」でもともかく解を計算する方法をみていく。もちろん、気持ちを変えて、そもそも微分方程式にはかならず解が存在するものなのか、また、解は一つだけなのか、といったことを悩むのもたいせつだ。そういった基礎的な理論は、後に 8.1 節で時間をとって議論する。

■一般解、任意定数、初期条件　一般に、ひとつの微分方程式は無数の解をもっている。大ざっぱに言って、これら解のすべてをまとめて表したものを、その微分方程式の**一般解** (general solution) と呼ぶ。一般解ではない「個別の解」のことを、一般解と対比させて、特解(とっかい) (particular solution) と呼ぶ。5.2.2 節でも述べたように、何か特別の性質をもった解を特解というのではなく、(一般解ではない) 個々の解はどんなものでも特解と呼ぶ。一般解を知っているときには、一般解の任意定数に特定の値を代入したものは特解ということになる。

なんらかの (調べる価値のある) 微分方程式が与えられたとき、その一般解を求めることが最終のゴールになる。しかし、よほど単純な微分方程式でないかぎりは、一般解をきちんと求めてしまうことなどできない。難しい微分方程式を相手にしているときには、いくつかの特解をみつけるだけでも大いに意味がある。一般相対論の基礎方程式のアインシュタイン方程式は、取

り扱かいのやっかいな非線形の偏微分方程式で、一般解などまったく知られていない。新しい特解をみつければ、それが立派な業績になる。

一般解には、どんな値を代入してもかまわない任意定数が含まれる。8.1 節できちんと導出するが、**未知関数が一つの常微分方程式の場合は、方程式の階数と任意定数の個数は等しい**ことが知られている。これは、すでに簡単な例でも体験してきたことだが、いろいろな微分方程式と付き合っていく上で、頭にしっかりと入れておくべき事実だ。

初期条件を指定することで、自分の注目する解を選び出すことができる。初期条件というのは、変数（たとえば、時間 t）の基準となる値（たとえば、初期時刻 $t = 0$）を適当に選んでおいて、その値における未知関数やその導関数の値を指定することをいう。一般に、初期条件として指定すべき値の個数は、任意定数の個数に等しい。

5.6　積分を用いた一階の常微分方程式の解法

この節から、第二部の「解法編」に入る。これまでは、関数の微分についての基礎的な知識だけを使って微分方程式を解いてきたが、ここからは積分を用いた解法を述べる。積分についての一通りの知識を思い出しながら読んでほしい。

この節では、未知関数がひとつの一階の常微分方程式のなかで、ある程度パターン化された方法で解けてしまうものを紹介する。もちろん、ここに紹介するパターンで、すべての一階常微分方程式をカバーすることなどは全くできない。パターンにあてはまらないものについては、何らかの変形でいずれかのパターンに帰着させるとか、あるいは、そもそもぜんぜん違う解き方を考え出すとか、すごい直感を働かせて解の形を見抜いてしまう、とか、さまざまな方法で攻めるしか

ない。いずれにせよ、どういうパターンのものがどういう風に解けるかを体で覚えていなくては、そういうこともできないだろう。まずは、パターン化された解き方を完璧に身につけてほしい。

なお、以下であつかう未知関数が一つの一階常微分方程式のもっとも一般的な形は、

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \tag{5.6.1}$$

である。もちろん、t が変数、$x(t)$ が未知関数、$f(x,t)$ が与えられた二変数関数である。今さら言うまでもないと思うが、t が変数で $x(t)$ が未知関数と決まっているわけではない。たとえば、x が変数で $y(x)$ が未知関数という書き方もよく出てくる。以下では、原則として、(5.6.1) の書き方を用いるが、これだけに慣れてしまうのも考え物なので、例題などでは他の書き方も使うことにする。

5.6.1　積分だけで一般解が求まるタイプ

はじめに見ておくべきなのは、常微分方程式 (5.6.1) で、$f(x,t)$ がまったく x に依存しない場合だ。つまり、t の関数 $f(t)$ が与えられたとき、

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t) \tag{5.6.2}$$

を解け、という問題だ。これは、たとえば、5.3.1 節でみた力が時間のみに依存するような一次元運動での速度 $v(t)$ の微分方程式などで出会っているおなじみの形である。

(5.6.2) は、「t で微分したら $f(t)$ になるような関数は何か？」という問題だとみていいから、答えは簡単だ。$f(t)$ の原始関数（4.1.3 節を見よ）の一つを $F_0(t)$ とし（つまり、$\dot{F}_0(t) = f(t)$）

$$x(t) = F_0(t) + C \tag{5.6.3}$$

とすれば、(5.6.2) の一般解が得られる。ここで C は

任意定数。あるいは、同じことを不定積分を使って書けば、

$$x(t) = \int dt\, f(t) \tag{5.6.4}$$

となる (不定積分の中には任意定数が一つ含まれているという約束だったことを思い出そう)。(5.6.3), (5.6.4) の解には一つの任意定数が含まれている。今までやってきたように、任意定数はそのまま解に残しておくか、必要があれば初期条件を用いて表現する。

■例　たとえば、$t_0 > 0$, α を定数として、$t \geq t_0$ における微分方程式

$$\dot{x}(t) = \frac{\alpha}{t} \tag{5.6.5}$$

を考える。(5.6.4) と積分公式 (4.2.1 節を見よ) から直ちに

$$x(t) = \int dt\, \frac{\alpha}{t} = \alpha \log t + C \tag{5.6.6}$$

と一般解が求まる。初期値 $x(t_0)$ を用いて解を表すためには、(5.6.6) に $t = t_0$ を代入し、$x(t_0) = \alpha \log t_0 + C$ となることから C を求め、

$$x(t) = \alpha \log t - \alpha \log t_0 + x(t_0) \tag{5.6.7}$$

とすればよい。

■定積分を用いた定式化　原始関数や不定積分を用いた書き方は、実際の計算の際には便利だけれど、理論としてはあまりかっこよくない。後のもう少し高級な解法のための予行演習も兼ねて、同じことを、定積分を使って書いておこう。

まず、変数の名前はどう変更しても話は変わらないから、t のかわりに s を変数として、(5.6.2) を

$$\frac{dx(s)}{ds} = f(s) \tag{5.6.8}$$

と書く。そして、この式の両辺を s について、ある決まった t_0 から任意の t まで、定積分する。t_0 は、初期条件を与える時刻（多くの場合は $t_0 = 0$ である）。す

ると、

$$\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{dx(s)}{ds} = \int_{t_0}^{t} ds\,f(s) \tag{5.6.9}$$

となる。左辺は導関数の積分だから、微積分学の基本定理 (4.1.58) により $x(t) - x(t_0)$ に等しい。よって、$x(t_0)$ を右辺に移項すれば、

$$\boxed{x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} ds\,f(s) \qquad (5.6.10)}$$

となり、初期時刻 $t = t_0$ で初期値 $x(t_0)$ をとる解が得られた。もちろん、これは (5.6.3), (5.6.4) と同じことを定積分で表したものになっている。このようにすると、任意定数が自動的に初期値を使って表現されることに注意しよう。

問 5.6.1.a　α, β を正の定数とするとき、微分方程式

$$m\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\alpha}{\beta + t} \tag{5.6.11}$$

を $t \geq 0$ の範囲で解け。任意定数は初期値 $v(0)$ を使って表わせ。

問 5.6.1.b　α, β を正の定数とするとき、微分方程式

$$m\frac{dv(t)}{dt} = \frac{\alpha}{\beta + t^2} \tag{5.6.12}$$

をすべての t の範囲で解け。任意定数は初期値 $v(0)$ を使って表わせ。

5.6.2　変数分離形の一階常微分方程式 — 例

未知関数が一つの一階常微分方程式の解法でもっとも重要なものを一つあげろと言われれば、ほとんどの人が**変数分離** (separation of variables) の方法と答えるだろう。決して一般の微分方程式に使えるわけではないが、多くの物理の現場でこの形に帰着する方程式が現れる。ともかく使いこなせるようになっておくべきだ。

ここでは、標準的な力学の問題をとおして変数分離の方法をみていこう。

一定の重力 mg と速度に比例する空気抵抗 $-\mu v(t)$（μ は正の定数）を受けて運動する質量 m の粒子の（速度についての）運動方程式は、

$$m\,\dot{v}(t) = mg - \mu\,v(t) \tag{5.6.13}$$

である。これは、定数項を含む減衰の方程式 (5.2.28) そのもので、すでに 5.2.2 節で二通りの解き方をみた。変数分離による解き方は、第三の解き方ということになる。念のために言っておくけれど、変数分離の方法は、このように易々（やすやす）とは解けない方程式にも使うことのできる強力な方法である。

まず 5.6.1 節の積分だけで解を求める方法が使えないことを納得しておこう。左辺が未知関数 $v(t)$ の微分であるところは変わらない。だが、右辺には、既知の定数 mg だけでなく、未知の関数 $v(t)$ そのものが顔を出しているのだ。もちろん、両辺を積分すれば、正しい等式が得られる。しかし、右辺には（当たり前だが）

未知関数の積分という未知のものが現れてしまうから、この等式は正しいけれど使い物にならない。もう少し工夫がいる。

■定数解とそれ以外の解　一般解を求める前に、微分方程式 (5.6.13) の解の性質を大ざっぱに把握しておこう。

そのため、すべての t について $v(t)$ が一定値をとるような定数解があるかどうかを見よう。もし $v(t)$ が一定値をとるなら、$\dot{v}(t) = 0$ だから、(5.6.13) より $mg - \mu\, v(t) = 0$ である。これを解けば、

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} \tag{5.6.14}$$

となり、実際に右辺は t によらない定数になっている (これは確認すべきこと！)。微分方程式 (5.6.13) には定数解があることがわかった。

次に、$v(t)$ が微分方程式 (5.6.13) であり、ある t_0 において、$v(t_0) = mg/\mu$ を満たすと仮定する。すると、微分方程式 (5.6.13) からわかるように、その時点での

時間微分は $\dot{v}(t_0) = 0$ となる。時間微分が 0 ということは、時間が t_0 からわずかに変化しても $v(t)$ は mg/μ のまま変化しないことを意味する。ということは、(同じ考えを次々とくり返していけば) どれだけ時間が経っても、この解は mg/μ から動けないこと、つまり、定数解 (5.6.14) そのものであるということになる[*61]。これを言い換えれば、$v(t)$ を、微分方程式 (5.6.13) の解で、定数解 (5.6.14) 以外のものだとすれば、任意の t について $v(t) \neq mg/\mu$ が成り立つといえる。この事実を以下で用いる。

■不定積分による定式化　最初に、不定積分を用いた実用的な解き方をみよう。あとで、定積分を使った解き方も述べる。

定数解 (5.6.14) はわかっているので、それ以外の解を求めよう。$v(t) - (mg/\mu) \neq 0$ なので、微分方程式

[*61] これは「微分方程式の解の一意性」と呼ばれる命題の一例である。詳しくは 8.1 節を見よ。

(5.6.13) の両辺を $v(t) - (mg/\mu)$ で割ることができて、

$$\frac{dv(t)}{dt}\left(v(t) - \frac{mg}{\mu}\right)^{-1} = -\frac{\mu}{m} \tag{5.6.15}$$

が得られる。$v(t)$ に依存する量をすべて左辺に集めてしまったことに注意。

両辺を t について不定積分すると

$$\int dt\,\frac{dv(t)}{dt}\left(v(t) - \frac{mg}{\mu}\right)^{-1} = -\frac{\mu}{m}\int dt \tag{5.6.16}$$

が得られる。左辺をよく見ると、積分の変数変換あるいは置換積分の公式 (4.1.69) の右辺そのままの形をしている。4.2.3 節の例や高校数学の積分計算で置換積分を用いるときは、たとえば「x で積分していたところを $s = \tan x$ で積分する」というように、あらかじめ素性(すじょう)の知れている関数を使った。ここでは、$v(t)$ という未だに正体のわからない関数を使って置換積分をしようというわけだ。もちろん、素性がわかっていようがそうでなかろうが、正しい変形をすれば正しい関係がで

てくる。公式 (4.1.70) を素直に使えば、この積分は、

$$\int dt\,\frac{dv(t)}{dt}\,\left(v(t)-\frac{mg}{\mu}\right)^{-1}$$
$$=\int dv\,\left(v-\frac{mg}{\mu}\right)^{-1}\Bigg|_{v=v(t)} \tag{5.6.17}$$

と書き換えられる。右辺の積分は (4.2.4) でお馴染みの形なので簡単に実行できる。(5.6.16) 右辺の積分はもっと簡単なので両辺をそれぞれ計算すれば、

$$\log\left|v-\frac{mg}{\mu}\right|\Bigg|_{v=v(t)}+C_1=-\frac{\mu}{m}t+C_2 \tag{5.6.18}$$

が得られる。ここで任意定数が両辺に現れたが、これらを両方とも残しておいても意味はない。$C=C_2-C_1$ としてやれば、一つの任意定数 C を使って、

$$\log\left|v-\frac{mg}{\mu}\right|\Bigg|_{v=v(t)}=-\frac{\mu}{m}t+C \tag{5.6.19}$$

と書ける。最後に、v に $v(t)$ を代入すれば、

$$\log\left|v(t)-\frac{mg}{\mu}\right| = -\frac{\mu}{m}t + C \tag{5.6.20}$$

となる。これで微分方程式は実質的に解けてしまった。あとは落ち着いて解の形を整えるだけだ。両辺の指数関数をとれば、

$$\left|v(t)-\frac{mg}{\mu}\right| = e^{C}\,e^{-(\mu/m)\,t} \tag{5.6.21}$$

である。左辺に絶対値がついているのは、いささか気持ちが悪い。しかし、$v(t)-(mg/\mu)$ が 0 でなく、解 $v(t)$ は時間の連続関数になるはずなので、絶対値の中の量の正負は、初期条件だけで決まり時間がたっても変わらない（もし正負が変わるとすると、途中で必ず 0 を通る）。

絶対値を外すために場合分けが必要に見えるが、実は、それは必要ない（もちろん、地道にやりたい人は場合分けしてもよいが）。(5.6.21) の絶対値を外して、

$$v(t)-\frac{mg}{\mu} = A\,e^{-(\mu/m)\,t} \tag{5.6.22}$$

と書いてしまおう。何をやったかというと、$v(t) - (mg/\mu)$ が正のときには $A = e^C$ とし、$v(t) - (mg/\mu)$ が負のときには $A = -e^C$ としたのだ。$t = 0$ を代入してやって、$A = v(0) - (mg/\mu)$ となるから、これを代入して $v(t)$ について解けば、

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} + \left(v(0) - \frac{mg}{\mu}\right) e^{-(\mu/m)\,t} \tag{5.6.23}$$

という解が得られる。これが微分方程式 (5.6.13) の一般解である。この解は、粒子の速度 $v(t)$ が、t が大きくなるにつれて終端速度 mg/μ に指数的に近づいていく様子を表している。

■省略した書き方　さて、上とまったく同じ計算を、計算を能率的におこなえるように、より簡略に書く方法がある。「(ずるい) 大人(おとな)の書き方」と言ってもよいだろう。私は、この手の計算の技法はあまり好きではないのだが、これは、あまりに便利なので、きちんと紹介しておこうと思う。

まず微分方程式 (5.6.13) を書くときから、(大人なの

で）わざと未知関数の引数を省略してしまって、

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - \mu v \tag{5.6.24}$$

と書く。dv/dt を分数みたいにあつかって、

$$\frac{dv}{v-(mg/\mu)} = -\frac{\mu}{m}dt \tag{5.6.25}$$

と変形し、さらに両辺に積分記号をくっつけて、

$$\int \frac{dv}{v-(mg/\mu)} = -\frac{\mu}{m}\int dt \tag{5.6.26}$$

となる。積分を実行し、「実は v は $v(t)$ だった」と思い出して v を $v(t)$ に置き換えれば先ほど同じ結果が得られる。

速い！　だが、かなり大胆であぶない式変形をしている。t が変数で v が関数という区別を忘れているみたいだが、それでいいのか？　そもそも微分の記号 dv/dt は「dv わる dt」という意味ではないはずなのに、両辺に dt をかけて「約分」などしていいのだろうか？

さらには、微分記号の分子と分母からでてきた dv と

dt を積分の記号の中で普通に使っているけれど、こんなことは許されるのか？

実際、3.1.2 節の最後で議論したように微分 dv/dt には「分数的な」側面があり、それがこの計算がうまくいく理由である。変数変換（置換積分）の公式が (4.1.71) と書けたのと同じことだ。こういう書き方に厳密な意味をつける方法もあるのだが、それより、この式変形は、最初に説明したていねいな解き方を省略した書き方だとみなすのがいいと私は思っている。真面目にやっても、簡略版でもやっても、同じ積分の式が出るというのが大事なところだ。危なそうに見える式変形の本当の意味は、前にみた変数変換（置換積分）などのまっとうな式変形だと思えばよいのだ。正しい式変形を知っているから、この大胆で速い計算法が正しいと確信できるわけだ。このように納得した上で、省略した計算

を身につけるというのが正しい態度だと思う[*62]。必要とあらば、いつでも省略しない導き方が説明できたほうがいいことはいうまでもない。

■定積分による定式化　さいごに、曖昧なところがもっとも少ない定積分を使った書き方で変数分離の方法をみておこう。実用的なことを考えると、定積分を使った書き方はいささか面倒である。しかし、この書き方をすれば、変数を変換したところで何がおきたかは完全に明確になるし、任意定数も自動的に決定される。

(5.6.15) の形に書いた方程式で変数を t から s に変えて、

$$\frac{dv(s)}{ds}\left(v(s)-\frac{mg}{\mu}\right)^{-1}=-\frac{\mu}{m} \tag{5.6.27}$$

と書き直そう。両辺を s について 0 から t までの定積

[*62] 少なからぬ教科書で、この省略形の書き方を（計算テクニックではなく）解法の説明のところで使っている。これは教育の仕方としてまちがっていると私は思う。

分すると、

$$\int_0^t ds\,\frac{dv(s)}{ds}\left(v(s)-\frac{mg}{\mu}\right)^{-1}=-\frac{\mu}{m}\int_0^t ds \tag{5.6.28}$$

となる。ここで t は積分変数ではなく積分の上限であることに注意。左辺は定積分の変数変換（置換積分）の公式 (4.1.67) がそのまま使える形になっている。公式に従って s のかわりに $u=v(s)$ を新たな積分変数にすると、(5.6.28) を

$$\int_{v(0)}^{v(t)} du\,\left(u-\frac{mg}{\mu}\right)^{-1}=-\frac{\mu}{m}\int_0^t ds \tag{5.6.29}$$

と書きかえることができる。変数変換の処方箋に従って、左辺の積分範囲を $v(0)$ から $v(t)$ に取った。ここでも未知関数の値 $v(t)$ が積分の上端として現れていることに注意しよう。

あとは (5.6.29) の左辺の積分をきちんと実行すれば、

$$\begin{aligned}\int_{v(0)}^{v(t)} du \left(u - \frac{mg}{\mu}\right)^{-1} &= \left[\log\left|u - \frac{mg}{\mu}\right|\right]_{v(0)}^{v(t)} \\ &= \log\frac{|v(t) - (mg/\mu)|}{|v(0) - (mg/\mu)|} \\ &= \log\frac{v(t) - (mg/\mu)}{v(0) - (mg/\mu)}\end{aligned} \tag{5.6.30}$$

となる。$(mg/\mu) - v(s)$ がゼロにならないから、最右辺の対数の引数はつねに正になる。

(5.6.29) の右辺の積分は自明なので、こうして、

$$\log\frac{v(t) - (mg/\mu)}{v(0) - (mg/\mu)} = -\frac{\mu}{m}t \tag{5.6.31}$$

が得られる。両辺の指数関数をとって整理すると、

$$v(t) = \frac{mg}{\mu} + \left(v(0) - \frac{mg}{\mu}\right) e^{-(\mu/m)\,t} \tag{5.6.32}$$

となり、(5.6.23) と同じ一般解が得られた。

5.6.3　変数分離形の一階常微分方程式 — 一般化といくつかの例

■一般化　前節の例を踏まえて、変数分離形の一階常微分方程式の一般論をつくっておこう。

$f(x)$ と $g(t)$ を任意の与えられた一変数関数とする（つまり、既知関数）。以下の話を楽にするため、$f(x) \neq 0$ となるような x の範囲だけを考えることにする。実変数 t の実数値関数 $x(t)$ が微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))\, g(t) \tag{5.6.33}$$

を満たすとする。一般形 (5.6.1) と比較すればわかるように、右辺で $x(t)$ に依存する部分と t に依存する部分が、きれいに積にわかれている。これが「変数分離」形だ[*63]。もちろん、これは非常に特殊な形だが、とも

[*63] 関数 $x(t)$ と変数 t が分離しているわけだが、x の方も（t に従属した）変数と呼ぶ流儀があるので、変数分離と呼ばれる。

かくこの形の微分方程式については以下のような処理が可能だということは知っておくべきだ。

まず、「大人の解き方」をみよう。例によって $x(t)$ での変数 t を省略して

$$\frac{dx}{dt} = f(x)\,g(t) \tag{5.6.34}$$

と書き、さらに変数を分離して

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)\,dt \tag{5.6.35}$$

とする。両辺に積分記号をつけて

$$\boxed{\int \frac{dx}{f(x)} = \int dt\,g(t) \qquad (5.6.36)}$$

を得る。あとは不定積分を求め、x を $x(t)$ に置き換えればいい。

同じことを定積分を使って書いてみよう。まず、微

分方程式 (5.6.33) を

$$\frac{dx(s)}{ds}\,\frac{1}{f(x(s))} = g(s) \tag{5.6.37}$$

という形に変形する。ここでも変数を t から s に書きかえておいた。また、解が動く範囲で $f(x) \neq 0$ を仮定した。初期条件を与える時刻を t_0 とし、(5.6.37) の両辺を s について t_0 から t まで定積分すると、

$$\int_{t_0}^{t} ds\,\frac{dx(s)}{ds}\,\frac{1}{f(x(s))} = \int_{t_0}^{t} ds\,g(s) \tag{5.6.38}$$

となる。$f(x) \neq 0$ を仮定したので、解が動く範囲では $dx(s)/ds = f(x(s))\,g(s) \neq 0$ である。そこで、左辺の積分変数を $y = x(s)$ に変換して、

$$\boxed{\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dy}{f(y)} = \int_{t_0}^{t} ds\,g(s) \qquad (5.6.39)}$$

とできる。これが、(5.6.36) に相当する定積分の表式である。

(5.6.36), (5.6.39) は微分方程式の解というには、まだ抽象的すぎる。ここで実際に両辺の積分が実行できて、さらに、そうして得られた等式を $x(t)$ について解くことができれば、たしかに一般解が求まるということだ。

変数分離形の微分方程式を具体的に解く際には、一般の公式 (5.6.36), (5.6.39) にあてはめるよりも、むしろ、個々の例で具体的に計算して解いてしまうことが多い。だから、公式を覚えるのではなく、解き方そのものを手になじませるのがよいと思う。また、計算の最後にはかならず定積分が登場するから、基本的な関数の定積分はすいすいと評価できるようにしておこう。

以下、変数分離の方法に慣れるため、もう少し例をみておこう。

■例：速度が大きい場合の空気抵抗　前節と似た力学の例をみよう。

空気中を動く物体の速度が非常に大きく空気抵抗も大きいとき（高速で走る車やスカイダイビングで落っ

こちるとき）には、空気抵抗は速度の二乗に（大ざっぱに）比例するとされている。そのような抵抗と一定の重力が働くときの速度の運動方程式は、

$$m\,\dot{v}(t) = mg - \alpha\,\{v(t)\}^2 \tag{5.6.40}$$

と書ける。ただし m, g, α は正の定数であり、上の方程式は $v(t) \geq 0$ でのみ正しいとする[*64]。この方程式の一般解を変数分離法で求めてみよう。

「大人の書き方」を使うので、引数などは省略し、方程式を

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\alpha}{m}\,v^2 = -\frac{\alpha}{m}(v^2 - \frac{mg}{\alpha}) \tag{5.6.41}$$

と書き、

$$\beta = \frac{\alpha}{m}, \quad v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}} \tag{5.6.42}$$

[*64] 物理的には、単に正の速度というのでは不十分で、十分に大きい速度とすべきだが、ここは話を簡単にした。

と置く。ここで v_∞ は粒子の最終的な速度である。実際、

$$v(t) = v_\infty \tag{5.6.43}$$

という一定値を取る関数は、微分方程式 (5.6.40) の解になっている。以下では、このような定数解以外の解を求めよう。5.6.2 節の例と同様、定数解とは異なる解 $v(t)$ は任意の t について $v(t) \neq v_\infty$ を満たすことがいえる。

新しいパラメターを使うと微分方程式は、

$$\frac{dv}{dt} = -\beta\{v^2 - (v_\infty)^2\} \tag{5.6.44}$$

と書ける。「変数分離」して積分をつければ、

$$\int \frac{dv}{v^2 - (v_\infty)^2} = -\beta \int dt \tag{5.6.45}$$

となる。v に依存する部分を左側に持ってくるところがミソだ。ここで $v \neq v_\infty$ を使った。

左辺は、4.2.4 節の最初でみた常套(じょうとう)手段にしたがっ

て部分分数に書きかえて積分すると、

$$\int \frac{dv}{v^2-(v_\infty)^2} = \frac{1}{2v_\infty}\int dv\left(\frac{1}{v-v_\infty}-\frac{1}{v+v_\infty}\right)$$
$$= \frac{1}{2v_\infty}\,\log\frac{|v-v_\infty|}{|v+v_\infty|}+C' \quad (5.6.46)$$

となる。ここでの v は $v(t)$ だったことを思いだし、これが (5.6.45) 右辺の積分結果の $-\beta\,t+$ (定数) と等しいとおけば、

$$\log\frac{|v(t)-v_\infty|}{|v(t)+v_\infty|} = -2v_\infty\beta\,t-2C \qquad (5.6.47)$$

が得られる。あとで式がきれいになるよう、任意定数を上のような形で入れておいた。両辺の指数関数をとれば、

$$\frac{|v(t)-v_\infty|}{|v(t)+v_\infty|} = e^{-2(v_\infty\beta\,t+C)} \qquad (5.6.48)$$

となる。

あとは (5.6.48) の絶対値を処理するだけだ。地道に場合分けをして計算してもいいが、(5.6.21) か

ら (5.6.22) を出したのと同様に能率的に進めよう。(5.6.48) の絶対値を外して

$$\frac{v(t)-v_\infty}{v(t)+v_\infty} = A\,e^{-2v_\infty\beta\,t} \tag{5.6.49}$$

と書く。もちろん

$$A = \begin{cases} e^{-2C} & v(t) > v_\infty \text{ のとき} \\ -e^{-2C} & 0 \le v(t) < v_\infty \text{ のとき} \end{cases} \tag{5.6.50}$$

である。あるいは、(5.6.49) で $t=0$ とすることで

$$A = \frac{v(0)-v_\infty}{v(0)+v_\infty} \tag{5.6.51}$$

であることもわかる。

(5.6.49) を $v(t)$ について解けば、

$$v(t) = v_\infty\,\frac{1+A\,e^{-2v_\infty\beta\,t}}{1-A\,e^{-2v_\infty\beta\,t}} \tag{5.6.52}$$

となる。ここに (5.6.51) を代入すれば、一般解

$$v(t) = v_\infty\,\frac{v(0)+v_\infty+\{v(0)-v_\infty\}\,e^{-2v_\infty\beta\,t}}{v(0)+v_\infty-\{v(0)-v_\infty\}\,e^{-2v_\infty\beta\,t}} \tag{5.6.53}$$

が得られる。$v(0) \neq v_\infty$ を仮定して解を求めたが、これは（v_∞ を含む）任意の初期値 $v(0) \geq 0$ について解になっている。

別の形の解も求めておこう。まず $0 \leq v(0) < v_\infty$ とする。このときには全ての $t \geq 0$ について $0 \leq v(t) < v_\infty$ なので、(5.6.50) より $A = -e^{-2C}$ とすれば、(5.6.52) は

$$v(t) = v_\infty \frac{1 - e^{-2(v_\infty \beta\, t + C)}}{1 + e^{-2(v_\infty \beta\, t + C)}} = v_\infty \tanh(v_\infty \beta\, t + C) \tag{5.6.54}$$

となる。ここで $t = 0$ とすれば $\tanh C = v(0)/v_\infty$ なので $C = \tanh^{-1}[v(0)/v_\infty]$ である（ちなみに，ハイパボリック・タンジェントの逆関数は (3.2.124) で表わしてもよい）。よって、$0 \leq v(0) < v_\infty$ についての一般解

$$v(t) = v_\infty \tanh\left[\sqrt{\frac{\alpha g}{m}}\, t + \tanh^{-1}\left(\frac{v(0)}{v_\infty}\right)\right] \tag{5.6.55}$$

が得られた。ハイパボリックタンジェントのグラフ（411 ページの図 3.15）が頭に入っていれば、$t \to \infty$

で速度が v_∞ に近づいていくことがすぐに読み取れる。

$v(0) > v_\infty$ の場合も同様に計算すれば

$$v(t) = \frac{v_\infty}{\tanh\left[\sqrt{\dfrac{\alpha g}{m}}\,t + \tanh^{-1}\left(\dfrac{v_\infty}{v(0)}\right)\right]} \tag{5.6.56}$$

が得られる。

問 5.6.3.a　(5.6.56) を導け。

■例　α を定数とし、未知関数 $y(x)$ についての微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} = \alpha\, x\,(1 + \{y(x)\}^2) \tag{5.6.57}$$

を考える。これも右辺が x と $y(x)$ を含む多項式の積に分かれているので、変数分離法で解ける。

例によって、方程式を

$$\frac{dy}{dx} = \alpha\, x\,(1 + y^2) \tag{5.6.58}$$

と省略気味に書き、機械的に

$$\frac{dy}{1 + y^2} = dx\,\alpha\, x \tag{5.6.59}$$

と変形。積分記号をくっつけて

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \alpha \int dx\, x \tag{5.6.60}$$

となる。左辺の積分は 4.2 節の (4.2.9), (4.2.35), (4.2.39) でくり返して見た定番の積分だ。変数変換（置換積分）を使ってもいいし、534 ページの表で三角関数の逆関数を見てもいい。ともかく、積分すると

$$\arctan(y) = \frac{\alpha}{2}\, x^2 + C \tag{5.6.61}$$

が得られる。y は $y(x)$ だったことを思いだし、両辺のタンジェントをとると、

$$y(x) = \tan[(\alpha/2)\, x^2 + C] \tag{5.6.62}$$

と一般解が得られる。任意定数 C を初期値 $y(0)$ で表現すれば、

$$y(x) = \tan[(\alpha/2)\, x^2 + \arctan(y(0))] \tag{5.6.63}$$

となる。

問 5.6.3.b　α, β を定数とするとき、微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} = \alpha\, e^{\beta\, x}\,(1 + \{y(x)\}^2) \tag{5.6.64}$$

の一般解を求めよ。任意定数は $x = 0$ での初期条件を用いて表わすこと。

問 5.6.3.c　α を定数とするとき、微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} = \alpha\, x\,(1 - \{y(x)\}^2) \tag{5.6.65}$$

の一般解を求めよ。任意定数は $x = 0$ での初期条件を用いて表わすこと。上で見た (5.6.57) と似ているが、こちらの方がややこしい。初期値 $y(0)$ が ± 1 の場合とそれ以外の場合をきちんと区別して解くこと。

問 5.6.3.d　α, β を正の定数とし、$t \geq 0$ についての微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha}{x(t)\,(t + \beta)} \tag{5.6.66}$$

の $x(t) > 0$ を満たす解を求めよ。任意定数は $t = 0$ での初期条件を用いて表わすこと。

問 5.6.3.e　これは熱力学関連の問題。理想気体を断熱した容器に入れ、その体積 V をゆっくりと変化させることを考える。このとき気体の温度は、$T(V)$ という体積 V の関数とみることができる。この関数は、

$$\frac{dT(V)}{dV} = -\frac{2\,T(V)}{3V} \tag{5.6.67}$$

という微分方程式を満たすことが知られている。基準の体積 V_0 について $T_0 = T(V_0)$ となるとき、関数 $T(V)$ を求めよ。

問 5.6.3.f　せっかくなので、まだ完全には解明されていない現象に関する例題をみよう[*65]。机や堅い床の上でコインを転がすと最終的にはほぼ一カ所でクルクル

[*65] この題材は時枝正さん（ケンブリッジ大学数学）と Ariel Amir さん（ハーバード大学物理）による。

図 5.18　机の上で（すべらずに転がりながら）クルクルとまわるコインのある瞬間での回転の様子。コインの動きに注目すると、矢印のついた点線で表わした回転軸のまわりに「自転」している。一方、コインと机の接触点は、机の上の点線の円周上を回転している。こちらは「公転」と言っていいだろう。摩擦や音の発生などによってエネルギーが失われなければコインはずっとこのような自転 + 公転の運動を続けるはずだ。実際にはエネルギーが少しずつ失われて行き、回転は止まる。そのときの公転の角速度 $\Omega(t)$ のふるまいを調べるのが問 5.6.3.f である。

と回りながら「かかかかかかかかかかかかかかかかかかかっ！」という感じの音をたてて（文字による表現がむずかしい）

最後はぴたりと止まるのを知っているだろう[*66]。このとき「かかかか」という音の（時刻 t における）振動数 $f(t)$ は、運動が止まる時刻 t_{sing} より前の $t \leq t_{\mathrm{f}}$ でおおよそ $f(t) = (\text{定数})(t_{\mathrm{sing}} - t)^{-1/3}$ のように発散する（音が急激に高くなる）ことを示す実験結果がある[*67]。

この興味深い現象は以下のような比較的簡単なモデルで再現できる。摩擦や音の発生によるエネルギーの損失がないときには、コインは図 5.18 のような一種の歳差運動をすると考えられる。このときのコイン全体の運動エネルギー E と歳差運動の角速度（詳しくは図の説明を参照）Ω の間には $E = \alpha/\Omega^2$ の関係があるこ

[*66] 時枝さんの講演動画の 33 分 30 秒以降で「巨大コイン」での実験がみられる（他の部分も面白い）。
`https://www.youtube.com/watch?v=f07KzjnL2eE`

[*67] t_{sing} の添字は singular（特異的）の略。この時刻で振動数などが特異的なふるまいを示すことから（時枝さんにならって）こう呼んだ。

とが力学の計算からわかる[*68]（α は正の定数、$E = 0$ はコインが静止した状態に対応する）。実際の運動ではコインのエネルギーが少しずつ変化するので、エネルギー $E(t)$ と角速度 $\Omega(t)$ は $E(t) = \alpha/\{\Omega(t)\}^2$ の関係を保ったまま時間 t とともに変化するとしよう。ここで、エネルギーは主として音の発生で失われると想定し、$\dot{E}(t) = -\beta\,\Omega(t)$ が成り立つと仮定する（β は正の定数）。角速度 $\Omega(t)$ と音の振動数 $f(t)$ が比例するなら最初に述べた実験結果が再現できることを示せ。

5.6.4　変数分離形に帰着できる形、とくに同次形

微分方程式が変数分離形であるとわかれば、すべては積分の問題に帰着する。実際、物理の現場で、変数分離形で解ける方程式に出会うことはちょくちょくあ

[*68] 私が書いた『コインがぐりんぐりんと回り転がる運動について』というノートがあるので、興味があれば、このタイトルで検索するといいだろう。

る。しかし、中には、あと一歩で変数分離形になるのに、見た目ではそうとはわからない、という方程式もある。うまい変数変換をしてやれば変数分離形になるという場合だ。そういうものを解くには、けっきょくは、一生懸命にうまい変数変換を探してやるしかない。

ここでは、そういった「うまい変数変換で変数分離に帰着できる」方程式の典型的な例として、同次形といわれる微分方程式について述べておこう。

具体例をやると「やらせ」になってしまうので、ここでは最初から一般論をあつかう。$f(y)$ を任意の与えられた一変数関数とし、実変数 t の実数値関数 $x(t)$ が微分方程式

$$\dot{x}(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right) \tag{5.6.68}$$

を満たすとする。変数 t と未知関数 $x(t)$ がいつも $x(t)/t$ の形で現われ、同じ次数をもつことになるので、同次形と呼ぶ。

(5.6.68) は、（$f(y)$ が単項式という特別な場合を除き）変数分離形にはなっていない。そこで新たな関数

$y(t)$ を

$$y(t) = \frac{x(t)}{t} \tag{5.6.69}$$

により定義する。この式の両辺を t で微分し、(5.6.68) を使えば、

$$\dot{y}(t) = \frac{\dot{x}(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{1}{t} f\left(\frac{x(t)}{t}\right) - \frac{1}{t}\frac{x(t)}{t} \tag{5.6.70}$$

となる。うまい具合に最右辺は $y(t)$ を使って書き直せるので、$y(t)$ が満たす微分方程式

$$\dot{y}(t) = \frac{f(y(t)) - y(t)}{t} \tag{5.6.71}$$

が得られる。これは、変数分離形になっているので、あとはがんばって解いてみればよい。

問 5.6.4.a　微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{\alpha\,\{x(t)\}^2 + \beta\, t\, x(t)}{t^2} \tag{5.6.72}$$

の一般解を求めよ。α, β は定数である。

5.6.5　線形一階常微分方程式と定数変化法

未知関数が一つの線形一階常微分方程式については一般論が発達していて、少なくとも形式的には、解を完全に書き下すことができる。

$f(t)$, $g(t)$ を任意の関数として、

$$\dot{x}(t) = f(t)\,x(t) + g(t) \tag{5.6.73}$$

という微分方程式を考えよう。未知関数 $x(t)$ の一次と 0 次だけを含むのが線形微分方程式である。よって、(5.6.73) は、考えうるもっとも一般的な形だ。また、とくに、$g(t)$ が 0 であるような方程式

$$\dot{x}(t) = f(t)\,x(t) \tag{5.6.74}$$

を斉次の線形微分方程式という。

線形性の意味を考えるために、$x_1(t)$ と $x_2(t)$ がいずれも斉次の線形微分方程式 (5.6.74) の解だとしよう。

すると、任意の実定数 a, b について、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\{a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\} &= a\,\dot{x}_1(t)+b\,\dot{x}_2(t)\\ &= a\,f(t)\,x_1(t)+b\,f(t)\,x_2(t)\\ &= f(t)\{a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\}\end{aligned} \tag{5.6.75}$$

となり、$a\,x_1(t)+b\,x_2(t)$ もまた微分方程式 (5.6.74) の解であることがわかる。このように、二つ（以上）の解の任意の線形結合[*69]もまた解になるのが斉次の線形微分方程式の重要な特徴である。

一方、$x_1(t)$ と $x_2(t)$ が非斉次の線形微分方程式 (5.6.73) の解だとすると、これらの線形結合 $a\,x_1(t)+b\,x_2(t)$ は、

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\} = a\,\dot{x}_1(t)+b\,\dot{x}_2(t)\\ &= a\{f(t)\,x_1(t)+g(t)\}+b\{f(t)\,x_2(t)+g(t)\}\\ &= f(t)\{a\,x_1(t)+b\,x_2(t)\}+(a+b)g(t)\end{aligned} \tag{5.6.76}$$

[*69] このように、複数のものを定数倍して足し合わせることを線形結合、あるいは、重ね合わせという。

を満たすので、($a+b=1$ という特別な条件が成り立たない限りは）微分方程式 (5.6.73) の解にはならないことに注意しよう。

■斉次の方程式の一般解　未知関数が一つの斉次の線形一階常微分方程式 (5.6.74) は、明らかに変数分離形になっているので、一般解を積分で書き表すことができる。

そろそろ慣れてきただろうから、途中をとばしてさっさと進めよう。もちろん、全ての t について $x(t)=0$ とすれば解になるが、これは面白くない。$x(t)\neq 0$ となる解は

$$\int \frac{dx}{x} = \int dt\, f(t) \tag{5.6.77}$$

という関係から決まる。右辺は一般にはどうしようもないが、左辺は積分できて、

$$\log|x(t)| = \int dt\, f(t) \tag{5.6.78}$$

となる。左辺に任意定数を書かなかったのは、右辺が

まだ不定積分で任意定数を一つ含んでいるからだ[*70]。両辺の指数関数をとれば、(5.6.74) の一般解を

$$x(t) = \pm \exp[\int dt\, f(t)] \tag{5.6.79}$$

と書くことができる。最初の ± は、初期条件に応じてとる。つまり、関数 $f(t)$ が積分できれば、この形の微分方程式は完全に解けるということがわかった。

具体的な問題を解くときは、こういう書き方で十分なのだが、のちに定数変化法の一般論をまとめる際に必要になるので、定積分を使った丁寧な書き方もみておこう。やはり、細かいところは省略して、解を決める積分の関係は、

$$\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^{t} ds\, f(s) \tag{5.6.80}$$

である。t_0 は初期条件を与える時刻。左辺の積分を実

[*70] 以前の例で、(5.6.18) から (5.6.19) に移るときに二つの任意定数を一つにまとめたのと同じこと。

行すると、

$$\log \frac{x(t)}{x(t_0)} = \int_{t_0}^{t} ds\, f(s) \tag{5.6.81}$$

となり、両辺の指数関数をとれば、一般解が

$$x(t) = C\, \exp\left[\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right] \tag{5.6.82}$$

であることがわかる。もちろん $C = x(t_0)$ は任意定数。

■非斉次の方程式の特解　非斉次の方程式 (5.6.73) も一般的に解くことができるのだが、一般の方法について述べる前に、5.2.2 節などで見た特解を利用する方法をまとめておこう。特解が簡単にみつかる場合は、一般的な方法を使うよりも話が早いからだ。

非斉次の項 $g(t)$ を 0 にした斉次方程式 (5.6.74) の解 (5.6.79) または (5.6.82) を $x_0(t)$ と書いておこう。これは一つの任意定数を含む一般解である。次に、（直感とか試行錯誤とか）何らかの方法で、非斉次の方程式 (5.6.73) の解が一つだけでもみつけられたとする。こ

れを特解 (particular solution) と呼び、$x_{\mathrm{ps}}(t)$ と書く。すると、斉次の方程式の一般解 $x_0(t)$ と特解 $x_{\mathrm{ps}}(t)$ を足した $x(t) = x_0(t) + x_{\mathrm{ps}}(t)$ は、

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{d}{dt}\{x_0(t) + x_{\mathrm{ps}}(t)\} \\ &= f(t)\,x_0(t) + \{f(t)\,x_{\mathrm{ps}}(t) + g(t)\} \\ &= f(t)\,x(t) + g(t) \qquad (5.6.83)\end{aligned}$$

を満たす。これは、非斉次の方程式 (5.6.73) の解ということになる。しかも、この解は、任意定数を一つ含んでいて任意の初期条件に対応できるので、一般解である。

ごく簡単な例として、

$$\dot{x}(t) = \alpha\,x(t) + \beta\,e^{\gamma\,t} \qquad (5.6.84)$$

という方程式をみよう。対応する斉次の方程式 $\dot{x}(t) = \alpha\,x(t)$ の解が $x(t) = C\,e^{\alpha\,t}$（C は任意定数）であることは言うまでもないだろう。

非斉次の方程式の特解をさがすため、勘で $x_{\mathrm{ps}}(t) = A\,e^{\gamma\,t}$ という形を仮定しよう。A は何らかの定数（任

意定数ではない！)。この形を、微分方程式 (5.6.84) に代入して解になることを要求すれば、$A = \beta/(\gamma - \alpha)$ のように定数が求められる。つまり、

$$x_{\mathrm{ps}}(t) = \frac{\beta}{\gamma - \alpha}\, e^{\gamma\, t} \tag{5.6.85}$$

という特解が得られた。これを斉次方程式の一般解と足しあわせれば、

$$x(t) = C\, e^{\alpha\, t} + \frac{\beta}{\gamma - \alpha}\, e^{\gamma\, t} \tag{5.6.86}$$

という一般解が得られる。

ただし、この解は $\gamma = \alpha$ のときには定義されていないことに注意しよう。特解を推測する方法で解こうとしたのだから、うまくいかない例があるのは当然だ。勘でうまくいかない場合には、次に紹介する定数変化法を使うのがよい（問 5.6.5.a を見よ)。

■定数変化法 — 例題　物理的な例題で、非斉次の方程式を解く一般的な手法である**定数変化法** (method of

parameter variation) を説明しよう。この解法はラグランジュ[*71]が発見したとされている。

実変数 t の実数値関数 $v(t)$ が微分方程式

$$m\,\dot{v}(t) = -\gamma\,v(t) + f_0\,\cos(\omega t) \tag{5.6.87}$$

を満たすとする。ここで、m, γ, f_0, ω は正の定数。これは、質量 m の粒子が、速度に比例する抵抗と、時間的に周期的に振動する外力を受けて一次元空間を運動する際の運動方程式である。

まず、外力がない斉次の方程式 $m\,\dot{v}(t) = -\gamma\,v(t)$ の解は、考えるまでもなく、

$$v_0(t) = C\,e^{-(\gamma/m)\,t} \tag{5.6.88}$$

である。もちろん、C は任意定数。

非斉次の線形微分方程式 (5.6.87) は、すぐ前に述べた、特解を推測する方法でも解くことができる (問 5.6.5.b)。しかし、ここでは定数変化法というまっ

[*71] 432 ページの脚注 *57 を見よ。

たく別の方法を使って、より機械的に一般解を求めてみる。新しい方法の出発点は、非斉次の線形微分方程式 (5.6.87) の解を

$$v(t) = C(t)\, e^{-(\gamma/m)\, t} \tag{5.6.89}$$

という形に書くことである。これは、対応する斉次の方程式の一般解 (5.6.88) で、任意定数 C を時間変化しうる未知の関数 $C(t)$ に置き換えたものだ（定数を変化させるから、定数変化法。ひねりのないネーミングである）。どんな関数 $v(t)$ でも (5.6.89) の形に書くことができることを思うと、これで特に話が進んだという気にはならない。しかし、斉次の方程式の解になっている形を使うことで、微分方程式の一部の「めんどうを見てもらえる」かもしれない。

そこで (5.6.89) を t で微分する。積の微分のルールに注意すれば計算は簡単で、

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \dot{C}(t)\, e^{-(\gamma/m)\, t} - C(t)\, \frac{\gamma}{m}\, e^{-(\gamma/m)\, t} \\ &= \dot{C}(t)\, e^{-(\gamma/m)\, t} - \frac{\gamma}{m}\, v(t) \end{aligned} \tag{5.6.90}$$

が得られる。さいごは、再び (5.6.89) を使った。もとの微分方程式 (5.6.87)（の両辺を m でわったもの）とこれを比較すれば、未知関数 $C(t)$ は

$$\dot{C}(t)\, e^{-(\gamma/m)\,t} = \frac{f_0}{m}\, \cos(\omega t) \tag{5.6.91}$$

という関係を満たすことがわかる。両辺に $e^{(\gamma/m)\,t}$ をかければ、

$$\dot{C}(t) = \frac{f_0}{m}\, e^{(\gamma/m)\,t}\, \cos(\omega t) \tag{5.6.92}$$

となる。これは、5.6.1 節でみたような、右辺が未知関数によらない、もっとも簡単なタイプの一階微分方程式になっている。解の形を (5.6.89) のように推測した時点で、微分方程式は半分くらい解けてしまっていたのだ。

$C(t)$ についての微分方程式は、5.6.1 節でみたように、積分するだけで解けてしまう。以前に導いた

(4.2.60) を用いて積分を計算すると、

$$C(t) = \frac{f_0}{m} \int dt\, e^{(\gamma/m)\,t}\, \cos(\omega t)$$
$$= \frac{f_0}{m}\, e^{(\gamma/m)\,t}\, \frac{(\gamma/m)\, \cos(\omega t) + \omega\, \sin(\omega t)}{(\gamma/m)^2 + \omega^2} + C' \tag{5.6.93}$$

となる。混乱を避けるため任意定数を C' と置いた。これを (5.6.89) に代入すれば、

$$v(t) = C'\, e^{-(\gamma/m)\,t} + \frac{f_0\{\gamma\, \cos(\omega t) + m\omega\, \sin(\omega t)\}}{\gamma^2 + (m\omega)^2} \tag{5.6.94}$$

のように、最終的な一般解が求められる。任意定数 C' は、たとえば初速度 $v(0)$ によって表すことができる。

一般解 (5.6.94) のふるまいをみると、初速度に依存する第一項は時間とともに小さくなっていき、さいごには、速度も外力と同じ角振動数 ω で振動することがみてとれる。ただし、振動の位相は外力の位相とずれていることに注意しよう。

問 5.6.5.a　微分方程式 (5.6.84) で $\alpha = \gamma$ とした場合

を、定数変化法で解け。

問 5.6.5.b　非斉次の線形微分方程式 (5.6.87) の特解を (定数変化法を使うのではなく)、$v_{\mathrm{ps}}(t) = A\,\cos(\omega t) + B\,\sin(\omega t)$ という形を仮定して求めよ（A, B はこれから決めるべき定数)。それによって、一般解を求めよ。

■定数変化法 — 一般論　定数変化法を完全に一般の状況に（半ば形式的に）拡張しておこう。一般公式は実際の応用に役立つこともあるが、それ以上に、以下のように一般の関数を考えることは、積分変数と積分区間の取り扱かいのちょうどいい練習問題になる。考えるのは、もっとも一般的な非斉次の一階線形微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(t)\,x(t) + g(t) \tag{5.6.95}$$

である。

対応する斉次の方程式 (5.6.74) の一般解が (5.6.82) と書けたことを思い出し、非斉次の方程式 (5.6.95) の

解を、未知関数 $C(t)$ を用いて

$$x(t) = C(t)\,\exp\left[\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right] \tag{5.6.96}$$

という形に表してみる。これが「定数変化」だ。(5.6.96) を t で微分しよう。このとき、合成関数の微分法により、

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\exp\left[\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right] \\
&\qquad = \left(\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right)\exp\left[\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right] \\
&\qquad = f(t)\,\exp\left[\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right]
\end{aligned} \tag{5.6.97}$$

となることに注意する。全体を微分した結果は、

$$\dot{x}(t) = f(t)\,x(t) + \dot{C}(t)\,\exp\left[\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right] \tag{5.6.98}$$

と書ける。微分方程式 (5.6.95) と比較すれば、

$$f(t)\,x(t) + g(t) = f(t)\,x(t) + \dot{C}(t)\,\exp\left[\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right] \tag{5.6.99}$$

となり、$f(t)\,x(t)$ の部分がぴたりと一致するので、

$$\dot{C}(t) = \exp\left[-\int_{t_0}^{t} ds\, f(s)\right] g(t) \tag{5.6.100}$$

という関係が得られる。右辺は、ちょっと見るとややこしい形だが、t の決まった関数になっている。これは、$C(t)$ についての微分方程式とみることができ、しかも、積分だけで解ける形なので、

$$C(t) = C' + \int_{t_0}^{t} du\, \exp\left[-\int_{t_0}^{u} ds\, f(s)\right] g(u) \tag{5.6.101}$$

のように一般解が求まる。$C' = C(t_0)$ は任意定数。右辺にあらわれる s, u は積分されてしまう変数なので、右辺は t のみの関数になっている。

さいごに、(5.6.96) に戻せば、(5.6.95) の一般解が

$$x(t) = \left(C' + \int_{t_0}^{t} du \, \exp\left[-\int_{t_0}^{u} ds \, f(s) \right] g(u) \right) \times$$
$$\times \exp\left[\int_{t_0}^{t} ds \, f(s) \right] \qquad (5.6.102)$$

と求められる（多くの場合、初期値を与える時刻は、$t_0 = 0$ と選べばよい)。こうして、未知関数が一つの線形一階常微分方程式については、もっとも一般的な形の方程式の一般解を（形式的にせよ）書きくだすことができた。

問 5.6.5.c　(5.6.102) を t で微分することで、微分方程式 (5.6.95) の解になっていることを直接たしかめよ。

問 5.6.5.d　5.4 節で学んだように、抵抗 R とインダクタンス L のコイルと電圧 $V(t)$ を発生させる電源を

直列につないだ閉回路を流れる電流 $I(t)$ は微分方程式

$$L\frac{dI(t)}{dt} + R\,I(t) = V(t) \tag{5.6.103}$$

を満たす。ここでは、$V(t)$ を任意の与えられた関数として、電流 $I(t)$ を求めよ。

問 5.6.5.e　空気抵抗の他に時間に比例して増大する外力を受ける粒子の運動方程式

$$m\,\dot{v}(t) = -\gamma\,v(t) + \alpha\,t \tag{5.6.104}$$

の一般解を求めよ。任意定数は $t = 0$ での初期条件を用いて表わすこと。

問 5.6.5.f　α, β を定数とするとき、

$$\dot{x}(t) = \alpha\,t\,x(t) + \beta\,\exp[\frac{\alpha}{2}t^2] \tag{5.6.105}$$

の一般解を求めよ。任意定数は $t = 0$ での初期条件を用いて表わすこと。

5.6.6　ベルヌーイの微分方程式

簡単な変形で線形の一階常微分方程式に変形できる方程式の例として、**ベルヌーイ**[*72]**の微分方程式** (Bernoulli equation) と呼ばれる微分方程式 (5.6.106) をみておこう。

$f(t)$, $g(t)$ を t の任意の関数、β を 0, 1 以外の任意の

[*72] Jacob Bernoulli (1654–1705) スイスの数学者で、確率論などにも業績がある。ベルヌーイ家はおそるべき天才数学者一家で、私がこれを書くために参照している数学者の伝記の web site (`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`) にも、Bernoulli という人が八人もあがっている（おまけに、その八人の中に、Jacob という名前の人が二人、Nicolaus という名前の人が二人、Johann という名前の人にいたっては三人もいる（ヨーロッパの人は親子で同じ名前をつけたりする））。しかも、一族で仲が悪く、けっこう醜い争いをしていたらしい。気体分子運動論でのベルヌーイの関係や流体力学のベルヌーイの定理で知られる Daniel Bernoulli は（ここであつかっている方の）Jacob の甥である。

実定数とし、実関数 $x(t)$ についての微分方程式

$$\dot{x}(t) = f(t)\,x(t) + g(t)\,\{x(t)\}^{\beta} \tag{5.6.106}$$

を考える。これは、β が 0 か 1 でなければ、線形ではない。

ここで、

$$y(t) = \{x(t)\}^{1-\beta} \tag{5.6.107}$$

により、新しい未知関数 $y(t)$ を導入する。$y(t)$ の t による微分をすなおに計算すると、

$$\dot{y}(t) = (1-\beta)\,\{x(t)\}^{-\beta}\,\dot{x}(t) \tag{5.6.108}$$

なので、ここに (5.6.106) を代入して整理すれば、

$$\dot{y}(t) = (1-\beta)\{f(t)\,y(t) + g(t)\} \tag{5.6.109}$$

となる。これは、(5.6.95) と同じ形の非斉次の線形常微分方程式だから、(少なくとも形式的には) 解くことができる。

■例　5.2.1 節で、生物の集団の総数 $N(t)$ を表す方程式 (5.2.17) を見て、$N(t) = N(0)\,e^{\alpha\,t}$ のように「人口」が限りなく増えていく解が得られることをみた。ここでは、あまりに「人口」が増えたときには（食料や場所の不足などにより）増加が抑制される効果を付け加えた

$$\dot{N}(t) = \alpha\,N(t) - \lambda\,\{N(t)\}^2 \tag{5.6.110}$$

という微分方程式をみてみよう。もちろん、α, λ は正の定数。これは非線形の微分方程式だが、明らかにベルヌーイの微分方程式 (5.6.106) の形をしている[*73]。$\beta = 2$ に相当するので、$y(t) = \{N(t)\}^{-1}$ と置けば、$y(t)$ の満たす方程式 (5.6.109) は、

$$\dot{y}(t) = -\alpha\,y(t) + \lambda \tag{5.6.111}$$

[*73] 実は、これは変数分離形にもなっている。そちらの方法でも解いてみよう。

となる。これは、定数項を含む減衰の方程式 (5.2.28), (5.6.13) であり、すでに 5.2.2 節や 5.6.2 節で解いたものだ。解は、

$$y(t) = \frac{\lambda}{\alpha} + \left(y(0) - \frac{\lambda}{\alpha}\right) e^{-\alpha\, t} \tag{5.6.112}$$

であるから、$N(t) = \{y(t)\}^{-1}$ に代入して、

$$N(t) = \left\{\frac{\lambda}{\alpha} + \left(\frac{1}{N(0)} - \frac{\lambda}{\alpha}\right) e^{-\alpha\, t}\right\}^{-1} \tag{5.6.113}$$

という解が得られる（図 5.19)。

(5.6.113) のような、ややこしい数式がでてきたとき、これが t の関数としてどのようにふるまうかを見抜く方法を少しみておこう。時間 t は、(5.6.113) のなかに $\alpha\, t$ という形で入っているので、この量が大きいか小さいかで解のふるまいが変わることになる。まず $\alpha\, t \gg 1$ であれば、$e^{-\alpha t} \ll 1$ なので (5.6.113) の $\{\cdots\}$ の中身はほぼ λ/α となり、$N(t) \simeq \alpha/\lambda$ のように解はほぼ一定値をとる。逆に $\alpha\, t \ll 1$ のときは、$e^{-\alpha t} \simeq 1$ であり、単純な大小関係はみつからない。ただ、ここ

図 5.19　「人口」を抑制する効果を加えた個体数の方程式 (5.6.110) の解 (5.6.113) のふるまい。個体数が少ないときは指数的増加がみられるが、いずれ一定値に収束していく。

で初期値を $N(0) \ll \alpha/\lambda$ となるように選んでおけば、$\{\cdots\}$ の中では $1/N(0)$ を含む項だけが大きいことになり、$N(t) \simeq N(0)\, e^{\alpha t}$ となる。これは、まさに (5.2.18) の指数的増加の形になっている。

問 5.6.6.a　α, β を正の定数とするとき、微分方程式

$$\dot{x}(t) = \alpha\, x(t) + \frac{\beta\, t^2}{x(t)} \tag{5.6.114}$$

を解け。ただし、$x(t) > 0$ とする。

5.6.7　完全微分形の一階常微分方程式

■微分方程式をつくる　多くの微分方程式は、今まで調べてきた「解ける形」には、あてはまらない。それでも何か特別な事情があって方程式が解けてしまうということも（たまには）ある。そういうラッキーな場合を列挙する余裕はないが、ひとつだけ、「完全微分の形になっていて解ける」というタイプの方程式について書いておこう。もし、たまたまこのタイプの方程式に出会ったとき、この解き方を知っていると知っていないでは大ちがいになるからだ。また、自分で解くということは別にして、以下の考察で、あるタイプの微分方程式がどういうところから「つくられるか」を見ることができるのは純粋におもしろい。

　ここでは、これまでのように微分方程式を解くのでなく、まず解をつくっておいて、その解をもつような微分方程式を逆につくるということを考えよう。

二つの実変数 x, y の（二階微分可能な）実数値関数 $\Phi(x, y)$ が与えられたとしよう。定数 C について、

$$\Phi(x, y) = C \tag{5.6.115}$$

という方程式から、一般に (x, y) 平面内の曲線が決まるだろう[*74]。たとえば、$\Phi(x, y) = x^2 + y^2$ とすれば、(5.6.115) の解は半径 $\sqrt{C}$ の円周になるし、$\Phi(x, y) = x^2 - y^2$ とすれば、(5.6.115) の解は双曲線になる。このような曲線を関数 $y(x)$ によって表すことにして、この $y(x)$ の満たす微分方程式を求めてみよう[*75]。

そこで、平面上の点 (x, y) と $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ がどちらも同じ定数 C から (5.6.115) で決まる曲線上にあるとする。よって、

$$\Phi(x + \Delta x, y + \Delta y) - \Phi(x, y) = 0 \tag{5.6.116}$$

[*74] というほど話は単純ではないけれど。そもそも上の方程式の解が空集合ということも多いだろうし、単なる曲線や曲線群以外の解が得られることもある。

[*75] この考え方だと、$x(t)$ を扱かうのがわざとらしいので、ここでは変数を x、未知関数を $y(x)$ とする。

が成り立つ。ここで Δx, Δy がともに微小な量だとして、後に示す（といっても別に難しくはない）(9.1.11) に従って、$\Phi(x+\Delta x, y+\Delta y)$ を一次までテイラー展開すると、(5.6.116) から

$$\Delta x\,\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x}+\Delta y\,\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y}=O(\Delta^2) \tag{5.6.117}$$

という関係が得られる[*76]。変形すれば、

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{\partial\Phi(x,y)/\partial x}{\partial\Phi(x,y)/\partial y}+O(\Delta)=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}+O(\Delta) \tag{5.6.118}$$

となる。ただし、

$$P(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial x},\quad Q(x,y)=\frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial y} \tag{5.6.119}$$

という関数を定義しておいた。

ここで $\Delta y/\Delta x$ という比が、$\Delta x\to 0$ の極限で微係数 $dy(x)/dx$ に収束することを思い出すと、(5.6.118)

[*76] $|\Delta x|$ と $|\Delta y|$ の内の大きい方を Δ と書いた。

から $y(x)$ の満たす微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))} \tag{5.6.120}$$

が得られる。

こうして、一種の「やらせ」によって、解がもともとわかっている微分方程式をつくることができた。一階の微分方程式 (5.6.120) は、(5.6.115) を y について解いて定まる関数 $y(x)$ が解になるようにつくられたのだ。このように二変数関数 $\Phi(x, y)$ をもとにつくられる微分方程式 (5.6.120) を完全微分形の方程式と呼ぶ。

せっかくなので、例をみておこう。$\Phi(x, y) = x^2 + y^2$ として得られる微分方程式は、

$$\frac{dy(x)}{dx} = -\frac{x}{y(x)} \tag{5.6.121}$$

である。円周（の上半分）を表す関数 $y(x) = \sqrt{C - x^2}$ は確かにこの微分方程式を満たす。同様に $\Phi(x, y) =$

$x^2 - y^2$ から得られる

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{x}{y(x)} \tag{5.6.122}$$

の解は双曲線 $y(x) = \sqrt{x^2 + C}$ だ。

■完全微分形の方程式を解く　こうやって微分方程式のつくりかたを調べた上で、これを与えられた微分方程式を解くことにどうやって役立てるかを考えてみよう。まず微分方程式が与えられたら、それを (5.6.120) という形に書いてみる。これは、いつでもできる。問題はこうして得られた $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ が共通の $\Phi(x, y)$ を使って (5.6.119) のように書けるか、ということだ。これは当たり前ではない。というより、普通は、勝手にもってきたふたつの関数 $P(x, y)$ と $Q(x, y)$ が (5.6.119) を満たすなんていうことは、ない。(5.6.119) が成り立つとしたら、なにか特別の事情があって、方程式がそういう構造をもっていたのだと思うべきだ。ただ、物理にでてくる微分方程式というのは、それなりに特別の事情（系の対称性とか、背後

にある法則とか）を背負っているものだから、もしかしたら、このうまい形になっている方程式と出会うこともあるかもしれない。

もしふたつの関数 $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ が (5.6.119) で作られているなら、

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{5.6.123}$$

が成り立つ（左辺が $\partial^2\Phi(x,y)/\partial y\partial x$ で、右辺が $\partial^2\Phi(x,y)/\partial x\partial y$ だから）。つまり、(5.6.123) が成り立つのは、(5.6.119) と書けることの必要条件。証明はしないが、実は逆もまた正しく、(5.6.119) と書けるための必要十分条件は (5.6.123) が成り立つことだとわかっている。

そこで、与えられた微分方程式を (5.6.120) という形に書いたら、次は、そこに出てきた $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ が (5.6.123) という関係を（たまたま）満たすかどうかをチェックする。もしダメなら（もともとダメだと思ってやっているので落ち込まず）別の方法を探すことに

なる[*77]。もし、何らかのラッキーがあって、(5.6.123) が成り立っていれば、勝利。あとは、もとになっている $\Phi(x,y)$ を探すだけ。これは、実際にやってみると、多少のカンがあれば、すぐにできることが多い。

(かなり「やらせ」ではあるが) 具体例をみよう。未知関数を $y(x)>0$ とする。微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx}=-\frac{x\{y(x)\}^2+\sin x}{(x^2+1)\,y(x)} \tag{5.6.124}$$

は線形ではないし、変数分離形でもない。どう見ても簡単には解けそうにはない。いま、$P(x,y)=xy^2+\sin x$, $Q(x,y)=(x^2+1)y$ とすれば、(5.6.124) は (5.6.120) の形になる。さらに、これらの $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ は (5.6.123) を満たすことがすぐにわかる。ここから、も

[*77] $P(x,y)$ と $Q(x,y)$ の選び方は、一通りではない。$P(x,y)$ と $Q(x,y)$ に共通の関数をかけてもいいのだから、実は、無限の選び方がある。それらの可能性を試すうちに、(5.6.123) の条件を満たすものが、たまたま、みつかるということも、可能性としてはありうる。もちろん、一般に、さがそうと思ってさがせるものではないが。

とになる $\Phi(x,y)$ をみつけたい。そのために、まず y を定数と思うことにして、変数 x についての微分方程式 $d\Phi(x,y)/dx = xy^2 + \sin x$ を解く。これは積分だけで答えがでて、$\Phi(x,y) = x^2y^2/2 - \cos x + (\text{定数})$ となる。ただし、この「定数」は y によってもかまわない。これでは、まだ $\Phi(x,y)$ はわからないので、今度は x を定数だと思うことにして、微分方程式 $d\Phi(x,y)/dy = (x^2+1)y$ を解く。すると、$\Phi(x,y) = (x^2+1)y^2/2 + (\text{定数})$ となる。今度の「定数」は x によってもいい。あとは、$\Phi(x,y)$ についての、これら二つの解をよくにらんで「定数」の部分をみぬけば、

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+1)y^2 - \cos x \tag{5.6.125}$$

であることがすぐにわかるだろう。$\Phi(x,y) = C$ を y について解いたものが微分方程式 (5.6.124) の解になるのだから、すぐに、

$$y(x) = \sqrt{\frac{2\,\cos x + 2C}{x^2+1}} \tag{5.6.126}$$

という解が得られる。もちろん、この解は $\cos x + C \geq 0$ の範囲で意味をもつ。

5.7　一階の方程式になおせる（未知関数が一つの）二階の常微分方程式

二階の常微分方程式については、(線形の方程式を除けば) 解き方の一般論のようなものは、ほとんどないといってよい。まさに、勘と経験と根性[*78]を発揮して道を拓いていかなくてはならない世界だ。なお、線形の方程式の場合は、5.3.3 節、5.3.4 節、5.3.5 節でみた指数関数の方法や、少し先になるが、8.2.3 節や 8.3.5 節で見る一般論を使うことができる。

ここでは、未知関数が一つの二階の常微分方程式の中で、特別な事情で、未知関数が一つの一階の微分方

[*78] これが、かの有名な「川畑先生の 3K の方法」である。

程式に還元できてしまうようなパターンを少しだけ見ておくことにしよう[*79]。

5.7.1　二階微分と一階微分だけを含む形

未知関数を $x(t)$ とし、微分方程式が、任意の既知の実数値二変数関数 $f(t, v)$ を使って、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t, \frac{dx(t)}{dt}) \tag{5.7.1}$$

と書けるとする。未知関数 $x(t)$ そのものが現れない、一般の二階常微分方程式だ。

当たり前だが、これは本質的に一階常微分方程式の問題だ。つまり、

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{5.7.2}$$

[*79] 8.1.5 節でみるように、未知関数を二つにすれば、どんな二階の常微分方程式でも、一階の常微分方程式に書き直せる。

によって新しい未知関数を定義すれば、(5.7.1) は

$$\frac{dv(t)}{dt} = f(t, v(t)) \tag{5.7.3}$$

という一階の常微分方程式になる。

何らかの方法で (5.7.3) が解けて $v(t)$ の関数形がわかれば、さいごは (5.7.2) を $x(t)$ についての微分方程式とみなして解けばよい。この微分方程式は、5.6.1 節でみたような積分だけで一般解が求められる形になっている。

このパターンにあてはまるような微分方程式の例は、すでにいくつか見てきている。5.3.1 では、そういう例ばかりをみてきたし、5.6 節で取り上げた $v(t)$ についての一階常微分方程式（運動方程式）は、いずれも、$x(t)$ についての二階の方程式を書き直したものとみることができる。たとえば、重力と空気抵抗が働く際の方程式 (5.6.13) の場合は、もともとの方程式は、

$$m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} = mg - \gamma\frac{dx(t)}{dt} \tag{5.7.4}$$

だったと思えばよい。$v(t)$ が (5.6.32) のように求まっているのだから、$x(t)$ は、これを積分して、

$$x(t) = x(0) + \frac{mg}{\gamma}\,t + \left(v(0) - \frac{mg}{\gamma}\right)\frac{m}{\gamma}\,(1 - e^{-(\gamma/m)\,t}) \tag{5.7.5}$$

となる。

5.7.2　時間を含まない形

未知関数を $x(t)$ とし、微分方程式が、任意の既知の実数値二変数関数 $f(x, v)$ を使って、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(x(t), \frac{dx(t)}{dt}) \tag{5.7.6}$$

と書けるとする。時間にあらわには依存しない、一般の二階常微分方程式だ。これも一階の方程式に書き直すことができる。

やはり (5.7.2) によって未知関数（速度）$v(t)$ を定義する。今、$x(t)$, $v(t)$ という二つの関数があるわけだが、t を媒介変数とみなして消去したと思えば、x と v

の関係が得られる。v を x の関数として表したものを $\tilde{v}(x)$ と書こう[*80]。つまり、

$$\tilde{v}(x(t)) = v(t) \tag{5.7.7}$$

がすべての t について成り立つということだ。

(5.7.2), (5.7.7) より、合成関数の微分についての連鎖律 (3.1.30) を使って、

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t)}{dt^2} &= \frac{dv(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\ \frac{d\tilde{v}(x)}{dx}\bigg|_{x=x(t)} \\ &= v(t)\ \frac{d\tilde{v}(x)}{dx}\bigg|_{x=x(t)} = \tilde{v}(x(t))\ \frac{d\tilde{v}(x)}{dx}\bigg|_{x=x(t)}\end{aligned} \tag{5.7.8}$$

となる。解くべき微分方程式 (5.7.6) によれば、これが

[*80] この関数も $v(x)$ という記号で表すことも多い。たしかに、v は v だから同じ記号で表すんだという気持ちも、ある意味、正しい。とはいえ、$v(t)$ と $\tilde{v}(x)$ はまったく別の関数なのだから、それらを同じ名前で呼ぶのは混乱のもとだ。ぜったいに間違わない自信をつけた上で、そういう書き方を使おう。

$f(x(t), \tilde{v}(x(t)))$ に等しいのだから、けっきょく

$$\tilde{v}(x)\,\frac{d\tilde{v}(x)}{dx} = f(x, \tilde{v}(x)) \tag{5.7.9}$$

という一階の常微分方程式が得られる。ただし、x が変数で $\tilde{v}(x)$ が未知関数になっている。この微分方程式が解けて関数 $\tilde{v}(x)$ が求まれば、さいごは

$$\frac{dx(t)}{dt} = \tilde{v}(x(t)) \tag{5.7.10}$$

という一階の常微分方程式を解けば $x(t)$ を求めることができる。

■エネルギー保存則との関連　ポテンシャルエネルギー $V(x)$ を x の一回微分可能な関数とする。力学で学ぶように、このポテンシャルエネルギーに対応する力を受けて一次元を運動する質量 m の粒子の運動方程式は

$$m\,\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -V'(x(t)) \tag{5.7.11}$$

である。ここで $V'(x) = dV(x)/dx$ と略記した。微分方程式 (5.7.11) は t をあらわに含まないので、(5.7.6)

の形になっている。(5.7.9) の形に書き直すと、

$$m\,\tilde{v}(x)\,\frac{d\tilde{v}(x)}{dx} = -V'(x) \tag{5.7.12}$$

である。これは、よく見ると

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{m}{2}(\tilde{v}(x))^2 + V(x)\right) = 0 \tag{5.7.13}$$

という、力学的エネルギーが位置に依存しないという式に他ならない。そういう意味では、せっかく書き直しても（この方程式の場合には）すでに知っている話にしかなっていなかったのだ。

せっかくなので、(5.7.13) をもとに運動方程式を解くプロセスを (力学で学んだはずだが) みておこう。微分がゼロなのだから、なにか定数（エネルギー）E があって、

$$\frac{m}{2}(\tilde{v}(x))^2 + V(x) = E \tag{5.7.14}$$

となる。これを $\tilde{v}(x)$ について解けば、

$$\tilde{v}(x) = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\,(E - V(x))} \tag{5.7.15}$$

となる。これが微分方程式 (5.7.12) の解ということだ。

さいごに解くべき $x(t)$ についての微分方程式 (5.7.10) は

$$\frac{dx(t)}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V(x(t))\right)} \tag{5.7.16}$$

となる。これは変数分離形なので、一般に、

$$\int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\, t \tag{5.7.17}$$

と書ける。うまく積分ができれば、t を $x(t)$ の関数として書いた表式が得られる。これを変形して $x(t)$ を t の関数として表現できれば（つまり、逆関数が求められれば）解が得られることになる。ただし、とくに簡単なポテンシャル以外では、この積分を簡単な形には表せないことが多い。

問 5.7.2.a　ポテンシャルが $V(x) = -\alpha\, x^4$（α は正の定数）のときの運動方程式 (5.7.11) の解を求めたい。

一般解を求めるのは無理なので、とくに $E = 0$ に対応する解だけを求めよ。

■抵抗係数が場所に依存するような例　上の書き換えが有効で、しかもエネルギー保存則に帰着しないような例として、抵抗係数が場所に依存するような一次元の運動

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\gamma\,\exp[\alpha\,x(t)]\,\frac{dx(t)}{dt} \tag{5.7.18}$$

を考える[*81]。m, γ, α は正の定数。つまり、右に行くほど摩擦が大きくなるような道の上の運動。

これは、(5.7.6) の形なので、上の書き換えを行なうと、(5.7.9) は、

$$\frac{d\tilde{v}(x)}{dx} = -\frac{\gamma}{m}\,e^{\alpha\,x} \tag{5.7.19}$$

となる。ただし $\tilde{v}(x) \neq 0$ を仮定して両辺を $\tilde{v}(x)$ で

[*81] これは些末な例なので、とくにこの解法に関心がある読者だけが読めばいいだろう。

割った。これは簡単に解けて、

$$\tilde{v}(x) = v_0 - \frac{\gamma}{m\,\alpha}\,e^{\alpha\,x} \tag{5.7.20}$$

となる。v_0 は任意定数（初速度といった意味はない)。さいごに解くべき (5.7.10) は、

$$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 - \frac{\gamma}{m\,\alpha}\,e^{\alpha\,x(t)} \tag{5.7.21}$$

である。これは変数分離形なので、ともかく積分する。もう一つの任意定数 t_0 を使って[*82]、

$$-\frac{1}{\alpha\,v_0}\log\left|v_0\,e^{-\alpha\,x(t)} - \frac{\gamma}{m\alpha}\right| = t - t_0 \tag{5.7.22}$$

と書ける。これは $x(t)$ について解ける形なので、最終的に

$$x(t) = -\frac{1}{\alpha}\,\log\left(\frac{\gamma}{m\,\alpha\,v_0} \pm \frac{1}{v_0}e^{\alpha v_0\,(t_0-t)}\right) \tag{5.7.23}$$

[*82] 任意定数 $x(0)$ を使うと、これは $t_0 = (\alpha\,v_0)^{-1}\,\log|v_0\,e^{-\alpha\,x(0)} - (m\alpha/\gamma)|$ と書ける。ただし、$x(0)$ を使わず (5.7.23) のようにまとめた方が、結果がきれいになる。

という一般解が得られる。複号 $(\pm)$ の $+$ は右向きの運動、$-$ は左向きの運動に対応する。$v_0 < 0$（で必然的に $-$ 符号をとる）ときには、粒子は $x = -\infty$ にむかってずっと運動をつづける。それ以外の場合には、摩擦のために途中でとまってしまうことが見て取れるだろう。

問 5.7.2.b　運動方程式

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\gamma\,\cosh[\alpha\,x(t)]\,\frac{dx(t)}{dt} \tag{5.7.24}$$

を解け。

第 6 章

座標とベクトル

この章では、物理の舞台となる空間の座標による記述、そして、さまざまな物理量をあらわすベクトルの概念をあつかう。6.1 節で、ウォーミングアップとして、二次元での座標や座標変換についてみたあと、6.2 節で、三次元空間の座標や回転についても議論する。6.3 節では、三次元空間のベクトルについてじっくりと解説する。とくに、ベクトルは「空間のなかの

矢印」という幾何的な意味をもっていることを強調し、はじめは成分表示を用いないで議論を進める。実用的な成分表示は 6.3.5 節で導入する。さいごに 6.4 節で粒子の運動の運動学的な記述について簡単に触れる。

- **実数についての感覚**
- **三角関数の基本的な性質**
- **三次元空間についての感覚（数学の知識というより立体図形についての直感的な感覚）**

6.1　二次元空間の座標

物理の主要な舞台になるのは三次元の空間だが、三次元を本格的に見る前に、二次元（つまり平面）の世界の扱いを少し詳しくみておこう。三次元人の特権として、二次元のことは図に描いて議論できるので、話がきわめてわかりやすいからだ。座標（6.1.1 節）や座

標変換（6.1.3 節）といった概念の本質は次元にはよらないので、わかりやすい二次元でしっかりと理解しておくのがいいと思う。

6.1.1　デカルト座標と極座標

無限に広い平面を考える。この平面上で、点をうつ、線を引く、様々な図形を描く、長さをはかる、角度をはかるといった通常の平面幾何の操作ができるとしよう。もちろん、平面の上に粒子を走らせたり、場を住まわせたりして、物理の問題を考えることもできる。平面上の数学や物理を議論するためにはまず座標軸を決めなくてはならないと思うかもしれないが、**原点や座標軸を決めなくても、平面は平面としてきちんとそこにある**ということをなっとくしておこう。実際、人間がやってきて座標軸をつくらなくても、物理現象は起きているし物理法則はちゃんと成立しているのだ。

平面上の点を $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \ldots$ といった大文字、あるいは、

$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \ldots$ といった太字の小文字で表す[*1]。

■デカルト座標　この平面に、**座標系** (coordinate system) を設定する。**原点** (origin) となる点を勝手に選び、固定する。原点で直交するように、向きのついた直線を二つ引き、それらを x-軸、y-軸と呼ぶ。それぞれの軸には通常のやり方で[*2]座標の値が「書き込んで」である[*3]。

平面上の点 P から、x-軸と y-軸に、それぞれ、垂線をおろす。垂線がそれぞれの軸と交わった点での座標

[*1] $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \ldots$ は幾何的な記法、$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \ldots$ は 6.3.1 節のベクトルの記法に対応する。

[*2] 軸上の二点間の距離が座標の値の差になる。原点での座標の値は 0。座標の正の向きは軸の向きと一致。

[*3] 1.3.4 節で詳しく述べたように、実数には（必要なら）単位も含めるのが、物理における正しい考え方だ。今は平面上の距離を考えているのだから、本当は、座標の値 x, y は長さの単位を含んだ量と考えるべきなのだが、(1.3.4 節であきらめを表明したように）ここでは、単位をあらわにあつかうことはしない。

の値を、x および y とする[*4]（図 6.1）。こうして、平面上の任意の点 P を二つの座標の値の組 (x, y) に対応させることができた。逆に、二つの実数の組 (x, y) が与えられれば、今のプロセスを逆にたどって、平面上の点 P を得ることができる。つまり、平面上の点 P と実数の組 (x, y) が一対一に対応し合うことになる。平面を、集合

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ (x, y) \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \tag{6.1.1}$$

として表現したと言ってもいい（$\mathbb{R}^2$ という書き方については、2.1.6 節の最後の方の解説を参照）。(x, y) を点 P の**座標** (coordinate) と呼ぶ。

このように直交する x-軸と y-軸をつかう座標を、**デ**

[*4] この本では、座標軸の名前は x, y といった立体のアルファベットであらわし、イタリックの変数名 x, y と区別する。これは正しい習慣だと思うのだが、今のところ、あまり普及していないようだ。

カルト[*5]**座標** (Cartesian[*6] coordinate) と呼ぶ。

座標というのは、あくまで、座標系をひとつ決めたときに、点と一対一に対応する数の組である。しかし、

[*5] René Descartes (1596–1650) フランスの高名な哲学者、科学者。「われ思う、ゆえにわれあり (コギト・エルゴ・スム)」という言葉は誰でも知っているだろう (万が一、デカルトの言葉を知らなくても Billie Eilish の 2020 年の名曲 “Therefore I Am” は絶対に知っているだろう！ Billie の歌詞に登場する “I think, thefore, I am” というフレーズは「コギト・エルゴ・スム」の定番の英訳である)。これは、彼が、著書「もろもろの学問分野で、正しく理詰めで真理を探究するための方法についての考察（通常は「方法序説」と訳されている)」の中で、ものごとを理詰めで考えていく際の出発点として提案した命題だ。たしかに、「俺がいる」というのは、かなり疑う余地の低いことだから、出発点として悪くはなさそうだが、さて、そこから哲学を展開してどこまで成功したかは、私ごときの判断することではなかろう。デカルトは、幾何学を研究するさい、図を描いて直感をはたらかせるかわりに、座標で表現して議論を進める方法を発明した。確かに「正しく理詰めで真理を探究する」という姿勢が一貫している。光学や力学についての仕事もある。

[*6] Cartesian って何だと思うと、これは「デカルトの」という意味。Des が取れてしまったのは、彼の名前のラテン語表記が Renatius Cartesius だから。

どのような座標系をとっているのかについて了解があるときには、「座標 (x, y) に対応する点」というべきところを、単に「点 (x, y)」のようにいってしまうことが多い。

また、物理では、平面上の点を $\boldsymbol{r}$ と書き、これを座標と結びつけて $\boldsymbol{r} = (x, y)$ のように書くことも多い。$\boldsymbol{r} = (x, y)$ は、「点 $\boldsymbol{r}$ に対応する（今の座標系での）座標が (x, y) である」ということを意味する省略記法と思うこともできるし、二つの実数の組である座標をひとまとめに $\boldsymbol{r} = (x, y)$ と書いたと思うこともできる[*7]。

平面上の二点 P_1, P_2 に対応する座標を、それぞれ、(x_1, y_1), (x_2, y_2) とする。**ピタゴラス**[*8]**の定理** (Pythagorean theorem) から、これらのあいだの距離は

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \tag{6.1.2}$$

[*7] 本当は前者の思い方が正統だと思うが、物理の世界では後者が一般的かもしれない。

[*8] 156 ページの脚注 *70 を見よ。

図 6.1　二次元平面のデカルト座標（左）と極座標（右）。デカルト座標では、点 P から二つの軸におろした垂線から座標の値 x, y を決める。極座標では、点 P と原点との距離を r とし、P と原点を結ぶ線分と x-軸のなす角を θ とする。

となる。

■極座標　点 P に実数の組を対応させる別の方法として、**極座標**がある。これまでと同じ、原点、x-軸、y-軸をとる。

平面上の点 P が与えられたとしよう。原点と P との距離を $r \geq 0$ とする。次に、$r > 0$ の場合、原点と P を結ぶ線分を引き、この線分と x-軸のなす角度を θ と

する。ただし、角度は x-軸から y-軸に向かう向きを正に取る。よって θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に入る。

こうして、平面上の任意の点 P に、r と θ の組を対応させることができた（図 6.1）。逆に、$r \geq 0$ と θ が与えられれば、上の手続きを逆にたどることで平面上の点 P が決まる。(r, θ) を点 P の極座標という。

ある点 P の極座標が (r, θ) であれば、同じ点のデカルト座標 (x, y) は

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{6.1.3}$$

で決まる。逆に、デカルト座標 (x, y) から極座標 (r, θ) を求める関係は、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = \frac{y}{x} \tag{6.1.4}$$

である。ただし、x と y の符号を同時に変えても y/x が変わらないことからわかるように、この関係だけでは θ は決まらない。x と y の符号をみて点 P がどの象

図 6.2　点の移動（左）と点の回転（右）。

限にあるかを考え、θ の値を決める必要がある。

6.1.2　点の移動と回転

とても簡単な話だが、座標変換をゆったりと議論するための準備として、点の移動について、考えておく。

平面上に点 (a, b) をとる。この点を、x-軸方向に ξ、y-軸方向に η だけ移動した点を (a', b') とする (図 6.2)。移動先の点は、もちろん、

$$a' = a + \xi, \quad b' = b + \eta \tag{6.1.5}$$

で決まる。

次に、原点のまわりの回転を考えよう。点 (a, b) を、原点を中心に、角度 θ だけ回転させた点を (a', b') とする（図 6.2)。角度の向きは、いつでも、x-軸正方向から y-軸正方向にまわる向きを正にとる。

(a', b') を求める方法はたくさんあるが、極座標を用いるのが楽だ。(a, b) に対応する極座標を (r, φ) とする。(6.1.3) より

$$a = r\,\cos\varphi, \quad b = r\,\sin\varphi \tag{6.1.6}$$

である。今、x-軸から φ だけまわっているところを、さらに θ まわすのだから、

$$a' = r\,\cos(\varphi + \theta), \quad b' = r\,\sin(\varphi + \theta) \tag{6.1.7}$$

である。あとは三角関数の和の公式 (3.2.105) と (6.1.6) から、

$$\begin{aligned} a' &= r\,\cos\varphi\,\cos\theta - r\,\sin\varphi\,\sin\theta = (\cos\theta)\,a - (\sin\theta)\,b \\ b' &= r\,\cos\varphi\,\sin\theta + r\,\sin\varphi\,\cos\theta = (\sin\theta)\,a + (\cos\theta)\,b \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

となる。重要な関係なので結果だけをまとめると、

$$\begin{aligned} a' &= (\cos\theta)\,a - (\sin\theta)\,b \\ b' &= (\sin\theta)\,a + (\cos\theta)\,b \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

となる。7.2.3 節で見るように、この関係は行列とベクトルを用いて表わすと見通しがよい。すでに行列のことを知っている読者は 1056 ページの (7.2.76) を見よ。

回転の変換 (6.1.9) はいろいろな場面で重要になってくるので、この形を覚えておくにこしたことはない。一見ややこしいが、次のようにすれば忘れることはない[*9]。まず、それぞれの式にサインとコサインが一つずつ入っているというのは、いかにも自然。$\theta = 0$ なら $a' = a, b' = b$ になって欲しいのだから、コサインが左上と右下に来るのはすぐにわかる。そうなると、右

[*9] もちろん、上のようにして導いてもいい。時間があるときは、その方がためになる。

上と左下にはサインを置くしかないのだが、どちらかにマイナスを付けるというのが、唯一忘れそうなところだ。「右上にマイナス」と丸暗記してしまえばよいと思うだろうが、あとに出てくる座標系の回転を表わす変換 (6.1.12) では左下にマイナスがつくので、やはり丸暗記はまずい。サインの符号を決めるいい方法は、θ が小さいとして、実際に代表的な点をまわしてみることだ。$\theta \ll 1$ なら、三角関数のべき級数展開 (3.2.111), (3.2.112) を θ の一次まででとめて $\cos\theta \simeq 1$, $\sin\theta \simeq \theta$ とできる[*10]。よって、(6.1.9) は、

$$a' \simeq a - \theta\, b, \quad b' = \theta\, a + b \tag{6.1.10}$$

と近似できる。すると、たとえば、点 $(1,0)$ は $(1,\theta)$ へ、点 $(0,1)$ は $(-\theta,1)$ へ、それぞれ、うつされることがわかる。θ を小さな正の数だと思ってこの動きをグラフに描いてみれば (あえて図を描かないので、自分で

[*10] ここでの $\simeq$ は $O(\theta^2)$ のちがいを除けば等しい、という意味で使っている。

描こう)、たしかに点が左まわりにまわっていることがわかる。もし、ここで逆回りになってしまったら、あわてて[*11]マイナスの位置を変えればいいわけだ。

問 6.1.2.a　回転によって二点のあいだの距離は変わらないはずだ。念のため、確認しておこう。任意の二点 (a, b) と (c, d) を、それぞれ、原点のまわりに θ 回転した点を (a', b') と (c', d') とする。(a', b') と (c', d') のあいだの距離を計算し、それが (a, b) と (c, d) のあいだの距離に等しいことを確かめよ。

6.1.3　座標変換

次に、簡単な（しかし基本的な）例を通して**座標変換** (coordinate transformation) という重要な考えを説明する。前節でみた点の移動と、これからみる座標

[*11] あわててと書くと著者が落ち着きのない人だと思われると井田さんに言われてしまった。もちろん、おちついて変えてください。

図 6.3　座標変換の例。どちらも、もとの座標系の軸を黒で、新しい座標系の軸を灰色で描いた（印刷で見えるかな？）。平面上の点 P は、もとの座標系では座標 (x, y) に対応し、新しい座標系では座標 (x', y') に対応する。この (x, y) と (x', y') のあいだの一対一の対応関係のことを座標変換と呼ぶ。

変換は、よく似ているし単純な関係で関わり合っているのだが、根本的な考えは全くちがう。その点について、もっとも簡単な平行移動の例でまずなっとくしてほしい。

■座標変換とは何か — 座標系の平行移動を例に　まず、あるデカルト座標系を決める。この座標系で (ξ, η) と書ける点をとり、この点を原点にもつような新しい座標系をつくる。新しい二つの座標軸はもとの座標軸と平行にとっておこう。

こうして、一つの平面に、二つの座標系が入ったことになる。平面は、座標系の有無とは関係なくもともとそこにあるわけだから、座標系がいくつ入ろうと問題ではない。

ここで、平面上の任意の点 P をとる。ひとつめの座標系をつかうと、P の座標は (x, y) であり、新しく作った座標系をつかうと、P の座標は (x', y') であるとする。見ているのは平面上の同じ点 P なのだが、座標系が二つあるために、異なった二つの座標 (x, y) と (x', y') が得られるのだ（図 6.3）。

点 P と座標 (x, y) は一対一に対応しており、また、点 P と座標 (x', y') も一対一に対応している。すると（平面上の点 P を介して）二つの座標 (x, y) と (x', y')

も一対一に対応していることになる。このような、異なった座標系での座標のあいだの対応関係を、**座標変換**という[*12]。少し図式的に表してみると、

という関係になっている。この図式は、二次元の例にかぎらず、座標変換が登場するときにはかならず役に立つ。頭に入れておこう[*13]。

再び、平行移動の例に戻ろう。この例では、座標変

[*12] 二つの座標のあいだの対応関係は、もちろん、$\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への一対一の写像になる。2.4.1 節で、写像を変換と呼ぶことがあると書いたが、これもその例である。

[*13] 何年か後に特殊相対性理論を学ぶとき、ここで学んだことを思い出すといいと思う。

換、つまり座標 (x, y) と (x', y') の対応関係は、

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta \tag{6.1.11}$$

で表される。この関係は、図をみて考えればすぐにわかるだろう。点の移動 (6.1.5) とは符号が異なっているが、これは、動いたのが点ではなく座標系の原点なのだから、もっともなことだ。混乱しそうなときは、新しい座標系の原点を表す $x' = 0$, $y' = 0$ を (6.1.11) に代入して整理すれば $x = \xi$, $y = \eta$ となることを見ればよい。これは、もとの座標系で表すと、新しい座標系の原点が (ξ, η) であることに対応している。

■座標系の回転　次に、図 6.3 の右側のように、もとの座標系と原点で重なっていて θ だけ回転したような新しいデカルト座標系を考える。ここでも、点 P をとり、もとの座標系での座標を (x, y)、新しい座標系での座標を (x', y') とする。これらを結ぶ座標変換は、

$$\begin{aligned} x' &= (\cos\theta)\, x + (\sin\theta)\, y \\ y' &= -(\sin\theta)\, x + (\cos\theta)\, y \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

となる。これは回転の変換 (6.1.9) で θ を $-\theta$ に置きかえたものになっている。これも、回転しているのが座標系の方なので、角度の符号が反対になったと思えば、なっとくできるはずだ。

問 6.1.3.a　あるデカルト座標系で (x, y) と表される点がある。座標系を、(a, b) だけ平行移動し、その後で θ だけ回転した、新しい座標系での同じ点の座標を (x', y') とする。次に、もとの座標系を θ だけ回転し、その後で (a, b) だけ平行移動した、また別の座標系での同じ点の座標を (x'', y'') とする。$(a, b) \neq (0, 0)$ かつ $\theta \neq 0$ なら $(x', y') \neq (x'', y'')$ であることを示せ。

6.2　三次元空間の座標

物理の舞台である三次元空間の座標について議論する。二次元と話が共通の部分は簡単にすませ、三次元ならではのいくつかの点をじっくりと議論しよう。三次元では、座標軸の選び方が当たり前でないこと

図 6.4　三次元のデカルト座標の選び方。これらの図は、xy 平面を（$x > 0$, $y < 0$ 方向の）斜め上から見おろしたつもりで描いている。x-軸と y-軸を決めたあとでも、z-軸の選び方には左右の二通りがあり、これらは異なった座標系になる。右側の「右手系」を使うのが世界的に統一された約束である。

(6.2.1 節)、極座標が少しややこしいこと（6.2.2 節)、そして、回転の構造が二次元に比べると圧倒的に豊かであること（6.2.3 節）が特にだいじだ。

6.2.1　三次元空間のデカルト座標系

6.1 節の議論を拡張して、三次元空間の座標を考えよう。

はじめに、三次元の無限に広い空間があるとしよう[*14]。しつこいが、空間は座標系の有無とは無関係に存在して、そこで色々な幾何学を考えることができる。ここでも、空間の点を $\mathrm{P}, \mathrm{Q}, \ldots$ あるいは $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}, \ldots$ のように書く。

空間にデカルト座標系をいれるため、原点を任意に選んで固定する。原点で互いに直交する向きのついた三本の直線を選び、それらを x-軸、y-軸、z-軸とよぶ。これだけなら二次元とまったく同じだが、ここで軸の向きの選び方に三次元ならではの問題がある。今、x-軸と y-軸を選び終わって、z-軸を決めることを考えてみよう。すでに原点で直交する二本の直線がきまって

[*14] 本当は、この世にそんなものはないだろうが、それは問題にはならない。平らで無限に広い空間というのは、われわれのまわりの空間を理想化した対象なのだ。そもそも、ほとんどの物理現象は空間の有限の範囲でおきるから、とりあえず無限の空間を考えておいても何も悪いことはない。たとえば、宇宙の大規模構造といったテーマを考えるときには、無限に広い空間はふさわしくないので、それに見合った舞台設定を取る。

いるのだから、これらの両方に直交するような直線は一本しかない。あとは、どちらが正の方向かさえ決めてやれば z-軸が完全に決まる。しかし、明らかに z-軸の向きの選び方には二通りの選択がある（図 6.4）。そして — これがだいじなところだが — それら二通りのやり方でつくった座標系は本質的に異なったものになる。一方をどのように回転させても、（軸の名前を付け替えないかぎり）もう一方に完全に重ねることはできないのだ。これは、二つの座標系でものごと（たとえば、物理現象）を表したとき、その表現が異なったものになりうることを意味している[*15]。どちらの座標系を使ってもいいのだが、どちらか一つに決めておかないと不便だ。

三次元のデカルト座標系の選択については、世界的な統一ができていて、図 6.4 の右側の z-軸の正を上向

[*15] 実は二次元でも同じ問題はあるのだが、三次元に住んでいると、二次元平面を「裏返す」ことができるので、あまり気にならないのだ。

図 6.5　右ネジの規則。x-軸の正の向きから y-軸の正の向きにむかうようにネジをまわしたとき、ネジが進む方向を z-軸の正の向きとする。

きにとったものを使うことになっている。このような座標系を「右手系」という。右手の、親指、人差し指、中指を、それぞれ、x-軸、y-軸、z-軸に対応させると、右手の指三つを自然に直交させた形（図というか写真 6.4）が、この座標系と一致するからだ。ただし、（わざわざ写真を撮った割には[*16]）これは座標の向きを記憶する方法としてあまりよくないと私は考えている。

[*16] 右利きなので、自分の右手の写真を撮るのは面倒だった（考えたら、左手の写真を撮ってそれを裏返せばよかった・・）。

より応用のきく記憶法は、図 6.5 に示したような「右ネジの規則」を使う方法だ。今、xy-平面で原点を中心にして、x-軸の正の向きから y-軸の正の向きにむかう回転を考える。そして、「この回転によってネジをまわしたとき、ネジ[*17]はどちらの方向に進むか」を考え、ネジが進む向きを z-軸の正の向きと定めるのだ。

同じ右ネジのルールで、二つの軸から、残りのもう一つを決めることができる。その際には、

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dr] & \\ z \arrow[ur] & & y \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{6.2.1}$$

[*17] もっとも普通に使われている右ネジとする。扇風機の回転軸付近など特殊なところを除けば、身近にあるネジはすべて右ネジ。

という「三竦(さんすく)み*18」の図式を使う。この図式で矢印の順にまわって、「x-軸正から y-軸正への回転で右ネジが進む向きが z-軸の正」、あるいは、「y-軸正から z-軸正への回転で右ネジが進む向きが x-軸の正」、「z-軸正から x-軸正への回転で右ネジが進む向きが y-軸の正」であることが読み取れる。三つの座標軸は完全に対等だが、この「三竦み」の方向だけはつねに守らなければならないのだ。

座標軸を選ぶところがやたら長引いてしまった。しかし、これは、この先ずっと三次元空間とつきあっていく際に（色々と形を変えて）関わってくることなので、しっかりと理解しておくべきだ。

座標軸さえ決まれば、あとは簡単だ。まず各々の座標軸に座標の値を書き込む。空間の点 P から、三つの軸に垂線をおろし、それぞれの座標の値 x, y, z を読

*18 「関尹子」という中国の古典に、「なめくじは蛇を、蛇は蛙を、蛙はなめくじを食べる」という例があるのが大元だという（しかし、ナメクジが蛇を食うというのは無理がある気がする）。「三竦み」の最良の例は、もちろん、ジャンケン。

む。こうして、空間の点 P とその座標 (x, y, z) のあいだに一対一の対応ができる。つまり、空間を集合

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ (x, y, z) \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \tag{6.2.2}$$

として表現できたことになる。三次元空間でも、点を $\boldsymbol{r}$ と書き、これを座標と結びつけて $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ のように書くことが多い。この書き方の解釈については、6.1.1 節で述べたとおり。

二点 P_1, P_2 の座標を、それぞれ、(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) とすれば、これらのあいだの距離は三次元版のピタゴラスの定理により、

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \tag{6.2.3}$$

となる。

6.2.2　三次元空間の極座標

三次元空間の極座標、あるいは**球座標** (spherical coordinate) を定義しておこう。平面の場合と比べる

図 6.6　三次元の極座標の角度の決め方。原点と P を結ぶ直線が z-軸となす角を θ とする（左）。次に、この状況を z-軸の正の方向からみて平面の問題にして、二次元の場合と同じように角度 φ を決める（右）。

と角度の決め方がややこしいが、極座標は物理では必須といえるほどに便利だ。

これまでと同じ原点と三つの座標軸をとる。空間の点 P に対して、実数 r と二つの角度 θ, φ を次のように対応させる。

まず、原点と点 P との距離を r とする。$r = 0$ なら P は原点なので、以下、$r > 0$ とする。図 6.6 の左図のように、原点と P を結ぶ直線が z-軸の正の向きとな

す角を θ とする。ここで、この角は $0 \leq \theta \leq \pi$ の範囲にとる（つまり、小さいほうの角を測る）。よって $z = r\ \cos\theta$ である。

もう一つの角度を決めるため、空間を z-軸の正の方向から見下ろして二次元としてみることにする。むずかしくいえば、xy-面への射影をとるということだ。その様子を図 6.6 の右図に描いた。ここにある点は P なのだが、今は、平面上の点と見ているので $\tilde{\mathrm{P}}$ と書いておいた。

平面の問題になったから、6.1.1 節と同じように進めばいい。二次元平面の原点と $\tilde{\mathrm{P}}$ を結ぶ線分をとり、それが x-軸となす角度を φ とする。この角度は $0 \leq \varphi < 2\pi$ の範囲にとることができる。こうして、点 P に対応する極座標 (r, θ, φ) が決まった。

極座標 (r, θ, φ) が与えられたとき、それをデカルト座標 (x, y, z) に翻訳する規則をみておこう。z は既に上で決めた。図 6.6 の右図の平面内で、原点と $\tilde{\mathrm{P}}$ との

距離は、

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{r^2-z^2}=\sqrt{r^2-(r\ \cos\theta)^2}=r\ \sin\theta \tag{6.2.4}$$

と求められる。ここで、$0\leq\theta\leq\pi$ だから $\sin\theta\geq 0$ であることを使った。よって、φ の定義と (6.1.3) から、x と y も決まる。z の結果とあわせて、まとめれば、

$$\begin{aligned} &x=r\ \sin\theta\ \cos\varphi, \quad y=r\ \sin\theta\ \sin\varphi, \\ &z=r\ \cos\theta \end{aligned} \tag{6.2.5}$$

となる。この変換式は、力学、電磁気学、量子力学などなどの「現場」で大いに活躍することになる。

6.2.3　三次元空間での平行移動、回転、座標変換

三次元でも、6.1.2 節のように、点の平行移動や回転を考えることができる。

■平行移動　平行移動は、三次元になったからといってむずかしいことは何一つない。任意の点 (a, b, c) を、x-軸方向に ξ、y-軸方向に η、z-軸方向に ζ だけ移動した点を (a', b', c') とすると、

$$a' = a + \xi, \quad b' = b + \eta, \quad c' = c + \zeta \tag{6.2.6}$$

が成り立つ。

■回転　これに対して、原点のまわりの回転の方は、三次元になったために、まったく当たり前ではなくなる。三次元空間の点（あるいは、一般に図形）を、ある点（原点）の位置を動かさないまま回転させるわけだから、文字通り立体的な問題である。一般の回転は、まず原点を通る直線を一つ選び、その直線を回転軸として点を θ だけ回転することで得られる。回転軸はどんな方向を向いていてもよいので、無数の選び方がある。

一般の回転は後で考えることにして（7.2.3 節の最後のオイラーの定理を見よ）、ここでは回転軸として三つの座標軸をとった場合だけを扱おう。まず、z-軸の

まわりの角度 θ だけの回転を考える。もちろん、x-軸の正の方向から y-軸の正の方向にむかう向きを角度の正の向きとする。この場合は、z-軸は固定されたまま、xy-平面と、xy-平面に平行なすべての面の中で回転がおきる。よって、点のもとの座標を (a, b, c)、回転したあとの点の座標を (a', b', c') とすれば、a' と b' は二次元の回転の (6.1.9) で決まり、c' は c と変わらないことになる。念のためにまとめると、

$$a' = (\cos\theta)\,a - (\sin\theta)\,b, \quad b' = (\sin\theta)\,a + (\cos\theta)\,b,$$
$$c' = c \tag{6.2.7}$$

となる。これは当たり前だろう。

これ以外の基本的な回転として、y-軸と x-軸のまわりの回転が考えられる。これらも簡単に求まるのだが、その際に、注意すべきは (6.2.1) の「三竦み」の図式だ。z-軸まわりの回転を参照して、たとえば、y-軸まわりの回転をつくりたければ、この図式を z からはじめて矢印に沿ってまわったものと、y からはじめて矢印に

沿ってまわったものを並べて、

$$\begin{aligned} &\mathrm{z} \to \mathrm{x} \to \mathrm{y} \\ &\mathrm{y} \to \mathrm{z} \to \mathrm{x} \end{aligned} \tag{6.2.8}$$

のように書いてやる。縦に並んだ文字が対応する。つまり、これをみると、z のかわりに y を使いたいなら、対応して、x のかわりに z を、y のかわりに x を使うべし、ということが読み取れるのだ。こうして、y-軸まわりの θ の回転の変換は、

$$\begin{aligned} &c' = (\cos\theta)\,c - (\sin\theta)\,a, \quad a' = (\sin\theta)\,c + (\cos\theta)\,a, \\ &b' = b \end{aligned} \tag{6.2.9}$$

で表される（これは、(6.1.9) で a を c に、b を a に、置きかえたもの)。同様に、x-軸まわりの θ の回転は、

$$\begin{aligned} &b' = (\cos\theta)\,b - (\sin\theta)\,c, \quad c' = (\sin\theta)\,b + (\cos\theta)\,c, \\ &a' = a \end{aligned} \tag{6.2.10}$$

と表される。3 次元での回転には様々な面白い性質があるのだが、それについては行列の言葉を学んだ後、

7.2.3 節で議論する（行列をご存知の読者は今の段階で 1059 ページの (7.2.82), (7.2.81), (7.2.80) を見ておくのがいいだろう）。

■座標変換　座標変換について 6.1.3 節で説明したことは、そのまま三次元にも（そして、もっと複雑な状況にも）あてはまる。よって、この節を書く必要はほとんどないのだが、考えの整理のために、ごく簡単な例をみておこう。

まず、平行移動。もとの座標系で (ξ, η, ζ) と書ける点を原点にもつような新しい座標系をとる。点 P をとり、もとの座標系での座標を (x, y, z)、新しい座標系での座標を (x', y', z') とする。これらの対応関係は、(6.1.11) をすなおに拡張して、

$$x' = x - \xi, \quad y' = y - \eta, \quad z' = z - \zeta \qquad (6.2.11)$$

となる。点の平行移動 (6.2.7) と比べると変化が逆符号になった。

次に回転。もとの座標系を z-軸のまわりに θ 回転し

た新しい座標系をつくる。点 P をとり、もとの座標系での座標を (x, y, z)、新しい座標系での座標を (x', y', z')。すると、これらは、(6.1.12) そのものといってもいい、

$$x' = (\cos\theta)\,x + (\sin\theta)\,y, \quad y' = -(\sin\theta)\,x + (\cos\theta)\,y,$$
$$z' = z \tag{6.2.12}$$

で関係づけられる。他の座標軸のまわりの回転についてもまったく同様。

6.2.4　d 次元空間の座標と図形

今は二次元と三次元の空間を考えれば十分なのだが、せっかくだから、これを一般化した d-次元の空間という数学的な概念にも簡単に触れておこう[*19]。

われわれは、6.1.1 節で、二次元の平面は集合 $\mathbb{R}^2$ で表されることを、6.2.1 節で、三次元の空間は集合 $\mathbb{R}^3$ で表されることをみた。このアナロジーを進めれば、

[*19] この節はとばしてもかまわない。

任意の正の整数 d について、d 個の実数の組の集合

$$\mathbb{R}^d = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_d) \,\middle|\, x_i \in \mathbb{R}\ (i = 1, 2, \ldots, d) \right\} \tag{6.2.13}$$

が d-次元空間を表していると考えることができる。各々の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ は d-次元の点の座標である。

また、二つの点 $\mathrm{P} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$ と $\mathrm{Q} = (y_1, y_2, \ldots, y_d)$ のあいだの距離は、d-次元版のピタゴラスの定理を使って、

$$\overline{\mathrm{P\,Q}} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_d - y_d)^2} \tag{6.2.14}$$

とする[*20]。このような距離をもつ d-次元の空間を、d-次元**ユークリッド**[*21]**空間** (Euclidean space) と呼ぶ。d-次元ユークリッド空間を $\mathbb{E}^d$ と書く流儀も（どちらかというと古い文献に）ある[*22]。

■四次元の空間と図形　三次元で進化、成長してきたわれわれには、四次元以上の空間を直感的に思い描く

[*20] この式を、二次元での (6.1.2)、三次元での (6.2.3) と比べてみると、私がいささかまずい記号の使い方をしているのがわかると思う。二次元、三次元では、文字の種類 x, y, z で座標の成分を表し、そこに添え字をつけて二つの点を区別していた。しかし、ここで d-次元をあつかうにあたり、文字の種類が d-個ないため、添え字で座標成分を区別する流儀に乗り換えてしまった。そのため添え字で二つの点を区別できなくなってしまったので、今度は文字の種類 x, y で点を区別している。自分の悪い書き方の言い訳をするつもりはないが、物理では（数学でも）こういう「汚い」書き方はしょっちゅうでてくるので、振り回されずに、記号の意味をきちんと見抜く目を養ってほしい。

[*21] 80 ページの脚注 *22 を見よ。

[*22] 今まで単に「空間」と呼んできたものを、3 次元ユークリッド空間、「平面」と呼んできたものをユークリッド平面と呼ぶこともある。

能力はないようである[*23]。しかし座標 — つまり実数の組 — を用いることで、直感がなくても高次元の空間の様子を正確に描写し調べることができる。例として、ごく簡単に、四次元空間の基本的な性質と図形をみておこう。

四次元ユークリッド空間[*24]$\mathbb{R}^4$ の座標を (x, y, z, w) と書こう。四つの座標のうちの一つ、たとえば w を、一定にしてしまうと、自由に変われる変数は x, y, z の三つになる。これは三次元の座標とみることができる。つまり、四次元空間の $w =$(一定) の「断面」は三次元空間なのだ。三次元空間で $z =$(一定) とした断面が二次元空間だったことと完全に対応している。

[*23] しかし、例外はあり、高次元の図形が「みえる」という数学者も時々いるらしい。もちろん、「みえなくても」高次元の幾何についての仕事はできるわけだが。

[*24] 特殊相対論で四次元の時空間が出てくるが、それはユークリッド空間ではない。四次元時空にとって自然な距離は (6.2.14) とは違うのだ。ここでは、もっと SF 的に四次元の空間を考えている。

三次元空間のなかの $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ で指定される領域は一辺が 1 の立方体 (cube) だった。そして、立方体の中の、$x = 0$ と置いて得られる $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$ の領域は、立方体の六つの面 (face) のうちの一つだ（先に進む前に、ちゃんと図を描いてなっとくすること）。

これと同様に、四次元空間のなかの $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$ で指定される領域を、一辺が 1 の超立方体 (hypercube) と呼ぶ[*25]。超立方体のなかで、$x = 0$ と置いて得られる $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq w \leq 1$ の領域は、超立方体の超面 (facet) である。よく見ると、超面のなかでは y, z, w の三つの変数が 0 と 1 のあいだを動くわけだから、

[*25] 超立方体 (hypercube) は一般の高次元図形について使われる用語。英語では四次元の超立方体に tesseract という特別な名前がついている。まったくどうでもいいことだが、何年か前に花粉症対策の「超立体」という商品名のマスクが発売されたのだが、そのパッケージをはじめてスーパーで見たとき一瞬「超立方体」に見えてしまって、かなりあせった。

これは、われわれのよく知っている（三次元）立方体だ。また、$y = 0$ と置いて得られるもう一つの超面は $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1,\ 0 \leq w \leq 1$ で指定される。最初にみた超面と比べてみると、ふたつの共通部分は $0 \leq z \leq 1, 0 \leq w \leq 1$ という領域になっている。これは、正方形だ。

各々の変数に対して（それを 0 と置くか 1 と置くかで）二つの超面がつくれるから、四次元超立方体には八つの超面がある。超面は三次元立方体であり、また、隣り合う超面どうしは正方形で接している。頭に思い描いてみよう！

超立方体をみたから、球面 (sphere) の四次元版もみておこう。球面というのはある点から一定の距離の点の集まりだから、四次元空間の中の超球面 (hyper-

sphere[*26]) を

$$S = \left\{(x, y, z, w) \,\middle|\, x, y, z, w \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1\right\} \tag{6.2.15}$$

と定義する。四つの変数のあいだに制約があるから、それをあらわに解けば、

$$\begin{aligned} S = &\left\{(x, y, z, \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}) \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\} \\ &\cup \left\{(x, y, z, -\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}) \,\middle|\, x, y, z \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\} \end{aligned} \tag{6.2.16}$$

と書ける。これは、二次元や三次元でもよくやることで、球面を上半分と下半分に分けて式で表しただけである。ここで注目すべきは、超球面 S の上を動くとき（二つの部分の継ぎ目以外では）x, y, z の三つの変数

[*26] これにも四次元専用の glome という名前がある。

を自由に変えることができて、四つ目の変数 w はそれに伴って自動的に決まってくるということだ。こういう意味で、四次元のなかの超球面は三次元的な図形であるといえる[*27]。超球面 S の上に住んでいても、自分の近くだけを見ていれば、われわれが慣れ親しんでいる三次元空間と同じように感じられるのだ。

■d 次元空間の極座標　最後に d 次元空間での極座標をどのようにとればいいかをみておこう[*28]。三次元の場合の素直な一般化だが、これを考えることで、三次元の極座標での θ と φ の役割の違いが明確になるだろう。以下、三次元との対応がはっきりするような記号を使う。

d 次元空間でのある点の位置座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$ を

[*27] そのため、トポロジーの分野では、(6.2.15) を三次元球面という。

[*28] d 次元の極座標は後に定理 7.53 との関連で少しだけ用いるのでここにまとめている。特別の興味がないかぎり、ここを読む必要はない。

極座標で表したい。極座標に現れる一つ目の座標は、この点と原点との距離

$$r = \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + \cdots + (x_d)^2} \tag{6.2.17}$$

である。残りの $d-1$ 個は角度を表す座標になる。

まず、原点と $(x_1, \ldots, x_d)$ を結ぶ線分が d 番目の座標軸（つまり、$(0, \ldots, 0, 1)$ 方向に伸びる半直線）となす角度を θ_d としよう。角度の範囲は $0 \leq \theta_d \leq \pi$ である。これによって、d 番目の座標は

$$x_d = r\ \cos\theta_d \tag{6.2.18}$$

と表される。

次に、d 番目の座標を 0 にして得られる点 $(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0)$ を考える。原点からの距離は、

$$\begin{aligned} r_{d-1} &:= \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_{d-1})^2} \\ &= \sqrt{r^2 - (x_d)^2} = r\ \sin\theta_d \end{aligned} \tag{6.2.19}$$

である。この点と原点を結ぶ線分が $d-1$ 番目の座標

軸となす角度を θ_{d-1} とすると、

$$x_{d-1} = r_{d-1}\,\cos\theta_{d-1} = r\,\sin\theta_d\,\cos\theta_{d-1} \qquad (6.2.20)$$

となる。

そろそろ規則性が見えてくるが、念のため、もう一つみておこう。d 番目と $d-1$ 番目の座標を 0 にして得られる $(x_1,\ldots,x_{d-2},0,0)$ の原点からの距離は、

$$\begin{aligned} r_{d-2} &:= \sqrt{(x_1)^2+\cdots+(x_{d-2})^2} = \sqrt{(r_{d-1})^2-(x_{d-1})^2} \\ &= r_{d-1}\,\sin\theta_{d-1} = r\,\sin\theta_d\,\sin\theta_{d-1} \qquad (6.2.21) \end{aligned}$$

である。この点と原点を結ぶ線分が $d-2$ 番目の座標軸となす角度を θ_{d-2} とすると、

$$x_{d-2} = r_{d-2}\,\cos\theta_{d-2} = r\,\sin\theta_d\,\sin\theta_{d-1}\,\cos\theta_{d-2} \qquad (6.2.22)$$

となる。

ここまで来れば一般の場合が見える。以上の手続きをくり返しおこなうことで、以下のように、次々と距離と角度が決まっていく。$i=d,d-1,d-2,\ldots,4,3$ に

ついては、点 $(x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0)$ と原点との距離は

$$\begin{aligned} r_i &:= \sqrt{(x_1)^2 + \cdots + (x_i)^2} \\ &= r\ \sin\theta_d\ \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_{i+1} \end{aligned} \tag{6.2.23}$$

であり、この点と原点を結ぶ線分が i 番目の座標軸となす角度を θ_i とすると、

$$x_i = r_i\ \cos\theta_i = r\ \sin\theta_d\ \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_{i+1}\ \cos\theta_i \tag{6.2.24}$$

となる。もちろん角度の範囲は $0 \leq \theta_i \leq \pi$ である。

こうして、角度 $\theta_d, \theta_{d-1}, \ldots, \theta_3$ が決まると、残るのは 1 番目と 2 番目の座標だけを残した点 $(x_1, x_2, 0, \ldots, 0)$ である。この扱いは、二次元の極座標と同じである。まず、この点と原点との距離は

$$r_2 := \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} = r\ \sin\theta_d\ \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_3 \tag{6.2.25}$$

である。この点と原点を結ぶ線分が 1 番目の座標軸となす角度を（第 1, 2 座標の平面で）左回りに測った角度を φ とする。この角度の動く範囲は $0 \leq \varphi < 2\pi$ で

ある。座標 x_1 と x_2 の極座標表示は、二次元のときの (6.1.3) そのままで、

$$x_1 = r_2 \cos\varphi = r \sin\theta_d \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_3 \cos\varphi \tag{6.2.26}$$

$$x_2 = r_2 \sin\varphi = r \sin\theta_d \sin\theta_{d-1} \ldots \sin\theta_3 \sin\varphi \tag{6.2.27}$$

となる。

まとめれば、d 次元空間の点 $(x_1, \ldots, x_d)$ の極座標表示は、原点からの距離 $r \geq 0$、$0 \leq \theta_i \leq \pi$ の範囲を動く角度 $\theta_d, \theta_{d-1}, \ldots, \theta_3$、そして、$0 \leq \varphi < 2\pi$ の範囲を動く角度 φ で表される。位置座標の成分 x_i は、$i = 3, 4, \ldots, d$ については (6.2.24) のように表され、$i = 1, 2$ については (6.2.26), (6.2.27) と表される。

6.3　三次元空間のベクトル

いよいよ物理の世界の主役の一つであるベクトルについて議論する。ベクトルの議論は、デカルト座標系を一つ決めて成分表示を用いておこなうことが多い。

成分表示は計算にも便利なので、もちろんこの本でも積極的に使っていこうと思う。ただし、ベクトルの本質は座標や成分とは無関係な三次元空間の「矢印」である[*29]。そのことを強調し味わってもらうため、6.3.1 節から 6.3.4 節まででは、成分表示をいっさい用いずにベクトルの基本的な性質や演算について議論する。そして、6.3.5 節でようやく成分表示を導入して、それまでの結果をまとめなおす[*30]。

はじめてベクトルを学ぶ読者には、成分表示を用いない 6.3.1 節から 6.3.4 節までの議論はやや抽象的に思えるかもしれない。そういう場合は、ともかくこれらの節を（証明などはとばしていいから）一通り読ん

[*29] この本では、矢印としての側面を強調したベクトルのとらえ方を「幾何ベクトル」と呼ぶ。この章であつかうのはすべて幾何ベクトルである。これに対して、「数の組」という側面を強調した「代数ベクトル」を 7 章であつかう。

[*30] 実は、私がこの内容を講義するときは、最初から成分表示も並行して教えてしまう。講義ではその方が効率がよいように思うので。逆に、本では、講義では伝えきれない「こだわり」を貫くことができると考えている。

でから成分を使う 6.3.5 節をじっくりと読み、その後で、再び最初の方の節を読み直してほしい。これらの節で学ぶとくに重要な概念は、6.3.4 節で述べる線形独立性である。

最後の二つの節ではやや進んだ話題をとりあげる。6.3.6 節では三つ以上のベクトルの積やレヴィ・チビタの記号といった進んだ話題について述べ、6.3.7 節では座標変換との関連でベクトルとスカラーの定義についてみなおす。

6.3.1　ベクトルの基本

一口でいうと、**ベクトル** (vector) とは、大きさと方向をもった量である。これに対して、方向をもたない、ただの数を**スカラー** (scalar) と呼ぶ。ベクトルとスカラーのより正確な意味については 6.3.4 節で再び述べる。

■ベクトルとは何か　三次元空間の二つの点 P と Q をとる。P から Q へむかって引いた矢印をベクトルといい、$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と書く（図 6.7)。P をベクトルの始点、Q を終点とよぶ。ただし、ベクトルというときには、その矢印としての性質だけに注目し、始点や終点がどこにあるかは気にしないという約束にする。つまり、別の点の組 P', Q' があり、これらの点をまとめて平行移動すると P, Q に重なるなら、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ はまったく同じものとみなすのである（図 6.7）

ベクトルに名前をつけるときは、$\boldsymbol{v}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のような太字、あるいは、$\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}$ のような矢印をつけた文字を使う習慣になっている。「ただの数ではないぞ」ということを太字で主張している。この本では太字を用いる。

始点と終点が等しいベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PP}}$ は、長さが 0 で方向をもたない。このような特別のベクトルを**ゼロベクトル** (zero vector, null vector) と呼び、$\boldsymbol{0}$ と書く（誤解の余地のないとき、太字にせず単に 0 と書いてしまうこともある)。

図 6.7　点 P から点 Q へ向かう矢印がベクトル。点 P′ から点 Q′ へ向かう矢印は、上の矢印と平行移動で移りあえる。こういう場合、二つの矢印はまったく同じベクトルとみなす。

ベクトルというときは、始点の位置を気にしない約束だと書いたのだが、残念ながら、例外がある。ベクトルの始点を座標系の原点 O に固定し、終点を任意の点 P にとれば、$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ というベクトルが得られる。このベクトル $\boldsymbol{r}$ は点 P の位置を表しているので、**位置ベクトル** (radius vector, position vector) と呼ばれ

る[*31]。

■ベクトルの絶対値、定数倍　$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ をベクトルとする。始点と終点のあいだの距離 $\overline{\mathrm{PQ}}$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の**絶対値**とよび、$|\boldsymbol{v}|$ と表わす。絶対値 $|\boldsymbol{v}|$ はベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさ、あるいは長さだと考えていい。$|\boldsymbol{v}|$ はスカラー（ただの数）である。任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について $|\boldsymbol{v}| \geq 0$ が成り立ち、また、$|\boldsymbol{v}| = 0$ ならば $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ である。

ベクトルの定数倍を定義する。$\boldsymbol{v}$ をベクトルとし、α を実数とする。ベクトル $\boldsymbol{v}$ の方向をそのままにして大きさを α 倍してつくった新しいベクトルを $\alpha\boldsymbol{v}$ と書く。より詳しく言うと、最初のベクトルを $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と

---

*31 「始点を固定しない」という掟（おきて）を破っていることからも想像できるように、位置ベクトルというのは本来はベクトルと呼ぶべき対象ではない。物理的に考えてみても、別に原点から点 P にむかって矢印が延びているわけではない。個人的には位置ベクトルという概念は追放したいところなのだが、あまりに定着してしまっているので、そういうわけにもいかないようだ。

図 6.8　ベクトルの定数倍。ベクトル $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ があるとき、P, Q を結ぶ直線上に Q′ をとり、ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}$ をとる。二つのベクトルは平行であり、定数倍で結ばれている。

すると、これと始点が同じで、かつ終点 Q′ が P, Q を結ぶ直線上にのるようなベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}$ が $\alpha\,\boldsymbol{v}$ である。ただし、$|\alpha| = \overline{\mathrm{PQ'}}/\overline{\mathrm{PQ}}$ であり、α が正のときは Q と Q′ は P からみて同じ側にあり、α が負のときは逆の側にある（図 6.8）。任意の実数 α, β とベクトル $\boldsymbol{v}$ について、

$$\alpha\,(\beta\,\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\,\boldsymbol{v}, \quad 1\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \quad 0\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{6.3.1}$$

が成り立つ。ベクトルの定数倍の絶対値は、

$$|\alpha\,\boldsymbol{v}| = |\alpha|\,|\boldsymbol{v}| \tag{6.3.2}$$

を満たす。ここで $|\alpha|$ は普通の数の絶対値であることに注意。

二つのゼロでないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が、ある実数 α について $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{b}$ を満たすとき、ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**平行** (parallel) であるという。記号で $\boldsymbol{a} \mathbin{/\!/} \boldsymbol{b}$ と表す。これに対して、ゼロでない二つのベクトルの始点をそろえたとき、両者のなす角が $\pi/2$ であるとき、二つのベクトルは**直交**している (orthogonal) という。ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交していることを $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ と表す。もちろん、二つのベクトルのなす角度がちょうど $\pi/2$ あるかどうかを判定するのは一般には簡単ではない。6.3.2 節でみるように、内積を使えば、数式だけを使って二つのベクトルが直交しているかどうかを簡単に判定できる。

$|\boldsymbol{u}| = 1$ を満たすベクトル（つまり、長さが 1 のベクトル）を**単位ベクトル** (unit vector) と呼ぶ。

次の「単位ベクトルを作る方法」は色々なところで役に立つ。$\boldsymbol{v}$ を任意のゼロでないベクトルとして、これをもとに $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/|\boldsymbol{v}|$ という新しいベクトルを定義す

図 6.9　ベクトルの和。ベクトル $\boldsymbol{b}$ の始点をベクトル $\boldsymbol{a}$ の終点に一致させることで、$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を定義する。同じことだが、右のような平行四辺形の対角線として現れるのが $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ である。

る（もう少し正確にいうと、$1/|\boldsymbol{v}|$ というのはスカラーだから、それをベクトル $\boldsymbol{v}$ にかけて、$\boldsymbol{u}=(1/|\boldsymbol{v}|)\,\boldsymbol{v}$ としたということ）。すると、(6.3.2) より

$$|\boldsymbol{u}| = \left|\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}\right| = \frac{|\boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{v}|} = 1 \tag{6.3.3}$$

となる。つまり、$\boldsymbol{u}$ は $\boldsymbol{v}$ と同じ向きをむいた単位ベクトルである。

■ベクトルの和　任意の二つのベクトル $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\boldsymbol{b}=\overrightarrow{RS}$ がある。これらの和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ を次のように定義

する（図 6.9)。$\boldsymbol{b}$ を平行移動して、その始点を $\boldsymbol{a}$ の終点 Q と重ねてやる。このとき $\boldsymbol{b}$ の終点が動いた先を S' とする。新しくベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PS}'}$ をひき、これを和のベクトル $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ であると決める。

図 6.9 から明らかなように、任意の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ について、

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}| \tag{6.3.4}$$

という**三角不等式**が成立する。「三角形の二辺の長さの和は残る一辺の長さよりも大きい」という当たり前の事実の言い換えである[*32]。

図 6.9 の右図に示すように、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の始点をそろえて平行四辺形を描けば、その対角線のところに $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ が現れることがわかる。また、これからただちに

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a} \tag{6.3.5}$$

という**交換則** (commutativity) が成り立つことがわか

[*32] このような図形的な言い方ではなく、数式による証明をみたい読者は、7.1.3 節をみられたい。

る[*33]。明らかに、任意の $\boldsymbol{a}$ について、

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{6.3.6}$$

が成り立つ。ただし、$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}$ とは $\boldsymbol{a}+((-1)\boldsymbol{a})$ の意味。

また、三つの任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ の和については、

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \tag{6.3.7}$$

という**結合則** (associativity) が成り立つ。これも、絵を描いてみればすぐにわかる。和をとる順番を気にしなくてよいということなので、三つのベクトルの和は、かっこをなくして $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ のように書いてよい。

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を任意のベクトル、α, β を任意の実数とすると

[*33] 細かい注：こんな風に絵を描いて証明になるのか、という疑問があるかもしれない。ここではやらなかったが、まず空間の幾何学の公理をきちんと述べれば、そこから本節で示すベクトルについてのすべての結果が証明できる。あるいは、ここで直感的に述べるベクトルの性質こそが公理であると考える立場もある。もちろん、物理をやっていく上で、こういった立場のことを気にする必要はまったくない。

き、**分配則** (distributivity)

$$\alpha\,(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = \alpha\,\boldsymbol{a} + \alpha\,\boldsymbol{b} \tag{6.3.8}$$

$$(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{a} = \alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{a} \tag{6.3.9}$$

が成り立つことも明らかだろう。

6.3.2　ベクトルの内積

これから、ベクトルどうしの積を二種類定義する。はじめに定義する内積は、一般の次元にもそのまま拡張されるきわめて一般的な積である。

まず、a, b を二つの実数とするとき、

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \tag{6.3.10}$$

という等式が成り立つことを思い出そう。

ベクトルについても、この式にならった

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{6.3.11}$$

というような関係が成り立つとうれしい。これをベク

トルの「積」の定義にしよう。より直接的には、(6.3.11) を逆に解いた

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} := \frac{1}{2}\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{b}|^2\} \qquad (6.3.12)$$

を任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ の定義とする[*34]。このようなベクトルどうしの積を**内積** (inner product) あるいは**スカラー積** (scalar product) と呼ぶ。英語では、積を表す記号が点 (dot) であることから dot product という言い方もする。ベクトルの絶対値がスカラーだったから、定義 (6.3.12) から内積もスカラーである。

$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積を、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 以外に、$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ あるい

[*34] 成分表示を用いた (6.3.68) を内積の定義とすることも多い。もちろん、ここでの定義と同値である。

図 6.10　(6.3.16) を示すための図。ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の始点をそろえたとき、二つのベクトルのなす角を θ とする。

は $\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{b}$ といった記号で表すことがある[*35]。この本でも次の 7 章では、$\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{b}$ と $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ を用いる。

■内積の基本的な性質　内積の基本的な性質をみていこう。まず、定義 (6.3.12) で $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ とすれば、ただちに任意のベクトル $\boldsymbol{a}$ について、

[*35] 慣習として、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は幾何ベクトルに用いる記号で、それ以外は代数ベクトルに用いる。前にも書いたが、幾何ベクトルとは、この章であつかっている「矢印」としてのベクトルであり、代数ベクトルとは 7 章であつかう「数を並べた」ベクトルである。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}\{|2\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|^2\}=|\boldsymbol{a}|^2\geq 0 \tag{6.3.13}$$

となる。この関係があるので、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$ のことを単に $\boldsymbol{a}^2$ と書くこともある。

次に、交換則 (6.3.5) を使って、定義 (6.3.12) で $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えれば、任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ について

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} \tag{6.3.14}$$

という対称性が示される。

また、任意のベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と任意の実数 β, γ につ

いて、内積の線形性[*36]

$$\boldsymbol{a}\cdot(\beta\,\boldsymbol{b}+\gamma\,\boldsymbol{c})=\beta\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\gamma\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \qquad (6.3.15)$$

が成立する。線形性は、後に導入する成分表示 (6.3.68) を用いれば、いとも簡単に証明できる。この節の末尾に、成分表示を使わない導出も書いておく。

また、任意のゼロでないベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を始点をそろえて並べたときに両者のなす角を θ とすると[*37] (図 6.10)、

[*36] この関係を言葉で言えば、「足し算の内積は、内積の足し算」と「定数倍の内積は、内積の定数倍」ということになる。このように、足し算や定数倍に対する素直なふるまいのことを「線形」と呼ぶ。

[*37] 図ではなす角のうち小さい方を θ としたが、$\cos\theta=\cos(2\pi-\theta)$ だから、θ はどちら向きにはかった角度でもよい。これは便利だ。

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos\theta \tag{6.3.16}$$

が成り立つ。

証明：図 6.10 左のような三角形では、余弦定理

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta \tag{6.3.17}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の始点をそろえて並べると右図のような三角形ができる。ここで

$$|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}|^2=|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \tag{6.3.18}$$

だから (6.3.17) と比較すると (6.3.16) が得られる。∎

(6.3.16) は幾何とベクトルの対応をつける重要な関係だ。これにより、$\theta=0$ なら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$、$\theta=\pi$ なら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$、そして $\theta=\pi/2$ なら $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ となる。また、$\cos\theta=0$ となるのは $\theta=\pi/2$ のときだけだから、**ゼロでない二つのベクトルが直交すること**

は、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ であることと同値である。この事実は非常に重要であり、かつ役に立つ。

一つの応用をみるため、$\boldsymbol{v}$ を任意のゼロでないベクトルとし、$\boldsymbol{e}$ を任意の単位ベクトル（$|\boldsymbol{e}|=1$ を満たすベクトル）とする。ここで、

$$\boldsymbol{v}_{//}=(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{e},\quad \boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_{//} \tag{6.3.19}$$

と定義する。$\boldsymbol{v}_{//}$ は、$\boldsymbol{e}$ に数 $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{e}$ をかけたベクトルなので、明らかに $\boldsymbol{e}$ と平行である。一方、$\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{v}_{\perp}$ の内積をとると、線形性 (6.3.15) より

$$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v}_{\perp}=\boldsymbol{e}\cdot\{\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{e}\}=(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{e})=0 \tag{6.3.20}$$

となり、$\boldsymbol{v}_{\perp}$ と $\boldsymbol{e}$ が直交していることがわかる。よって、

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_{//}+\boldsymbol{v}_{\perp} \tag{6.3.21}$$

は、ベクトル $\boldsymbol{v}$ を、$\boldsymbol{e}$ に平行なベクトルと $\boldsymbol{e}$ に直交するベクトルに分解して表したものになっている (図 6.11)。$\boldsymbol{v}_{//}$ をベクトル $\boldsymbol{v}$ の $\boldsymbol{e}$ 方向への**射影** (projection) と呼ぶことがある。このような分解は、何かと便利である。

図 6.11　任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を、単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ に平行な成分 $\boldsymbol{v}_{//}$ と直交する成分 $\boldsymbol{v}_{\perp}$ に分解する。

(6.3.16) と $|\cos\theta| \leq 1$ から

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \tag{6.3.22}$$

というコーシー[*38]=シュワルツ[*39]の不等式[*40]が得られる。 これは解析学におけるもっとも重要な不等式の一つであり、数学のさまざまな局面で重要な役割を果たす。三角形の幾何を経由しない証明を 7.1.3 節で与える。

線形性 (6.3.15) の証明：すでに注意したように、線形性は成分表示 (6.3.68) を使えばまったく簡単に証明できる。ここでは、あえて成分表示を使わない証明を書いておくが、ま、意地で書いているという感もつよいので、こういうのが好きな読者以外は読まなくていいと思う。

[*38] 178 ページの脚注 *85 を見よ。

[*39] Hermann Amandus Schwarz (1843–1921) ドイツの数学者。彼はこの不等式の発見者というより、このタイプの不等式を使った一般的な論法の考案者とみなされている。

[*40] 単にシュワルツ不等式と呼ぶことも多い。なおロシア圏ではブニャコフスキー (Viktor Yakovlevich Bunyakovsky, 1804–1889) 不等式と呼ぶらしい。おそらく、コーシー=ブニャコフスキー=シュワルツ不等式と呼ぶのが公平なのだろうが、長い。

α を実数とし、

$$G(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{2}\{|\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}|^2-|\alpha\boldsymbol{a}|^2-|\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c}|^2\} \tag{6.3.23}$$

と置く。内積の定義 (6.3.12) より、$G(\alpha,\beta,\gamma)=(\alpha\boldsymbol{a})\cdot(\beta\boldsymbol{b}+\gamma\boldsymbol{c})$ である。s を実変数とすると、$G(s\alpha,s\beta,s\gamma)=s^2\,G(\alpha,\beta,\gamma)$ だから、$G(\alpha,\beta,\gamma)$ は α, β, γ の二次式である。よって、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のみによる定数 A,B,C,D,E,F があって、

$$G(\alpha,\beta,\gamma)=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2+D\alpha\beta+E\beta\gamma+F\gamma\alpha \tag{6.3.24}$$

と書ける。これを見れば、$A=G(1,0,0)$, $B=G(0,1,0)$, $C=G(0,0,1)$, $D=G(1,1,0)-A-B$, $E=G(0,1,1)-B-C$, $F=G(1,0,1)-A-C$ のように係数が決定できることがわかる。(6.3.23) を使って計算すると、たとえば $A=G(1,0,0)=(1/2)\{|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{a}|^2\}=0$ のように多くの係数が 0 になる。0 にならないのは、$D=G(1,1,0)=(1/2)\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2\}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$

と $F = G(1,0,1) = (1/2)\{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}|^2 - |\boldsymbol{a}|^2 - |\boldsymbol{c}|^2\} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ の二つだけ。よって、

$$G(\alpha,\beta,\gamma) = \alpha\beta\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + \alpha\gamma\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} \tag{6.3.25}$$

とわかる。ここで $\alpha = 1$ としたのが (6.3.15)。 ∎

6.3.3　ベクトルの外積

ベクトルどうしの積をもう一つ定義しよう。今度は、ベクトルとベクトルをかけあわせて、新たなベクトルを作る積である。この積は、内積あるいはスカラー積に対応させて、**外積** (outer product) あるいは**ベクトル積** (vector product) と呼ばれる。普通のかけ算記号を使って $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ と表すので、英語では cross product とも呼ばれる。

ベクトルの外積は、三次元の空間の特殊性を利用し

て定義されるので、内積ほど一般的な概念ではない[*41]。とはいえ、われわれは三次元に暮らしているので、（たとえ特殊なものだろうと）外積が便利なことは確実だ。本質をきちんと理解して、大いに使いこなしていこう。

内積は一行（ぎょう）でささっと定義できたのだが、外積の定義は少しややこしい。あせらず順を追って見ていこう。

まず、ゼロでない二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が互いに直交しているとしよう。このとき、空間が三次元であるため、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の両方に直交する方向が一つだけ定まる[*42]。これは、自然な向きだと思える。そこで、ベクトル積

---

*41　それに対応して、二つのベクトルの外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は、通常のベクトルとは微妙に異なった性質をもつようになる。外積で得られるベクトルを擬（ぎ）ベクトル (pseudo vector) と呼ぶ流儀もある。この本では、この点に深く踏み込むことはしないけれど、物理の現場でさまざまなベクトルに接していく中で、（角運動量や角速度など）ベクトル積で定義される「ベクトル」たちは、なんとなく毛色がちがっていることが肌で感じられるようになるはずだ。

*42　ここが三次元の特殊性。二次元だったら、両方に直交する方向などない。四次元だったら、両方に直交する方向は無数にある。

図 6.12　左は、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が直交する場合の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$。向きは、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ネジをまわしたときに進む向き、大きさは $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$ である。右は、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ が直交しない場合の外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$。図で表現するのがむずかしいのだが、ここでは $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ は左図と同じ平面内にあって、$\pi/2$ とは限らない角 θ をなしている。こういう場合にも、やはり $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ネジをまわしたときに進む向きに外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きをとる。大きさは、$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\sin\theta$ とする。

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きは、6.2.1 節で詳しく議論した「右ネジの規則」に従って、「$\boldsymbol{a}$ の方向から $\boldsymbol{b}$ の方向に右ネジをまわしたときに進む向き」であると決めよう。また、大きさは、すなおに $|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|$ としよう。

次に、ゼロでない二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が平行である場合は、右ネジの出番もないので、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ としよう。こうして、二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が直交している場合と平行な場合に、ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ が決まった。

二つのベクトルが直交もしていないし、平行でもないという一般の場合は、まずベクトル $\boldsymbol{b}$ を、

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{//} + \boldsymbol{b}_{\perp} \tag{6.3.26}$$

のように、$\boldsymbol{a}$ に平行なベクトルと直交するベクトルに分解する。そして、外積も線形性を満たすという約束にして、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b}_{//} + \boldsymbol{b}_{\perp}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_{//} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_{\perp} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}_{\perp} \tag{6.3.27}$$

によって外積を定義する。こうやって定義したベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の向きは、やはり、$\boldsymbol{a}$ の方向から $\boldsymbol{b}$ の方向に（角度の小さい側をとおって）右ネジをまわしたときに進む向きである。また、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角の小さい方を θ とすれば、$|\boldsymbol{b}_{\perp}| = |\boldsymbol{b}| \sin\theta$ であることは絵を描いて

図 6.13　二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む平面内に、これらのベクトルで定まる平行四辺形を描く。仮に $\boldsymbol{a}$ の部分を底辺と思うと、平行四辺形の高さは $|\boldsymbol{b}|\ \sin\theta$。よって、この平行四辺形の面積は、外積の大きさ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\ \sin\theta$ に等しい。

みればすぐにわかる。よって、一般の外積の大きさは

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\ \sin\theta \tag{6.3.28}$$

となる。

外積の大きさ (6.3.28) には面白い幾何学的な意味がある。図 6.13 のように、二つのベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を含む（一意的に決まる）平面の中で、$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を二辺にもつ平行四辺形を考える。この平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\ \sin\theta$ であり、外積の大きさ $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ に等しい。

$|\boldsymbol{b}_\perp| = |\boldsymbol{b}|\,\sin\theta$ の証明：念のため、$|\boldsymbol{b}_\perp| = |\boldsymbol{b}|\,\sin\theta$ という関係を絵を描かずに示しておこう。ベクトルの分解の練習にもなる。

分解 (6.3.26) の具体的な形は、(6.3.19) で $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{a}/|\boldsymbol{a}|$ という単位ベクトルを使えば、得られる。よって、

$$\boldsymbol{b}_{//} = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{b}_\perp = \boldsymbol{b} - \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2}\boldsymbol{a} \tag{6.3.29}$$

である。$|\boldsymbol{b}_{//}| = |\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|/|\boldsymbol{a}|$ だから、ピタゴラスの定理より、

$$|\boldsymbol{b}_\perp|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 - |\boldsymbol{b}_{//}|^2 = |\boldsymbol{b}|^2 - \frac{(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos\theta)^2}{|\boldsymbol{a}|^2} = |\boldsymbol{b}|^2(\sin\theta)^2 \tag{6.3.30}$$

となる。内積とコサインを結ぶ (6.3.16) の関係を使った。$0 \le \theta \le \pi$ だからルートをとれば、

$$|\boldsymbol{b}_\perp| = |\boldsymbol{b}|\,\sin\theta \tag{6.3.31}$$

である。∎

■外積の基本的な性質　これで外積が完全に定義できた。くり返しも含むが外積の基本的な性質をまとめておこう。

任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について、二つを入れ替えたときの反対称性

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{6.3.32}$$

が、最初の向きの決め方から、わかる。また、任意のベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と任意の実数 β, γ についての線形性

$$\boldsymbol{a} \times (\beta\,\boldsymbol{b} + \gamma\,\boldsymbol{c}) = \beta\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \gamma\,\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} \tag{6.3.33}$$

は、基本的な要請としよう。

これは定義そのものだが、二つのゼロでないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が互いに平行なら、

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0} \tag{6.3.34}$$

である。とくに、任意の $\boldsymbol{a}$ について

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{6.3.35}$$

である。

これは上で見たことのくり返しだが、二つのゼロでないベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が互いに平行でないなら、$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ は、$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に（角度の小さい側をとおって）右ネジをまわしたときに進む方向を向いており、二つのベクトルのなす角を θ $(0 \leq \theta \leq \pi)$ とすると、

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\sin\theta \tag{6.3.36}$$

が成り立つ。

また、外積の大きさについての (6.3.36) と内積についての (6.3.16) から、ただちに

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2+|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\,|\boldsymbol{b}|^2 \qquad (6.3.37)$$

という、きれいな関係が得られる。

6.3.4　ベクトルの線形独立性と基底ベクトル

■線形独立性　ベクトルをあつかっていく上で、もっとも本質的な**線形独立性** (linear independence) あるいは**一次独立性**という概念をみよう。線形独立性という考え方の適用範囲はきわめて広い。三次元のベクトルにかぎらず、足し合わせのできる対象をあつかうときには、きわめて重要な役割を果たす。

定義 6.1 (ベクトルの線形独立性)**.** n 個の（三次元の）ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が**線形独立** *(linearly independent)* であるとは、

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \qquad (6.3.38)$$

を満たすような実数の組 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が、$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ しかないことをいう。
同じことだが、すべてが同時に *0* にはならない任意の n 個の実数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ について、

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n \neq \boldsymbol{0} \qquad (6.3.39)$$

が成り立つことといってもよい。

n 個のベクトルが線形独立でないとき、**線形従属** (linearly dependent) であるという。詳しく言えば、ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して、(6.3.38) を満たすような、すべてが同時に 0 にはならない n 個の実数が存在

するなら、これらのベクトルは線形従属ということだ。

もう少し詳しくみていこう。

仮に n 個のベクトルの中の一つがゼロベクトルだったとしよう。このゼロベクトルを $\boldsymbol{v}_i$ とする。$\alpha_i \neq 0$ とし、それ以外の α_j はすべて 0 に取れば、(6.3.38) が成り立つ。つまり、次のことがいえた。

定理 6.2. n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の中に一つでもゼロベクトルがまざっていれば、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形従属である。

次に、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属だとする。よって、すべてが同時に 0 でない $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ について (6.3.38) が成り立つ。仮に α_1 が 0 でないとすると、$\beta_i = -\alpha_i/\alpha_1$ として、(6.3.38) を

$$\boldsymbol{v}_1 = \sum_{i=2}^{n} \beta_i \, \boldsymbol{v}_i \tag{6.3.40}$$

と書き直すことができる。つまり、$\boldsymbol{v}_1$ は残りの $n-1$ 個のベクトルの線形結合になる。もちろん、一般には

α_1 が 0 でないという保証はない。しかし、$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ のすべてが同時に 0 になることはないのだから、少なくとも一つの α_i は 0 でない。これに対応する $\boldsymbol{v}_i$ が残りの $n-1$ 個のベクトルの線形結合になることがわかる。

逆に、もし $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の中の一つが残りの $n-1$ 個のベクトルの線形結合で書けるなら、これら n 個のベクトルが線形従属なのは、明らか。これらをまとめると、

定理 6.3. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属であることと、これらのうちの少なくとも一つのベクトルが残りの $n-1$ 個のベクトルの線形結合であることは、同値である。

実際にベクトルが具体的に与えられて線形独立かどうかを判定するということを考えてみよう。まず最初に気にするのはゼロベクトルがあるかどうか。もし一つでもゼロなら、定理 6.2 によって線形従属とわかる。そこで、ゼロベクトルは一つもないとする。今度は定

理 6.3 により、あるベクトルが他のベクトルの線形結合で書けるかどうかを見てやればいい。

$n = 1$ なら、ベクトルが一つしかないわけだから、それが他のベクトルの線形結合で書けることはあり得ない（そもそも他のベクトルがない)。よって、この場合はベクトルがゼロでなければ自動的に線形独立といえる。要するにこれは定義の問題である。

$n = 2$ なら、一つが他のベクトルの線形結合で書けるというのは、二つのベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が $\boldsymbol{v}_1 = \alpha\,\boldsymbol{v}_2$ のように定数倍で結ばれているということである。つまり、二つのベクトルは平行。よって、**二つのベクトルがゼロでなくかつ平行でなければ線形独立であり、それ以外の場合は線形従属**とわかる。二つのベクトルが平行かどうかは（たとえば成分表示を使えば）すぐにわかるので、$n = 2$ の場合の判定は簡単である。

$n = 3$ は、もう少し当たり前ではない。三つともゼロベクトルではなく、かつ定理 6.3 でいうように、一つが他の二つの線形結合で書けるということは、三つ

のベクトルを始点をそろえて並べたとき、ある一つの平面内におさまってしまうことを意味する。三つのベクトルがつくる図形が「つぶれている」と言ってもいい。よって、**三つのベクトルを始点をそろえて並べたとき、一つの平面内におさまらなければ線形独立、おさまってしまう場合は線形従属**ということになる。三つのベクトルが平面におさまるかどうかは、見た目ですぐにわかる場合もあるが、一般には容易に見抜けるものではない。機械的な計算で線形独立かどうかを見抜く方法を 933 ページの定理 6.6 で示す。

上と同様の議論を $n = 4$ に進めると、四つのゼロでないベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ が（始点をそろえたとき）一つの三次元空間内に収まるなら、これらは線形従属とわかる。しかし、われわれはもともと三次元空間の中にいるのだから、どんな $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_4$ をもって来ようと必ず三次元空間内に収まる。四つのベクトルは必然的に線形従属なのだ。これを（一般化して）まとめておこう。

定理 6.4. $n \geq 4$ とする。三次元の空間では[*43]、任意の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形従属である。

この定理の位置づけについても 879 ページの脚注 *33 を参照。この定理に相当するより一般次元での結果（と証明）を、次の章で定理 7.4（991 ページ）として述べる。

■基底ベクトルによる展開　三次元空間では、三つのベクトルが線形独立になりうることがわかった。線形独立な三つのベクトルには、次の重要な性質がある。

[*43] d-次元空間では、$n \geq 4$ という条件を $n \geq d+1$ に置きかえる。

定理 6.5 (線形独立なベクトルによる展開)**.** 三つのベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$ が線形独立であるとする。任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、三つの実数 α_1, α_2, α_3 が一通りに決まり、

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\,\boldsymbol{v}^{(1)} + \alpha_2\,\boldsymbol{v}^{(2)} + \alpha_3\,\boldsymbol{v}^{(3)} \qquad (6.3.41)$$

と書ける。

なお、ここではベクトルの名前 1, 2, 3 を右下ではなく右上に括弧にいれて書いた。これは式の見栄(みば)えをよくするためのちょっとした習慣なので、特に気にしなくてよい。

様々なベクトル $\boldsymbol{v}$ を (6.3.41) のように表現するとき、三つのベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ をまとめて**基底** (basis) と呼ぶ。各々のベクトルは基底ベクトルと呼ばれる。そして、ベクトル $\boldsymbol{v}$ を (6.3.41) のように表すことを、「$\boldsymbol{v}$ を基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ で展開する」

という。もともと一本のベクトルであるものを三本の和に分けるから「展開」なのだろう（テイラー展開というときの「展開」とはちょっと意味がちがうので注意[*44]）。展開 (6.3.41) に現れる実数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ は展開係数と呼ばれる。

<u>定理 6.5 の証明</u>：定理 6.4 により、四つのベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$, $\boldsymbol{v}$ は線形従属。よって、すべてが 0 ではない四つの実数 $\beta_1, \ldots, \beta_4$ があり、

$$\beta_1\,\boldsymbol{v}^{(1)} + \beta_2\,\boldsymbol{v}^{(2)} + \beta_3\,\boldsymbol{v}^{(3)} + \beta_4\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad (6.3.42)$$

である。ここで、$\beta_4 = 0$ なら $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$ が線形従属ということになり、仮定と矛盾。よって $\beta_4 \neq 0$ である。$i = 1, 2, 3$ について $\alpha_i = -\beta_i/\beta_4$ とすれば、(6.3.42) から (6.3.41) が得られる。

展開が一通りであることをみるには、異なった係数による展開 $\boldsymbol{v} = \tilde{\alpha}_1\,\boldsymbol{v}^{(1)} + \tilde{\alpha}_2\,\boldsymbol{v}^{(2)} + \tilde{\alpha}_3\,\boldsymbol{v}^{(3)}$ が可能だと

[*44] より一般化した視点に立てば同じものなのだが。

仮定する。これと (6.3.41) の差をとれば、

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \tilde{\alpha}_1)\,\boldsymbol{v}^{(1)} + (\alpha_2 - \tilde{\alpha}_2)\,\boldsymbol{v}^{(2)} + (\alpha_3 - \tilde{\alpha}_3)\,\boldsymbol{v}^{(3)} \tag{6.3.43}$$

となるが、$\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$ が線形独立だから、これら係数はすべて 0 でなくてはならない。よって $\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1$, $\alpha_2 = \tilde{\alpha}_2$, $\alpha_3 = \tilde{\alpha}_3$ である。 ∎

■正規直交基底　$\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$, $\boldsymbol{e}^{(3)}$ を互いに直交する単位ベクトルとする。つまり、

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^{(1)} \cdot \boldsymbol{e}^{(2)} = \boldsymbol{e}^{(2)} \cdot \boldsymbol{e}^{(3)} = \boldsymbol{e}^{(3)} \cdot \boldsymbol{e}^{(1)} = 0, \\ &|\boldsymbol{e}^{(1)}| = |\boldsymbol{e}^{(2)}| = |\boldsymbol{e}^{(3)}| = 1 \end{aligned} \tag{6.3.44}$$

ということだ。こういう関係は、これからもちょくちょく登場するので (大学生っぽく) もう少しコンパクトで一般的な形に書いておこう。そのために、(1.3.11) の

ように、クロネッカー[*45]のデルタを

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{6.3.45}$$

と定義する。すると、(6.3.44) は、任意の $i, j = 1, 2, 3$ について、

$$\boldsymbol{e}^{(i)} \cdot \boldsymbol{e}^{(j)} = \delta_{i,j} \tag{6.3.46}$$

という形に書けてしまう。このような書き方は便利なので、これから積極的に使っていく。(6.3.46) のような書き方をみたら、それは (6.3.44) の意味だと翻訳してなっとくする習慣をつけておこう。

$\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$, $\boldsymbol{e}^{(3)}$ は線形独立である。三次元空間に三つの互いに直交するベクトルがあるわけだから独立なのは明らかだが、証明も難しくない[*46]。線形独立だから、$\{\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}\}$ を基底にとれる。このように、

[*45] 28 ページの脚注 *25 を見よ。

[*46] 7 章でもっと一般的な結果（1004 ページの補題 7.7）を示すのでここでは証明はしない。

互いに直交した単位ベクトルがつくる基底を**正規直交基底** (orthonormal basis) という。「正規 (normal)」という部分が単位ベクトルであることを表し、「直交 (ortho)」がもちろん直交していることを表す。

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を、正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}\}$ で展開した結果を、

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\, \boldsymbol{e}^{(1)} + \alpha_2\, \boldsymbol{e}^{(2)} + \alpha_3\, \boldsymbol{e}^{(3)} \tag{6.3.47}$$

と書く。ここで、(6.3.46) に注意して $\boldsymbol{e}^{(1)}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積を求めると、

$$\boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v} = \alpha_1\, \boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{e}^{(1)} + \alpha_2\, \boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{e}^{(2)} + \alpha_3\, \boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{e}^{(3)} = \alpha_1 \tag{6.3.48}$$

となる。$\boldsymbol{e}^{(2)}$, $\boldsymbol{e}^{(3)}$ についても同じことがいえるから、展開 (6.3.47) における展開係数は、

$$\alpha_1 = \boldsymbol{e}^{(1)}\cdot\boldsymbol{v}, \quad \alpha_2 = \boldsymbol{e}^{(2)}\cdot\boldsymbol{v}, \quad \alpha_3 = \boldsymbol{e}^{(3)}\cdot\boldsymbol{v} \tag{6.3.49}$$

のように、基底ベクトル $\boldsymbol{e}_i$ と展開したいベクトル $\boldsymbol{v}$ の内積で表されることがわかる。

また、別のベクトル $\boldsymbol{u}$ を $\boldsymbol{u} = \beta_1\,\boldsymbol{e}^{(1)} + \beta_2\,\boldsymbol{e}^{(2)} + \beta_3\,\boldsymbol{e}^{(3)}$ のように同じ基底で展開する。内積の線形性 (6.3.15) と基底ベクトルの内積についての (6.3.46) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u} &= \Big(\sum_{i=1}^{3}\alpha_i\boldsymbol{e}_i\Big)\cdot\Big(\sum_{j=1}^{3}\beta_j\boldsymbol{e}_j\Big) = \sum_{i,j=1}^{3}\alpha_i\,\beta_j\,\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{3}\alpha_i\,\beta_j\,\delta_{i,j} = \alpha_1\,\beta_1 + \alpha_2\,\beta_2 + \alpha_3\,\beta_3\end{aligned} \tag{6.3.50}$$

となる[*47]。また、ベクトルの絶対値は、

$$|\boldsymbol{v}| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = \sqrt{(\alpha_1)^2 + (\alpha_2)^2 + (\alpha_3)^2} \tag{6.3.51}$$

のように書ける。

このような便利な性質があるので、ベクトルを展開するときには正規直交基底を用いることが多い。正規

[*47] $\sum_{i,j=1}^{3}(\cdots)$ は、i と j を独立に 1 から 3 まで足しあげろという意味。$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(\cdots)$ と同じ。クロネッカーのデルタの処理の仕方については、(1.3.15) を見よ。

直交基底によるベクトルの展開という考えは、いろいろと拡張された形で、物理の様々な分野に登場する。いずれ量子力学を学ぶような頃には、(6.3.49), (6.3.50), (6.3.51) のような関係は、足し算・引き算のように当たり前に感じられるようになっているはずだ。

■双対基底　ここで、**双対基底** (dual basis) という概念を紹介しておこう[*48]。後で述べるが、双対基底は、固体物理学に現れる逆格子と深く関わっている。

$\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ を、正規直交基底とは限らない、一般の基底とする。このとき、任意の $i, j = 1, 2, 3$ について、

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(i)} \cdot \boldsymbol{v}^{(j)} = \delta_{i,j} \tag{6.3.52}$$

を満たすようなベクトル $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(i)}$ を集めた $\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)}\}$ を、基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ に対する双対基底と呼ぶ (これらのベクトルが存在し、基底をなすことは、すぐ下で示す)。明らかに、$\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)}\}$ の双対基底

[*48] この部分はとばしてもよい。

は、もとの基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ そのものである。

(6.3.52) は、正規直交基底の条件 (6.3.46) と似た形をしている。ただし、(6.3.46) では、$\tilde{\boldsymbol{v}}$ のところも $\boldsymbol{v}$ のところも同じ $\boldsymbol{e}$ が現れている。つまり、正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}\}$ の双対基底は、自分自身だということである。

$\boldsymbol{v}$ を任意のベクトルとする。(6.3.41) で見たように、これを基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ によって、

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1\, \boldsymbol{v}^{(1)} + \alpha_2\, \boldsymbol{v}^{(2)} + \alpha_3\, \boldsymbol{v}^{(3)} \tag{6.3.53}$$

と展開できる。ここで、(6.3.52) に注意して、$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(i)}$ と (6.3.53) の両辺との内積をとると、

$$\alpha_1 = \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)} \cdot \boldsymbol{v}, \quad \alpha_2 = \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)} \cdot \boldsymbol{v}, \quad \alpha_3 = \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)} \cdot \boldsymbol{v} \tag{6.3.54}$$

のように、展開係数を決定する関係が得られる。これは正規直交基底についての (6.3.49) を一般化する関係だといえる。

(6.3.52) を満たす $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)}$ が線形独立である

ことは簡単にわかる。実数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ があって、

$$\alpha_1 \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)} + \alpha_2 \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)} + \alpha_3 \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)} = \boldsymbol{0} \tag{6.3.55}$$

としよう。この式の両辺と $\boldsymbol{v}^{(i)}$ の内積をとると、(6.3.52) より、$i = 1, 2, 3$ について $\alpha_i = 0$ が言える。これこそが、三つのベクトルは線形独立という意味だった。

最後に、(6.3.52) を満たす $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)}$ を具体的に求めよう。たとえば、$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}$ は、$\boldsymbol{v}^{(2)}$ と $\boldsymbol{v}^{(3)}$ の両方と直交する。ということは、外積の性質からして、$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)} = (\text{定数})\boldsymbol{v}^{(2)} \times \boldsymbol{v}^{(3)}$ と書けることになる。後は、$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)} \cdot \boldsymbol{v}^{(1)} = 1$ となるように定数を決めるだけなので、

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)} = \frac{\boldsymbol{v}^{(2)} \times \boldsymbol{v}^{(3)}}{\boldsymbol{v}^{(1)} \cdot \left(\boldsymbol{v}^{(2)} \times \boldsymbol{v}^{(3)}\right)} \tag{6.3.56}$$

とすればよい。分母の量は（$\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}$ が線形独立なら）決してゼロにはならない（詳しくは、6.3.6 節を

見よ)。後の二つも全く同様に、

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \frac{\boldsymbol{v}^{(3)} \times \boldsymbol{v}^{(1)}}{\boldsymbol{v}^{(2)} \cdot \left(\boldsymbol{v}^{(3)} \times \boldsymbol{v}^{(1)}\right)}$$

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)} = \frac{\boldsymbol{v}^{(1)} \times \boldsymbol{v}^{(2)}}{\boldsymbol{v}^{(3)} \cdot \left(\boldsymbol{v}^{(1)} \times \boldsymbol{v}^{(2)}\right)} \tag{6.3.57}$$

と求められる。(6.3.56), (6.3.57) の三つの表式の分母に現れる三つのベクトルの積はスカラー三重積と呼ばれている。実は、これら三つが等しいことを 6.3.6 節でみる。

■格子と逆格子　最後に、固体物理学で重要になってくる**逆格子** (reciprocal lattice) と双対基底の関係について述べておこう[*49]。

一般の基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ を一つ固定する。三つの整数 n_1, n_2, n_3 を使って

$$\boldsymbol{r} = n_1\, \boldsymbol{v}^{(1)} + n_2\, \boldsymbol{v}^{(2)} + n_3\, \boldsymbol{v}^{(3)} \tag{6.3.58}$$

[*49] ここは、最初はとばしておいて、固体物理学を学んでいて混乱したときにでも読めばいいだろう。

と書けるような $\boldsymbol{r}$ を格子点と呼ぶ[*50]。

$\{\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)}\}$ を基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ の双対基底とする。このとき、三つの整数 m_1, m_2, m_3 を使って

$$\boldsymbol{k} = m_1\, 2\pi\, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)} + m_2\, 2\pi\, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)} + m_3\, 2\pi\, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)} \tag{6.3.59}$$

と書けるような $\boldsymbol{k}$ を逆格子点と呼ぶ。

(6.3.52) より、格子点 $\boldsymbol{r}$ と逆格子点 $\boldsymbol{k}$ の内積は、

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} = 2\pi(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) \tag{6.3.60}$$

となる。よって、

$$\exp[i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}] = 1 \tag{6.3.61}$$

が成り立つ。固体物理学への応用では、この関係が最も重要な役割を果たす。

[*50] 正確には、ブラヴェー格子の格子点。

6.3.5　ベクトルの成分表示

ベクトルの成分表示を導入することで、ベクトルについての具体的な計算を能率的に進めることができる。これまでは、成分表示がベクトルの本質でないことを味わってもらうため、あえて、成分表示を用いないで話を進めてきた。ここからは成分表示を「解禁」して、ベクトルについての実用的な技術や関係式を議論していこう。そういう意味で、この節はあとからベクトルの復習をする際にまとめて読めるように構成してある。

以下では、デカルト座標系を一つ設定し、固定する。

■ベクトルの基本　点 P, Q の座標を、それぞれ、$(p_{\mathrm{x}}, p_{\mathrm{y}}, p_{\mathrm{z}})$, $(q_{\mathrm{x}}, q_{\mathrm{y}}, q_{\mathrm{z}})$ とする[*51]。P から Q にむかう矢印のベクトルは、この座標表示を使って

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (q_{\mathrm{x}} - p_{\mathrm{x}}, q_{\mathrm{y}} - p_{\mathrm{y}}, q_{\mathrm{z}} - p_{\mathrm{z}}) \tag{6.3.62}$$

と表すと約束しよう。終点の座標から始点の座標を引いたものを、三つの成分として並べた。これがベクトルの成分表示である。(6.3.62) 左辺の $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は座標とは無関係に定まっているベクトルであり、右辺は特定の座標系に依存する表現だ。そういう意味で、(6.3.62) のような等式を書くことは「品がない」のだ。とはいえ、これは便利な書き方だから、座標系が一つに固定

[*51] (a, b, c) などとやっていると文字が足りなくなるので、q_{x} などの添え字付きの文字を用いる。いうまでもないだろうが、q_{x} というときの x は「x-成分だよ」ということを表す名前であって、何かが代入される変数などではない。829 ページの脚注 *4 でも書いたが、x-成分だと言いたいときは、立体の x を添え字に使う。この場合も、残念ながら、q_x のように添え字もイタリックにする文献が多い。

されているという了解があるときには、われわれもこのような書き方を用いることにしよう。

(6.3.62) のような成分表示を用いると、P, Q を平行移動して得られる P′, Q′ に対応するベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P'Q'}}$ も (6.3.62) と同じ成分をもつことがすぐにわかる（図 6.7 参照)。こうして、この成分表示がベクトルの表現として適切なものだとわかる。

一般に、始点や終点を特定しないでベクトルを表すときは、$\boldsymbol{v} = (v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$, $\boldsymbol{a} = (a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ のように書く。また、ゼロベクトルの成分表示は $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ である。二つのベクトルが等しいということは、その三つの成分がすべて等しいことをいう。要するに、デカルト座標系をひとつ固定したときには、ベクトルは三つの実数の組と同じものになる。すべてのベクトルの集合は $\mathbb{R}^3$ であるとみなすことができる。ただ、こうやって「三つの実数の組」と言ってしまうと、「空間のなかの矢印」というベクトル本来の意味を忘れがち

だ[*52]。成分表示をしながらも「矢印」であることを思い出すためには、座標変換を考えるのがよい。これについては、6.3.7 節で簡単に解説する。

原点 O の座標は $(0,0,0)$ だから、座標 (x,y,z) をもつ点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の成分表示は $(x-0, y-0, z-0)=(x,y,z)$ となり、位置座標と一致する。つまり、$\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ と書いたときは、点 P の座標を示していると思ってもいいし、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の成分表示だと思ってもよい。これらは、けっきょく、同じことなのだ。

後の便利のため、各々の座標軸の正の方向を向いた単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} := (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} := (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} := (0,0,1) \tag{6.3.63}$$

を定義しておく。$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}$ の添え字の x は、ベクトルについた名前であり、成分を表す添え字とはまったく

[*52] 7 章であつかう「代数ベクトル」は、矢印とはかぎらない「数の組」である。

違うことに注意（それを強調するため、右上に書いた)。これら単位ベクトルをあわせた $\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}, \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})}, \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\}$ は、正規直交基底の例になっている。任意のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$ をこの基底で展開すると、明らかに、

$$\boldsymbol{v} = v_{\mathrm{x}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + v_{\mathrm{y}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} + v_{\mathrm{z}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \tag{6.3.64}$$

となり、ベクトルの成分がそのまま展開係数に現れる。

■ベクトルの絶対値、定数倍、和　ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ の絶対値（大きさ、長さ）は、ピタゴラスの定理から（あるいは、展開 (6.3.64) と (6.3.51) から)、

$$\boxed{|\boldsymbol{a}| = \sqrt{(a_{\mathrm{x}})^2 + (a_{\mathrm{y}})^2 + (a_{\mathrm{z}})^2} \qquad (6.3.65)}$$

である。

また、実数 α によるベクトル $\boldsymbol{a}$ の定数倍、二つのベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b} = (b_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, b_{\mathrm{z}})$ の和は、それぞれ、

$$\alpha\,\boldsymbol{a} = (\alpha\,a_{\mathrm{x}}, \alpha\,a_{\mathrm{y}}, \alpha\,a_{\mathrm{z}}) \tag{6.3.66}$$

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_{\mathrm{x}} + b_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}} + b_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}} + b_{\mathrm{z}}) \tag{6.3.67}$$

となる。これらの表現を使えば、(6.3.5) から (6.3.9) までの関係は、すべて（本当に）簡単に証明できる。

■ベクトルの内積　ベクトルの絶対値についての (6.3.65) と内積の定義 (6.3.12) から、ただちに、

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_{\mathrm{x}} b_{\mathrm{x}} + a_{\mathrm{y}} b_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{z}} b_{\mathrm{z}} \tag{6.3.68}$$

となる（これは、展開 (6.3.64) と内積の表式 (6.3.50) からも出る）。同じ成分どうしをかけあわせて足しあげる、という自然な計算になる。

この表現を使えば、(6.3.13), (6.3.14), (6.3.15) の性質はごく簡単に証明できる。とくに、成分を用いない

ときは少し手間のかかった線形性 (6.3.15) の証明も、成分表示なら一瞬でおわる。これに対して、コーシー=シュワルツ不等式 (6.3.22) や内積とコサインの関係を示す (6.3.16) などは、成分表示にしたからといって特に簡単には示せるわけではない。

問 6.3.5.a　$\boldsymbol{a} = (2, 0, 0)$, $\boldsymbol{b} = (\sqrt{3}, 1, 0)$, $\boldsymbol{c} = (-1, \sqrt{3}, 0)$ とする。三つのベクトルの絶対値を求めよ。また、三つのベクトルの内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{a}$ を計算し、それをもとに、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角、$\boldsymbol{c}$ と $\boldsymbol{a}$ のなす角を、それぞれ、求めよ。角度は 0 と π の間の量で（もちろんラジアンで[*53]）表わすこと。

問 6.3.5.b　上の問と同様にして、三つのベクトル $(1, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ が互いになす角を求めよ。

問 6.3.5.c　三つのベクトル $\boldsymbol{a} = (x, 3, -1)$, $\boldsymbol{b} =$

[*53] 3.2.6 節の冒頭をみよ。

$(5, y, 1)$, $\boldsymbol{c} = (0, -7, z)$ は互いに直交する。x, y, z を求めよ。

外積

外積の成分表示を求めるには、単位ベクトル (6.3.63) のベクトル積を求めておくとよい。6.2.1 節で述べた三次元の座標軸の決め方（とくに、(6.2.1) の「三竦み」の図式）と、直交したベクトルについての外積のルールを思い出せば、

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} = \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}, \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} = \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}, \\ &\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} = \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \end{aligned} \tag{6.3.69}$$

となる。外積の性質 (6.3.32) から、順番をひっくり返したものについては、

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} = -\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}, \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} = -\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}, \\ &\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} = -\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \end{aligned} \tag{6.3.70}$$

のように符号が変わる。同じベクトルの外積は（もちろん、自分自身と平行だから）

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} = \boldsymbol{0} \tag{6.3.71}$$

とゼロになる。

一般のベクトル $\boldsymbol{a} = (a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$, $\boldsymbol{b} = (b_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, b_{\mathrm{z}})$ の外積を求めるためには、(6.3.64) の展開を用いて、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = &\{a_{\mathrm{x}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + a_{\mathrm{y}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} + a_{\mathrm{z}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\} \\ &\times \{b_{\mathrm{x}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + b_{\mathrm{y}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} + b_{\mathrm{z}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\}\end{aligned}$$

と表し、次に外積の線形性 (6.3.33) を用いて、

$$\begin{aligned}&= a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{x}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{y}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \\ &+ a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{z}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} + a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{y}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \\ &+ a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{x}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} \\ &+ a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{z}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} + a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{y}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \\ &+ a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{x}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{z}}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} \times \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\end{aligned}$$

のようにひたすら展開し、最後は (6.3.69),(6.3.70),(6.3.71) の関係を用いると、

$$
\begin{aligned}
&= (a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{y}})\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + (a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{x}} - a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{z}})\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \\
&+ (a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{y}} - a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{x}})\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \qquad (6.3.72)
\end{aligned}
$$

となる。まとめて成分表示してやると、

$$
\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{x}} - a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{z}}, a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{y}} - a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{x}}) \qquad (6.3.73)
$$

である。

すっきりと覚えやすかった内積の表現 (6.3.68) に比べると、一見、長くてイヤになりそうだ。しかし、実はそれなりに自然な形をしているので、しかけを見抜けば、楽に覚えられる。

覚え方はいろいろあるようだが、私のおすすめ（というより、私が使っている方法）は、(6.2.1) と同じ「三

疎(すく)み」の図式

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{x} \arrow[dr] & \\ \mathrm{z} \arrow[ur] & & \mathrm{y} \arrow[ll] \end{tikzcd} \tag{6.3.74}$$

を使う方法。外積の x-成分を知りたいと思ったら、(なんか、小学生の暗記法みたいで申し訳ないけれど) この図の x の部分を手で隠す。すると y → z というのが残るから、これで、y と z がこの順番ででてくるんだ、ということがわかる。それに従って、すなおに (ベクトルをかける順番に従って) y-成分と z-成分をかけた $a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{z}}$ を書く。ただ、これだけでは何となく不公平だから、成分をひっくり返した $a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{y}}$ もいれてやろう。ただし、外積そのものは $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ を満たすのだから、ひっくり返した方にはマイナスをつける。これで x-成分 $a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{y}}$ が書けた。同じように、y-成分を知るときは y を手で隠して z → x を見て — という具合に成分を書いていけばよい。何回か空でやってみれば頭に入るはずだ。これから力学 (とくに回転運動) や

電磁気学（とくに磁場にかかわる現象）を学んでいく上でも数多くの例を計算することになるだろう。

問 6.3.5.d　磁場 $\boldsymbol{B}$ の中を速度 $\boldsymbol{v}$ で運動する電荷 q の粒子には、ローレンツ力

$$\boldsymbol{F} = q\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \tag{6.3.75}$$

が働く。とくに $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$ とかける場合について、速度 $\boldsymbol{v} = (v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$ の粒子に働く力を成分表示せよ。

問 6.3.5.e　二つのベクトル

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \quad \boldsymbol{e}^{(2)} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \tag{6.3.76}$$

は互いに直交する単位ベクトルであることを確かめよ。外積を使って、これらの両方と直交する単位ベクトル $\boldsymbol{e}^{(3)}$ を求めよ。

■線形独立性　線形独立性の概念を成分表示を使って書いてみよう。三つのベクトル

$\boldsymbol{v}^{(1)} = (v_{\mathrm{x}}^{(1)}, v_{\mathrm{y}}^{(1)}, v_{\mathrm{z}}^{(1)})$, $\boldsymbol{v}^{(2)} = (v_{\mathrm{x}}^{(2)}, v_{\mathrm{y}}^{(2)}, v_{\mathrm{z}}^{(2)})$, $\boldsymbol{v}^{(3)} = (v_{\mathrm{x}}^{(3)}, v_{\mathrm{y}}^{(3)}, v_{\mathrm{z}}^{(3)})$ が線形独立であるということは、(6.3.38) を成分で書きなおした、

$$\begin{aligned} \alpha_1\, v_{\mathrm{x}}^{(1)} + \alpha_2\, v_{\mathrm{x}}^{(2)} + \alpha_3\, v_{\mathrm{x}}^{(3)} &= 0 \\ \alpha_1\, v_{\mathrm{y}}^{(1)} + \alpha_2\, v_{\mathrm{y}}^{(2)} + \alpha_3\, v_{\mathrm{y}}^{(3)} &= 0 \\ \alpha_1\, v_{\mathrm{z}}^{(1)} + \alpha_2\, v_{\mathrm{z}}^{(2)} + \alpha_3\, v_{\mathrm{z}}^{(3)} &= 0 \end{aligned} \tag{6.3.77}$$

を満たす実数 α_1, α_2, α_3 が $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ しかない、ということだ。

つまり、成分表示では、線形独立性は連立方程式の問題に帰着されることになる。よって、「三次元では四つ以上のベクトルは線形従属である」という定理 6.4 も、幾何ではなく連立方程式の性質を使って示される。これは、のちに 991 ページの定理 7.4 で、より一般の次元で証明する。

6.3.6　三つ以上のベクトルの積

三つのベクトルのかけ算はおもしろい性質をもっている。知っていると知っていないでは、物理の現場で出会ったときに大違いなので、少し詳しくみておこう。

■スカラー三重積　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を任意のベクトルとする。これら三つを $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ のようにかけたものを**スカラー三重積** (scalar triple product) と呼ぶ。外積 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ がベクトルで、それと $\boldsymbol{a}$ の内積をとるのだから、この積はスカラーになる。スカラー三重積に特別な記号を与えて $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$ と書くこともある。

内積と外積の成分表示 (6.3.68), (6.3.73) を使えば、スカラー三重積の成分表示は、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{y}}c_{\mathrm{z}} - a_{\mathrm{x}}b_{\mathrm{z}}c_{\mathrm{y}} + a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{z}}c_{\mathrm{x}} \\ &\quad - a_{\mathrm{y}}b_{\mathrm{x}}c_{\mathrm{z}} + a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{x}}c_{\mathrm{y}} - a_{\mathrm{z}}b_{\mathrm{y}}c_{\mathrm{x}}\end{aligned} \tag{6.3.78}$$

となる。ややこしそうだが、ここには、単純できれいな規則がある。まず、どの項にも x, y, z の成分がす

べて一回ずつ登場する。三つのものを並べるやり方は $3! = 6$ とおりなので、全部で六つの項があるのだ。六項のうち三項にマイナスがついているが、これにも規則がある。三つの成分の並び方が、お馴染みの「三竦み」の図 (6.3.74) で、矢印の方向のとき、その項はプラス、矢印と反対方向のときには、その項はマイナスになっているのだ。確かめてみよう。

このようなきれいな性質があるため、(6.3.78) は、a, b, c をそのまま b, c, a あるいは c, a, b に置きかえてやっても、変わらない。つまり、スカラー三重積についての等式

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) = \boldsymbol{c} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \quad (6.3.79)$$

が得られた。これ以外の組み合わせについては、言うまでもないだろうが、外積の性質から（あるいは (6.3.78) から）、$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = -\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b})$ などのようにマイナ

図 6.14　三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ がつくる平行六面体。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が水平面にあって、それを手前の斜め上からみおろしている図を描いたつもり。この六面体の体積は、三重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ に等しい。

スがつく。

(6.3.79) のようなきれいな関係は、三重積には何か特別な意味があることを示唆(しさ)している。実は、三重積 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ の絶対値は、図 6.14 のような、ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のつくる平行六面体[*54]の体積に等しいのだ。なぜそうなるかを見よう。

[*54] 正確に言えば、$(0,0,0)$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ の八つの点を頂点とする立体図形。

まず、平行六面体の底面である、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の作る平行四辺形を考える。$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角を θ とすれば、6.3.3 節でみたように、この平行四辺形の面積 $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\sin\theta$ は $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$ に等しい。

次に、図 6.14 のように底面と垂直な線を引き、それとベクトル $\boldsymbol{c}$ とのなす角を φ とする。すると平行六面体の高さは $|\boldsymbol{c}|\,\cos\varphi$ となる。よって平行六面体の体積は、$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}|\,\cos\varphi$ となるが、これは $|\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})|$ に等しい。

三重積 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ の符号にも幾何的な意味がある。たとえば、図 6.14 の平行六面体の場合、$\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ は正である。これは、三つのベクトルが $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ の順で「右手系」をつくっていること — $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ に右ネジをまわして決まる向きと $\boldsymbol{c}$ の向きが（ぴたりとではないが、上か下かという点で）一致していること — に対応している。図の $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を入れ替えたような六面体の場合、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ は「左手系」になり、それに応じて三重積 $\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ は負になる。

つまり、右手系の立体の体積は正、左手系の立体の体積は負という約束で「符号付きの体積」を定義すれば、

> 三重積 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ は、三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のつくる平行六面体の符号付きの体積に等しい。

という結果が得られる。これを知れば、(6.3.79) の対称性は当たり前にみえるはずだ。

6.3.4 節（902 ページ）でみたように、三つのベクトルが線形独立であることは、三つを始点をそろえて並べたとき一つの平面内におさまらないことと同値である。一つの平面におさまらないということは、まさに、三つのベクトルのつくる平行六面体の体積が 0 でないことと同じだ。よって、次のような線形独立性の判定法が得られたことになる。

定理 6.6 (三つのベクトルの線形独立性の判定法)**.** 三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ が線形独立であるための必要十分条件は、$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\neq 0$ となることである。

この定理を一般化したものを、7 章で定理 7.23 (1166 ページ) として示す。

■ベクトル三重積　次に、ベクトル三つの外積についてみておこう。

今までの足し算やかけ算のくせで、三つのベクトルの外積を、つい $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ のように書いてしまいそうになるが、実は、こういう書き方は許されない。単位ベクトル (6.3.63) の外積のルール (6.3.69),(6.3.70),(6.3.71) より、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}\times(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}\times\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})})&=\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}\times\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}=-\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})}\\(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}\times\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})})\times\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})}&=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})}=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{6.3.80}$$

となることから明らかなように、ベクトル三つの外積は、かける順番によって答がかわってしまうのだ。$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ というかけ算をしたいのか、$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ というかけ算をしたいのかを、きちんと区別しなくてはならない。

言うまでもなく、$\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ はベクトルだから、$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$

もベクトル。ベクトル三つの外積を（順番に注意しながら）とってできる新たなベクトル $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ を、**ベクトル三重積** (vector triple product) と呼ぶ。

ベクトル三重積について

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \qquad (6.3.81)$$

という関係が成り立つ。これは、左辺が外積ばかり、右辺は内積と（スカラーとベクトルの）普通の積になっているという意味でおもしろいが、それ以上に、物理の現場で（忘れた頃に）現れてかなり重要な役割を果たす関係である。少なくともこういう関係があったことだけは頭に留めておきたい。

多くの本では、(6.3.81) はひたすら成分表示で示すというあつかいになっている（そして、たいていは練習問題になっている！）のだが、そうやって導出してもあまりおもしろくない。おもしろい関係にはおもしろ

い導出があるはずだとの信念にしたがって、成分表示をつかわない導出を以下に示そう。ただし、成分表示での証明も、外積の計算の練習になるので、読者が自分で手を動かしてやってみることをおすすめする（と、けっきょく練習問題にしてしまう[*55]）。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ はゼロベクトルでないとする。

はじめ、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ が直交する場合をあつかおう。このとき、

$$\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = -|\boldsymbol{b}|^2\,\boldsymbol{c}, \quad \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{c}|^2\,\boldsymbol{b} \tag{6.3.82}$$

が成り立つ。これは、（外積の成分表示ではなく）外積の定義がわかっていれば、絵を描けばたちまちわかる関係だ（わからない人は、要するに、外積がわかっていないのだから、6.3.3 節に戻ろう）。さて、$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ は互いに直交するゼロでないベクトルなので、線形独立である。よって、定理 6.5 により、適当な実数 β, γ,

*55 この節の最後で、レヴィ・チビタの記号を使った証明法を示す。

δ を用いて、

$$\boldsymbol{a} = \beta\,\boldsymbol{b} + \gamma\,\boldsymbol{c} + \delta\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \tag{6.3.83}$$

のように、ベクトル $\boldsymbol{a}$ を展開できる。この式と $\boldsymbol{b}$ の内積をとれば、右辺はほとんど消えて、$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \beta\,|\boldsymbol{b}|^2$ となる。同様に $\boldsymbol{c}$ との内積をとって、

$$\beta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}, \quad \gamma = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}}{|\boldsymbol{c}|^2} \tag{6.3.84}$$

のように展開係数が求まる。次に、(6.3.83) を使って $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$ を計算する。もちろん $(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{0}$ であることと (6.3.82) を使えば、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) &= \beta\,\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) + \gamma\,\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\ &\quad + \delta\,(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) \\ &= -\beta\,|\boldsymbol{b}|^2\,\boldsymbol{c} + \gamma\,|\boldsymbol{c}|^2\,\boldsymbol{b} \\ &= \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\end{aligned} \tag{6.3.85}$$

となり、求める (6.3.81) の関係が得られた。最後は (6.3.84) を使った。(6.3.81) の右辺には $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ 方向の

成分だけがあり、$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 方向の成分は現れないのがだが、そのしかけは、(6.3.85) の一行目から二行目への変形を（絵を描いて）吟味（ぎんみ）すればわかるだろう。

あとは、$\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ がかならずしも直交しない場合だが、これは簡単。$\boldsymbol{c}$ を $\boldsymbol{b}$ に直交する部分 $\boldsymbol{c}_\perp$ と平行な部分に分けて、$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}_\perp + \gamma\,\boldsymbol{b}$ と書く。これを、(6.3.81) 左辺に代入すると、

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}_\perp + \boldsymbol{b} \times \gamma \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}_\perp) \tag{6.3.86}$$

右辺に代入すると、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}_\perp) + \boldsymbol{b}\,\gamma\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\ &\quad - \boldsymbol{c}_\perp\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) - \gamma\,\boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}_\perp) - \boldsymbol{c}_\perp\,(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) \end{aligned} \tag{6.3.87}$$

となり、直交する場合の結果から、これは (6.3.86) に等しい。

■ベクトル四つの積　ベクトル四つの積についてもいろいろな関係式が知られている[*56]。これらは、すぐに物理に役立つというわけではないが、念のために、ここにまとめておこう。証明はしないが、もちろん、成分表示を使えば機械的な計算で証明できる[*57]。成分を用いない「おもしろい」証明ができるか、試してみるのも一興（いっきょう）だろう。なお、以下ではスカラー三重積を $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] := \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ と書く。また、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ は任意のベクトルである。

スカラー三重積にベクトルをかけたものについて、

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\, \boldsymbol{d} = [\boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\, \boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{c}]\, \boldsymbol{b} + [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}]\, \boldsymbol{c} \tag{6.3.88}$$

というきれいな関係が成り立つ。右辺は、$\boldsymbol{d}$ が、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ をそれぞれ三重積の中から「追い出して」自分が代わりに入りこんだ形になっている。追い出されたベクト

---

*56 この部分はとばしてもよい。

*57 この節の最後に紹介するレヴィ・チビタの記号を用いると、証明はより能率的になる。

ルは外に出ているわけだ。ここで、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を、それぞれ $\boldsymbol{v}^{(1)}$, $\boldsymbol{v}^{(2)}$, $\boldsymbol{v}^{(3)}$ と書き、$\boldsymbol{d}$ を $\boldsymbol{v}$ と書く。(6.3.88) より、$[\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}] \neq 0$ であれば、

$$\boldsymbol{v} = \frac{[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}]}{[\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}]}\boldsymbol{v}^{(1)} + \frac{[\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^{(3)}]}{[\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}]}\boldsymbol{v}^{(2)} + \frac{[\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}]}{[\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}]}\boldsymbol{v}^{(3)} \tag{6.3.89}$$

がいえる。つまり、定理 6.5 で保証されている一般の基底での展開 (6.3.41) の展開係数 α_1, α_2, α_3 をあからさまに書くことができた。これは、双対基底を使った (6.3.54) と同じ表式である。

二つの外積の内積についての

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}) - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\,(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}) \tag{6.3.90}$$

はラグランジュ[*58]の恒等式と呼ばれている。

四つのベクトルの外積については、かける順に応

[*58] 432 ページの脚注 *57 を見よ。

じて、

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}))=\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{a},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}]-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\,(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}) \quad (6.3.91)$$

あるいは

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{d}]\,\boldsymbol{c}-[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]\,\boldsymbol{d}\\&=[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{b}-[\boldsymbol{c},\boldsymbol{d},\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{a}\end{aligned} \quad (6.3.92)$$

が成り立つ。

■レヴィ・チビタ*59 の記号　外積とある程度のつき合いのある「中級」の読者のために、外積をあつかうための少し進んだ技法を紹介しておこう*60。

ここでは、ベクトルを成分表示する際、添え字 x, y, z のかわりに、1, 2, 3 を用いて、$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)$ のよ

*59 Tullio Levi-Civita (1873–1941) イタリアの数学者。彼の微分幾何学についての仕事は、アインシュタインが一般相対性理論を作り上げるための格好のことばを与えた。

*60「初級」の読者はさしあたってここをとばしてもよいが、7.4 節で行列のディターミナントを学ぶ際にレヴィ・チビタの記号を知る必要がある。

うに表すことにする。これによって、たとえば、内積の成分表示 (6.3.68) は、

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \, b_i \tag{6.3.93}$$

のように、和を使った簡単な式で表される。

外積も同じように表すため、$i, j, k = 1, 2, 3$ について、**レヴィ・チビタの記号** (Levi-Civita symbol) を

$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2) \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases} \tag{6.3.94}$$

により定義する。「上記以外」というところでは、i, j, k の内に重複する値をとるものがあることに注意。

(6.3.94) は、これまでの外積とのつき合いで馴染みのある符号のルールだ。たとえば、スカラー三重積の成分表示 (6.3.78) に現れた「三辣(さんすく)みの順まわりは正、逆回りは負、それ以外は 0」という規則そのものになっ

ている。これを使えば、外積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ の i 成分は、

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})_i = \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\, a_j\, b_k \tag{6.3.95}$$

のように、コンパクトに表すことができる。

内積についての (6.3.93) と外積についての (6.3.95) から、たとえば、スカラー三重積 (6.3.78) は、

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] := \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\, a_i\, b_j\, c_k \tag{6.3.96}$$

と瞬時に書ける。(6.3.78) そのものだ。

もう少し当たり前でない例として、ベクトル三重積の関係式 (6.3.81) を導いてみよう。まず、(6.3.95) を

ひたすら使うと、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))_i &= \sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\, a_j\, (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})_k \\
&= \sum_{j,k,\ell,m=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\, \epsilon_{k,\ell,m}\, a_j\, b_\ell\, c_m
\end{aligned}
\tag{6.3.97}
$$

と書ける。(6.3.94) に注意すると、j, k を止めたとき、和に寄与するのは $(\ell, m) = (i, j)$ のとき、ないしは $(\ell, m) = (j, i)$ のときのみ。さらに、前者では $\epsilon_{i,j,k}\, \epsilon_{k,\ell,m} = 1$、後者では $\epsilon_{i,j,k}\, \epsilon_{k,\ell,m} = -1$。よって、

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}))_i &= \sum_{\substack{j,k=1,2,3 \\ (i,\,j,\,k\ \text{はすべて異なる})}} (a_j\, b_i\, c_j - a_j\, b_j\, c_i) \\
&= \sum_{\substack{j=1,2,3 \\ (j \neq i)}} (a_j\, b_i\, c_j - a_j\, b_j\, c_i)
\end{aligned}
$$

だが、ここで $0 = a_i\, b_i\, c_i - a_i\, b_i\, c_i$ をたせば、

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{3} a_j\, b_i\, c_j - \sum_{j=1}^{3} a_j\, b_j\, c_i \\
&= b_i\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - c_i\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \qquad (6.3.98)
\end{aligned}
$$

となり、(直感はわかないけれど) 求める関係式が自動的にでてくる。

こういう「飛び道具」が好きな読者は、ほかの関係式も、レヴィ・チビタ記号を使ってできる限り能率的に証明してみよう。ベクトルそのものについての直感とはまた別の、抽象的な添え字の和を使った計算や関係式についての直感を育てるにはよい題材だ。

6.3.7　座標変換とベクトル

6.3.5 節で成分表示を導入してからは、ベクトルを三つの数の組 $(v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$ として扱えるようになった。これは便利だが、ベクトルが本来もっていた「空間の矢印」という幾何的な意味はみえにくくなってしまっ

た[*61]。また、ベクトルに対応する概念としてスカラーがあるのだが、ベクトルの成分は（「ただの数」なのだから）スカラーとみなすべきなのだろうか？

もちろん、ベクトルの幾何的な特徴は忘れてはいけないし、ベクトルの各々の成分は決してスカラーではない。たとえ成分表示をしながらも、こういった事情をはっきりさせるためには、座標変換にともなって、ベクトルやスカラーがどのように変換されるかをみてやればよい。先を読む前に、6.1.3 節、6.2.3 節で議論した座標変換を思い出してほしい。

三次元空間に二つの点 P, Q をとり、これらを結ぶベクトルを $\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ とする。しつこく書いてきたように、点やベクトルを考える際に座標を決める必要はない。

はじめに一つのデカルト座標系を選び、それで表した P と Q の座標を、それぞれ、$(p_{\mathrm{x}}, p_{\mathrm{y}}, p_{\mathrm{z}})$, $(q_{\mathrm{x}}, q_{\mathrm{y}}, q_{\mathrm{z}})$

[*61] 7 章では、幾何的な意味をまったくもたない、単なる数の組としての「代数ベクトル」をあつかう。

とする。この座標系での、ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分表示は、(6.3.62) でみたように $(v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}}) = (q_{\mathrm{x}} - p_{\mathrm{x}}, q_{\mathrm{y}} - p_{\mathrm{y}}, q_{\mathrm{z}} - p_{\mathrm{z}})$ である。

もう一つ、デカルト座標系をとる。新しい座標系での P と Q との座標を、それぞれ、$(p'_{\mathrm{x}}, p'_{\mathrm{y}}, p'_{\mathrm{z}})$, $(q'_{\mathrm{x}}, q'_{\mathrm{y}}, q'_{\mathrm{z}})$ とする[*62]。当然、前と同じベクトル $\boldsymbol{v}$ の新しい座標系での成分表示は、$(v'_{\mathrm{x}}, v'_{\mathrm{y}}, v'_{\mathrm{z}}) = (q'_{\mathrm{x}} - p'_{\mathrm{x}}, q'_{\mathrm{y}} - p'_{\mathrm{y}}, q'_{\mathrm{z}} - p'_{\mathrm{z}})$ で与えられる。新旧の座標系での同じベクトルの成分表示 $(v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}})$ と $(v'_{\mathrm{x}}, v'_{\mathrm{y}}, v'_{\mathrm{z}})$ がどのように関係し合うかをみよう。

まず、もっとも簡単な座標変換である平行移動を考えよう。点の座標が (6.2.11) で変換されるわけだから、計算するまでもなく、$(v_{\mathrm{x}}, v_{\mathrm{y}}, v_{\mathrm{z}}) = (v'_{\mathrm{x}}, v'_{\mathrm{y}}, v'_{\mathrm{z}})$ である。ベクトルの成分表示は、座標系を平行移動しても形を

[*62] 新しい座標系の座標軸の名を $\mathrm{x}', \mathrm{y}', \mathrm{z}'$ と呼ぶなら、新しい成分は $p_{\mathrm{x}'}$ のように書くのが論理的だと思うが、添え字についたプライムは読みにくいし p'_{x} という書き方が定着しているので、こちらを使う。

変えないのだ[*63]。

次に座標系の回転。たとえば、座標系を z 軸のまわりに θ だけ回転させると、点の座標が (6.2.12) に従って変換する。よって、ベクトルの成分も、まったく同じ

$$\begin{aligned} v'_{\mathrm{x}} &= (\cos\theta)\, v_{\mathrm{x}} + (\sin\theta)\, v_{\mathrm{y}}, \\ v'_{\mathrm{y}} &= -(\sin\theta)\, v_{\mathrm{x}} + (\cos\theta)\, v_{\mathrm{y}}, \\ v'_{\mathrm{z}} &= v_{\mathrm{z}} \end{aligned} \tag{6.3.99}$$

という変換をうける。他の軸のまわりの回転についても同様である。座標系を回転すると、ベクトルの成分は、点の座標と同じ変換を受ける。

一方、ベクトルの絶対値 $|\boldsymbol{v}|$ やベクトルの内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ は、点のあいだの距離だけで定義されているから、座標系を平行移動しようが回転しようが、まったく変化しない。これらがスカラーだ。

---

*63 位置ベクトルを考えると話がややこしくなるので、位置ベクトルを除外した。前にも書いたように、位置ベクトルは本来はベクトルとみなすべきではないので、あえて（ややこしい思いをしてまで）議論しない。

こうして、座標系を変えたときどのように見え方が変わるか — これを、変換性という — をとおして、ベクトルとスカラーを特徴づけることができる。**座標系を平行移動しても回転しても不変なのがスカラーであり、座標系の平行移動については不変だが、回転については座標と同じように変換するのがベクトル**なのである[*64]。

6.4　三次元空間の中の運動

座標やベクトルの概念がととのったので、物理へのもっとも基本的な応用である、三次元での運動の記述という問題に簡単に触れておこう[*65]。これからするよ

---

*64 これ以外に座標系の反転についての変換性を考えることもあるが、ここでは、そこまで踏み込むことはしない。

*65 この節は、この本のこれから先の内容とは（直接には）関連しないので、とばしてもかまわない。力学を学びながら、その背景にある数学との対応をはっきりさせたいときに、きちんと読むのがいいだろう。

うに、運動の原因などには立ち入らず、運動の様子だけを定量的に記述するのは**運動学** (kinematics) という立場だ。これに対して、運動の原因を分析して、そこから運動の様子を詳細に議論するのが、**力学** (mechanics) である。

6.4.1　点粒子の運動、速度、加速度

三次元空間の中を、大きさの無視できる粒子*66が運動している。まず、はっきりさせておくべきなのは、われわれが座標系を設定しようがしまいが、粒子は運動

*66 「無視できる」というときには、何に比べて無視できるのかをはっきりさせなくては意味がない。ここで言っているのは、運動を考える範囲に比べると粒子の大きさが十分に小さく、粒子の大きさの効果が運動の様子に影響を与えない、ということである。ついでだが、電子やクォークのような素粒子（分子、原子はもちろん陽子、中性子も複合粒子であり、素粒子ではない）は大きさをもたない点状の粒子だと（今のところは）考えられている。ただし、素粒子のようなミクロな対象の運動の記述には量子論が必要になるので、ここでの話はあてはまらない。

するし、その運動は物理法則にきちんと従うということだ。ただ、その法則を認識し、理論的に書き出すためには、座標系を使って運動を定量的に記述する方が便利なのだ。

まず、時間をはかる目盛り（つまり、時刻）を設定し $t \in \mathbb{R}$ という変数で表す。時刻 t における粒子の位置に対応する空間の点を $\boldsymbol{r}(t)$ と書く。2.4.1 節の抽象的な書き方を使えば、$\boldsymbol{r}(\cdot)$ は、実数から三次元の空間への写像である。粒子の運動の様子からこのような写像が決まるし、逆に、このような写像を与えれば三次元空間での運動が一つ決まる。

■運動の座標表示と速度ベクトル、加速度ベクトル　ここで、一つのデカルト座標系を選んで、固定する。すると、三次元空間は集合 $\mathbb{R}^3$ とみなすことができるので、運動を表す写像は、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\boldsymbol{r}} & \mathbb{R}^3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ t & \longmapsto & \boldsymbol{r}(t) \end{array} \tag{6.4.1}$$

という関数とみることができる。

点 $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$ を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ のように座標で表したことに対応して、(6.4.1) の関数も

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{6.4.2}$$

のように座標表示することができる。ここで、$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ は、いずれも、実数上の実数値関数である。通常の実現可能な運動については、これらの関数は t について二回微分可能である[*67]。

このように、空間の中の粒子の運動は、単独の関数 $\boldsymbol{r}(t)$ で表すこともできるし、実数に値をとる三つの関数 $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ の組で表すこともできる。もちろんどちらでも同じことだが、場合に応じて、より便利な書き方（および考え方）を使うのがよい。

二つの時刻 t と $t + \Delta t$ を考える。対応する粒子の位置は、それぞれ、$\boldsymbol{r}(t)$ と $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$ である。ここで、点 $\boldsymbol{r}(t)$ から $\boldsymbol{r}(t + \Delta t)$ に向かうベクトルを $\Delta\boldsymbol{r}(t) :=$

[*67] 働く力が有限であれば、ニュートン方程式から、そうなる。

$\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$ と書き、変位ベクトルと呼ぶ。成分表示すれば、もちろん、

$$\Delta\boldsymbol{r}(t)=(x(t+\Delta t)-x(t),y(t+\Delta t)-y(t),z(t+\Delta t)-z(t)) \tag{6.4.3}$$

となる。変位ベクトルは、位置ベクトルとは違い、(6.3.7 節ではっきりさせた意味で）正真正銘（しょうしんしょうめい）のベクトルである。

速度 (velocity) ベクトルを、

$$\boldsymbol{v}(t):=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t} \tag{6.4.4}$$

という極限で定義しよう。もともと $\Delta\boldsymbol{r}(t)$ がベクトルだから、それを定数倍して極限をとっても（極限がきちんと存在すれば）ベクトルが得られる。微分の定義 (3.1.7) と見比べるまでもなく、これは時間による微分の形をしているので、

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}(t)=\dot{\boldsymbol{r}}(t) \tag{6.4.5}$$

という書き方をする。また、(6.4.4) に成分表示を代入

すれば、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) &= \lim_{\Delta t\to 0}\Bigl(\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}, \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}, \\ &\qquad\qquad \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\Bigr) \\ &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \qquad (6.4.6)\end{aligned}$$

のように、速度ベクトルは、$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ の導関数を成分にもつベクトルであることもわかる。

同様に、**加速度** (acceleration) ベクトルを、

$$\boldsymbol{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{\Delta t} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \qquad (6.4.7)$$

と定義する。

速度ベクトルや加速度ベクトルは、今まで見てきたような、空間の二点を結ぶ「矢印」ではないが[*68]、もち

[*68] これは次元（単位）を考えれば明らか。空間の座標なら m のような長さの次元をもつが、速度や加速度は m/s や m/s^2 といった次元をもつ。

ろん、物理的にも数学的にも立派なベクトルである[*69]。

まず、ごく直感的に考えて、粒子が動いているとき、そこには（座標を定義しようがしまいが）動いていく向きと動いていく速さがある。つまり、速度という「矢印」があると思っていい。粒子の上に「乗っていて」どちらの向きにどれくらいの速さで進みつつあるかを示す矢印である[*70]。

もっと数式レベルで考えたいなら、6.3.7 節で書いたように、ある量がベクトルかどうかは、座標変換したと

[*69] 進んだ注：空間が曲がっているような状況（実際、われわれの住んでいる空間は一般相対性理論の効果で少しだけ曲がっているのだが）では、空間の二点を結んだ線はベクトルではなくなるが、速度や加速度はベクトルである。そういう意味で、速度や加速度こそが正真正銘のベクトルであって、「空間の二点を結ぶ矢印」は平らな空間でたまたまベクトルになっているだけなのだ。

[*70] 力学の本などには、速度ベクトルを粒子を始点とした矢印として描いてある（私も力学の講義をしていたときは、そういう図をいつも黒板に描いていた）。しかし、ああいう絵は、あくまでわかりやすくするための方便であって、速度ベクトルは空間の二点を結ぶ矢印でないことは忘れないでほしい。

き成分表示がどのように変換するかをとおして判断することができる。この基準からしても、速度も加速度も、文句なくベクトルということになる。速度の変換性をみるには、まず変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(t+\Delta t) - \boldsymbol{r}(t)$ を考える。この量はごく普通のベクトルなので、座標を回転すると、成分表示は座標と同じように回転の変換を受ける。$\Delta t \to 0$ の極限をとっても変換性は変わらないので、速度ベクトルも、ベクトルの変換性をもつことがわかる。このことから、速度の差 $\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)$ もベクトルの変換性をもつことになり、再び極限を考えることで、加速度もベクトルとして変換することが結論される。

■極座標表示での速度ベクトル　三次元の極座標（6.2.2 節）を使って、粒子の運動を表すと便利なこともある。その場合には原点からの距離 r と二つの角度 θ, φ（図 6.6）が時々刻々と変わっていくのだから、これらを $r(t), \theta(t), \varphi(t)$ のように時間の関数にすればよい。混乱の余地のないときには、これら三つを括弧（かっこ）で

まとめて $(r(t), \theta(t), \varphi(t))$ と書いてもよい。

ここで、少し注意しなければならないのは、速度や加速度のあつかいだ。極座標の意味を無視して、**速度は一回微分だから** $(\dot{r}(t), \dot{\theta}(t), \dot{\varphi}(t))$**、加速度は二回微分だから** $(\ddot{r}(t), \ddot{\theta}(t), \ddot{\varphi}(t))$ **などと考えては絶対にいけない。**それでいいような気になってしまった人は、「数式の表面しか見えない病」の兆候があるので、要注意。

たとえば、速度の定義 (6.4.4) の出発点は、空間の二点を結ぶベクトルとしてきちんと定義された変位ベクトル $\Delta\boldsymbol{r}(t)$ を Δt で割ったものであった。この量 $\Delta\boldsymbol{r}(t)/\Delta t$（の $\Delta t \to 0$ の極限）をデカルト座標で表すと、たまたま、各々の成分の時間微分という形がでてきたに過ぎない。

極座標表示で運動を表していて、速度や加速度を議論したいときには、速度や加速度と相性（あいしょう）のよいデカルト座標系を利用するのがベストだ。そのためには、極

座標をデカルト座標になおす (6.2.5) を使って、

$$
\begin{aligned}
x(t) &= r(t)\,\sin\theta(t)\,\cos\varphi(t),\\
y(t) &= r(t)\,\sin\theta(t)\,\sin\varphi(t),\\
z(t) &= r(t)\,\cos\theta(t)
\end{aligned}
\tag{6.4.8}
$$

のように、デカルト座標での運動の記述にもどる。そして、(6.4.6) を使うべく、それぞれの成分を t で微分する。積の微分 (3.1.27)、合成関数の微分の連鎖率 (3.1.30) の格好の練習問題になっているので、是非やってほしいが、結果は、

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \dot{r}(t)\,\sin\theta(t)\,\cos\varphi(t) + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\cos\theta(t)\,\cos\varphi(t)\\
&\qquad - r(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\sin\theta(t)\,\sin\varphi(t)\\
\dot{y}(t) &= \dot{r}(t)\,\sin\theta(t)\,\sin\varphi(t) + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\cos\theta(t)\,\sin\varphi(t)\\
&\qquad + r(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\sin\theta(t)\,\cos\varphi(t)\\
\dot{z}(t) &= \dot{r}(t)\,\cos\theta(t) - r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\sin\theta(t)
\end{aligned}
\tag{6.4.9}
$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(t) &= (\sin\theta(t)\,\cos\varphi(t), \sin\theta(t)\,\sin\varphi(t), \cos\theta(t))\\ \boldsymbol{e}^{(\theta)}(t) &= (\cos\theta(t)\,\cos\varphi(t), \cos\theta(t)\,\sin\varphi(t), -\sin\theta(t))\\ \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(t) &= (-\sin\varphi(t), \cos\varphi(t), 0)\end{aligned} \tag{6.4.10}$$

と定義してやると[*71]、(6.4.9) を

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}(t) = \dot{r}(t)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(t) + r(t)\,\dot{\theta}(t)\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(t)\\ + r(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\sin\theta(t)\,\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(t)\end{aligned} \tag{6.4.11}$$

のようにまとめることができる。実は、
$\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(t), \boldsymbol{e}^{(\theta)}(t), \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(t)\}$ は (t を止めたとき) 正規直交基底になっている。この事実に気づくと、いろいろと計算が便利になることがある。たとえば、正規直交基底での展開係数からベクトルの絶対値を求める (6.3.51)

[*71] ここでも、829 ページの脚注 *4 で述べた方針に従って、座標の名前には立体の文字を用い、斜体の変数名と区別した。

を使えば、

$$|\boldsymbol{v}(t)| = \sqrt{(\dot{r}(t))^2 + (r(t)\,\dot{\theta}(t))^2 + (r(t)\,\dot{\varphi}(t)\,\sin\theta(t))^2} \tag{6.4.12}$$

が得られる。

加速度ベクトルについては、(6.4.9) をさらにもう一回微分しなくてはいけないから、なかなか厄介な形になる。一般形を書いてもそれほど役には立たないので、ここでは深入りしないでおこう。

問 6.4.1.a　原点から粒子の位置にむかって引いたベクトルを $\boldsymbol{r}(t)$ と書く。原点に力の源がある場合の力学では、角運動量 $\boldsymbol{J}(t) = m\boldsymbol{r}(t) \times \boldsymbol{v}(t)$ が重要な役割を果たす（m は粒子の質量）。$\boldsymbol{J}(t)$ を、基底 $\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(t), \boldsymbol{e}^{(\theta)}(t), \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(t)\}$ で展開した形で、求めよ。ここで $\boldsymbol{r}(t) = r(t)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(t)$ であることが役に立つ。

問 6.4.1.b　極座標とデカルト座標の関係 (6.2.5) を、

$$\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi) := (r\,\sin\theta\,\cos\varphi, r\,\sin\theta\,\sin\varphi, r\,\cos\theta) \tag{6.4.13}$$

と書く。三つのベクトル

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi) := \frac{d\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{dr}$$
$$\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi) := \frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{d\theta}$$
$$\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi) := \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{d\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{d\varphi} \tag{6.4.14}$$

を計算し、これらが正規直交基底をなすことを確かめよ[*72]。また、(6.4.10) で定義した三つのベクトルは、$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)$, $\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)$, $\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)$ に $(r(t),\theta(t),\varphi(t))$ を代入したものになっていることを確認せよ。

6.4.2　回転と角速度

剛体（変形しない物体）の回転運動を調べるのは力学の重要なテーマだ。ここでは、剛体の回転についての運動学の初歩をみておこう。

[*72] これらの基底ベクトルは後に 10.9.1 節でも利用する。

図 6.15　固定された回転軸のまわりを一定のはやさで回転している剛体。回転から右ネジのルールで決まる方向を向き、回転の角速度と同じ大きさをもった角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ によって回転が特徴づけられる。

■角速度ベクトル　固定された軸のまわりを、一定のはやさでまわっている剛体を考えよう（図 6.15）。この回転を定量的に特徴づけることを考えたい。

回転なのだから、剛体が単位時間にどれだけの角度回転するかという**角速度** (angular velocity) $\omega > 0$ が、はやさの目安になる。剛体が一周まわるのにかかる時間を T とすれば、$\omega = 2\pi/T$ である。

回転を特徴づけるためには、角速度 ω だけでなく、

回転の軸が空間のなかでどちらを向いているかという情報が必要だ。さらに、ω と回転軸が決まっても、二通りのまわり方（右まわりか左まわりか）があるので、どちらなのかを教えてやらなくてはいけない。

以上の、角速度、回転軸、まわり方の三つの情報を、**角速度ベクトル** (angular velocity vector) と呼ばれる一つのベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ で表すことができる。$\boldsymbol{\Omega}$ は、回転軸と平行にとり、回転から右ネジの規則で決まる方向に向いているとする。大きさは、$|\boldsymbol{\Omega}| = \omega$ のように角速度と等しくとる。

こうして、回転は角速度ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ で定量的に特徴づけることができる。ただし、ここで登場したベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ は、たとえば速度ベクトル $\boldsymbol{v}$ に比べると、あまり「ベクトルらしく」ないことに注意しておこう。

速度ベクトルのもとになった変位ベクトル $\boldsymbol{\Delta r}$ は、まさに空間の二点を結ぶ矢印だった。これを時間差でわって極限をとった速度ベクトルも、ごく自然に、「矢印らしさ」を受け継いでいる。しかし、剛体が回転して

いるときには、空間に矢印が現れるわけはない。たしかに剛体のなかの動かない部分は一次元的な軸になっているが、この軸に向きはついていない。矢印の向きを決めるための「右ネジの規則」は、物理法則ではなく、単にわれわれの約束事だったことを思い出そう。

回転が矢印でないことは、三次元以外のことを考えると、よりはっきりしてくる。二次元の世界で剛体（といっても、うすっぺらいものだが）が回転している場合、回転の軸に相当するのは、回転中心の一点になる。よって、回転を定量的に記述するには、符号付きの角速度を指定すれば十分である。四次元空間の様子が見える人は思い浮かべてほしいのだが、四次元の剛体が回転しているとき、剛体の動かない部分は、平面状の領域になる。つまり、回転軸があるのではなく、「回転面」があるのだ。この場合、回転がベクトルに対応しないことを明らかだろう。これに対して、速度や加速度は、何次元に行っても立派なベクトルなのである。

このように、回転をベクトルに対応させるのは、三

次元空間だけで可能な（ある意味で特殊な）表現であることがわかる[*73]。もちろん、回転をベクトルで表すのは間違っているわけでもないし、きわめて便利なことなのだが、その対応関係には（速度や加速度とはちがって）「一ひねり」があることを頭にいれておくのがいいだろう。

■角速度と剛体上の点の速度　角速度は、剛体上の点の速度と簡単な関係で結ばれている。$\boldsymbol{r}_0$ を回転軸上の任意の点とする。ある瞬間における、剛体上の任意の位置 $\boldsymbol{r}$ での剛体（の構成部分）の速度 $\boldsymbol{v}$ は、

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0) \tag{6.4.15}$$

で与えられる[*74]。

[*73] これは、ベクトルの外積を定義した事情と完全に同じである。

[*74] 891 ページの脚注 *41 で、二つの（本当の）ベクトルの外積は、正確にはベクトルではないと書いたが、もちろん $\boldsymbol{v}$ は本当のベクトルだ！　この場合、$\boldsymbol{\Omega}$ が本当のベクトルではなかったので、ベクトルとの外積をとると、本当のベクトルに戻るというわけだ。(6.4.18) をみるとなっとくがいくだろう。

図 6.16　剛体上の点 $\boldsymbol{r}$ の速度 $\boldsymbol{v}$ と角速度 Ω の関係 (6.4.15) を考えるための図。$\otimes$ という記号は、ベクトル $\boldsymbol{v}$ が紙のこちら側から向こう側にむかっていることを表す。こういう図は、本文を読みながら、自分なりに工夫して描いてみるのがもっともいいだろう。

この関係が正しいことをみるため、点 $\boldsymbol{r}$ から回転軸に垂線を引き、それが回転軸と交わる点を $\boldsymbol{r}'_0$ とする (図 6.16)。また $\ell = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'_0|$ を両者の距離、つまり点 $\boldsymbol{r}$ から回転軸までの距離とする。点 $\boldsymbol{r}$（にある剛体の部分）は、点 $\boldsymbol{r}'_0$ を中心にした半径 ℓ の円周上をまわっている。角速度が ω だから、円周上での速度は $v = \ell\omega$ である。

一方、$(\boldsymbol{r}_0' - \boldsymbol{r}_0) \mathbin{/\!/} \boldsymbol{\Omega}$ だから、

$$\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) = \boldsymbol{\Omega}\times\{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')+(\boldsymbol{r}_0'-\boldsymbol{r}_0)\} = \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0') \tag{6.4.16}$$

である。さらに、$(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0') \perp \boldsymbol{\Omega}$ だから、

$$|\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0)| = |\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0')| = \ell\omega \tag{6.4.17}$$

で、これは先ほどみた速度。また、$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0')$ がまさに速度の方向を指していることも図 6.16 からすぐにわかる。よって、(6.4.15) がいえる。

逆に、剛体上の点 $\boldsymbol{r}$ の速度 $\boldsymbol{v}$ を使って

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0') \times \boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0'|^2} \tag{6.4.18}$$

と書けることも同じように考えればわかる。実際、べ

クトル三重積についての関係式 (6.3.81) から、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0) &= -(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\times\left\{\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')\times\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'|^2}\right\}\\ &= -(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'|^2}\\ &\quad+\boldsymbol{v}\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'|^2}\end{aligned}$$

だが、$(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)\perp\boldsymbol{v}$ なので、第一項は消える。第二項を少し変形して、

$$= \boldsymbol{v}\frac{\{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')+(\boldsymbol{r}_0'-\boldsymbol{r}_0)\}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0'|^2}$$

と書き、$(\boldsymbol{r}_0'-\boldsymbol{r}_0)\perp(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0')$ に注意すれば、

$$= \boldsymbol{v} \tag{6.4.19}$$

となり、(6.4.15) が再現される。

第 7 章

行列とベクトル

この章では、ベクトルと行列の性質を詳しく議論する。線形代数[*1]という数学の分野の、あまり抽象的でない部分を見ていくことになる。ベクトルと行列は数学一般の道具立てとしてもきわめて重要だが、物理を

[*1] 線形代数というのは、足し算と実数倍が定義できる対象の性質を詳しく調べる数学の分野である。いうまでもなく、この「足し算と実数倍が定義できる対象」がベクトルである。

学ぶ者にとっても必須の言葉の一つである。

7.1 節では、複素数を成分にもつ一般次元のベクトルを導入し、基本的な演算について述べる。7.2 節では、行列を定義し、行列とベクトルの基本的な演算や、行列の基本的な性質をみる。短い 7.3 節では、二次の行列に限って、逆行列とディターミナントを導く。7.4 節では、行列の理論でもっとも深い意味をもつディターミナントについて、じっくりと議論する。7.5 節では、ディターミナントの理論の応用として、逆行列と一次方程式について述べる。7.6 節では、行列の応用ではもっとも重要な固有値と固有ベクトルについて議論する。最後の二つの節ではかなり進んだ話題を扱う。7.7 節では実行列についての強力なペロン・フロベニウスの定理とそれに関連する話題を述べる。7.8 節では行列の指数関数を定義し基本的な応用を述べる。

これは長い章だが、ここで学ぶ線形代数の知識がとてつもなく強力で汎用性（はんようせい）のある「武器」になることを、これから先、物理を（あるいは、理数系の他の分野を）

学びながら痛感するはずだ。

なお、この章では d は次元を意味する。

- **実数と複素数についての感覚**
- **抽象的な文字式や和を扱うこと**
- **空間のベクトルについての正しい理解（6.3 節）、特に線形独立性についての幾何的な直観**

7.1　代数ベクトルの基本

この節では、複素数を成分にもつ d 次元の代数ベクトルを定義し、基本的な演算と性質をみる（d は任意の自然数）。代数ベクトルとは、かならずしも幾何的なイメージをともなわない「数の組」としてのベクトルをいう。

まず d 次元の代数ベクトルを定義し、基本的な記法や演算についてみる（7.1.1 節）。線形代数でもっとも

重要な概念である線形独立性と基底については、節をあらためて、詳しく解説する（7.1.2 節）。最後に、内積を導入し、それに関連して正規直交基底を議論する（7.1.3 節）。

7.1.1　d 次元のベクトルの定義と演算

三次元空間のベクトルについては 6.3 節で詳しく議論したが、ここでは、線形代数の立場から、より広い意味でのベクトルを考察する。

三次元空間のベクトルは、本来は「空間の二点を結ぶ矢印」という幾何的な意味をもっていた。しかし、6.3.5 節で成分表示を導入したあとは、ベクトルを「三つの実数の組」と見ることもできた。矢印としての見方は空間ベクトルを**幾何ベクトル** (geometric vector) ととらえる立場であり、実数の組としての見方は空間ベクトルを**代数ベクトル** (algebraic vector) ととらえる立場である。

線形代数でのベクトルは、その名のとおり、代数ベ

クトルである。この章では、「いくつかの数の組」をベクトルと呼び、その性質を調べることにする。

もちろん、矢印としてのベクトルを成分表示したものも、ここで考える代数ベクトルの特別の場合である。しかし、代数ベクトルがかならずしも幾何ベクトルに対応しない。たとえば、林檎(りんご)の値段と蜜柑(みかん)の値段を並べて

$$\begin{pmatrix} 120\,\text{円} \\ 80\,\text{円} \end{pmatrix} \tag{7.1.1}$$

のように表したものは、「数の組」という意味で代数ベクトルとみなせる。しかし、これが「矢印」としての幾何的な意味をもっているとは言い難い[*2]。あるいは、林檎と蜜柑だけでなく、スーパーに並んでいる二十種類の果物の値段をすべて並べたものは、どう考えても、われわれの想像できる「矢印」には対応するわけではない。

[*2] もちろん、横軸を林檎の値段、縦軸を蜜柑の値段として座標をとり、(7.1.1) に対応する矢印を描くことはできる。しかし、その矢印をたとえば回転させることに意味はない。

まとめれば、**幾何的なベクトル（＝矢印）を成分表示したものは代数ベクトルであるが、代数ベクトルはより広い概念なのである**[*3]**。**

このように、より広いベクトルを考えるにあたって、数の範囲も広げ、複素数を並べてつくった代数ベクトルもあつかうことにする。たとえば、二つの複素数 $a+bi$, $c+di$（a, b, c, d は実数）を並べた

$$\begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} \tag{7.1.2}$$

のような代数ベクトルを考えるのだ。実数が成分の場合には、二成分のベクトルは（たとえ物理的意味がなくても）二次元平面のグラフ上の矢印として表すことができる。しかし、このような複素数の組になると、矢印による表現はほとんど不可能になる。各々の複素数を複素平面で表現すれば、二つの直交する平面が必要

[*3] 多くの場合、幾何ベクトルと代数ベクトルの区別に気を使う必要はない。しかし、二つの概念が異なっていることに気づかないために無用な混乱に陥ることがあるので注意しよう。

だから、けっきょく四次元の（実）空間が必要になってしまう。そこでの「矢印」を具体的に想像するのは（普通の人には）無理な相談だ。

けっきょく、代数ベクトルをあつかう際には、「矢印」という幾何的なベクトルのイメージに頼ることはできなくなる。しかし、これから見ていくように、このような代数ベクトルについても、幾何ベクトルで得られた結果の多くがごく自然に拡張されて成立するのである。そこで、高次元の空間や複素座標の空間が想像できないわれわれとしては、代数ベクトルをあつかう際にも、漠然とだが「矢印」的なイメージを思い浮かべ、一種のアナロジーとして幾何ベクトルのイメージを利用していくのがよいと思う。

■列ベクトルと行ベクトル　d 個の数 $a_1, a_2, \ldots, a_d$ を縦に並べた

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \tag{7.1.3}$$

を d 次元の**列ベクトル** (column vector)、あるいは**縦**(たて)**ベクトル**、あるいは単にベクトルという。数 $a_1, \ldots, a_d$ はベクトル $\boldsymbol{a}$ の成分と呼ばれる。a_i は $\boldsymbol{a}$ の第 i 成分であるという。一般に列ベクトル $\boldsymbol{a}$ の第 i 成分を $(\boldsymbol{a})_i$ と書くこともある。また、二つの列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ について $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ とは、全ての（対応する）成分が等しいことをいう。

ここで、成分 a_i がすべて実数の場合、このベクトルは**実ベクトル** (real vector) であるという。実ベクトルは d 個の実数の組だから、すべての d 次元実ベクトルの集合は、$\mathbb{R}^d$ であるとみることができる（2.1.6 節を参照)。

成分 a_i が一般に複素数の場合は、**複素ベクトル** (complex vector) という。複素ベクトルは d 個の複素数の組だから、すべての d 次元複素ベクトルの集合は、$\mathbb{C}^d$ である。言うまでもなく複素ベクトルの方が一般的な概念で、実ベクトルはその特殊な場合である。この章では、とくに断らないかぎり、単にベクトルといえば複素ベクトルを意味する。

同じように、d 個の成分 $b_1, b_2, \ldots, b_d$ を横に並べた

$$\boldsymbol{b} = (b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_d) \tag{7.1.4}$$

を d 次元の**行ベクトル** (row vector)、あるいは**横ベクトル**という。ここでは、行列の記法と統一するため (7.1.4) の成分の区切りに空白をいれたが、$\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_d)$ のようにカンマで区切ってもいいことにしよう。両者はまったく同じものを表す。二つの行ベクトルが等しいというのは、もちろん、すべての成分が等しいことをいう。

6.3 節での幾何ベクトルをあつかったときは、数を横に並べた成分表示だけを考え、列ベクトルと行ベクト

ルの区別をしなかった。この際の成分表示は、どちらかというと、列ベクトルとみなした方が自然だったのだが、ベクトルの（線形）代数的側面に踏み込まなかったので、あえて面倒な列ベクトルの表記はしなかった。この本の後の章でも、とくにベクトルや行列の記号をしっかりと書く必要があるときには列ベクトルと行ベクトルを区別し、そうでないときには、気楽に成分を横に並べたベクトルを書くことにする。

この章では、行ベクトルが単独で登場することはほとんどない。これから先、**とくに断らないかぎり、単に太文字で $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のように書いたときには、（複素数を成分にもつ）d 次元の列ベクトル** (7.1.3) **であるという約束**にしよう。

ところで、線形代数では、「行」が横向きに並んだもの、「列」が縦に並んだものを指すという決まりになっている。しかし、これは必ずしも「行」や「列」という

言葉の日常的な用法とは一致しない[*4]。どうやって覚えるかは悩ましいところだ。私の場合、中学のとき数学の M 先生に

横行縦列（おうぎょうじゅうれつ）

と唱えて覚えなさいと言われ、そんなアホな必然性のない覚え方があるかよと思ったのだが、気がつくと、未だに「おうぎょうじゅうれつ」と言いながら行列を書いている。まだ覚えていない人は、この覚え方を試し

[*4] 広辞苑で「行」を引くと、三つ目の意味として「文字などの縦のならび。転じて、横のならびにも。」とある。また、「列」だって「横一列に並ぶ」なんていう用法もあるから、列が縦だなどという決まりはない。英語では、column というのが円柱や柱を意味する言葉で、row が（主として横並びの）列を表す言葉なので、日常感覚で判断して混乱する心配はないと思う。日本語でも「柱」と「列」にすればよかったのに。

てみるのもいいかも[*5]。定番の記憶法として、

> 「行」という漢字のつくり（右側）には二本の棒が横に並んでいて、「列」という漢字のつくりには二本の棒が縦に並んでいる

というのもある。私はそれほどいいとは思わないけれど、これの愛用者も多いようだ[*6]。

■転置とエルミート共役　$\boldsymbol{a}$ を (7.1.3) の列ベクトルとする。この列ベクトルの縦横（たてよこ）を入れ替えた

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}} := (a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_d) \tag{7.1.5}$$

---

*5 ところで、「横行縦列」がどれほど普及している記憶法なのか知りたくて、今（2006 年 3 月）、Google で検索してみたのだが、駐車場のタイプの「昇降横行縦列式」とかいうものについて書いたページ（と、この講義ノート）が引っかかるだけであった。ひょっとして、M 先生オリジナルの覚え方だったのか？

*6 数学の本は横書きだから、行が横向きなのは当たり前だというご指摘もあった。

は、もちろん行ベクトルになる。このように、ベクトルの縦横を入れ替える操作を**転置** (transpose) といい、t を右上につけて表す[*7]。

上とは逆に、行ベクトルの転置をとると、列ベクトルになる。そこで、(7.1.3) の列ベクトルを書きたいとき、縦に並べると紙が無駄だと思えば、$(a_1, a_2, \ldots, a_d)^{\mathrm{t}}$ と書くことができる。

もちろん、任意の列ベクトルあるいは行ベクトル $\boldsymbol{a}$ について

$$(\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{a} \tag{7.1.6}$$

が成り立つ。

実ベクトルをあつかう際は転置だけを考えれば十分だが、一般の複素ベクトルについては、別の操作が必要になる。複素ベクトルの場合は、列ベクトル $\boldsymbol{a}$ の転置をとり、さらに各成分の複素共役をとって作った行

[*7] 転置の表し方としては、他にも ${}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{a}$ のように左上に t をつける流儀や、$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}$ と書く流儀などがある。

ベクトル

$$\boldsymbol{a}^\dagger = (a_1{}^* \ a_2{}^* \ \cdots \ a_d{}^*) \tag{7.1.7}$$

が重要な役割を果たす。ここで、$\boldsymbol{a}^\dagger$ のことを、ベクトル $\boldsymbol{a}$ の**共役**あるいは**エルミート**[*8]**共役** (conjugate, Hermitian conjugate) という[*9]。なお † は**ダガー** (dagger[*10]) と呼ばれる記号で、$\boldsymbol{a}^\dagger$ は「エイ、ダガー」と読む。$\boldsymbol{a}^\dagger$ のことを $\boldsymbol{a}^{\mathrm{H}}$ と書く流儀もある。

もちろん、行ベクトル $\boldsymbol{b}$ のエルミート共役 $\boldsymbol{b}^\dagger$ も同じように定義される。一般に $(\boldsymbol{a}^\dagger)^\dagger = \boldsymbol{a}$ も成り立つ。また、$\boldsymbol{a}$ が（列ベクトルであろうと行ベクトルであろうと）実ベクトルなら、エルミート共役 $\boldsymbol{a}^\dagger$ は転置 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{t}}$ と一致する。

---

*8 Charles Hermite (1822–1901) フランスの数学者。エルミート多項式やエルミート行列など、物理にもかかわる重要な業績がある。

*9 アメリカ人は（ということは、数学や物理について英語で語る人のかなりの部分は)、Hermitian を her-mi-shan（mi の音節にアクセント）のように発音する。「エルミート」とは似ても似つかないので、とまどわないようにしたい。

*10 短剣、短刀

■ベクトルの和と定数倍　二つの列ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)^{\mathrm{t}}$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)^{\mathrm{t}}$ と定数（実数または複素数）α について、ベクトルどうしの和、定数とベクトルの積を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_d + b_d \end{pmatrix}, \quad \alpha\,\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \alpha\, a_1 \\ \alpha\, a_2 \\ \vdots \\ \alpha\, a_d \end{pmatrix} \tag{7.1.8}$$

と定義する。$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ も $\alpha\,\boldsymbol{a}$ もベクトルになることは重要だ。これらは、もちろん、三次元の場合の (6.3.66), (6.3.67) をすなおに一般化したものになっている。

また、**ゼロベクトル** (null vector) を

$$\boldsymbol{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.1.9}$$

と定義する。和と定数倍についての基本的な関係

$$\begin{gathered}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}), \\ \boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}, \\ \alpha(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\alpha\boldsymbol{a}+\alpha\boldsymbol{b}, \quad (\alpha+\beta)\boldsymbol{a}=\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{a}, \\ \alpha(\beta\boldsymbol{a})=\alpha\beta\boldsymbol{a}, \quad 0\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \end{gathered} \tag{7.1.10}$$

を、定義から簡単に示すことができる。

一般に、$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ をベクトル、$\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を定数とするとき、

$$\boldsymbol{v}=\alpha_1\,\boldsymbol{v}_1+\cdots+\alpha_n\,\boldsymbol{v}_n \tag{7.1.11}$$

を、ベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ の**線形結合** (linear combination) という[*11]。

■行ベクトルと列ベクトルの積　(7.1.3), (7.1.4) のように、$\boldsymbol{a}$ を任意の列ベクトル、$\boldsymbol{b}$ を任意の行ベクトルと

[*11] 「定数をかけてたしあわせた」だけのことなのだが、「線形結合をとる」などという。

する。これらは実ベクトルでも複素ベクトルでもかまわない。

行ベクトルと列ベクトルを**この順番に並べたもの**について、

$$\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a} := a_1\,b_1 + a_2\,b_2 + \cdots + a_d\,b_d = \sum_{i=1}^{d} a_i\,b_i \quad (7.1.12)$$

という積を定義する。対応する成分どうしの積をとり、その結果をすべての成分について足し合わせているのだから、幾何ベクトルの内積の成分表示 (6.3.68) と同じ計算だ。積をとった結果は数（複素数か実数）になる。

ここで、二つのベクトルのあいだに特別な積の記号を書かなかったのは、これが線形代数での「自然な積」

の形になっているからだ。線形代数では、

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_d b_d \tag{7.1.13}$$

という図式が示すように、

> 積の左側にあるものを横向きに（左から右に）たどりながら、同時に、積の右側にあるものを縦に（上から下に）たどり、対応する要素をかけ合わせたものを足しあげる[*12]

というのが一般的な積のルールなのだ。これから先、いくつかの積が登場するが、すべてこのパターンにしたがう「自然な積」になっている。

[*12] 実は、私はこの計算をするときも M 先生の「横行縦列」を唱えている。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を任意の行ベクトル、$\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ を任意の列ベクトルとし、α, β, γ, δ を任意の複素数とする。このとき、行ベクトルと列ベクトルの積について、線形性

$$(\alpha\boldsymbol{a}+\beta\boldsymbol{b})(\gamma\boldsymbol{c}+\delta\boldsymbol{d}) = \alpha\gamma\,\boldsymbol{ac}+\alpha\delta\,\boldsymbol{ad}+\beta\gamma\,\boldsymbol{bc}+\beta\delta\,\boldsymbol{bd} \tag{7.1.14}$$

が成り立つ。これは、定義 (7.1.12) から明らかだろう。

ところで、(7.1.12) で積の順番を入れ替えた $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ はまったく別の積になる（実は、行列になる）ので注意。詳しくは 7.2.2 節であつかう。

7.1.2　ベクトルの線形独立性

6.3.4 節では、ベクトルを幾何的にとらえる立場から、ベクトルの線形独立性を議論した。線形独立性は、（その名のとおり）幾何的なイメージを離れて、線形性（足したり実数倍したりできる、ということ）だけを使って議論できる概念なのである。

線形独立性は式だけをにらんで考えていてもなかなかわからないので、もう一度 6.3.4 節に戻って、幾何ベ

クトルの線形独立と線形従属についてのイメージを再確認しておくことを強くおすすめする。

899 ページの定義 6.1 の（ほぼ）くり返しになるが、線形独立性の定義を書いておこう。

定義 7.1 (ベクトルの線形独立性)**.** n 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立 *(linearly independent)* であるとは、

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0} \qquad (7.1.15)$$

を満たすような複素数の組 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ が、$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ しかないことをいう。
同じことだが、すべてが同時に *0* にはならない任意の n 個の複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ について、

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n \neq \boldsymbol{0} \qquad (7.1.16)$$

が成り立つことといってもよい。

n 個のベクトルが線形独立でないとき、それらは線形従属であるという。つまり、ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して、(7.1.15) を満たすような、すべてが同時に 0 にはならない n 個の複素数が存在するなら、これらのベクトルは線形従属ということだ。また、実ベクトルだけをあつかっているときは、上の定義の複素数をすべて実数で置きかえてもよい（そうしても定義はまったく変わらない)。

線形独立性・線形従属性については、最初にアドバイスしたように、6.3.4 節の三次元についての説明を読み返して、感覚をよみがえらせてほしい。もちろん、一般の次元の複素ベクトルになると、幾何的な直感だけを使って考えることには（個人差はあるだろうが）無理があるので、このような幾何的な感覚は一種のアナロジーに過ぎないのだが。

実際、与えられたベクトルの組が線形独立であるかそうでないかを判定するのは、一般にはきわめてむずかしい問題で、最終的にはディターミナントの理論を

用いる必要がある。これについては、7.4.7 節で議論する。しかし、線形従属であることが「見え見え」の場合には、そのことを簡単に見抜くことができる。とくに、900 ページの定理 6.2 と定理 6.3 は、ここでもそのまま成立する。念のためここにくり返しておこう。証明は、まったく同じなので、省略する。

定理 7.2. n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の中に一つでもゼロベクトルがまざっていれば、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形従属である。

定理 7.3. $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属であることと、これらのうちの少なくとも一つのベクトルが残りの $n-1$ 個のベクトルの線形結合であることは、同値である。

これらが使える場合には、一瞬で線形従属と見抜けなくてはいけない。

とくに、ベクトルが二つ $(n = 2)$ の場合には、二つが線形従属なのは、一方が他方の定数倍の場合に限られるので、これは簡単に見抜くことができる。定数倍

で結ばれないとき、二つは線形独立である。

また、903 ページの定理 6.4 に相当する結果を一般の次元 d について証明することができる。

定理 7.4 (次元と線形独立性)**.** $n > d$ とする。任意の n 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形従属である。

証明：次元 d についての帰納法を使う。$d = 1$ は自明。$n \geq 2$ として、n 個の複素数 $v_1, \ldots, v_n$ について、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ を実現する $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ は簡単にみつかるからだ。

次元 $d = k$ で定理の内容が示されたと仮定する。それをもとに、次元が $d = k + 1$ の場合を示そう。$n > k+1$ として、任意の n 個の $(k+1)$ 次元の列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとる。これらが、線形従属であることを示したい。

まず、n 個のベクトルの第 $k+1$ 成分がすべて 0 だ

としよう。このとき、n 個のベクトルは実質的に k 次元のベクトルになる。明らかに、$n > k$ だから、k 次元における定理の結果（これは、帰納法の仮定で、正しいとした）より、n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形従属。

次に、残る場合を考えよう。つまり、n 個のベクトルのうち少なくとも一つは第 $k+1$ 成分が 0 でない場合だ。$\boldsymbol{v}_n$ の第 $k+1$ 成分が 0 でないとしよう（もし、そうでないなら、ベクトルの名前を付け替えて、第 $k+1$ 成分が 0 でないベクトルを新たに $\boldsymbol{v}_n$ と呼ぶことにすればよい)。そして、$i = 1, \ldots, n-1$ について

$$\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \frac{(\boldsymbol{v}_i)_{k+1}}{(\boldsymbol{v}_n)_{k+1}} \boldsymbol{v}_n \tag{7.1.17}$$

とする（もちろん、$(\boldsymbol{v}_i)_{k+1}$ は $\boldsymbol{v}_i$ の第 $k+1$ 成分)。$\boldsymbol{u}_i$ の第 $k+1$ 成分は 0 だから（そうなるように定義した)、これらは k 次元のベクトルとみなすことができる。$n-1 > k$ だから、k 次元における定理の結果から、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n-1}$ は線形従属とわかる。つま

り、同時に 0 にならない $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ が存在して、$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$ が成り立つ。ここに、(7.1.17) を代入すれば、$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$ となる（ただし、$\alpha_n = -\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\boldsymbol{v}_i)_{k+1} / (\boldsymbol{v}_n)_{k+1}$ とした)。つまり、n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形従属である。∎

一方、線形独立な d 個のベクトルがとれるのは明らかだろう。たとえば、

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}^{(d)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.1.18}$$

のように、$\boldsymbol{e}^{(j)}$ を j 番目の成分だけが 1 でそれ以外の成分が 0 の列ベクトルとすれば、これらは線形独立だ。

基底での展開についての 905 ページの定理 6.5 に相当する結果も、そのまま成立する。

定理 7.5 (線形独立なベクトルによる展開)**.** d 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ が線形独立であるとする。任意の列ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して、d 個の複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ が一通りに決まり、

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{v}^{(i)} \tag{7.1.19}$$

と書ける。

証明は、定理 6.5 の場合とまったく同じなので省略する（余裕があれば、定理 6.5 の証明を見ないで、自分で証明してみよう)。

ここでも、上のように線形独立な列ベクトル d 個の集合 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$ を**基底** (basis) と呼び、個々のベクトル $\boldsymbol{v}^{(i)}$ を基底ベクトルと呼ぶ。そして、任意の列ベクトル $\boldsymbol{v}$ を (7.1.19) のように表現することを、この基底によって「展開する」という。複素数 α_i は展

開係数である。

基底の中でも、特に使いやすい正規直交基底については、次の 7.1.3 節で述べる。

(7.1.19) のように任意のベクトルが展開できるためには、もちろん、次元と等しい d 個のベクトルが必要である。つまり、

定理 7.6 (次元より少ない数のベクトルでは展開できない)**.** $n < d$ とし、$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を任意のベクトルとする。あるベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在し、どのような複素数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ をとっても、

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \boldsymbol{v}_i \tag{7.1.20}$$

と展開することはできない。

この定理はほとんど当たり前だが、今の段階で証明すると長くなるので、あとでディターミナントの理論をつくったあとで、1206 ページで能率的な証明を述べる。なお、そこで証明するまでは、この定理は決して

使わないのでご安心を。

7.1.3　ベクトルの内積と正規直交基底

二つの列ベクトルをかけて数を得る内積を定義することで、ベクトルの世界に豊かな構造が入ってくる。基本は幾何ベクトルの成分表示（6.3.5 節）と同じことだが、成分が複素数になったために注意がいる。

■内積の基本　$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を任意の（複素数を成分にもつ d 次元の）列ベクトルとする。これら二つのベクトルの**内積** (inner product) を、天下りではあるが、

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle := \boldsymbol{a}^\dagger \, \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{d} (a_i)^* \, b_i \qquad (7.1.21)$$

と定義する[*13]。単に成分の積 $a_i\,b_i$ を足しあげるのでなく、一つ目のベクトルの成分の複素共役を取っていることに注意。これが「正しい」内積であることは、すぐ後にベクトルの絶対値をみるとよりはっきりするだろう。

(7.1.21) で、行ベクトル $\boldsymbol{a}^\dagger$ と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ の「自然な積」(7.1.12) を用いた。内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ は一般に複素数である。$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ がともに実ベクトルなら、内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ は実数である。(7.1.21) の定義は、$d = 3$ ですべての成分が実数なら、幾何ベクトルの内積の成分表示 (6.3.68) と一致する。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ を任意のベクトル、α, β, γ を任意の複素数とする。内積 (7.1.21) は、二つ目のベクトルについて、線形性

$$\langle \boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} \rangle = \beta\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \gamma\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle \tag{7.1.22}$$

[*13] 内積を $\sum_{i=1}^{d} a_i (b_i)^*$ と定義する流儀もあり、数学ではこちらの方が主流だ。随分と不便な話である。また、数学では、内積を $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ という記号で表すことも多い。

を満たす。しかし、一つ目のベクトルについての線形性に相当する関係は、

$$\langle \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \alpha^* \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \beta^* \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \tag{7.1.23}$$

のように、係数の複素共役をとった上で成立する。また、二つのベクトルを入れ替えると、

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = (\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle)^* \tag{7.1.24}$$

のように複素共役になる。これらの関係は定義 (7.1.21) から簡単に示される。

実ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ と実数 α, β, γ については、上の (7.1.22), (7.1.23) は、

$$\begin{aligned} &\langle \boldsymbol{a}, \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} \rangle = \beta \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \gamma \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle, \\ &\langle \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle \end{aligned} \tag{7.1.25}$$

という単純な線形性になる。また、(7.1.24) のベクトルの入れ替えも

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \tag{7.1.26}$$

と簡単になる。

二つのゼロベクトルでない（一般には複素の）列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = 0 \tag{7.1.27}$$

を満たすとき、$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ は**直交**するという。三次元空間のベクトルの場合には、二つのベクトルの内積について (6.3.16) の関係 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\,\cos\theta$ があり、「直交している」というのは、まさに二つのベクトルのなす角度が $\pi/2$ ということだった。しかし、一般の代数ベクトルの場合、そのような簡単な幾何学的イメージをつけることはできない[*14]。ここでの「直交」とは「内積が 0 であること」を意味する数学的な概念だと思う方がいいだろう。

問 7.1.3.a

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1+3i \\ 2-2i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 3-i \end{pmatrix} \tag{7.1.28}$$

[*14] ただし、d 次元の実ユークリッド空間でも、(6.3.16) の関係が成り立つように角度を定義することができる。

とする。$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle$, $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle$, $\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \rangle$ を求めよ。

問 7.1.3.b　問 7.1.3.a に加えて、

$$\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 5+2i \end{pmatrix} \tag{7.1.29}$$

とする。$\langle \boldsymbol{a}, 3\boldsymbol{b} + 4\boldsymbol{c} \rangle$, $\langle 2\boldsymbol{a} + 4i\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ を求めよ。

■絶対値（大きさ）とシュワルツの不等式　任意の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ について、

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = \sum_{i=1}^{d} (a_i)^* \, a_i = \sum_{i=1}^{d} |a_i|^2 \geq 0 \tag{7.1.30}$$

が成り立つ。これによって、列ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ、あるいは、**絶対値**を

$$|\boldsymbol{a}| := \sqrt{\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle} \tag{7.1.31}$$

と定義する。明らかに、$|\boldsymbol{a}| = 0$ となることと $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ であることは、同値である。また、$|\boldsymbol{a}| \geq 0$ であり、任意の複素数 α について

$$|\alpha \, \boldsymbol{a}| = |\alpha| \, |\boldsymbol{a}| \tag{7.1.32}$$

が成り立つ。確かに、これはベクトルの絶対値と呼ぶのにふさわしい量である。

6.3.1 節で見たように幾何ベクトルの絶対値にはベクトルの大きさ（長さ）という幾何学的な意味があった。代数ベクトルの場合はそういう幾何学的な解釈ははっきりしないが、それでも幾何ベクトルとのアナロジーで、ベクトルの絶対値のことを「ベクトルの大きさ、長さ」ということがある。

$|\boldsymbol{v}| = 1$ を満たすベクトル（複素ベクトルでも実ベクトルでも）を**単位ベクトル**と呼ぶ。

もし内積の定義 (7.1.21) で一つ目のベクトルの成分の複素共役をとらなければ、$\boldsymbol{a}$ とそれ自身の「内積」は、(7.1.30) ではなく、$\sum_{i=1}^{d}(a_i)^2$ となる。しかし、a_i が複素数なのだから $(a_i)^2$ は正とは限らない。$\sum_{i=1}^{d}(a_i)^2$ は、ベクトルの「大きさ」としては不的確なのだ。

列ベクトルの絶対値についても、**三角不等式**

$$|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \tag{7.1.33}$$

と**コーシー=シュワルツ不等式**[*15]

$$|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle| \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \tag{7.1.34}$$

が成立する。(6.3.4) で幾何ベクトルの三角不等式を見たときは、図形的にみて当たり前の関係だと思えたが、まったく同じ不等式が一般の代数ベクトルについても成立するのだ。

不等式 (7.1.33), (7.1.34) の証明：まず (7.1.34) から。内積 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ は一般に複素数だから、偏角 θ を使って

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle|\, e^{i\theta} \tag{7.1.35}$$

と書ける。この θ を用いて

$$\boldsymbol{c} = \sqrt{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}\,\boldsymbol{a} - e^{-i\theta}\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}}\,\boldsymbol{b} \tag{7.1.36}$$

[*15] 888 ページの脚注 *40 を見よ。

とする。線形性 (7.1.22), (7.1.23) と (7.1.24) の関係に注意して、このベクトルの絶対値の二乗を計算すると、

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{c}|^2 &= \left\langle \sqrt{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}\,\boldsymbol{a} - e^{-i\theta}\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}}\,\boldsymbol{b}, \sqrt{\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}}\,\boldsymbol{a} - e^{-i\theta}\sqrt{\frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}}\,\boldsymbol{b} \right\rangle \\
&= \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}\,|\boldsymbol{a}|^2 + \frac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{b}|}\,|\boldsymbol{b}|^2 - e^{-i\theta}\,\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle - e^{i\theta}\,\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \\
&= 2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| - 2\,|\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \qquad (7.1.37)
\end{aligned}
$$

となる。$|\boldsymbol{c}|^2 \geq 0$ だから、ここから (7.1.34) が得られる。

また、(7.1.24) に注意すれば、

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 &= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle + \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}\rangle \\
&= |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2\mathrm{Re}\,[\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle] \qquad (7.1.38)
\end{aligned}
$$

である。ここで、さっそくコーシー=シュワルツ不等式 (7.1.34) を用いると、

$$
\mathrm{Re}\,[\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle] \leq |\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle| \leq |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \qquad (7.1.39)
$$

なので、これを (7.1.38) に戻して、

$$
|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|^2 \leq |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| = (|\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}|)^2 \qquad (7.1.40)
$$

を得る。両辺の平方根をとれば、求める三角不等式 (7.1.33) が得られる。▮

■正規直交基底　d 個のベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ が、すべての $i, j = 1, 2, \ldots, d$ について、

$$\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle = \delta_{i,j} \tag{7.1.41}$$

を満たすとする。ここで、$\delta_{i,j}$ は (1.3.11) で定義したクロネッカーのデルタである。i, j が等しければ 1 で、異なっていれば 0 をとる。

(7.1.41) は、d 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ が互いに直交することを示している。互いに直交するベクトルは線形独立だろうと推測されるが、それは正しい。

補題 7.7. (7.1.41) を満たす d 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ は線形独立である。

証明：線形従属と仮定する。すると、990 ページの定理 7.3 より、一つのベクトル $\boldsymbol{v}^{(j)}$ を残りの $d-1$ 個の

線形結合で書ける。必要なら名前を付け替えて $j = 1$ とすれば、

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \sum_{i=2}^{d} \beta_i \, \boldsymbol{v}^{(i)} \tag{7.1.42}$$

である。ここで、このベクトルと $\boldsymbol{v}^{(1)}$ 自身との内積をとり、線形性 (7.1.22) を使えば、

$$\langle \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(1)} \rangle = \langle \boldsymbol{v}^{(1)}, \sum_{i=2}^{d} \beta_i \, \boldsymbol{v}^{(i)} \rangle = \sum_{i=2}^{d} \beta_i \, \langle \boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(i)} \rangle \tag{7.1.43}$$

となる。しかし、(7.1.41) によれば、最左辺は 1 であり、最右辺は 0 である。これは矛盾。 ∎

よって、(7.1.41) を満たす d 個の列ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$ が基底になることがわかった。特に、(7.1.41) を満たすベクトルからなる基底（つまり、互いに直交する d 個の単位ベクトルの組）を**正規直交基底**という。

任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$

で

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \, \boldsymbol{v}^{(i)} \tag{7.1.44}$$

と展開したときの展開係数 α_i は、

$$\alpha_i = \langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.1.45}$$

によって求められる。このように展開係数が内積の計算だけで求められるのは、正規直交基底のきわめて便利な性質である。

今、$\boldsymbol{u}$ を任意のベクトルとして、(7.1.44) と (7.1.45) を使うと、$\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ の内積が、

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \, \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^{(i)} \rangle = \sum_{i=1}^{d} \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}^{(i)} \rangle \, \langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.1.46}$$

と書けることがわかる。ここで、(7.1.18) の基底ベクトルを用いて、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}^{(j)}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}^{(k)}$ とし、$\boldsymbol{v}^{(i)} =$

$(v_1^{(i)}, v_2^{(i)}, \ldots, v_d^{(i)})$ と成分表示すれば、(7.1.46) より

$$\sum_{i=1}^{d} v_j^{(i)} \, (v_k^{(i)})^* = \delta_{j,k} \tag{7.1.47}$$

が得られる。これは、正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$ が任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を (7.1.44) のように展開する「能力」をもっていることを端的に示すので (問 7.1.3.f を参照)、**完全性** (completeness) の関係とも呼ばれる。正規直交性 (7.1.41) を成分表示で表した

$$\sum_{k=1}^{d} (v_k^{(i)})^* \, v_k^{(j)} = \delta_{i,j} \tag{7.1.48}$$

とは、何となく似ているが、根本的に異なった関係だということに注意しよう。完全性 (7.1.47) では、成分を表す下付の添え字は固定して、ベクトルの名前を表す上付きの添え字について足しあげている。正規直交性 (7.1.48) では、上付きの添え字を固定して、下付の添え字について足しあげているのだ。

問 7.1.3.c　以下の $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}\}$ が正規直交基底である

ことを確かめよ。

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1\\2i\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}2\\-i\end{pmatrix} \tag{7.1.49}$$

問 7.1.3.d　以下の $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)}\}$ が正規直交基底であることを確かめよ。

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \tag{7.1.50}$$

問 7.1.3.e　(7.1.45) を示せ。展開 (7.1.44) が可能であることを認め、正規直交関係 (7.1.41) を用いる。

問 7.1.3.f　完全性 (7.1.47) から、任意の $\boldsymbol{v}$ の展開 (7.1.44), (7.1.45) を導け（ヒント：(7.1.47) の両辺に v_k をかけて、k について足す)。

■線型独立なベクトルの組の直交化　正規直交基底は実用的にも理論的にもいろいろと便利である。必ずし

も正規直交基底ではない基底（つまり、線形独立な d 個のベクトルの集合）が与えられたとき、そこから正規直交基底を作れれば役に立つ。

次の定理は、一般に、n 個の線形独立なベクトルがあれば、それらの適当な線形結合によって互いに直交する n 個の単位ベクトルが作れることを保証してくれる。(ここで $n = d$ なら正規直交基底が作れることになる。)

定理 7.8 (グラム・シュミットの直交化)**.** $n \leq d$ とし、n 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n)}$ が線形独立であるとする。$\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n)}$ の線形結合により、任意の $i, j = 1, \ldots, n$ について $\langle \boldsymbol{u}^{(i)}, \boldsymbol{u}^{(j)} \rangle = \delta_{i,j}$ を満たす n 個のベクトル $\boldsymbol{u}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(n)}$ を作ることができる。

証明（および計算法）：実際の計算にもそのまま使える手続きによって定理を証明しよう。

まず、線形独立性から $\boldsymbol{v}^{(1)}$ はゼロでないので、$\boldsymbol{u}^{(1)} = \boldsymbol{v}^{(1)}/|\boldsymbol{v}^{(1)}|$ によって単位ベクトルを作る。

次に、

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \boldsymbol{v}^{(2)} - \langle \boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)} \rangle \boldsymbol{u}^{(1)} \tag{7.1.51}$$

によって新しいベクトル $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ を定める。定義から明らかに $\langle \boldsymbol{u}^{(1)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)} \rangle = 0$ である（確かめてみよう）。また、$\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}$ が線型独立だから $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}$ はゼロではない。$\boldsymbol{u}^{(2)} = \tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}/|\tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)}|$ により単位ベクトルを定義する。こうして $\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}$ の線形結合で直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{u}^{(2)}$ ができた。

あとはこのアイディアを一般化して帰納法で証明すればいい。

$k < n$ として、$\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(k)}$ の線形結合で互いに直交する単位ベクトル $\boldsymbol{u}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k)}$ が作れているとする（$k = 2$ の場合は上でできている）。(7.1.51) にならって

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(k+1)} = \boldsymbol{v}^{(k+1)} - \sum_{\ell=1}^{k} \langle \boldsymbol{u}^{(\ell)}, \boldsymbol{v}^{(k+1)} \rangle \boldsymbol{u}^{(\ell)} \tag{7.1.52}$$

によって $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(k+1)}$ を定める。この場合も、$\boldsymbol{u}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k)}$

が互いに直交することを使えば、$\ell = 1, \ldots, k$ について $\langle \boldsymbol{u}^{(\ell)}, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(k+1)} \rangle = 0$ となることがわかる。また、$\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(k)}$ の線型独立性から $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(k+1)}$ はゼロでないので、$\boldsymbol{u}^{(k+1)} = \tilde{\boldsymbol{v}}^{(k+1)}/|\tilde{\boldsymbol{v}}^{(k+1)}|$ により単位ベクトルを定義する。明らかに、$\boldsymbol{u}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(k+1)}$ は互いに直交する。

$k + 1 = n$ となるまでこれをくり返せば $\boldsymbol{u}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(n)}$ が得られる。▮

このようにして直交したベクトルの組をつくる手続きを通常グラム[*16]・シュミット[*17]の直交化という。しかし、このような方法はすでにずっと以前にラプラ

[*16] Jorgen Pedersen Gram (1850–1916) デンマークの数学者。

[*17] Erhard Schmidt (1876-1959) ドイツの数学者。

ス[*18]が見いだして用いていたという。

[*18] Pierre-Simon Laplace (1749–1827) ナポレオン、ルイ十八世の時代に活躍したフランスの偉大な科学者。農家に生まれたが、その才能が認められ侯爵にまでなった。解析学の基礎をつくっただけでなく、物理学や天文学にも業績がある。物理を学んでいても、ラプラシアン、ラプラス方程式、ラプラス変換など、彼の名前に出会うことは多い。ラプラスが書いた確率論についての論考のなかに次の有名な一節がある。「ある知性が、与えられた時点において、自然を動かしているすべての力と自然を構成しているすべての存在物の各々の状況を知っているとし、さらにこれらの与えられた情報を分析する能力をもっているとしたならば、この知性は、同一の方程式のもとに宇宙のなかの最も大きな物体の運動も、また最も軽い原子の運動をも包摂せしめるであろう。この知性にとって不確かなものは何一つないであろうし、その目には未来も過去と同様に現存することであろう。(ラプラス、確率の哲学的試論 p. 10、内井惣七訳、岩波書店、1997)」これは、ニュートン方程式やマックスウェル方程式のような決定的な方程式に支配される系があれば、初期条件さえ知っていれば未来のすべてがわかってしまうという強い決定論を述べている。このような予言をおこなえる存在を「ラプラスの魔」と呼んでいる。ただし、(これはしばしば誤解されていることだが) ラプラス自身はそのような強い決定論を主張しようとしたわけではない。彼は、そのような予言は不可能だということを認めた上で、確率論の考察に入っていくのである。

例を見ておこう。$d = n = 3$ として、線型独立なベクトル

$$\boldsymbol{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.1.53}$$

をとる。まず、一つ目を規格化して $\boldsymbol{u}^{(1)} = (1,1,0)^{\mathrm{t}}/\sqrt{2}$ である。次は $\langle \boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)} \rangle = 1/\sqrt{2}$ なので、(7.1.51) より

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.1.54}$$

である。規格化して $\boldsymbol{u}^{(2)} = (-1,1,2)^{\mathrm{t}}/\sqrt{6}$ が得られる。最後は、$\langle \boldsymbol{u}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(3)} \rangle = \sqrt{2}$ および $\langle \boldsymbol{u}^{(2)}, \boldsymbol{v}^{(3)} \rangle = 2/\sqrt{6}$ なので、(7.1.52) より

$$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \tag{7.1.55}$$

となる。規格化すれば、$\boldsymbol{u}^{(3)} = (1, -1, 1)^{\mathrm{t}}/\sqrt{3}$ である。せっかくなので結果を並べて書けば、

$$\boldsymbol{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{u}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \boldsymbol{u}^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \tag{7.1.56}$$

となる。確かにこれらは互いに直交している。また、この場合は（$d = n$ なので）これらは正規直交基底になっている。

7.2　行列の定義と基本

この節では、d 次の正方行列を導入し、表記法や基本的な演算について述べる（7.2.1 節）。多くの読者はここで初めて行列に出会うことと思う。行列の扱い、特に行列の積については、具体的な計算の感覚を身につけ、また、抽象的な成分表示もしっかりと理解してほしい。行列とベクトルの積にかかわる様々な関係をみたあと（7.2.2 節）、いくつかの特別な行列の仲間につ

いて述べ（7.2.4 節)、行列のトレース（7.2.5 節）という基本的な量を定義する。

7.2.1　d 次元の正方行列

■正方行列とその表し方　d^2 個の実数または複素数を d 行 d 列の正方形状に並べた

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.2.1}$$

を d 次の**正方行列** (square matrix)、あるいは $d \times d$ 型行列、あるいは単に**行列** (matrix) とよぶ[*19]。すべての成分（$a_{i,j}$ のこと）が実数の行列を**実行列** (real matrix) と呼ぶ。一般に複素数を成分にもつ行列を**複素行列** (complex matrix) と呼ぶ。また、二つの行列

[*19] matrix は「母体、基盤、発生源」などの広い意味をもつことばで、科学のいくつかの分野で異なった意味で用いられるので注意がいる。複数形は matrices。

に A, B について A = B というのは d^2 個の成分がすべて等しいことをいう。敢えて例を挙げれば、

$$\mathsf{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A}_3 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{i}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1+4i \\ 0 & 2 & -3 \\ 1+2i & 0 & -3i \end{pmatrix} \tag{7.2.2}$$

などが行列である。

正方行列の横に並んだ d 個の成分をまとめて、行 (row) とよぶ。上から、第一行、第二行、$\cdots$、第 i 行という。同様に、縦に並んだ d 個の成分をまとめて、列 (column) とよぶ。これも、左から、第一列、第二列、

$\cdots$、第 j 列という。

$$
\begin{array}{cc}
 & \text{第 } j \text{ 列} \\
\text{第 } i \text{ 行} & \begin{pmatrix} & & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,d} \\ & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & a_{1,j} & \\ & a_{2,j} & \\ & \vdots & \\ & a_{d,j} & \end{pmatrix}
\end{array}
\tag{7.2.3}
$$

という具合だ。よって、$a_{i,j}$ は行列 A の第 i 行・第 j 列の成分ということになる。略して i, j 成分といってもよい。この本では、（私は品がいいので）行列の成分の i と j をカンマで区切るが、誤解の余地のないときには a_{ij} や a_{12} のように二つの成分をそのまま並べてしまうことも多い。

(7.2.1) のように行列を書くのはスペースもとるので、$a_{i,j}$ を成分にもつ $d \times d$ の行列を

$$
\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d} \tag{7.2.4}
$$

のように書く。また、一般に、行列 A の第 i 行・第 j 列の成分を $(\mathsf{A})_{i,j}$ と書く。(7.2.2) で定義した行列 A_4 を例

にとれば、$(\mathsf{A}_4)_{1,1} = 2$, $(\mathsf{A}_4)_{1,2} = -3$, $(\mathsf{A}_4)_{1,3} = 1+4i$, ... といった具合になる。

行列 (7.2.1) の第 j 列だけを取り出した

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{d,j} \end{pmatrix} \tag{7.2.5}$$

は d 次元の列ベクトルである。そこで、行列 (7.2.1) を、これら列ベクトルを横に並べた

$$\mathsf{A} = (\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_d) \tag{7.2.6}$$

という形に表わすと便利なこともある。

ゼロ行列 (zero matrix) $\mathsf{0}$ と、**単位行列** (identity matrix) I を

$$\mathsf{0} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2.7}$$

と定義しておく。ゼロ行列はすべての成分が 0、単位行列は対角成分（行と列の番号が等しい成分のこと）が 1 で非対角成分は 0 の行列である。(7.2.2) の A_1 は二次の（つまり $d = 2$ の）単位行列だった。式で書けば、すべての $i, j = 1, \ldots, d$ について、

$$(\mathsf{0})_{i,j} = 0, \quad (\mathsf{I})_{i,j} = \delta_{i,j} \tag{7.2.8}$$

となる。$\delta_{i,j}$ は、もちろん (6.3.45) で定義したクロネッカーのデルタ。

成分表示したとき、任意の $i \neq j$ について $a_{i,j} = 0$ を満たす行列

$$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.2.9}$$

を、**対角行列** (diagonal matrix) とよぶ。文字通り、対角成分だけの行列である。対角行列を表わすときには、

ゼロでない成分 $(\mathsf{A})_{i,i} = a_{i,i}$ を単に a_i と書いて、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_d \end{pmatrix} \tag{7.2.10}$$

とすることが多い。予想されるように、対角行列はかなり扱いやすい行列である。

■行列の定数倍と和 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と $\mathsf{B} = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ を d 次の正方行列、α を定数（複素数または実数）とする。行列 A の定数倍 $\alpha\mathsf{A}$ と、二つの行列の和 $\mathsf{A}+\mathsf{B}$ は、どちらも行列であり、成分を取り出す書き方を使って、それぞれ

$$(\mathsf{A}+\mathsf{B})_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}, \quad (\alpha\,\mathsf{A})_{i,j} = \alpha\, a_{i,j}, \\ (i,j = 1,\ldots,d) \tag{7.2.11}$$

と定義する[*20]。要は、足し算の場合は成分どうしを足し、定数をかけるときはすべての成分におなじようにかけるということだ。

念のため、二次の行列（もちろん、$a, b, c, d, a', b', c', d'$ は任意の複素数）

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \tag{7.2.12}$$

の場合を詳しく書けば、

$$\alpha\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{pmatrix}, \quad \mathsf{A} + \mathsf{B} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix} \tag{7.2.13}$$

ということである。

定義 (7.2.11) より、和と定数倍についての基本的な

[*20] 二つの式のあとに $(i, j = 1, \ldots, d)$ がついているのは、これらの式がすべての i, j の組み合わせについて成り立つということをはっきりと示すため。

関係

$$\begin{gathered}\mathsf{A}+\mathsf{B}=\mathsf{B}+\mathsf{A},\quad (\mathsf{A}+\mathsf{B})+\mathsf{C}=\mathsf{A}+(\mathsf{B}+\mathsf{C}),\\ \mathsf{A}+0=\mathsf{A},\quad \mathsf{A}-\mathsf{A}=0,\\ \alpha(\mathsf{A}+\mathsf{B})=\alpha\,\mathsf{A}+\alpha\,\mathsf{B},\quad (\alpha+\beta)\mathsf{A}=\alpha\,\mathsf{A}+\beta\,\mathsf{A},\\ \alpha(\beta\mathsf{A})=\alpha\beta\,\mathsf{A},\quad 0\,\mathsf{A}=0 \end{gathered} \tag{7.2.14}$$

が簡単に示される。

問 7.2.1.a　以下を計算せよ。

$$\begin{gathered}\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\\ a\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\end{gathered} \tag{7.2.15}$$

■行列の積　行列どうしの積を定義しよう。これは、和や定数倍ほど簡単ではない。

行列 $\mathsf{A}=(a_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ と $\mathsf{B}=(b_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ の積 AB は、それ自身も行列である。この積も、行ベクトル

と列ベクトルの積 (7.1.13) と同様に「自然な積」なので、A と B の間には何も書かない。また、すぐ後で見るように、積 AB と BA は一般には等しくないので、行列を並べる順番には気をつけなくてはいけない。

積 AB は、成分を取り出す書き方を使って、

$$(\mathsf{AB})_{i,j} := \sum_{k=1}^{d} a_{i,k}\, b_{k,j}, \quad (i,j = 1,\ldots,d) \tag{7.2.16}$$

と定義される。この定義を吟味する前に、この式の形をまず頭にいれてしまうといいだろう。**積 AB の i,j 成分が知りたいときは、i と j で全体を左右からはさむ形になるように $a_{i,k}b_{k,j}$ という成分の積を書き、真ん中の k について足しあげる**。なかなか形のよい式だ。

手始めに、もっとも簡単な二次の行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} \tag{7.2.17}$$

について、積の定義 (7.2.16) を詳しく見よう（実は、ここから、行列の積の具体的な計算法も見えて来る）。まず、積の 1 行 1 列成分、つまり $(\mathsf{AB})_{1,1}$ は、(7.2.16) の和をあからさまに書けば、$a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1}$ である (確認しよう)。この表式は、

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1} + a_{1,2}b_{2,1} & \\ & \end{pmatrix} \tag{7.2.18}$$

のように行列の中に矢印を思い浮かべるとわかりやすい。左側の行列の 1 行目を左から右にたどり、同時に、右側の 1 列目を上から下にたどり、対応する成分をかけあわせて、最後に足し合わせるのだ。この部分だけをとれば、ベクトルの積 (7.1.13) と全く同じルールである。ただし、今の場合は、これをやって積 AB の四つの成分のうちの一つだけが決まる。1 行 2 列成分を求めたければ、左側の 1 行目と右側の 2 列目をそれぞ

れたどって、

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} \\ b_{2,1} & b_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & a_{1,1}b_{1,2} + a_{1,2}b_{2,2} \end{pmatrix} \tag{7.2.19}$$

とすればよい。残る二つの成分についても考えてみてほしい。

具体的な行列について積を求める場合も、定義 (7.2.16) をそのまま使うのではなく、上のように「左から右、上から下に同時にたどる」というやり方で計算するのがいい。まず、積を取りたい行列を二つ並べて

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \tag{7.2.20}$$

のように書く。そうしたら (7.2.18) のような矢印を思い浮かべて、それに沿って成分をかけあわせて、$1 \times (-6) + 2 \times 5$ とする。これが 1 行 1 列成分（左上）だ。次に (7.2.19) の矢印を使って、$1 \times 8 + 2 \times (-7)$ とすれば、1 行 2 列成分（右上）が得られる。残りの二つの成分についても同じように計算して、

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 \times (-6) + 2 \times 5 & 1 \times 8 + 2 \times (-7) \\ 3 \times (-6) + 4 \times 5 & 3 \times 8 + 4 \times (-7) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \qquad (7.2.21)
\end{aligned}
$$

とすればよい。

問 7.2.1.b　以下の行列の積を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 5 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2.22}$$

ここで最初の積は (7.2.21) の積の順番を入れ替えたものになっている。答は (7.2.21) と一致するか？　また、三行目の最初の二つも同じ二つの行列を異なった順番でかけたものだ。二つの答は一致するか？

一般の d 次の行列について積 (7.2.16) も、やはり、「左側にあるものを横向きに（左から右に）たどりながら、同時に、右側にあるものを縦に（上から下に）た

どり、対応する要素をかけ合わせたものを足しあげる」という定義になっている。たとえば、AB の i, j 成分を求めるときには、

(7.2.23)

のように、A の第 i 行を左から右にたどりながら、B の第 j 列を上から下にたどっていることになる。このような図形的な積の求め方と (7.2.16) の抽象的な定義がまったく同じものだということを、(少し時間をかけて）なっとくしておいてほしい。

ゼロ行列と単位行列 (7.2.7)、そして任意の行列 A について

$$\mathsf{0A} = \mathsf{A0} = \mathsf{0}, \quad \mathsf{IA} = \mathsf{AI} = \mathsf{A} \tag{7.2.24}$$

が成り立つ。ゼロ行列をかける方は当たり前だが、単位行列とのかけ算については、まず、二次の行列について

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を（図形的に）計算して納得しておくといいだろう。一般の次数についてもほぼ自明だと思うが、抽象的な成分表示とクロネッカーのデルタの使い方に慣れるため、二つ目の関係を導いておこう。単に成分を取り出して、定義 (7.2.16) を使うだけだが、任意の i, j について、

$$(\mathsf{AI})_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} a_{i,k}\,\delta_{k,j} = a_{i,j} = (\mathsf{A})_{i,j} \tag{7.2.25}$$

となる。$\delta_{k,j}$ は k が j に等しいときだけ 1 になり、それ以外では 0 だから、k についての和を消して、k を j に置きかえたのだ。これがクロネッカーのデルタの基本的な使い方だ。考えてみればおそろしく当たり前なのだが、身につけているのとそうでないのでは大きな違いになるので、早々に会得（えとく）しておこう。もちろん、$\mathsf{IA} = \mathsf{A}$ の証明もまったく同様。

さらに、三つの行列 A, B, C の積については、すぐ

下で示すように、結合則

$$\mathsf{A}(\mathsf{BC}) = (\mathsf{AB})\mathsf{C} \tag{7.2.26}$$

が成り立つ。この性質があるため、三つの行列の積を単に ABC のように書くことができる。さらに、自然数 n について、行列のべき乗を

$$\mathsf{A}^n := \underbrace{\mathsf{AA}\cdots\mathsf{A}}_{n\text{ 個}} \tag{7.2.27}$$

と定義できる。

結合則 (7.2.26) の導出：行列の積を (7.2.23) のように図式的にとらえていると、結合則 (7.2.26) は、なかなか当たり前にみえない。しかし、成分を使うと簡単だ。成分を使った積の定義 (7.2.16) にしたがえば、三つの行列の積は、

$$(\mathsf{A}(\mathsf{BC}))_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} a_{i,k}(\mathsf{BC})_{k,j} = \sum_{k=1}^{d}\sum_{\ell=1}^{d} a_{i,k}\, b_{k,\ell}\, c_{\ell,j} \tag{7.2.28}$$

というきれいな形になる。$(\mathsf{BC})_{k,j}$ に積の定義 (7.2.16) を代入するとき、もう k は使えないので、新しい変数 ℓ を使った。もう一つの積の形についても、

$$((\mathsf{AB})\mathsf{C})_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} (\mathsf{AB})_{i,k}\, c_{k,j} = \sum_{k=1}^{d} \sum_{\ell=1}^{d} a_{i,\ell}\, b_{\ell,k}\, c_{k,j} \tag{7.2.29}$$

となる。(7.2.28) と (7.2.29) は微妙にちがうけれど、よく見ると、k と ℓ をそっくり入れ替えるとまったく同じになる。k と ℓ はもともと和をとるためだけに導入したダミー変数（1.3.3 節参照）なので、その名前はどうでもよく、(7.2.28) と (7.2.29) は完全に等しい。▮

A, B, C を任意の行列、α, β, γ を任意の複素数とすると、線形性

$$\begin{aligned} &\mathsf{A}(\beta\,\mathsf{B} + \gamma\mathsf{C}) = \beta\,\mathsf{AB} + \gamma\,\mathsf{AC}, \\ &(\alpha\,\mathsf{A} + \beta\,\mathsf{B})\mathsf{C} = \alpha\,\mathsf{AC} + \beta\,\mathsf{BC} \end{aligned} \tag{7.2.30}$$

が成り立つ。この関係の証明は、成分表示を使えば簡単にできる。

このように、行列の積についても、おなじみの関係が成り立つわけだが、既に問 7.2.1.b で具体的に見たように、

$$\mathsf{AB} \stackrel{?}{=} \mathsf{BA} \tag{7.2.31}$$

という交換則は必ずしも成立しない。よって、たとえば $(\mathsf{A}+\mathsf{B})^2$ という行列については、線形性 (7.2.30) を使って、

$$\begin{aligned}(\mathsf{A}+\mathsf{B})^2 &= (\mathsf{A}+\mathsf{B})(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = (\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{A} + (\mathsf{A}+\mathsf{B})\mathsf{B} \\ &= \mathsf{A}^2 + \mathsf{BA} + \mathsf{AB} + \mathsf{B}^2 \end{aligned} \tag{7.2.32}$$

と変形できるが、これ以上簡単にして $\mathsf{A} + 2\mathsf{AB} + \mathsf{B}^2$ とすることは一般にはできない。

二つの行列が「どのくらい交換しないか」をみるために**交換子** (commutator) を

$$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] := \mathsf{AB} - \mathsf{BA} \tag{7.2.33}$$

と定義する。$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = 0$ であるとき、二つの行列 A, B

は互いに**交換する**[*21]、あるいは、**可換** (commutable) であるという。

問 7.2.1.c　(7.2.30) を示せ。

問 7.2.1.d

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} -1/2 & -7/8 \\ 6/7 & -1/2 \end{pmatrix} \tag{7.2.34}$$

とする。A^2, A^3, B^2, B^3 を計算せよ（ついでに、二つの行列の要素を大ざっぱに小数で表わして比べてみ

[*21] 「交換する」と書くと「A と B の順番を入れ替える」という意味にも取れる（実際、そういう意味で「交換する」と書くこともある）。そういう意味では「可換」という言葉を使う方が正確だろう。

よう)。

問 7.2.1.e

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathsf{C} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.35}$$

とする。交換子 $[\mathsf{A}, \mathsf{B}]$, $[\mathsf{B}, \mathsf{C}]$, $[\mathsf{A}, \mathsf{C}]$ を計算せよ。

問 7.2.1.f　以下の四つの行列のなかで可換なペアを全てさがせ。

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.2.36}$$

問 7.2.1.g　パウリ[*22]行列

$$\sigma_{\mathrm{x}} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathrm{y}} := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\mathrm{z}} := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7.2.37}$$

は、量子論のスピンの記述で重要な役割を果たす。$(\sigma_{\mathrm{x}})^2$, $(\sigma_{\mathrm{y}})^2$, $(\sigma_{\mathrm{z}})^2$ を計算せよ。交換子 $[\sigma_{\mathrm{x}}, \sigma_{\mathrm{y}}]$, $[\sigma_{\mathrm{y}}, \sigma_{\mathrm{z}}]$, $[\sigma_{\mathrm{z}}, \sigma_{\mathrm{x}}]$ を計算し、他のパウリ行列で表せ。

問 7.2.1.h　任意の行列 A, B, C について、

$$[\mathsf{A}, \mathsf{BC}] = [\mathsf{A}, \mathsf{B}]\mathsf{C} + \mathsf{B}[\mathsf{A}, \mathsf{C}] \tag{7.2.38}$$

という関係を証明せよ。

[*22] Wolfgang Ernst Pauli (1900–1958) オーストリアの物理学者。量子論を中心に数多くの素晴らしい業績がある。きわめて恐ろしいキャラクターも有名で、彼の前で物理のセミナーをすると、ぼろくそに言われて最後まで到達できないことが多かったらしい。彼が実験室に来ただけで実験装置が狂い始めるという伝説もあった。「パウリの排他律」の発見により 1954 年にノーベル賞受賞。

■対角行列、上三角行列、下三角行列どうしの積　二つの対角行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_d \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_d \end{pmatrix} \tag{7.2.39}$$

の積は、

$$\mathsf{AB} = \mathsf{BA} = \begin{pmatrix} a_1\,b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2\,b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_d\,b_d \end{pmatrix} \tag{7.2.40}$$

である（自分で確かめてみよう）。つまり、各々の対角成分の積を取ればいいのだ。A と B が可換であることにも注意。当然だが、上の対角行列 A の n 乗は

$$\mathsf{A}^n = \begin{pmatrix} (a_1)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (a_2)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (a_d)^n \end{pmatrix} \tag{7.2.41}$$

である。

d 次の正方行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ が、$i > j$ なら $a_{i,j} = 0$ という条件をみたすとき、**上三角行列** (upper triangular matrix) であるという。

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,d} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,d} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.2.42}$$

のように、右上の三角形の領域にだけゼロでない要素が並んでいるからだ。同様に、$i < j$ なら $a_{i,j} = 0$ という条件をみたす正方行列 A を**下三角行列** (lower triangular matrix) という。

上三角行列どうし、あるいは、下三角行列どうしの積にはきれいな性質がある。まず、2×2 の場合を見てみよう。一般的な上三角行列二つの積をとると、

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix} \tag{7.2.43}$$

となる。積も上三角行列であり、さらに、積の対角成分はもとの行列の対角成分の単純な積になっている。これらの性質は一般に成り立つ。

定理 7.9 (上三角行列の積)**.** $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ と $\mathsf{B} = (b_{i,j})_{i,j=1,\dots,d}$ を任意の上三角行列とする。これらの積 AB も上三角行列であり、対角成分は $(\mathsf{AB})_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$ である。下三角行列の積についても同じことが成り立つ。

<u>証明</u>：$(\mathsf{AB})_{i,j} = \sum_{k=1}^{d} a_{i,k}b_{k,j}$ を思い出しておく。A, B が上三角行列とする。よって、$i > k$ または $k > j$ なら $a_{i,k}b_{k,j} = 0$ である。もし $i > j$ なら「$i > k$ または $k > j$」は任意の k について真なので $\sum_{k=1}^{d} a_{i,k}b_{k,j} = 0$ である。よって AB は上三角とわかる。次に、$i = j$ なら「$i > k$ または $k > j$」は $k = i$ 以外の k について真。よって $(\mathsf{AB})_{i,i} = a_{i,i}b_{i,i}$ がいえた。∎

■行列の転置　行列 A から

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathsf{A}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{d,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \cdots & a_{d,2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,d} & a_{2,d} & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.2.44}$$

のように、行と列を入れ替えてつくった新しい行列を A^{t} と書き、行列 A の**転置行列**という[*23]。二次の行列ならば、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ ということだ。また、このように行と列を入れ替える操作を転置と呼ぶ。成分を使った書き方では、

$$(\mathsf{A}^{\mathrm{t}})_{i,j} = (\mathsf{A})_{j,i} \tag{7.2.45}$$

となる。

[*23] ベクトルの場合（981 ページの脚注 *7）と同様、${}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}$, A^{T} という書き方もある。

転置については、

$$(\alpha\,\mathsf{A}+\beta\,\mathsf{B})^{\mathrm{t}}=\alpha\,\mathsf{A}^{\mathrm{t}}+\beta\,\mathsf{B}^{\mathrm{t}},\quad (\mathsf{A}^{\mathrm{t}})^{\mathrm{t}}=\mathsf{A},$$
$$(\mathsf{AB})^{\mathrm{t}}=\mathsf{B}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{A}^{\mathrm{t}} \tag{7.2.46}$$

が成り立つ。自明でないのは最後の関係だけ。これも成分表示が使いこなせれば簡単に証明できるので、下を見る前に自分でやってみよう（こういう証明は自分で手を動かさないとなかなかわからない）。ともかく、定義にしたがって i,j 成分をみると、

$$\begin{aligned}((\mathsf{AB})^{\mathrm{t}})_{i,j}=(\mathsf{AB})_{j,i}&=\sum_{k=1}^{d}(\mathsf{A})_{j,k}(\mathsf{B})_{k,i}\\&=\sum_{k=1}^{d}(\mathsf{A}^{\mathrm{t}})_{k,j}(\mathsf{B}^{\mathrm{t}})_{i,k}=\sum_{k=1}^{d}(\mathsf{B}^{\mathrm{t}})_{i,k}(\mathsf{A}^{\mathrm{t}})_{k,j}\\&=(\mathsf{B}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{A}^{\mathrm{t}})_{i,j}\end{aligned} \tag{7.2.47}$$

となり、ほしい関係が示される。

■行列のエルミート共役　ベクトルの場合と同様、一般の複素行列については転置の操作だけでは十分で

ない。やはり、**共役**あるいは**エルミート共役**を用いるのが理論として自然なのである[*24]。任意の複素行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ について、その共役 $\mathsf{A}^\dagger$ を

$$(\mathsf{A}^\dagger)_{i,j} = (a_{j,i})^* \tag{7.2.48}$$

により定義する[*25]。つまり、上のように転置をとって、すべての成分の複素共役をとるという操作である。二次の行列なら、$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & c^* \\ b^* & d^* \end{pmatrix}$ となる。

[*24] どう「自然」かは、これから先の理論の展開を見ていただくしかない。例をあげると、複素数 z の場合、z^2 はかならずしも非負ではないが z^*z はつねに非負だったのと同じように、行列 A^2 や $\mathsf{A}^{\mathsf{t}}\mathsf{A}$ はかならずしも非負ではないが行列 $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ はつねに非負になるという事実がある。これについては、そもそも行列が「非負」とはどういう意味かも含めて、7.6.6 節でみる。

[*25] 数学の文献では、共役を $*$ で表す。複素共役は上棒で表すから、(7.2.48) は $(\mathsf{A}^*)_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$ となる。私は両者を行き来するのに慣れてしまったが、明らかに不便な話だ。

共役の操作について、

$$(\alpha\mathsf{A}+\beta\mathsf{B})^\dagger=\alpha^*\mathsf{A}^\dagger+\beta^*\mathsf{B}^\dagger,\quad (\mathsf{AB})^\dagger=\mathsf{B}^\dagger\,\mathsf{A}^\dagger,$$
$$(\mathsf{A}^\dagger)^\dagger=\mathsf{A} \tag{7.2.49}$$

が成り立つことは簡単に示される。

7.2.2　行列とベクトルの積

■行列と列ベクトルの積　正方行列 $\mathsf{A}=(a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と列ベクトル $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\ldots,b_d)^{\mathrm{t}}$ の自然な積をとって、新しい列ベクトル $\mathsf{A}\boldsymbol{b}$ をつくることができる。列ベクトル $\boldsymbol{v}$ の第 i 成分を $(\boldsymbol{v})_i$ と表わす書き方を使うと、この積は

$$\boxed{(\mathsf{A}\boldsymbol{b})_i:=\sum_{j=1}^{d}a_{i,j}\,b_j \qquad (7.2.50)}$$

と定義できる。行列の積 (7.2.16) と見比べよう。

この積も、

$$\begin{pmatrix} & & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,d} \\ & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} b_j \\ \\ \end{pmatrix} \text{第}\, i \,\text{行} \tag{7.2.51}$$

のように書けば、「左側の行を左から右にたどりながら右側の列を上から下にたどる」という一般のルールにしたがっていることがわかるだろう。

A, B を任意の正方行列、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ を任意のベクトル、α, β を任意の複素数とする。ここで定義した積は、ベクトルについての線形性

$$\mathsf{A}(\alpha\,\boldsymbol{a} + \beta\,\boldsymbol{b}) = \alpha\,\mathsf{A}\boldsymbol{a} + \beta\,\mathsf{A}\boldsymbol{b} \tag{7.2.52}$$

と行列についての線形性

$$(\alpha\,\mathsf{A} + \beta\,\mathsf{B})\boldsymbol{a} = \alpha\,\mathsf{A}\boldsymbol{a} + \beta\,\mathsf{B}\boldsymbol{a} \tag{7.2.53}$$

の両方を満たす。また、単位行列 I について、

$$\mathsf{I}\,\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} \tag{7.2.54}$$

となることも簡単にわかる。

問 7.2.2.a (7.2.54) を成分表示を使って抽象的に証明せよ（一行でできる）。

■内積との関係　$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ を任意の行列、$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ を任意の列ベクトルとする。A を $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{v}$ とで「はさむ」と

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{d} (u_i)^* \{ \sum_{j=1}^{d} a_{i,j} v_j \} = \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} (u_i)^* v_j \tag{7.2.55}$$

のように一つの複素数が得られる。このような表式は量子力学などで頻繁に登場する。

特に、はさむためのベクトルとして (7.1.18) で定義した基底ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}$ を用いると、

$$\langle \boldsymbol{e}^{(i)}, \mathsf{A}\, \boldsymbol{e}^{(j)} \rangle = a_{i,j} \tag{7.2.56}$$

のように、行列の成分を求めることができる。これは当たり前の関係ではあるが、時として大いに役に立つ。

3×3 行列について自分で例を書いてみてなっとくするのが一番いいと思う。できれば、「感覚的に当たり前」と思えるようになっていてほしい。(7.2.56) を導くには $(\boldsymbol{e}^{(i)})_k = \delta_{i,k}$ に注意して (7.2.55) を用い、

$$\langle \boldsymbol{e}^{(i)}, \mathsf{A}\,\boldsymbol{e}^{(j)} \rangle = \sum_{k=1}^{d} \sum_{\ell=1}^{d} a_{k,\ell}\, \delta_{i,k}\, \delta_{j,\ell} = a_{i,j} \tag{7.2.57}$$

となることを見ればよい。

さらに、任意の A, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について、

$$\boxed{\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathsf{A}^{\dagger}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \qquad (7.2.58)}$$

という関係が成り立つ。内積の中で行列を反対側に移動するとエルミート共役がつくのだ。これはいろいろなところ（とくに、量子力学）で役に立つ重要な関係である。導出は簡単で、(7.2.55) を使って落ち着いて

計算すれば、

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v}\rangle &= \sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j}(u_i)^* v_j = \sum_{j=1}^{d}\{\sum_{i=1}^{d}(a_{i,j})^* u_i\}^* v_j \\ &= \sum_{j=1}^{d}\{(\mathsf{A}^\dagger \boldsymbol{u})_j\}^* v_j = \langle \mathsf{A}^\dagger \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \qquad (7.2.59)\end{aligned}$$

のように示される。

■行列と線形写像[*26]　正方行列 A を一つ固定する。すると、任意の列ベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して列ベクトル $\mathsf{A}\boldsymbol{v}$ を対応させることで、列ベクトルの集合 $\mathbb{C}^d$ から $\mathbb{C}^d$ への写像が一つ定まる。この写像を $f : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ と書こう (つまり、任意の $\boldsymbol{v}$ について $f(\boldsymbol{v}) = \mathsf{A}\boldsymbol{v}$ とする、ということ)。

(7.2.52) を使うと、この写像 f は、任意のベクトル

[*26] 初学者は、この部分はよくわからなくてもいいだろう。とばしてもよい。

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ と任意の複素数 α, β について、

$$f(\alpha\,\boldsymbol{a}+\beta\,\boldsymbol{b})=\alpha\,f(\boldsymbol{a})+\beta\,f(\boldsymbol{b}) \tag{7.2.60}$$

という関係を満たすことがわかる。このような性質をもった写像を**線形写像** (linear mapping) あるいは**線形変換** (linear transformation) という。性質 (7.2.60) をくり返し用いれば、任意の n 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1,\ldots,\boldsymbol{a}_n$ と複素数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ について、

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,\boldsymbol{a}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\,f(\boldsymbol{a}_i) \tag{7.2.61}$$

がいえることに注意しよう。

今、行列 A が与えられたとき、それに対応する写像が線形であることをみた。この逆も成立する。つまり、d 次元のベクトルを d 次元のベクトルにうつす任意の線形写像は、かならず行列によって表されるのだ。

定理 7.10 (線形写像と行列の対応)**.** $f:\mathbb{C}^d\to\mathbb{C}^d$ を任意の線形写像とする。正方行列 A が存在して、任意の $\boldsymbol{v}\in\mathbb{C}^d$ に対して $f(\boldsymbol{v})=\mathsf{A}\boldsymbol{v}$ となる。

証明：(7.1.18) によって線形独立な列ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}$ を定義する。もちろん、任意のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_d)^{\mathrm{t}}$ は $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{d} v_j \boldsymbol{e}^{(j)}$ と書ける。よって線形性 (7.2.60) より $f(\boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{d} v_j\, f(\boldsymbol{e}^{(j)})$ となる。ベクトル $f(\boldsymbol{e}^{(j)})$ の第 i 成分を $a_{i,j}$ と書き、$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ によって行列 A を定義する。すると、$(f(\boldsymbol{v}))_i = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}\, v_j = (\mathsf{A}\boldsymbol{v})_i$ となり、写像 f が行列 A との積で表現できることがいえた。∎

■行ベクトルと行列の積　$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)$ を任意の行ベクトル、$\mathsf{B} = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ を任意の正方行列とする。行ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行列 B の自然な積をとって、新しい行ベクトル $\boldsymbol{a}\,\mathsf{B}$ をつくることができる。行ベクトル $\boldsymbol{v}$ の第 j 成分を $(\boldsymbol{v})_j$ を表わす書き方を使うと、この積は

$$(\boldsymbol{a}\,\mathsf{B})_j := \sum_{i=1}^{d} a_i\, b_{i,j} \tag{7.2.62}$$

と定義できる。(7.2.16), (7.2.50) と見比べれば、パターンは見えてきただろう。

　この積も、ベクトルと行列を図示すれば、

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & b_{1,j} & \\ & b_{2,j} & \\ & \vdots & \\ & b_{d,j} & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \text{第 } j \text{ 列} & \\ & \sum_{i=1}^{d} a_i b_{i,j} & \end{pmatrix} \tag{7.2.63}$$

という、いつもどおりの形に表すことができる。この積についても、行列と列ベクトルの積についての (7.2.52), (7.2.53), (7.2.54) と同様の関係が成り立つ。

　また、任意の正方行列 A と列ベクトル $\boldsymbol{b}$ について、

$$(\mathsf{A}\boldsymbol{b})^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{A}^{\mathrm{t}} \tag{7.2.64}$$

が成り立つ。

問 7.2.2.b　(7.2.64) を示せ。

■列ベクトルと行ベクトルの積　$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_d)^{\mathrm{t}}$ を列ベクトル、$\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_d)$ を行ベクトルとする。こ

れら二つを、この順番に、自然にかけあわせると、

$$\begin{array}{cc} & \text{第 } j \text{ 列} \\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_j & \cdots & b_d \end{pmatrix} = & \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_i b_j & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix} \text{ 第 } i \text{ 行} \end{array} \tag{7.2.65}$$

のように、正方行列ができる。成分で書けば、もちろん、

$$(\boldsymbol{ab})_{i,j} = a_i\, b_j \tag{7.2.66}$$

ということだ。成分表示からも明らかなように、この行列のエルミート共役は、

$$(\boldsymbol{ab})^\dagger = \boldsymbol{b}^\dagger \boldsymbol{a}^\dagger \tag{7.2.67}$$

である。

同じ列ベクトル $\boldsymbol{a}$ と行ベクトル $\boldsymbol{b}$ を逆の順番で $\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}$ とかけたものは、(7.1.12) でみたように、自然に複素数になった。順番を入れ替えるだけで、行列 $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ が得ら

れるというのは、おもしろいことだ。とはいえ、行列も含めた積の一般的なルールのなかでは、このように決めるのがもっとも自然だということはなっとくがいくと思う。

いうまでもないだろうが、積 $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ は、外積 (6.3.3 節) とはまったく別物である。そもそも外積は $d = 3$ のときにだけ定義されるベクトルだったが、積 $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ は一般の次元で定義される正方行列である。積 $\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}$ を、**クロネッカー**[*27]**積** (Kronecker product) とよぶことがある。

$|\boldsymbol{e}| = 1$ を満たす任意の列ベクトル $\boldsymbol{e}$ について、行列

$$\mathsf{P}_{\boldsymbol{e}} := \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{e}^{\dagger} \tag{7.2.68}$$

を $\boldsymbol{e}$ の方向への**（直交）射影行列** (projection matrix, orthogonal projection matrix) という。実際、$\boldsymbol{v}$ を任意の列ベクトルとし、これに $\mathsf{P}_{\boldsymbol{e}}$ を左からかけると、

$$\mathsf{P}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\,\boldsymbol{e}^{\dagger}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\,\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.2.69}$$

[*27] 28 ページの脚注 *25 を見よ。

となる[*28]。ここで、内積の定義 (7.1.21) を用いた。ベクトル $\mathsf{P}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{v}$ は、必ず $\boldsymbol{e}$ の定数倍になることがわかる。また、その大きさ $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle$ は、ベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}$ 方向に「射影」した「長さ」になっている（全てが実ベクトルなら、$\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle = |\boldsymbol{v}| \cos\theta$ である。もちろん θ は $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{e}$ のなす角度)。より一般の射影行列の定義については、7.2.4 節を見よ。

問 7.2.2.c　(7.2.69) の帰結 $\mathsf{P}_{\boldsymbol{e}}\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}\,\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{v} \rangle$ を成分表示を使って示せ。

問 7.2.2.d　$\boldsymbol{e} = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})^{\mathrm{t}}$ のとき $\mathsf{P}_{\boldsymbol{e}}$ を具体的に書け。いくつかの列ベクトルにかけてみることで、実際に $\boldsymbol{e}$ 方向の成分が取り出されていることを

[*28] ここでベクトルの自然な積について結合則 $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})$ が成り立つことを使った（$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ が列ベクトルで $\boldsymbol{b}$ が行ベクトル、あるいは、$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ が行ベクトルで $\boldsymbol{b}$ が列ベクトル)。結合則は成分表示に戻れば簡単に示される。

確かめよ。

問 7.2.2.e

$$\boldsymbol{a} = (2, 3, 5), \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} \tag{7.2.70}$$

のとき、$\boldsymbol{ab}$ と $\boldsymbol{ba}$ を求めよ。

問 7.2.2.f

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = (2, 4, 3 + i) \tag{7.2.71}$$

のとき、$\boldsymbol{ab}$, $(\boldsymbol{ab})^\dagger$, $\boldsymbol{b}^\dagger \boldsymbol{a}^\dagger$ を求めよ。

■$n \times m$ **型行列**[*29]　列ベクトル、行ベクトル、行列のいろいろな積を見てきたが、これらはすべて、より一般的な対象のあいだの積の特別な場合とみることがで

[*29] この部分は、むずかしくはないが、とばしてもよい。

きる。n 行 m 列の行列、あるいは、$n \times m$ 型行列とは、nm 個の複素数を

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & \cdots & a_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \tag{7.2.72}$$

のように、長方形状にならべたものである。成分を使うときは、$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m}$ のように書く。

もし $n = m = d$ であれば、$n \times m$ 型行列は、これまで見てきた d 次元の正方行列になる。また、$n = d$, $m = 1$ ならば列ベクトルになり、$n = 1$, $m = d$ ならば行ベクトルになる。

複数の $n \times m$ 型行列の和や、$n \times m$ 型行列の実数倍は、これまでとまったく同様に定義できるので、議論しない。$n \times m$ 型行列 A と $m \times \ell$ 型行列 B の自然な積をとれば、$n \times \ell$ 型行列 AB が得られる。成分で定義

すれば、もちろん、

$$(\mathsf{AB})_{i,j} := \sum_{k=1}^{m} a_{i,k}\, b_{k,j} \tag{7.2.73}$$

である。この積は、これまでみてきたベクトルと行列の積のすべてを特別な場合として含んでいる。

$n \times m$ 型行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m}$ のエルミート共役を

$$(\mathsf{A}^\dagger)_{i,j} = (a_{j,i})^* \tag{7.2.74}$$

と定義すれば、これは $m \times n$ 型行列になる。もちろん、エルミート共役の転置については、

$$(\mathsf{AB})^\dagger = \mathsf{B}^\dagger\, \mathsf{A}^\dagger \tag{7.2.75}$$

が成り立つ。

7.2.3　回転行列

6.1.2 節と 6.2.3 節では、それそれ二次元と三次元での回転について議論した。そこでも強調したのだが、

行列とベクトルの言葉を使って回転を表わすと見通しがいい。

二次元で点 (a, b) を原点のまわりに θ 回転して得られる点 (a', b') は、

$$\begin{aligned} a' &= (\cos\theta)\, a - (\sin\theta)\, b \\ b' &= (\sin\theta)\, a + (\cos\theta)\, b \end{aligned} \tag{6.1.9}$$

だった。これが、

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \tag{7.2.76}$$

と書き直せるのは明らかだろう。ここでは、位置座標が列ベクトルで表され、回転の操作が行列で表されていることに注意しよう。ここに現れた 2×2 行列は二次元の**回転行列** (rotation matrix) と呼ばれる。重要な行列なので定義を書いておこう。

$$\boxed{\mathsf{O}_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad (7.2.77)}$$

回転行列は座標を表わす列ベクトルに左からかかる。よって、点 $(a,b)^{\mathrm{t}}$ を θ だけ回転した点は $\mathsf{O}_\theta(a,b)^{\mathrm{t}}$ であり、それをさらに φ だけ回転した点は

$$\mathsf{O}_\varphi\left\{\mathsf{O}_\theta\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\}=\mathsf{O}_\varphi\mathsf{O}_\theta\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \tag{7.2.78}$$

となる。行列の積が自然に現れたことに注目しよう。$\mathsf{O}_\varphi\mathsf{O}_\theta$ という行列は「まず θ だけ回転し、続けて φ だけ回転する」ということになる。ここで、言葉で表現するときの操作の順番と行列をかける順番が（見た目では）逆になっているのが気になるかもしれないが、座標を列ベクトルで表現してしまった以上、これは仕方がない。間違わないようにしよう。2 次元の回転を続けて行なう場合、操作の順番を変えても結果には影響しないのだが、すぐ下で見るように、三次元の回転では操作の順番を変えると結果も変わってしまうのだ。

2 次元で θ だけ回転し続けて φ だけ回転することはもちろん $\theta+\varphi$ の回転をするのと同じことだ。ここ

から

$$\mathsf{O}_\varphi \mathsf{O}_\theta = \mathsf{O}_{\varphi+\theta} \tag{7.2.79}$$

という、回転行列についての等式が成り立つことがわかる。この等式は定義 (7.2.77) と三角関数の加法定理 (3.2.105) からすぐに確かめられる（実は、(6.1.8) で回転の変換を導いたとき実質的に (7.2.79) の証明をしている）。

本題である三次元の回転に移ろう。6.2.3 節で、x-軸、y-軸、z-軸、それぞれの座標軸のまわりでの回転が、(6.2.7), (6.2.9), (6.2.10) と表わされることを見た。ここでも、三次元での点の位置座標を列ベクトル $(a, b, c)^{\mathrm{t}}$ と表わせば、これらの関係はベクトルと行列の積の形に書ける。つまり、x-軸まわりの θ の回転を表わす (6.2.10) は、

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{7.2.80}$$

y-軸まわりの回転の (6.2.9) は、

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{7.2.81}$$

z-軸まわりの回転の (6.2.7) は、

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \tag{7.2.82}$$

となる。元の変換の表式と比較してみよう。特に、変化しない座標の部分は 0 と 1 だけの行に対応することに注意しよう。

　ここに登場した三つの行列

$$
\begin{aligned}
\mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{x})} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \\
\mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{y})} &:= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \\
\mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{z})} &:= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.2.83}
$$

を三次元の**回転行列**という。上で二次元の場合に議論したのと全く同様に、三次元でも回転の操作を続けて行なった結果は行列の積で表わされる。例えば、x-軸のまわりに θ だけ回転した後、y-軸のまわりに φ だけ回転する操作は、行列 $\mathsf{O}_{\varphi}^{(\mathrm{y})}\mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{x})}$ で表わされる。上でも注意したように、この順番を間違いやすので気をつけよう。二次元とは違って、三次元では、一般に二つの回転の順番を入れ替えると結果がかわってしまうのだ。

すぐ下の問題 7.2.3.a を解いてみよう。もちろん、三次元でも回転軸が同じなら、例えば、

$$\mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{z})}\mathsf{O}_{\varphi}^{(\mathrm{z})} = \mathsf{O}_{\varphi}^{(\mathrm{z})}\mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{z})} = \mathsf{O}_{\theta+\varphi}^{(\mathrm{z})} \tag{7.2.84}$$

のように回転行列どうしは可換である。

問 7.2.3.a　点 (a, b, c) を、z-軸のまわりに $\pi/2$ 回転し、つづいて y-軸のまわりに $\pi/2$ 回転して得られる点 (a_1, b_1, c_1) を求めよ。同じ点 (a, b, c) を、y-軸のまわりに $\pi/2$ 回転し、つづいて z-軸のまわりに $\pi/2$ 回転して得られる点 (a_2, b_2, c_2) を求めよ。計算する前に、これらの結果が異なっているはずであることを、（箱などを使って）実験してなっとくせよ。

問 7.2.3.b　点 (a, b, c) を、y-軸のまわりに $\pi/2$ 回転し、続いて x-軸のまわりに $\pi/4$、最後に z-軸のまわりに $-\pi/2$ 回転すると、$(\sqrt{2}, 3, 2\sqrt{2})$ にうつる。もとの (a, b, c) を求めよ。

■オイラーの定理とオイラー角　もちろん、三次元での回転は、(7.2.83) の三つの行列 $\mathsf{O}_\theta^{(\mathrm{x})}, \mathsf{O}_\theta^{(\mathrm{y})}, \mathsf{O}_\theta^{(\mathrm{z})}$ で表わされるものだけではない。6.2.3 節で述べたように、原点を通る任意の回転軸のまわりの任意の角度の回転を考えることができる[*30]。回転軸の取り方は無限にあるので、一般の回転は手に負えないような気がするかもしれない。

しかし、幸いなことに、任意の回転を、上で考えた三つの基本的な回転の組み合わせで表わすことができる。そのような表わし方はいろいろあるが、オイラー[*31]による次の定理を示しておこう。

定理 7.11 (オイラーの定理)**.** 三次元空間の中の任意の

[*30] 進んだ注：このような任意の回転を表わす行列は、ディターミナントが 1 の 3×3 の直交行列であることが知られている (直交行列については 7.2.4 節で、ディターミナントについては 7.4 節で学ぶ。これらの行列すべての集まりには SO(3) という名前が付いている。

[*31] 340 ページの脚注 *25 を見よ。

回転を考える。これに対して、$0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \psi < 2\pi$ を満たす三つの角 φ, θ, ψ が決まる。そして、まず z-軸のまわりに ψ、ついで y-軸のまわりに θ、さいごに z-軸のまわりに φ の回転をおこなうと、最初に考えた回転が得られる。

上の定理で回転の軸が「z-軸、y-軸、z-軸」となっているのは（たとえば「x-軸、y-軸、z-軸」の）書き間違いではない。二つの軸しか使わないところは面白い。

このような三つの角度の組 (φ, θ, ψ) を**オイラー角** (Euler angles) と呼ぶ。上の定理によれば、三次元での任意の回転は、行列

$$\mathsf{O} = \mathsf{O}_{\varphi}^{(\mathrm{z})} \mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{y})} \mathsf{O}_{\psi}^{(\mathrm{z})} \tag{7.2.85}$$

で表されるのだ。

初等的な物理を学んでいくだけなら、この事実を軽く知っている程度で十分だろうが、オイラーの定理の証明は簡単なので、興味を持った読者のために以下でみておこう。

証明：O を与えられた任意の回転とする。以下、図は（むずかしいし、わかりにくいので）描かないが、読者が自分で紙の上か頭の中に図をしっかり描きながらゆっくり読んでほしい。$\boldsymbol{e} = (0,0,1)^{\mathrm{t}}$ とする。$\mathsf{O}\boldsymbol{e}$ は（どこにあるかは全くわからないが）原点からの距離が 1 の点だ。ここで角 ξ をうまくとって z-軸まわりの回転をほどこすと、$\mathsf{O}_{\xi}^{(\mathrm{z})}\mathsf{O}\boldsymbol{e}$ が xz-平面内に入るようにできる。そこで角 η をうまくとって y-軸まわりの回転をほどこすと、$\mathsf{O}_{\eta}^{(\mathrm{y})}\mathsf{O}_{\xi}^{(\mathrm{z})}\mathsf{O}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$ とできる。今まで登場した回転の合成を表す行列を $\tilde{\mathsf{O}} = \mathsf{O}_{\eta}^{(\mathrm{y})}\mathsf{O}_{\xi}^{(\mathrm{z})}\mathsf{O}$ とする。$\tilde{\mathsf{O}}$ は、$\tilde{\mathsf{O}}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$ を満たすから z-軸上の任意の点を動かさない。つまり、z-軸まわりのある回転に対応している[*32]。よって $0 \leq \psi < 2\pi$ を満たす ψ があり、$\tilde{\mathsf{O}} = \mathsf{O}_{\psi}^{(\mathrm{z})}$ と書ける。

ここで $\tilde{\mathsf{O}}$ の定義から、$\mathsf{O}_{-\xi}^{(\mathrm{z})}\mathsf{O}_{-\eta}^{(\mathrm{y})}\tilde{\mathsf{O}} = \mathsf{O}$ である。よっ

[*32] z-軸上の任意の点を動かさない、任意の二点の距離を変えない、空間の向きを変えない（右手系を右手系にうつす）という三つの条件から、z-軸回りの回転であることが結論できる。

て、$\varphi = -\xi, \theta = -\eta$ としてやれば、$\mathsf{O} = \mathsf{O}_{\varphi}^{(\mathrm{z})}\mathsf{O}_{\theta}^{(\mathrm{y})}\mathsf{O}_{\psi}^{(\mathrm{z})}$ となる。これが求める表現 (7.2.85) である。φ と θ が定理にある範囲にとれることは、図を見直せばわかるはずだ。▮

7.2.4　特別な行列

行列の中には特別の名前がついている特に重要な「仲間」がいくつかある。それらがどのような重要な役割を果たすかは、これから見ていくことになるが、ここでは簡単に定義を述べておこう。

■実対称行列とエルミート行列　行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ がすべての i, j について

$$a_{i,j} = a_{j,i} \in \mathbb{R} \tag{7.2.86}$$

を満たすとき、A は**実対称行列** (real symmetric matrix) であるという。実行列 A が実対称行列であるこ

とは

$$\mathsf{A}^{\mathrm{t}} = \mathsf{A} \tag{7.2.87}$$

が成り立つことと同値である。

行列 A が

$$\mathsf{A}^{\dagger} = \mathsf{A} \tag{7.2.88}$$

あるいは、成分で書けば、

$$(a_{j,i})^* = a_{i,j} \tag{7.2.89}$$

という関係を満たすとき、A は**エルミート行列** (Hermitian matrix) であるという。エルミート行列は、行列の応用で重要な役割を果たす。とくに量子力学にとっては不可欠の概念である。

いうまでもなく、実対称行列はエルミート行列の特別な場合にあたる。実行列がエルミート行列なら実対称行列である。

A がエルミート行列（あるいは、実対称行列）なら、(7.2.88) と (7.2.58) から

$$\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathsf{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.2.90}$$

が成り立つ。

■直交行列　$\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$ を任意の正規直交基底（互いに直交する単位ベクトルの集まり）とする。つまり、d 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ が、すべての $i, j = 1, 2, \ldots, d$ について $\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle = \delta_{i,j}$ を満たすということである。

まず、基底ベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ がすべて実ベクトルであるとしよう。そして、

$$\mathsf{O} = (\boldsymbol{v}^{(1)}\ \boldsymbol{v}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{v}^{(d)}) \tag{7.2.91}$$

のようにこれらのベクトルを並べてつくった実行列を考える。O の転置行列は、

$$\mathsf{O}^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{(1)})^{\mathrm{t}} \\ (\boldsymbol{v}^{(2)})^{\mathrm{t}} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{v}^{(d)})^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \tag{7.2.92}$$

のように行ベクトルを縦に並べた形に書ける。

転置行列ともとの行列の積を計算すると、

$$
\begin{aligned}
\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{O} &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{(1)})^{\mathrm{t}} \\ (\boldsymbol{v}^{(2)})^{\mathrm{t}} \\ \vdots \\ (\boldsymbol{v}^{(d)})^{\mathrm{t}} \end{pmatrix} \left(\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{(1)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(1)} & (\boldsymbol{v}^{(1)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(2)} & \cdots & (\boldsymbol{v}^{(1)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(d)} \\ (\boldsymbol{v}^{(2)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(1)} & (\boldsymbol{v}^{(2)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(2)} & \cdots & (\boldsymbol{v}^{(2)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{v}^{(d)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(1)} & (\boldsymbol{v}^{(d)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(2)} & \cdots & (\boldsymbol{v}^{(d)})^{\mathrm{t}}\,\boldsymbol{v}^{(d)} \end{pmatrix} \\
&= \mathsf{I}
\end{aligned}
\tag{7.2.93}
$$

とちょうど単位行列になる。二つ目の等号は、ベクトルの形をよく考えれば、行列の積の規則そのものになっている。最後の等号は正規直交性 (7.1.41) そのまま。

ここで、次の重要な事実をまとめておこう。

定理 7.12 (直交行列の特徴づけ 1)**.** 実ベクトルからなる正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$ を使って (7.2.91) と書ける実行列 O は、

$$
\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{O} = \mathsf{I} \tag{7.2.94}
$$

を満たす。逆に (7.2.94) を満たす実行列 O は、正規直交基底を使って (7.2.91) の形に書ける。

このような性質をもつ実行列 O を**直交行列** (orthogonal matrix) と呼ぶ。二つの性質は等価なことが定理で保証されているので、確かめやすい (7.2.94) を直交行列の条件と考えていい。

証明：前半はすでに示した。後半を示すには、実行列 O をともかく (7.2.91) の形に書き、(7.2.94) を $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ についての条件とみなす。この条件を表す式が (7.2.93) であり、これは、まさに $\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$ が正規直交基底であることを意味する。∎

なお、後に証明する逆行列の一意性（1215 ページの定理 7.31）を使えば、(7.2.94) から

$$\mathsf{O}^{\mathrm{t}} = \mathsf{O}^{-1} \tag{7.2.95}$$

であることがわかる。O^{-1} は O の逆行列である（逆行列については 7.5 節でしっかりと学ぶ)。実は、逆行列

の性質から、(7.2.94) のかけ算の順番を逆にした関係 $\mathsf{O}\,\mathsf{O}^{\mathrm{t}} = \mathsf{I}$ も成り立つことがわかる。

$\mathsf{O}^{\dagger} = \mathsf{O}^{\mathrm{t}}$ であることと、(7.2.94) の性質と、内積と行列の積についての (7.2.58) の関係から、任意の（複素）列ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について、

$$\langle \mathsf{O}\boldsymbol{u}, \mathsf{O}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathsf{O}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{O}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.2.96}$$

がいえる。つまり、二つのベクトルに同じ直交行列を作用させたとき、ベクトルの内積は変わらないのだ。

実は、この性質も直交行列の完全な特徴付けになっている。

定理 7.13 (直交行列の特徴付け 2)**.** 実行列 O が直交行列であることは、任意のベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ について、

$$\langle \mathsf{O}\,\boldsymbol{u}, \mathsf{O}\,\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.2.97}$$

が成り立つことと同値である。

証明：直交行列なら (7.2.97) が成り立つことはすでに見た。逆も簡単。(7.2.97) を仮定しよう。まず、(7.2.58)

より、任意の $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について、$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \mathsf{O}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{O}\,\boldsymbol{v} \rangle$ である。$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ が任意なのだから、(7.1.18) の基底ベクトルをとり、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}^{(i)}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}^{(j)}$ とする。内積によって行列の成分を求める (7.2.56) を使うと、ここから、

$$(\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{O})_{i,j} = \langle \boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)} \rangle = \delta_{i,j} \tag{7.2.98}$$

となり、$\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{O} = \mathsf{I}$ となることがわかる。これによって O が直交行列であることがわかる。∎

話を $d = 2, 3$ の実ベクトルにかぎって、(7.2.97) の関係の幾何的な意味をみてみよう。まず、$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$ として絶対値の定義 (7.1.31) を使うと、

$$|\mathsf{O}\,\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{u}| \tag{7.2.99}$$

が得られる。つまり、O の作用でベクトルの絶対値は不変。これを踏まえて、(7.2.97) をみて、また内積と角度の関係 (6.3.16) を思い出せば、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ のなす角度は O が作用しても変わらないことがわかる。つまり、直交行列が作用したとき、ベクトルの絶

対値も、二つのベクトルのなす角度も変わらないのだ。このような作用をするのは回転行列 (7.2.77), (7.2.83) である。

実際、$d = 2$ のときには任意の直交行列 O は、適切な θ と回転行列 (7.2.77) を使って、

$$\mathsf{O} = \mathsf{O}_\theta, \quad \mathsf{O} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathsf{O}_\theta \tag{7.2.100}$$

のいずれかの形に書けることが知られている (問 7.2.4.b を見よ)。なお二つ目の行列は回転に続けて x 座標の符号をかえる鏡映変換を行なうことを表わしている。

$d = 3$ の場合はもう少しややこしいが、直交行列は、回転であるか、回転といくつかの他の変換の組み合わせになることが知られている。回転以外の直交行列としては、たとえば

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.101}$$

などがある。

問 7.2.4.a　(7.2.77), (7.2.83), (7.2.101) が直交行列であることを示せ。

問 7.2.4.b　実数 a, b, c, d を使って $d = 2$ の直交行列を

$$\mathsf{O} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7.2.102}$$

と表す。(7.2.94) の条件を書き下し、a, b, c, d が満たすべき関係を書け。それを満たす解が (7.2.100) の形しかないことを示せ[*33]。

■ユニタリー行列　次に、直交行列の複素行列版であるユニタリー行列について見ておこう。議論はほとんど直交行列と同じなので、少し簡潔に進めよう（よって、この部分を復習している人は、一つ前の直交行列

[*33] $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ を満たす二つの実数は、適切な実数 θ を使って $\alpha = \cos\theta$, $\beta = \sin\theta$ と書けることを使うといい

のところから読むこと)。ユニタリー行列は、量子力学ではエルミート行列とともにもっとも重要な役割を果たす。

$\{\boldsymbol{v}^{(1)}, \boldsymbol{v}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}\}$ を任意の正規直交基底とする。ここでは、これらのベクトルが複素ベクトルでもかまわないとする。これらを横に並べて

$$\mathsf{U} = (\boldsymbol{v}^{(1)}\ \boldsymbol{v}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{v}^{(d)}) \tag{7.2.103}$$

という行列をつくる。すると、ちょうど (7.2.93) に対応して、

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}^\dagger \mathsf{U} &= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{(1)})^\dagger \\ (\boldsymbol{v}^{(2)})^\dagger \\ \vdots \\ (\boldsymbol{v}^{(d)})^\dagger \end{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{(1)}\ \boldsymbol{v}^{(2)}\ \cdots\ \boldsymbol{v}^{(d)}) \\
&= \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{(1)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(1)} & (\boldsymbol{v}^{(1)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(2)} & \cdots & (\boldsymbol{v}^{(1)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(d)} \\ (\boldsymbol{v}^{(2)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(1)} & (\boldsymbol{v}^{(2)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(2)} & \cdots & (\boldsymbol{v}^{(2)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\boldsymbol{v}^{(d)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(1)} & (\boldsymbol{v}^{(d)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(2)} & \cdots & (\boldsymbol{v}^{(d)})^\dagger \boldsymbol{v}^{(d)} \end{pmatrix} \\
&= \mathsf{I}
\end{aligned} \tag{7.2.104}$$

が成立する。再び逆行列の概念を先取りすると、行列 U は、

$$\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{U}^{-1} \tag{7.2.105}$$

を満たす。ここでも、逆行列の性質から $\mathsf{U}\,\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{I}$ が成り立つ。

(7.2.105) を満たす行列を**ユニタリー行列** (unitary matrix) という。行列の成分がすべて実数なら共役と転置は同じことだから、その場合 $\mathsf{U}^\dagger\,\mathsf{U} = \mathsf{I}$ という条件は (7.2.94) と一致する。つまり、実行列がユニタリー行列であれば、それは直交行列である。

また、任意のベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について、

$$\langle \mathsf{U}\,\boldsymbol{u}, \mathsf{U}\,\boldsymbol{v}\rangle = \langle \mathsf{U}^\dagger\,\mathsf{U}\,\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle \tag{7.2.106}$$

が成り立つ。

直交行列についての定理 7.12, 7.13 に相当する結果も成立するので、まとめておこう。証明は直交行列の場合とまったく同じなので省略する。

定理 7.14 (ユニタリー行列の特徴付け)**.** 複素行列 U について、以下の三つの条件は同値である。これらの条件を満たす行列がユニタリー行列である。*i)* 正規直交基底を使って (7.2.103) の形にかける。*ii)* $\mathsf{U}^\dagger\mathsf{U} = \mathsf{I}$ が成り立つ。*iii)* 任意の複素ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ について $\langle \mathsf{U}\,\boldsymbol{u}, \mathsf{U}\,\boldsymbol{v}\rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ が成り立つ。

例えば、(7.1.49) の正規直交基底を横に並べれば、

$$\mathsf{U} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2i & -i \end{pmatrix} \tag{7.2.107}$$

というユニタリー行列ができる。

問 7.2.4.c　(7.2.107) の行列が $\mathsf{U}^\dagger\mathsf{U} = \mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{I}$ を満たすことを確かめよ。

問 7.2.4.d　(7.1.50) の正規直交基底を横に並べて作った行列 U が $\mathsf{U}^\dagger\mathsf{U} = \mathsf{U}\mathsf{U}^\dagger = \mathsf{I}$ を満たすことを確かめよ。

■射影行列　$d \times d$ 行列 P が

$$\mathsf{P}^2 = \mathsf{P} \tag{7.2.108}$$

という関係を満たすとき、P を**射影行列** (projection matrix) と呼ぶ。

たとえば、

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.2.109}$$

は (7.2.108) を満たすので射影行列の一例である ((7.2.108) を確かめよう)。実際、任意のベクトルにこの行列を作用させると、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \tag{7.2.110}$$

となるから、この行列には、全てのベクトルを、$(a, a)^{\mathrm{t}}$ という形のベクトルに「射影」する働きがあるといえる。

より一般に、$\langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle = 1$ を満たす任意の列ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して、クロネッカー積 ((7.2.65), (7.2.66) を見よ)

$$\mathsf{P} = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^{\dagger} \tag{7.2.111}$$

は射影行列になる。

問 7.2.4.e　(7.2.111) が射影行列であることを示せ。

射影行列 P がさらにエルミート行列であるとき（つまり $\mathsf{P}^\dagger = \mathsf{P}$ が成り立つとき)、P は**直交射影行列** (orthogonal projection matrix) であるという。物理への応用では、ほとんどの射影行列が直交射影行列であり、直交射影行列のことを単に射影行列と呼ぶことも多い。

上の射影行列 (7.2.109) は直交射影行列ではない。また、射影行列 (7.2.111) が直交射影行列になるのは $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ のときのみである（エルミート性は (7.2.67) より明らか)。この場合、(7.2.111) は以前にみた (7.2.68) と一致する。

より一般の直交射影行列を次のようにして作ることができる。$n < d$ として、n 個の列ベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n)}$ が、

$$\langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle = \delta_{i,j} \tag{7.2.112}$$

を満たすとする。これは正規直交基底の条件 (7.1.41) と同じだが、ここではベクトルの個数が足りないので、ほんとうの正規直交基底ができるわけではない。(7.2.68) と同じようにこれらの単位ベクトルのクロネッカー積を作り、さらにそれらを足し合わせて

$$\mathsf{P} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}^{(i)} (\boldsymbol{v}^{(i)})^{\dagger} \tag{7.2.113}$$

とすると、これは直交射影行列になる。まず、P がエルミート行列であることは、クロネッカー積のエルミート共役についての (7.2.67) からすぐにわかる。射影行列であることは、内積の定義 (7.1.21) と (7.2.113) に注意して素直に計算すれば、

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}^2 &= \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{v}^{(i)} (\boldsymbol{v}^{(i)})^{\dagger} \boldsymbol{v}^{(j)} (\boldsymbol{v}^{(j)})^{\dagger} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \boldsymbol{v}^{(i)} \langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{v}^{(j)} \rangle (\boldsymbol{v}^{(j)})^{\dagger} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}^{(i)} (\boldsymbol{v}^{(i)})^{\dagger} \\
&= \mathsf{P}
\end{aligned} \tag{7.2.114}$$

のように確かめられる。$\boldsymbol{a}$ を任意のベクトルとすると、

$$\mathsf{P}\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}^{(i)} \langle \boldsymbol{v}^{(i)}, \boldsymbol{a} \rangle \tag{7.2.115}$$

となる。つまり、P は、任意のベクトルを、$\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n)}$ の線形結合で書けるベクトルに射影する行列だといえる[*34]。

7.2.5　行列のトレース

トレース (trace) は、行列を特徴づける簡単な量だが、理論面でも応用面でも意外なほど役に立つ。基本的なことは知っておくべきだ。

d 次の正方行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ のトレースを、

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}] := \sum_{i=1}^{d} a_{i,i} \tag{7.2.116}$$

[*34] 進んだ注：これを、「$\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(n)}$ で張られる部分空間への直交射影」という。

と定義する。要するに、対角成分の和である。

A, B を任意の正方行列、α, β を任意の複素数とするとき、トレースの線形性

$$\mathrm{Tr}[\alpha\,\mathsf{A} + \beta\,\mathsf{B}] = \alpha\ \mathrm{Tr}[\mathsf{A}] + \beta\ \mathrm{Tr}[\mathsf{B}] \tag{7.2.117}$$

が成り立つことは明らかだろう。

トレースのもっとも面白い性質は、任意の A, B について

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{AB}] = \mathrm{Tr}[\mathsf{BA}] \tag{7.2.118}$$

が成り立つことだ。(7.2.31) で注意したように、AB と BA は一般には一致しない。しかし、トレースをとれば同じ値がでてくるのだ。(7.2.118) は、行列の積の定義 (7.2.16) さえ知っていれば簡単に証明できる。理解をためすためにも、自分で示してみてほしい（下の問 7.2.5.b)。

d 次のゼロ行列、単位行列 (7.2.7) については、

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{0}] = 0, \quad \mathrm{Tr}[\mathsf{I}] = d \tag{7.2.119}$$

である。また、任意の列ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ から (7.2.65) のようにしてつくられる行列 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\dagger$ については、

$$\mathrm{Tr}[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^\dagger] = \boldsymbol{b}^\dagger\,\boldsymbol{a} = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle \tag{7.2.120}$$

が成り立つ。よって、(7.2.111) の射影行列は $\mathrm{Tr}[\mathsf{P}] = 1$ を満たす。

問 7.2.5.a　直交射影行列 (7.2.113) のトレースを求めよ。

問 7.2.5.b　(7.2.118) を示せ。

問 7.2.5.c　(7.2.120) を示せ。

問 7.2.5.d　任意の複素行列 A について

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^\dagger\,\mathsf{A}] \geq 0 \tag{7.2.121}$$

が成り立つことを証明せよ。実行列については、

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}^2] \geq 0 \tag{7.2.122}$$

という関係が成り立ちそうな気がするが、それは正しくない。反例をあげよ。

7.3　二次の正方行列の逆行列とディターミナント

この短い節では、二次の正方行列に限定して、逆行列とディターミナントという重要な概念を解説する。といっても、二次の行列だけを扱うかぎり、用いる数学はきわめて初等的である[*35]。一方、続く 7.4 節、7.5 節でじっくり見るように、これらの概念の一般の d 次の行列への拡張はまったく当たり前ではなく、行列についての深い理解を必要とする。そういう意味で、この節の内容は軽いウォームアップのつもりで読んでほしい。

逆行列というのは、文字通り、数の場合の逆数に対応する概念である。以下で見るように、連立一次方程式の解法を考えると自然に出てくるものなのだが、連立方程式を離れても行列が関わる様々な局面で威力を

[*35] この内容は高校数学で扱われたり扱われなかったりするので、一つの節としてまとめておいた。

発揮する。

ディターミナントを一言で説明するのは難しいが、行列を特徴づけるもっとも基本的な「一つの数」だと言って間違いはないだろう。その意味については、7.3.2 節、そして、続く 7.4 節でじっくりと理解してほしい。

ディターミナントの定番の日本語訳は「行列式」である。しかし、行列式という名称は行列そのものと紛らわしいし[*36]、あまりいい名称だとは思えない。たとえば、物理学者どうしの会話の中などでは、もっぱら(片仮名言葉の)「ディターミナント」が用いられる。この本では、そういう慣習にしたがう。

歴史的には、ディターミナントも連立一次方程式の研究から生まれた。ちなみにディターミナントを最初

[*36] しかも、ディターミナントは「数」であって「式」ではない。

に考えたのは江戸時代の和算家の関孝和[*37]だが、彼の結果は（もちろん）西洋には伝えられなかった。今日の数学でのディターミナントの源流になるのは、関から少し遅れるライプニッツ[*38]やクラメル[*39]の研究である。

[*37] 関孝和（せきたかかず） (1642–1708) 武士の家に生まれて幕府勘定方吟味役になったそうだが、ともかく、和算の第一人者。ディターミナントの発見はライプニッツより十年早い上に、ライプニッツよりも進んで五次の行列まであつかっているという。他にも、ベルヌーイよりも早い時期のベルヌーイ数の発見（本当は、「関数（せきすう）」というべきか？！）、高次方程式の解法の発見など、非常にレベルの高い業績がある。要するに、おそるべき天才だったのだ。ちなみに、ニュートンは関と同じ年に生まれている。

[*38] Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) ドイツの数学者、論理学者、哲学者。ニュートンと独立に微分積分学をつくりだした。

[*39] Gabriel Cramer (1704–1752) スイスの数学者。連立一次方程式の一般的な解についてのクラメルの規則などで知られる。

7.3.1　連立一次方程式と逆行列

特に歴史に従うつもりはないのだが、ここでも連立一次方程式から話を始めよう。a, b, c, d, p, q を与えられた複素数として、未知数 x, y についてのもっとも一般的な連立一次方程式

$$ax + by = p, \quad cx + dy = q \tag{7.3.1}$$

を考える。高校数学で学んだように、これらを適切に変形すれば (一つ目の式の d 倍と二つ目の式の $-b$ 倍を足し、一つ目の式の $-c$ 倍と二つ目の式の a 倍を足す)

$$(ad-bc)x = dp-bq, \quad (ad-bc)y = -cp+aq \tag{7.3.2}$$

が得られる。よって $ad - bc \neq 0$ であれば、連立一次方程式の解は

$$x = \frac{dp - bq}{ad - bc}, \quad y = \frac{-cp + aq}{ad - bc} \tag{7.3.3}$$

と求められる。

これで問題は解けたのだが、同じことを敢えて行列を使って考えみよう。そうすることで、逆行列、ディターミナントという、行列についての深い数学的な概念と出会えるのだ。

まず、(7.3.1) を行列と列ベクトルを使って、

$$\mathsf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{7.3.4}$$

と書こう。もちろん、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7.3.5}$$

とした。この式を「一発で」$(x, y)^{\mathrm{t}} = \cdots$ という形に変形できれば便利だ。そのためには、A^{-1} という（別の）行列があって $\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$ となっていればいい。(7.3.4) の両辺に左から A^{-1} をかければ、すぐに

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathsf{A}^{-1}\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{7.3.6}$$

となるからだ（もちろん、単位行列 I をかけてもベクトルは変わらないという性質 (7.2.54) を使った）。こ

こで A^{-1} という書き方を使ったのは、ゼロでない複素数 a とその逆数 a^{-1} が $a^{-1}a = 1$ を満たすことのアナロジーである。

さて、こんな性質をもった行列 A^{-1} があるかどうかはわからないが、ともかく、

$$\mathsf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \tag{7.3.7}$$

と置いてみよう。ここで、u, v, w, z は未知の数だが、与えられた a, b, c, d と

$$\begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.3.8}$$

で結ばれている。左辺の積を計算して、各々の成分についての等式に書き直すと、

$$\begin{aligned} ua + vc = 1, \quad ub + vd = 0, \\ wa + zc = 0, \quad wb + zd = 1 \end{aligned} \tag{7.3.9}$$

という連立方程式が得られる。これを u, v, w, z について解けばいい。四つの式の連立は大変な気がするが、

前半の二つが u, v を決める式、後半の二つが w, z を決める式なので、普通に二つの連立を解くだけだ。計算過程を述べても退屈なので結果を書くと（しかし、少し自分で計算してほしい)、$ad - bc \neq 0$ のとき、

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{7.3.10}$$

あるいは、A の中身をはっきりさせて、

$$\boxed{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (7.3.11)}$$

となる。$ad - bc = 0$ のときには $\mathsf{XA} = \mathsf{I}$ となるような行列 X は存在しない。

もちろん、A^{-1} の表式 (7.3.10) を連立一次方程式の解を形式的に表わした (7.3.6) に代入すれば、方程式の

解 (7.3.3) が得られる。

問 7.3.1.a　鶴亀算(つるかめざん)[*40]の連立方程式 $x + y = 8,\ 2x + 4y = 22$ を行列で表現し、A^{-1} の表式 (7.3.10) を用いて解を求めよ（もちろん、普通に解いた方が早いのだが[*41]）。

上では、$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$ が成り立つことを要請して A^{-1}

[*40] 念のため書いておくと、「鶴（足は 2 本）と亀（足が 4 本）があわせて 8 匹おり、足の数を合計すると 22 本である。鶴は何羽、亀は何匹いるか？」というタイプの問題。

[*41] ただし、早いのがよければ「8 匹すべてが鶴なら足は 16 本のはずで、余分は 6 本は・・」とやるのが最も早い。一般に、早くできる方法には汎用性がなくまた数学的な広がりもないと言っていいだろう（もちろんパズル的な面白さはある）。

を決めたが、順番を逆にした積を計算すると、

$$\begin{aligned}\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -cb+da \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathsf{I} \end{aligned} \tag{7.3.12}$$

となりやはり単位行列が得られる。この場合の積は A と A^{-1} の順番にはよらないということだ。こうして、複素数 a の逆数 a^{-1} が $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$ を満たすのとそっくりの関係が得られた。(7.3.10) で定まる行列 A^{-1} を (7.3.5) の行列 A の**逆行列** (inverse matrix) という。これを定理としてまとめよう。

定理 7.15 (二次の行列の逆行列)**.** 行列 A を (7.3.5) で定め、複素数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $ad-bc \neq 0$ を満たすとする。A の逆行列 A^{-1} を (7.3.10) のように定義すると、$\mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{I}$ が成り立つ。

問 7.3.1.b　以下の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix} \tag{7.3.13}$$

問 7.3.1.c　逆行列の意味を考えれば、$(\mathsf{A}^{-1})^{-1} = \mathsf{A}$ であることは明らかだろう。逆行列の成分表示 (7.3.11) を用いて、この関係を直接証明せよ。

7.3.2　逆行列とディターミナント

上の議論では行列 $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の成分から作った $ad - bc$ という量が重要な役割を果たした。そこで、この量を

$$\det[\mathsf{A}] := ad - bc \tag{7.3.14}$$

と書き、**ディターミナント** (determinant) と呼ぶ。特にややこしい式ではないが、

$$\begin{array}{ccc} + & & - \\ & a \quad b & \\ & c \quad d & \end{array} \tag{7.3.15}$$

という「たすきがけ」あるいは「斜乗*42」のルールで記憶するのが定番だ。+ という線に沿った成分をかけ合わせ、そこから、− という線に沿った成分をかけ合わせたものを引くということだ。

ディターミナントを |A| と記号で表わすことも多い。ただ、|A| を見ると絶対値みたいな気がしてしまうけれど、(7.3.14) から明らかなように、ディターミナントは負の値も実数でない値もとる。絶対値とはまったくちがうのだ。紛らわしい記号なので、私はあまり好きではない。この本では、基本的には det[A] という書き方

*42 これは関孝和の用語。

を使い、（実際の計算などで）あまりに煩雑になるときにかぎり $|\mathsf{A}|$ を使う。

ディターミナントを使えば、逆行列の表式 (7.3.10) は

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det[\mathsf{A}]} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \tag{7.3.16}$$

となる。

以下では、ディターミナントの最も本質的な性質である (7.3.24) を発見的に導びこう。2×2 行列 A, B について $\det[\mathsf{A}] \neq 0$, $\det[\mathsf{B}] \neq 0$ としよう。よって逆行列 A^{-1}, B^{-1} が存在する。このとき二つの行列の積の逆行列について、

$$(\mathsf{AB})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1} \tag{7.3.17}$$

が成り立つことに注意する。これは、

$$\begin{aligned} &(\mathsf{AB})(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1}) = \mathsf{AA}^{-1} = \mathsf{I}, \\ &(\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1})(\mathsf{AB}) = \mathsf{B}^{-1}\mathsf{B} = \mathsf{I} \end{aligned} \tag{7.3.18}$$

のように計算すればすぐに確かめられる。

ここで、A, B を

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \tag{7.3.19}$$

と成分表示して、(7.3.17) の左辺と右辺を別個に計算してみる。まず二つの行列の積をあからさまに計算すると

$$\mathsf{AB} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix} \tag{7.3.20}$$

となるので、逆行列の表式 (7.3.16) から、

$$(\mathsf{AB})^{-1} = \frac{1}{\det[\mathsf{AB}]} \begin{pmatrix} cb' + dd' & -(ab' + bd') \\ -(ca' + dc') & aa' + bc' \end{pmatrix} \tag{7.3.21}$$

を得る。これが (7.3.17) の左辺だ。次に、二つの行列の逆行列がそれぞれ

$$\begin{aligned} \mathsf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det[\mathsf{A}]} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \\ \mathsf{B}^{-1} &= \frac{1}{\det[\mathsf{B}]} \begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.3.22}$$

であることから、(7.3.17) の右辺は

$$\begin{aligned}\mathsf{B}^{-1}\mathsf{A}^{-1} &= \frac{1}{\det[\mathsf{A}]\det[\mathsf{B}]}\begin{pmatrix} d' & -b' \\ -c' & a' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det[\mathsf{A}]\det[\mathsf{B}]}\begin{pmatrix} d'd+b'c & -d'b-b'a \\ -c'd-a'c & c'b+a'a \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{7.3.23}$$

となる。さて、ここで (7.3.21) と (7.3.23) の最右辺の行列を見比べると、この二つは（かけ算や足し算の順番が違うだけで）まったく同じものだ。ということは、二つの式の行列の前の係数も等しくなければならないので、

$$\det[\mathsf{AB}] = \det[\mathsf{A}]\det[\mathsf{B}] \tag{7.3.24}$$

であることがわかる。また、この等式の左辺も右辺もそれぞれの行列の成分の連続関数だから、$\det[\mathsf{A}] = 0$ または $\det[\mathsf{B}] = 0$ のときにも (7.3.24) は成立する。

(7.3.24) は大変きれいな関係である。「行列の積のディターミナントは、ディターミナントの積になる」ことを言っているわけだが、行列の積を取るときには二

つの行列の成分がややこしく入り交じることを思い出せば、ディターミナントがこのようにすっぱりときれいな積に分離するのは驚くべきことである。ディターミナントが行列について本質的な情報を持っていることを感じさせる関係でもある。

最後に、定義 (7.3.14) から任意の複素数 α と行列 A について、

$$\det[\alpha\mathsf{A}] = \alpha^2 \det[\mathsf{A}] \tag{7.3.25}$$

が成り立つことを注意しておこう。つまり、ディターミナントは A について線形ではない。同様に、$\det[\mathsf{A}+\mathsf{B}]$ も特に簡単な形にはならない（決して $\det[\mathsf{A}] + \det[\mathsf{B}]$ ではない！）。

問 7.3.2.a　等式 (7.3.24) は、左辺のややこしい量が右辺のように因数分解されることを表わしていると見ることもできる。成分表示 (7.3.19), (7.3.20) を用いて、等式 (7.3.24) を具体的に書き下し、それが成り立っていることを直接の計算で確かめよ。

7.4　ディターミナント

この節では、一般の d 次の正方行列のディターミナントを定義し、基本的な性質を証明する。前節での話の流れからして、ここでも未知数が d 個ある連立一次方程式を調べていくことで、逆行列やディターミナントが自然に出てくると期待したくなるかもしれない。確かに歴史は（大ざっぱには）そういう風に進んだわけだが、実際には、連立方程式を調べることとディターミナントを定義することの間には（二次の場合を除けば）大きなギャップがある。ここでは、二次の行列のディターミナントの持っている性質に注目し[*43]、自然な拡張を考えることで一般のディターミナントを定義する。

ディターミナントの理論は行列についての数学の一

[*43] 適切な性質に注目できるのは、もちろん、既に「正解」を知っているから。

つの山だと言っていい。いったん、ディターミナントの理論が整備されれれば、逆行列（7.5 節)、行列の固有値（7.6 節）といった概念も（山を下るように）自然に導かれる。ちなみに、行列の理論の出発点となった連立一次方程式の問題は、逆行列の応用として 7.5.3 節で扱う。

ここでは、まず前節で見た二次の正方行列のディターミナントを幾何学的に解釈し直す（7.4.1 節)。一般の次数をあつかう前に、二次の自然な拡張として、3 次の正方行列のディターミナントを議論する (7.4.2 節)。置換とパリティーの理論を整理しておけば (7.4.3 節)、それまでのアイディアをすなおに拡張することで、一般の次数の行列のディターミナントが定義できる (7.4.4 節、7.4.5 節)。さらに、大きな行列のディターミナントを実際に計算するための方法を二つ説明する（7.4.6 節)。とくに、余因子展開の定理は、つづく 7.5 節で逆行列を議論する際に重要な役割を果たす。さいごに、ディターミナントの応用の一つとして、ベクトルの線形独

立性の判定法について述べる（7.4.7 節）。

7.4.1　二次の正方行列のディターミナント

一般の定義への準備のために、二次の行列のディターミナントを見直そう。

まず $d = 2$ よりも簡単な $d = 1$ の場合をみておく。この場合、正方行列はただの複素数 $\mathsf{A} = (a_{1,1})$ である。この行列（つまり、数）を特徴づける「一つの数」であるディターミナントは、そのまま

$$\det[\mathsf{A}] = a_{1,1} \tag{7.4.1}$$

と定義する。一般の d についての定義と照らし合わせてこれが自然な定義であることを後にみる。

一般論に備えて二次の正方行列を

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \tag{7.4.2}$$

と成分表示しておこう。すると、ディターミナント

(7.3.14) は

$$\det[\mathsf{A}] := a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{1,2}\,a_{2,1} \tag{7.4.3}$$

となる。

■ディターミナントと符号付き面積　これから先、一般の次数 d の行列のディターミナントを定義したい。そのため、二次の行列のディターミナント (7.4.3) の意味をもう少し掘り下げる。ただし、一般の複素数成分の行列をあつかっていたのではなかなか直観がわかないので、しばらくは、A が二次の実行列だとして話を進める。

(7.2.5), (7.2.6) のように、列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} \tag{7.4.4}$$

を使って、二次の正方行列を $\mathsf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ と書こう。そして、ディターミナント $\det[\mathsf{A}]$ を $\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ のように二つのベクトルの関数とみることにする。また、ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ は二次元空間の幾何ベクトルを成分表

示したものだとみなそう。これによって、幾何的なイメージを通じてディターミナントをみることができるようになる。

ところで、三次元ベクトルの外積の成分表示 (6.3.73) を思い出すと、

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{1,1}\, a_{2,2} - a_{2,1}\, a_{1,2} \end{pmatrix} \tag{7.4.5}$$

である。右辺の z-成分に $\det[\mathsf{A}] = \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ が現れた。外積とベクトルの角度についての (6.3.36) を使えば、

$$\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = |\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|\,\sin\theta \tag{7.4.6}$$

が得られる。ここで、θ は、二次元のデカルト座標でベクトルを表したとき、ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ のなす角度。ただし、$\boldsymbol{a}_1$ を基準にして、左まわりに角度を測る。θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くことになり、$\sin\theta$ は正負の両方の値をとるが、(7.4.6) は符号を含めて正しい。

図 7.1　二つの二次元のベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ のつくる平行四辺形。左では「符号付き面積」は灰色の平行四辺形の面積そのもの。右では $\theta > \pi$ なので、「符号付き面積」は灰色の平行四辺形の面積にマイナスをつけたものとする。

6.3.3 節でみたように、(7.4.6) の右辺には幾何的な意味がある。重要なことなのでくり返そう。図 7.1 のように、ベクトルをデカルト座標で表現したとき、ベクトル $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ がつくる平行四辺形を考える。仮に $\boldsymbol{a}_1$ を「底辺」と考えれば、「高さ」は $|\boldsymbol{a}_2|\,|\sin\theta|$ になる。よって、平行四辺形の面積は $|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|\,|\sin\theta|$ である。ここで、さらに話を進めて、サインの絶対値をはずした $|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|\,\sin\theta$ という量を考える。これは、正負の値

をとる「符号付き面積」とみなすことができる。$\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ のなす角が（上のようにしてはかったとき）π 未満なら正、π より大きければ負となり、面積のほかに、二つのベクトルの相対的な位置関係の情報ももっているのだ。

この先での一般化をにらんで、符号付き面積 (7.4.6) の基本的な性質をまとめておこう。

i) 反対称性 $\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = -\det[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1]$ が成り立つ。

ii) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$ を任意の列ベクトル、α, β を任意の定数とするとき、線形性

$$\begin{aligned}
&\det[(\alpha\,\boldsymbol{a}_1 + \beta\,\boldsymbol{b}_1), \boldsymbol{a}_2] \\
&\quad = \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] + \beta\,\det[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2] \\
&\det[\boldsymbol{a}_1, (\alpha\,\boldsymbol{a}_2 + \beta\,\boldsymbol{b}_2)] \\
&\quad = \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] + \beta\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2]
\end{aligned} \tag{7.4.7}$$

が成り立つ。

iii) $\boldsymbol{a}_1 = (a_{1,1}, 0)^{\mathrm{t}}$, $\boldsymbol{a}_2 = (0, a_{2,2})^{\mathrm{t}}$ のときは、

$$\begin{aligned}
\det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \end{pmatrix}\right] &= a_{1,1}\,a_{2,2} \\
&= a_{1,1}\,\det[(a_{2,2})]
\end{aligned} \tag{7.4.8}$$

これらは、すべて定義 (7.4.3) あるいは (7.4.6) から簡単に示される。

i) の反対称性は符号付き面積の符号の決め方から明らか。ii) の線形性は、そもそもの定義 (7.4.3) をみれば当たり前だが、「面積」がこのような性質をもつというのは、いっけん意外に思えるかも知れない。しかし、足し算がうまくいくことは図 7.2 を見ればなっとくできるはずだ。とくに、図の下の例について考えると、単なる面積でなく、符号付き面積を考えたことによって線形性が保証されていることがわかるはずだ。iii) は、二つのベクトルが直交しているときの面積は「底辺かける高さ」で決まるという、小学校のころから知っている事実に対応している。ここで、かなりわざとらしいが、一次の行列のディターミナントについての (7.4.1) を使って、$a_{2,2}$ をディターミナントで表現しておいた (もちろん、これは伏線)。

■基本性質からディターミナントが決まること　実は、符号付き面積の「基本性質」i), ii), iii) を認めれば、

図 7.2　符号付き面積（ディターミナント）が $\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] + \det[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2] = \det[\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]$ を満たすことを幾何的になっとくするための図。式の両辺と左右の図の面積が対応する。上は、$\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ と $\det[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]$ がどちらも正の場合。補助線をにらみながら、平行四辺形の等積変形をおこなえば、左右の二つの図形の面積が等しいことはすぐにわかるだろう。下は、$\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ が正で $\det[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2]$ が負の場合。やはり等積変形して、面積の引き算をすると、右側の平行四辺形の面積と一致することがわかる。この例からわかるように、線形性が成り立つためには、単なる面積ではなく、符号付きの面積を考える必要がある。

ディターミナント $\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ の形は完全に決まってしまう。もうディターミナントの形は (7.4.3) だとわかっているからどうでもいいような気もするが、この事実は、一般の次数への一般化のためには本質的だ。じっくりと見ておこう。

また、この段階で、実行列だけを考えるという「縛(しば)り」を外(はず)すことにしよう。幾何的な直観から得られた i), ii), iii) の性質を（幾何的なイメージは漠然と心に残しながら)、そのまま、複素ベクトル（と複素行列）に適用するのだ。よって、ii) の性質に登場する「定数」とは複素数の意味だと解釈する。

例によって、

$$\boldsymbol{e}^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.4.9}$$

という二つの単位ベクトルを用意する。これらをディターミナントに代入したときにどうなるかを調べよう。

まず、i) の性質から、任意の列ベクトル $\boldsymbol{a}$ について $\det[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}] = 0$ であることに注意しよう。な

ぜなら、i) で $\boldsymbol{a}_1$ と $\boldsymbol{a}_2$ をどちらも $\boldsymbol{a}$ とすれば、$\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}] = -\det[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}]$ が得られ、これを満たすのは 0 しかない。よって、$\det[\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(1)}] = \det[\boldsymbol{e}^{(2)},\boldsymbol{e}^{(2)}] = 0$ がわかった。また、iii) の特別な場合として $\det[\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(2)}] = 1$ である。さらに、i) から $\det[\boldsymbol{e}^{(2)},\boldsymbol{e}^{(1)}] = -\det[\boldsymbol{e}^{(1)},\boldsymbol{e}^{(2)}] = -1$ なので、すべての組み合わせでの値が決まった。

これらの結果を、一つの式で

$$\det[\boldsymbol{e}^{(i)},\boldsymbol{e}^{(j)}] = \epsilon_{i,j} \quad (i,j=1,2) \tag{7.4.10}$$

と書くこともできる。ここで、$\epsilon_{i,j}$ は、二次元のレヴィ・チビタの記号（(6.3.94) を参照）で、$\epsilon_{1,1} = \epsilon_{2,2} = 0$, $\epsilon_{1,2} = -\epsilon_{2,1} = 1$ により定義する。

さて、列ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ の成分表示 (7.4.4) より、

$$\boldsymbol{a}_1 = a_{1,1}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + a_{2,1}\,\boldsymbol{e}^{(2)}, \quad \boldsymbol{a}_2 = a_{1,2}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + a_{2,2}\,\boldsymbol{e}^{(2)} \tag{7.4.11}$$

と展開できる。よって

$$\begin{aligned}&\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]\\&= \det[(a_{1,1}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + a_{2,1}\,\boldsymbol{e}^{(2)}), (a_{1,2}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + a_{2,2}\,\boldsymbol{e}^{(2)})]\end{aligned}$$

となるが、ここで線形性 (7.4.7) を使うと

$$\begin{aligned}&= a_{1,1}\ \det[\boldsymbol{e}^{(1)}, (a_{1,2}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + a_{2,2}\,\boldsymbol{e}^{(2)})]\\&+ a_{2,1}\ \det[\boldsymbol{e}^{(2)}, (a_{1,2}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + a_{2,2}\,\boldsymbol{e}^{(2)})]\end{aligned}$$

となる。さらに後ろ側のベクトルについての線形性をそれぞれの項で使い、(7.4.10) を代入すると、

$$\begin{aligned}&= a_{1,1}\,a_{1,2}\ \det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(1)}] + a_{1,1}\,a_{2,2}\ \det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}]\\&+ a_{2,1}\,a_{1,2}\ \det[\boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(1)}] + a_{2,1}\,a_{2,2}\ \det[\boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(2)}]\\&= a_{1,1}\,a_{2,2} - a_{2,1}\,a_{1,2}\end{aligned} \tag{7.4.12}$$

となり、ディターミナントの定義 (7.4.3) が得られた。

これから先の一般化にそなえて、上の計算をもっとかっこよく抽象的にやっておこう。まず (7.4.11) を一

般的に $\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{2} a_{i,j}\, \boldsymbol{e}^{(i)}$ と書く。これを使えば、

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] &= \det\left[\sum_{i=1}^{2} a_{i,1}\, \boldsymbol{e}^{(i)}, \sum_{j=1}^{2} a_{j,2}\, \boldsymbol{e}^{(j)}\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} a_{i,1}\, a_{j,2}\, \det[\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)}] \\ &= \sum_{i,j=1}^{2} \epsilon_{i,j}\, a_{i,1}\, a_{j,2} \qquad (7.4.13)\end{aligned}$$

となり、$\epsilon_{i,j}$ の定義を代入すれば (7.4.3), (7.4.12) と同じ結果になる。なお二つ目のイコールのところで線形性を二回使った結果をすぐに書いたので、どういう計算をしたのか、(7.4.12) と比較しながら、考えてみよう。

問 7.4.1.a　二次の正方行列のディターミナントは、

$$\det[\mathsf{A}] = \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2] = \sum_{i,j=1}^{2} \epsilon_{i,j}\, a_{1,i}\, a_{2,j} \qquad (7.4.14)$$

と書くこともできる ((7.4.13) と似ているが微妙にちがうことに注意)。これは、後に一般的に示す (1159 ページの定理 7.19) が、今はベタに計算して確かめておこう。

7.4.2　三次の正方行列のディターミナント

次に、あまり先を急がず、三次の正方行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \tag{7.4.15}$$

のディターミナントを定義しよう。二次から三次への一般化を理解すれば、一般の次数についての基本的なアイディアは理解できる。

■三次元の符号付き体積　ここでも、幾何的な直観を活用するため、一時的に実行列だけを考えることにす

る。そして、(7.2.5), (7.2.6) のように、列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix} \tag{7.4.16}$$

を使って、行列 (7.4.15) を $\mathsf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ と書く。

ベクトル $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ を三次元空間の幾何ベクトルの成分表示だとみなし、

$$\begin{aligned} \det[\mathsf{A}] &= \det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \\ &:= (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \text{ のつくる平行六面体の} \\ &\quad \text{「符号付き体積」}) \end{aligned} \tag{7.4.17}$$

によってディターミナントを定めることにしよう。

もちろん、「符号付き体積」が何かはこれから決めなくてはならない[*44]。前節の二次元の「符号付き面積」

[*44] 6.3.6 節のスカラー三重積を学んだ読者は、すでに「符号付き体積」を知っているわけだが、ここではその知識は仮定せずに話を進める。いずれにせよ、d 次元への一般化を考えるためには、以下の議論は決してスキップできない。

の性質を参照しながら、「符号付き体積」がもつべき基本性質を列挙してみよう。

i) 任意の二つのベクトルを入れ替えると、「符号付き体積」は (-1) 倍される。たとえば、$\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = -\det[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1] = \det[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2]$ などが成り立つ。

ii) $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ を任意の列ベクトル、α, β を任意の定数とするとき、線形性

$$\begin{aligned}
&\det[(\alpha\,\boldsymbol{a}_1 + \beta\,\boldsymbol{b}_1), \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \\
&\quad = \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] + \beta\,\det[\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \\
&\det[\boldsymbol{a}_1, (\alpha\,\boldsymbol{a}_2 + \beta\,\boldsymbol{b}_2), \boldsymbol{a}_3] \\
&\quad = \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] + \beta\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{a}_3] \\
&\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, (\alpha\,\boldsymbol{a}_3 + \beta\,\boldsymbol{b}_3)] \\
&\quad = \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] + \beta\,\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{b}_3]
\end{aligned} \tag{7.4.18}$$

が成り立つ。

iii) 体積は、次のように「面積かける高さ」で計算できる。

$$\det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}\right]$$
$$= a_{1,1} \det\left[\begin{pmatrix} a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}\right] \qquad (7.4.19)$$

i), ii) は対応する「符号付き面積」の性質とほとんど同じである。iii) は体積を決める基本の関係だが、ここでは、すでに定義されている「符号付き面積」を利用して体積を決めている。たまたま、$\boldsymbol{a}_1$ が一つ目の座標軸に平行で、$\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ が一つ目の座標軸と垂直な面内にある場合には、高さ（$\boldsymbol{a}_1$ の第一成分）と面積（$\boldsymbol{a}_2$ と $\boldsymbol{a}_3$ の第二、三成分のつくるベクトルの「符号付き面積」）の積が体積になるということだ。自然な定義なので、自分なりに図を描くなどして、なっとくしてほ

しい。

ところで、iii) の性質を対応する「符号付き面積」の性質 (7.4.8) と比べてみると、(7.4.8) の右辺でわざと $\det[(a_{2,2})]$ と書いた心がわかるだろう。また、この対応によって、1×1 行列のディターミナントを (7.4.1) と定めたのが自然だということもなっとくできると思う。

■二次のディターミナントによる展開　こうして、「符号付き体積」の基本性質を定めたところで、再び、一般の複素行列を考えることにしよう。実は、i), ii), iii) の基本性質だけから、三次の正方行列のディターミナントを完全に決定することができる。基本的な方針は、三次の正方行列のディターミナントを二次の正方行列のディターミナントを使って表すことである。

まず、上の i), ii), iii) から、

iv) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が線形従属なら $\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = 0$ となる

ことがいえる。

証明：990 ページの定理 7.3 により、一つのベクトルが他の二つの線形結合で書ける。必要なら名前を付け替えて、この「一つのベクトル」を $\boldsymbol{a}_1$ とする。$\boldsymbol{a}_1 = \alpha\,\boldsymbol{a}_2 + \beta\,\boldsymbol{a}_3$ なので、線形性 (7.4.18) により、

$$\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] = \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] + \beta\,\det[\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \tag{7.4.20}$$

となる。ところが、i) の反対称性から二つのベクトルが一致する場合のディターミナントは 0 だから、右辺は 0。∎

さて、$i = 1, 2, 3$ について

$$\boldsymbol{a}'_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{a}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,i} \\ a_{3,i} \end{pmatrix} \tag{7.4.21}$$

と定義し、行列を構成する列ベクトルを $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}'_i + \tilde{\boldsymbol{a}}_i$ のように分解する。この分解と線形性 (7.4.18) を利用

して、ディターミナントを変形すると、

$$\begin{aligned}\det[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{a}_3] &= \det[(\boldsymbol{a}'_1+\tilde{\boldsymbol{a}}_1),(\boldsymbol{a}'_2+\tilde{\boldsymbol{a}}_2),(\boldsymbol{a}'_3+\tilde{\boldsymbol{a}}_3)]\\ &= \det[\boldsymbol{a}'_1,\boldsymbol{a}'_2,\boldsymbol{a}'_3]+\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\boldsymbol{a}'_2,\boldsymbol{a}'_3]\\ &+\det[\boldsymbol{a}'_1,\tilde{\boldsymbol{a}}_2,\boldsymbol{a}'_3]+\det[\boldsymbol{a}'_1,\boldsymbol{a}'_2,\tilde{\boldsymbol{a}}_3]\\ &+\det[\boldsymbol{a}'_1,\tilde{\boldsymbol{a}}_2,\tilde{\boldsymbol{a}}_3]+\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\boldsymbol{a}'_2,\tilde{\boldsymbol{a}}_3]\\ &+\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\tilde{\boldsymbol{a}}_2,\boldsymbol{a}'_3]+\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\tilde{\boldsymbol{a}}_2,\tilde{\boldsymbol{a}}_3]\end{aligned} \tag{7.4.22}$$

となる。$\det[\cdot,\cdot,\cdot]$ は三つのベクトルいずれについても線形なので、その線形性を次々と使った（少し長くなるが、自分でやってみよう）。二次元で (7.4.12) の変形に使ったのと同じ考えである。

(7.4.22) の最右辺には八つの項が現れたが、その多くは iv) の性質によって 0 になる。まず $\boldsymbol{a}'_1,\boldsymbol{a}'_2,\boldsymbol{a}'_3$ は、三つとも第一成分のみのベクトルだから、明らかに線形従属。よって、
$\det[\boldsymbol{a}'_1,\boldsymbol{a}'_2,\boldsymbol{a}'_3]=0$ である。また、$\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\boldsymbol{a}'_2,\boldsymbol{a}'_3$ についても、$0\,\tilde{\boldsymbol{a}}_1+\alpha\,\boldsymbol{a}'_2+\beta\,\boldsymbol{a}'_3=\boldsymbol{0}$ を満たす（同時に 0 でない）α,β は簡単にみつかるので、これらは線形従属。

同じパターンのものとまとめて、$\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \boldsymbol{a}'_2, \boldsymbol{a}'_3] = \det[\boldsymbol{a}'_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \boldsymbol{a}'_3] = \det[\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_3] = 0$ である。また、$\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_3$ は三つとも二次元的なベクトルなので（991 ページの定理 7.4 により）線形従属で、$\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_3] = 0$ である。

(7.4.22) で生き残った三項だけを書き、さらに、反対

称性 i) と体積を決める iii) を使えば、

$$
\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \\
&= \det[\boldsymbol{a}'_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_3] + \det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \boldsymbol{a}'_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_3] + \det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \boldsymbol{a}'_3] \\
&= \det[\boldsymbol{a}'_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_3] - \det[\boldsymbol{a}'_2, \tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_3] + \det[\boldsymbol{a}'_3, \tilde{\boldsymbol{a}}_1, \tilde{\boldsymbol{a}}_2] \\
&= \det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}\right] \\
&- \det\left[\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}\right] \\
&+ \det\left[\begin{pmatrix} a_{1,3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}\right] \\
&= a_{1,1} \det\left[\begin{pmatrix} a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}\right] \\
&- a_{1,2} \det\left[\begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,3} \\ a_{3,3} \end{pmatrix}\right] \\
&+ a_{1,3} \det\left[\begin{pmatrix} a_{2,1} \\ a_{3,1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{2,2} \\ a_{3,2} \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}
\tag{7.4.23}
$$

となる。これが、二次のディターミナントによる、三

次のディターミナントの展開である。

■三次のディターミナントの表式　あとは、ここに二次のディターミナントの表式 (7.4.3) を代入すれば、

$$
\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \\
&\quad = a_{1,1}\,(a_{2,2}\,a_{3,3} - a_{2,3}\,a_{3,2}) \\
&\qquad - a_{1,2}\,(a_{2,1}\,a_{3,3} - a_{2,3}\,a_{3,1}) \\
&\qquad + a_{1,3}\,(a_{2,1}\,a_{3,2} - a_{2,2}\,a_{3,1}) \\
&\quad = a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3} + a_{2,1}\,a_{3,2}\,a_{1,3} + a_{3,1}\,a_{1,2}\,a_{2,3} \\
&\qquad - a_{3,1}\,a_{2,2}\,a_{1,3} - a_{2,1}\,a_{1,2}\,a_{3,3} - a_{1,1}\,a_{3,2}\,a_{2,3} \\
&\quad = a_{1,1}\,a_{2,2}\,a_{3,3} + a_{1,2}\,a_{2,3}\,a_{3,1} + a_{1,3}\,a_{2,1}\,a_{3,2} \\
&\qquad - a_{1,3}\,a_{2,2}\,a_{3,1} - a_{1,2}\,a_{2,1}\,a_{3,3} - a_{1,1}\,a_{2,3}\,a_{3,2}
\end{aligned}
\tag{7.4.24}
$$

のように、三次のディターミナントの表式が得られる。なお、さいごの二行は順番を入れ替えただけで、まったく同じものだ。一つ目では、すべての項が $a_{\cdot,1}\,a_{\cdot,2}\,a_{\cdot,3}$ となるように、二つ目では、すべての項が $a_{1,\cdot}\,a_{2,\cdot}\,a_{3,\cdot}$ となるように、整理してある。どちらも自然な書き方だ。この表式も、(二次の行列についての (7.3.15) よ

りはややこしいが)「たすきがけ」あるいは「斜乗」のルールで整理できる[*45]。今度は、

$$
+\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}
\qquad
-\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}
\tag{7.4.25}
$$

という図を描き、各々の線に沿った三つの要素をかけあわせる。その際、$+$ の線については積に $+$ 符号を、$-$ の線については積に $-$ 符号をつける。まったく同じ

[*45] 実は「たすきがけ」のルールが使えるのは三次行列までで、四次以上ではこれに類するルールはない。7.4.4 節を見よ。

ことだが、

$$
+\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}
\qquad
-\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}
\tag{7.4.26}
$$

という図を描いてもいい。(7.4.25) からは (7.4.24) の一つ目の整理のしかたが、(7.4.26) からは (7.4.24) の二つ目の整理のしかたが、それぞれ、自然にでてくる。これば かりは手を動かさないとどうしようもないので、少し、自分でやってみよう（問 7.4.2.a)。

(7.4.24) も短い式で表すことができる。前に外積のところで (6.3.94) として登場したが、$i, j, k = 1, 2, 3$ について

$$
\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1 & (i,j,k) = (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1 & (i,j,k) = (3,2,1), (2,1,3), (1,3,2) \\ 0 & \text{上記以外} \end{cases}
\tag{7.4.27}
$$

により、レヴィ・チビタの記号を定義する。これを用いれば、三次のディターミナント (7.4.24) は、

$$\det[\mathsf{A}] = \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\, a_{i,1}\, a_{j,2}\, a_{k,3}$$
$$= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\, a_{1,i}\, a_{2,j}\, a_{3,k} \qquad (7.4.28)$$

と短い式で書けてしまう。ここでも、二つの整理のしかたに対応する式をどちらも書いておいた。

もちろん、こうして (7.4.24), (7.4.28) のように求められたディターミナントは、1115 ページの i)–iii) の性質を満たす。これが気になる人は、1159 ページの定理 7.19 の証明をみよ。

問 7.4.2.a　「たすきがけ」を用いて、以下の行列の

ディターミナントを求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix} \tag{7.4.29}$$

■基底ベクトルを用いる方法　三次の正方行列のディターミナントを別の方法で求めよう。(7.1.18) のように、三つの基底ベクトル

$$\boldsymbol{e}^{(1)} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^{(3)} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.4.30}$$

を定義する。

三次のディターミナントを二次のディターミナント

で表す基本ルール (7.4.19) を使えば、

$$\det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}] = \det\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$$
$$= 1\ \det\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] = 1 \tag{7.4.31}$$

となる。もちろん、ここで二次の正方行列のディターミナントの表式 (7.4.3) を使った。$\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}$ がつくる平行六面体というのは、一辺の長さが 1 の立方体だから、その体積 $\det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}]$ はたしかに 1 であるべきだ。

ここで 1115 ページの反対称性のルール i) を使えば、二つのベクトルを入れ替えたものについて、

$$\det[\boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(3)}] = \det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(3)}, \boldsymbol{e}^{(2)}]$$
$$= \det[\boldsymbol{e}^{(3)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(1)}] = -1 \tag{7.4.32}$$

ここから、もう一回入れ替えると $(-1)^2 = 1$ で

$$\det[\boldsymbol{e}^{(2)}, \boldsymbol{e}^{(3)}, \boldsymbol{e}^{(1)}] = \det[\boldsymbol{e}^{(3)}, \boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}] = 1 \tag{7.4.33}$$

が得られる。こうして、$\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$, $\boldsymbol{e}^{(3)}$ が一回ずつ登場するパターンについては、すべてディターミナントが求められた。$\det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(3)}, \boldsymbol{e}^{(1)}]$ のように、同じベクトルが二回以上あらわれる場合には、反対称性 i) からディターミナントは 0 だ。以上の結果は、(7.4.27) のレヴィ・チビタの記号を使えば、すべての $i, j, k = 1, 2, 3$ について、

$$\det[\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)}, \boldsymbol{e}^{(k)}] = \epsilon_{i,j,k} \tag{7.4.34}$$

と、コンパクトにまとめられる。

この関係がでれば、二次のときに (7.4.13) でやったような一般的な計算ができる。$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{i,j}\, \boldsymbol{e}^{(i)}$ に

注意して、線形性を三回使うと、

$$
\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3] \\
&= \det\Big[\Big(\sum_{i=1}^{3} a_{i,1}\,\boldsymbol{e}^{(i)}\Big), \Big(\sum_{j=1}^{3} a_{j,2}\,\boldsymbol{e}^{(j)}\Big), \Big(\sum_{k=1}^{3} a_{k,3}\,\boldsymbol{e}^{(k)}\Big)\Big] \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} a_{i,1}\,a_{j,2}\,a_{k,3}\,\det[\boldsymbol{e}^{(i)}, \boldsymbol{e}^{(j)}, \boldsymbol{e}^{(k)}] \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \epsilon_{i,j,k}\,a_{i,1}\,a_{j,2}\,a_{k,3} \qquad (7.4.35)
\end{aligned}
$$

となり、(7.4.28) の一つ目の形がでてくる。(7.4.28) の二つ目の形も少し考えればでてくるのでやってみよう — と言いたいのだが、これがそう簡単にはでてこない。もちろん、(7.4.24) のようにすべての項をベタに書きくだせば、一つ目と二つ目の形が等しいことはわかるのだが、それをかっこよく（つまり一般的に）示すためには、もう少し道具（具体的には、次の節で議論する置換とパリティー）が必要だ。

7.4.3　置換とそのパリティー

高次の正方行列のディターミナントを調べるための準備として、d 個の数の並べ替えを表す置換とそのパリティーについて簡単に議論しておく。置換とパリティーの理論は、現代物理学では重要な道具であり、たとえば、多体系の量子論などを議論するには必須の「ことば」でもある。

以下、任意の自然数 d を選んで固定しておく。

■置換と互換　集合 $\{1, 2, \ldots, d\}$ からそれ自身への全単射（要素を一対一に対応させるような写像のこと。233 ページの図 2.9 (d) を参照）

$$\begin{array}{ccc} \{1, 2, \ldots, d\} & \xrightarrow{P} & \{1, 2, \ldots, d\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ i & \longmapsto & P(i) \end{array} \tag{7.4.36}$$

を**置換** (permutation) とよぶ。置換 P を具体的に表すには、その値を $(P(1), P(2), \ldots, P(d))$ のように順

にずらりと並べればよい。要素を一対一に対応させるわけだから、$(P(1), P(2), \ldots, P(d))$ は $(1, 2, \ldots, d)$ の並べ替えになっている。これが置換という名称の意味である。

もっとも簡単な $d = 2$ の場合、置換は二つしかない。$(P(1), P(2))$ のように置換を表すと、$(1, 2)$ と $(2, 1)$ の二つだ。一つ目は何もしないという置換、二つ目は二つの要素の入れ替えである。

$d = 3$ の置換は六つ。$(P(1), P(2), P(3))$ で表せば、$(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$, $(3, 2, 1)$, $(2, 1, 3)$, $(1, 3, 2)$ である。

一般の d のとき、置換は $d!$ 個ある。これらのうちの一つは、何も並べ替えないという当たり前の「置換」だ。このような（何も変えない）置換を id と書き、**恒等写像** (identity map) と呼ぶ。恒等写像 id の定義は、もちろん、すべての $i = 1, \ldots, d$ について $\mathrm{id}(i) = i$ となることである。

$\{1, 2, \ldots, d\}$ の中の二つの要素だけを入れ替えるよ

うな置換を、**互換** (transposition) という。$d = 5$ として、$(2, 1, 3, 4, 5)$ や $(1, 4, 3, 2, 5)$ などが互換の例。それぞれ、1 と 2 の入れ替え、2 と 4 の入れ替えである。

置換と互換のかかわりについて、次の重要な事実がある。

定理 7.16 (置換は互換で表現できる)**.** 任意の置換は、いくつかの互換を合成してつくることができる。

証明する前に、具体例で感覚をつかんでおこう。$i \neq j$ として、i と j を入れ替える互換を $T_{i \leftrightarrow j}$ と書く[*46]。

[*46] 式で書けば、$T_{i \leftrightarrow j}(i) = j$, $T_{i \leftrightarrow j}(j) = i$、そして i でも j でもない k については $T_{i \leftrightarrow j}(k) = k$ である。「i 番目の要素と j 番目の要素を入れ替える」と言っているのでないことに注意 (そういう流儀もありうる)。

たとえば、

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{P} \begin{pmatrix}1\\4\\3\\5\\2\end{pmatrix} \tag{7.4.37}$$

という置換[*47]は、$P = T_{2\leftrightarrow 5} \circ T_{2\leftrightarrow 4}$ のように、二つの互換の合成[*48]で書ける。実際、要素がどう写されるかをみると、

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{2\leftrightarrow 4}} \begin{pmatrix}1\\4\\3\\2\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{2\leftrightarrow 5}} \begin{pmatrix}1\\4\\3\\5\\2\end{pmatrix} \tag{7.4.38}$$

となり、確かに置換 (7.4.37) が得られる。

[*47] $(1,2,3,4,5)$（を縦にしたもの）はベクトルでも集合ではなく、集合の要素を順に並べたもので、矢印の右側は $P(1), P(2), \ldots, P(5)$ を順に並べたもの。よって、これは、$P(1) = 1, P(2) = 4, \ldots$ という意味。

[*48] 2.4.1 節でみたように、二つの写像 f, g の合成写像 $g \circ f$ を、$g \circ f(x) = g(f(x))$ と定義する。

置換を互換で表す方法は一通りとはかぎらない。同じ置換 (7.4.37) でも

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{2\leftrightarrow 5}} \begin{pmatrix}1\\5\\3\\4\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{4\leftrightarrow 5}} \begin{pmatrix}1\\4\\3\\5\\2\end{pmatrix} \tag{7.4.39}$$

としてもよい (つまり、$P = T_{4\leftrightarrow 5} \circ T_{2\leftrightarrow 5}$)。あるいは、かなりマヌケだが、

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{2\leftrightarrow 3}} \begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{2\leftrightarrow 4}} \begin{pmatrix}1\\3\\4\\2\\5\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{2\leftrightarrow 5}} \begin{pmatrix}1\\3\\4\\5\\2\end{pmatrix} \xrightarrow{T_{3\leftrightarrow 4}} \begin{pmatrix}1\\4\\3\\5\\2\end{pmatrix} \tag{7.4.40}$$

などとしてもよい (つまり $P = T_{3\leftrightarrow 4} \circ T_{2\leftrightarrow 5} \circ T_{2\leftrightarrow 4} \circ T_{2\leftrightarrow 3}$)。よりマヌケな路線をねらえば、もっともっと長いのもつくれる。答えは一通りではないし、長いのも短いのもあるだろうが、ともかく置換は互換の合成で書ける、ということだ。

定理 7.16 の証明：当たり前だと思う人は読まなくてよい（実際、当たり前だから）。読もうと思う人は、具体例を書きながら読むといい。

証明は要素の数 d についての帰納法でおこなう。まず $d=2$ では、すべての置換は互換なので命題は自明。$d-1$ について命題の成立を仮定。

$\{1,\ldots,d\}$ の任意の置換 P を考える。$P(j)=d$ により j を決める。$i=1,\ldots,d-1$ について、$i<j$ なら $\tilde{P}(i)=P(i)$、そして $i\geq j$ なら $\tilde{P}(i)=P(i+1)$ として、$\tilde{P}(i)$ を定義する。$\tilde{P}$ は $\{1,2,\ldots,d-1\}$ の置換なので、帰納法の仮定から、互換の合成で書ける。

$$P=\tilde{P}\circ T_{j\leftrightarrow d}\circ T_{j+1\leftrightarrow d}\circ\cdots\circ T_{d-1\leftrightarrow d} \tag{7.4.41}$$

であるから[*49]、P も互換の合成で書ける。∎

[*49] 厳密にいうと、ここで $\tilde{P}(d)=d$ を付け加えることで、$\tilde{P}$ を $\{1,\ldots,d\}$ の置換に拡張している。

■パリティーの概念　任意の置換 P に対して、その**パリティー**[*50] (parity) あるいは**偶奇性**と呼ばれる量 $\sigma[P]$ を定義する。パリティーは置換が登場する理論では必ず重要な役割を果たすと言っていいだろう。

まず、基本的な考えをつかむために、大ざっぱな定義をしよう。P を $\{1, 2, \ldots, d\}$ の任意の置換とする。P が n 個の互換の合成で書けるとき、P のパリティーを $\sigma[P] = (-1)^n$ と定義する（パリティーを、$(-1)^P$, $(-1)^{|P|}$, $\mathrm{sgn}P$ などの記号で表すこともある)。

しかし、明らかに、これでは本当の定義になっていない。任意の置換が互換の組み合わせで書けることは定理 7.16 で保証されているが、具体的にどのような互換をどのように組み合わせるかは一通りには決まらないし、互換の個数 n も決まるわけではない。実際、置換 (7.4.37) の場合には、二個の互換の合成 (7.4.38),

*50 「パリティ」と最後をのばさない表記も目につくが、英語を発音してみると、やはり最後はのばしている（もちろん、つよく発音するのは頭の pa だが)。

(7.4.39) で書くこともできるし、四個の互換の合成 (7.4.40) で書くこともできた。P を決めても n は決まらないのだ。ところが、この例で面白いのは、必要な互換の個数が二個あるいは四個であって、どちらも偶数だということだ。同じ置換を互換で表す方法は他にもたくさんあるが、少し実験してみればわかるように、六個、八個といった偶数個の互換の組み合わせで置換 (7.4.37) を表すことはできるが、どうがんばっても、三個、五個といった奇数個の互換を使った表現はつくれない。つまり、(すぐ後で厳密に示すが) **置換 P を表すのに必要な互換の個数 n は定まらないが、その偶奇性を表す $\sigma[P] = (-1)^n$ という量はきちんと定まる**のだ。

$\sigma[P] = 1$ となるような置換 P は、偶数個の互換でつくられるので、**偶置換** (even permutation) と呼ぶ。$\sigma[P] = -1$ となるような置換 P は、**奇置換** (odd permutation) と呼ぶ。

以下では、ここまでの大ざっぱな議論を精密化する。上で与えたパリティーの定義は、系 7.18 で正当化さ

れる。

■パリティーの厳密な議論　上で与えた「定義」のことはいったん忘れよう。P を $\{1, 2, \ldots, d\}$ の任意の置換とするとき、そのパリティーを、

$$\sigma[P] := \prod_{i>j} s(P(i), P(j)) \tag{7.4.42}$$

と定義する。ただし、積は、$i > j$ を満たすすべての $i = 2, \ldots, d$, $j = 1, \ldots, d-1$ の組み合わせについてとる。全部で $d(d-1)/2$ とおりある。たとえば、$d = 4$ なら、

$$\begin{aligned}\sigma[P] =& s(P(4), P(1))\, s(P(4), P(2))\, s(P(4), P(3)) \times \\ & \times s(P(3), P(1))\, s(P(3), P(2))\, s(P(2), P(1))\end{aligned} \tag{7.4.43}$$

という具合。また、

$$s(p, p') := \begin{cases} 1 & p > p' \\ -1 & p < p' \end{cases} \tag{7.4.44}$$

とする。つまり、

i, j の大小関係が置換 P によって逆転するごとに (-1) をかけ合わせてつくった量が (7.4.42) なのである。明らかに、$\sigma[P] = \pm 1$ であり、恒等写像 id（1131 ページを見よ）については $\sigma[\mathrm{id}] = 1$ である。

ここで、具体的な置換についてパリティーを求めてみよう — と言いたくなるが、(7.4.43) をみると、これをベタに計算するのはちょっと気が引ける。具体的な計算は、前に与えた $\sigma[P] = (-1)^n$ という表式を使った方がずっと楽だ。この表式を求めるため、パリティーの性質を調べよう。

定理 7.17 (パリティーの基本的な性質)**.** 任意の置換 P, P' について

$$\sigma[P \circ P'] = \sigma[P]\,\sigma[P'] \tag{7.4.45}$$

が成り立つ。また、任意の互換 T について

$$\sigma[T] = -1 \tag{7.4.46}$$

が成り立つ。

証明：定義 (7.4.42) より

$$\sigma[P \circ P'] := \prod_{i>j} s(P(P'(i)), P(P'(j))) \tag{7.4.47}$$

である。$i > j$ なる i, j をとり、$P'(i)$ と $P'(j)$ のうち、大きい方を k、小さい方を ℓ とする。よって、$P'(i) > P'(j)$ なら $s(P(k), P(\ell)) = s(P(P'(i)), P(P'(j)))$ であり、$P'(i) < P'(j)$ なら $s(P(k), P(\ell)) = -s(P(P'(i)), P(P'(j)))$ である。これらを一つの式にまとめて表せば

$$s(P(P'(i)), P(P'(j))) = s(P(k), P(\ell))\, s(P'(i), P'(j)) \tag{7.4.48}$$

となる。i, j が $i > j$ を満たすすべての $i = 2, \ldots, d$ および $j = 1, \ldots, d-1$ を動くとき、上のように決めた k, ℓ も $k > \ell$ を満たすすべての $k = 2, \ldots, d$ および $\ell = 1, \ldots, d-1$ を動く。そこで、(7.4.48) をすべての

$i > j$ についてかけ合わせれば、

$$\begin{aligned}\sigma[P \circ P'] &= \prod_{k>\ell} s(P(k), P(\ell)) \prod_{i>j} s(P'(i), P'(j)) \\ &= \sigma[P]\,\sigma[P'] \qquad (7.4.49)\end{aligned}$$

となり、(7.4.45) が得られる。

次に (7.4.46) を示すが、これは証明を読むより、自分で具体例を考えてみる方がわかりやすいかもしれない (やってみよう)。任意の $a > b$ をとり、$P = T_{a\leftrightarrow b}$ とする。(7.4.42) 右辺の積で、i か j の少なくとも一方が a か b に等しいところだけを考えればよい（それ以外では、$P(i) = i,\ P(j) = j$ なので $s(P(i), P(j)) = 1$ となる)。まず、これぞ重要なのだが、明らかに $s(P(a), P(b)) = s(b, a) = -1$。$i = 1, 2, \ldots, b-1$ については、順番の逆転がないから、$s(P(a), P(i)) = s(P(b), P(i)) = 1$。同様に $i = a+1, \ldots, d$ についても $s(P(i), P(a)) = s(P(i), P(b)) = 1$。$a, b$ にはさまれた $i = b+1, \ldots, a-1$ については、大小関係が逆転するので $s(P(a), P(i)) = s(P(i), P(b)) = -1$。ところが、

これらは二つずつペアになっているので、積をとれば 1。すべてをかけ合わせて $\sigma[P] = -1$ が得られる。∎

定理 7.16 と定理 7.17 をあわせれば、最初に述べたパリティーの表式を導くことができる。任意の置換 P をとり、これが n 個の互換 $T_1, \ldots, T_n$ の合成で書けるとしよう。すると (7.4.45) と (7.4.46) より

$$\sigma[P] = \sigma[T_1 \circ \cdots \circ T_n] = \sigma[T_1] \cdots \sigma[T_n] = (-1)^n \tag{7.4.50}$$

が得られる。

すでに述べたように、与えられた置換を互換の合成で表すやり方は一通りではなく、上に現れた互換の数 n は一通りには決まらない。ところが、$\sigma[P]$ そのものは互換への分解とは無関係に定まる量なのだから、n が偶数か奇数かは確定していなくては、(7.4.50) が意味をなさない。こうして、前に述べた、次の重要な事実が証明された。

系 7.18. P を任意の置換とする。P が n 個の互換

の合成として表現されるとする。n が偶数か奇数かは、どのような表現をとっても変わらない。そして $\sigma[P] = (-1)^n$ が成り立つ。

置換 (7.4.37) を、たとえば七個の互換の合成で表すことが絶対に不可能だという事実が厳密に証明されたことになる。

■置換の逆のパリティー　置換の逆写像のパリティーについての重要な（そして、ディターミナントにとって本質的な）性質をみておこう。置換 P は全単射（一対一写像）だから、その逆写像 P^{-1} を考えることができる。これは、P を「ひっくり返した」置換になる。たとえば、$P(2) = 4$ ならば $P^{-1}(4) = 2$ という具合。(7.4.37) の置換 P の場合は、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{P^{-1}} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{7.4.51}$$

となる。自分で落ち着いてやってみよう（紙に書いた方がいい)。

逆写像の定義から、$P \circ P^{-1} = \mathrm{id}$ が成り立つ（id は 1131 ページで定義した恒等写像)。$\sigma[\mathrm{id}] = 1$ だから、置換の合成のパリティーについての (7.4.45) より、$\sigma[P \circ P^{-1}] = \sigma[P]\,\sigma[P^{-1}] = 1$ がいえる。パリティーは ± 1 だから、けっきょく

$$\sigma[P] = \sigma[P^{-1}] \tag{7.4.52}$$

であることがわかった。

■完全反対称記号　最後にレヴィ・チビタの記号 ((6.3.94), (7.4.10), (7.4.27) を参照）を一般の d に拡張した完全反対称記号を定義しておこう。これは、実質的には、置換のパリティー $\sigma[P]$ と同じものだ。行列式の理論（など）に使いやすいように書き方を変えたものだと思えばよい。

これまで、行列の成分を表す変数を i, j, k などと書いてきた。行列の次数 d が 2, 3, 4 といった小さな決

まった数の場合にはこういった流儀で十分だ。しかし、一般の次数 d をあつかうには d 個の変数が必要だから、こうやってアルファベットを使っていたのでは、どうしようもない。そこで、i, j, k のかわりに、式が煩雑(はんざつ)になるのをがまんして、$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_d$ という名前の d 個の変数を使うことにする。たとえば、i_4 というのは、i という変数に 4 を代入したりかけたりしたものではなく、i_4 という名前のついた一つの変数なのだ。さらには、$j = 1, 2, \ldots, d$ を使って、これらの変数のいずれかを i_j と書くこともある。

高校数学にしかなじみのない読者には、このような抽象的な書き方はわかりにくいかもしれない。しかし、一般の行列の理論（にかぎらず変数の多い理論）をあつかうためには、このような書き方はどうしても必要だ。時間と手間をかけて、自分のものにしてほしい[*51]。

[*51] 単に何度も読んで慣れる、というのは、正しい戦略ではない。なるべく自分で手を動かして、計算や証明を実行するのがよい。また、たとえば $d = 3$ などとおいて、一般の d についての式をベタに書き直してみる、というのが非常に役に立つ。

さて、$i_1, i_2, \ldots, i_d$ を $1, 2, \ldots, d$ のいずれかの値をとる変数とする。完全反対称記号（あるいは、一般次元でのレヴィ・チビタの記号）を

$$\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_d} := \begin{cases} \sigma[P] & \text{ある置換 } P \text{ があって、すべての } j = 1, \ldots, d \text{ について } i_j = P(j) \\ 0 & i_1, i_2, \ldots, i_d \text{ の中に同じものが二回以上あらわれる} \end{cases} \tag{7.4.53}$$

と定義する。つまり、$i_1, i_2, \ldots, i_d$ **が** $1, 2, \ldots, d$ **の並べ替えになっている場合には、その並べ替えのパリティーに等しく（偶置換なら 1、奇置換なら** -1**)、並べ替えになっていない場合は 0** ということだ。

問 7.4.3.a　$d = 2, 3$ として、(7.4.53) の定義が、以前に (7.4.10), (7.4.27) で与えた定義と等しいことをなっとくせよ。$d = 2$ については、単に記号の翻訳だけな

ので、これが瞬間でできない人は記号の意味がわかっていないということ。$d = 3$ については、可能な六つの置換（その内の一つは自明な恒等置換だけれど）のパリティーを求めるところから出発しなければならないので、考えるべきことはけっこうたくさんある。

7.4.4　d 次の正方行列のディターミナント

数学的な道具立てもそろったので、一気に一般の $d = 1, 2, \ldots$ について、d 次の正方行列のディターミナントを定義しよう。基本的なアイディアは、二次のディターミナントから三次のディターミナントに一般化したところに尽きている。一般の d 次の正方行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,d} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & a_{d,2} & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.4.54}$$

について、そのディターミナント $\det[\mathsf{A}]$ を定義しよう。

■「符号付き体積」の基本性質　ここでも、幾何的直観（といっても、高次元の幾何になってしまうが・・）を用いるために、A は実行列だと（ごく一時的に）仮定しよう。$j = 1, \ldots, d$ について列ベクトル

$$\boldsymbol{a}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{d,j} \end{pmatrix} \tag{7.4.55}$$

を定義して、行列を $\mathsf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_d)$ と書く。対応するディターミナントは $\det[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_d]$ と書ける。

今度は d 次元の空間のなかに d 個のベクトルがあるわけだが、今までと同じ思想で、

$$\begin{aligned} &\det[\mathsf{A}] = \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\ &\quad := (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d \text{ のつくる } d \text{ 次元立体の} \\ &\quad \text{「符号付き } d \text{ 次元体積」}) \end{aligned} \tag{7.4.56}$$

によってディターミナントを定義したい。もちろん、d 次元体積と言われても直感的にはわからないだろう。

しかし、ここでは、無理に幾何的なイメージを描く必要はない。われわれは、二次元、三次元の符号付き体積の性質をよく知っているのだから、それらを自然に d 次元に拡張することを考えればいいのだ。とくに 1115 ページの三次のディターミナントの性質を参照しながら、$\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d]$ のもつべき性質を列挙してみよう。

i) 任意の二つのベクトルを入れ替えると、「符号付き体積」は (-1) 倍される。

ii) $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d, \boldsymbol{b}$ を任意の列ベクトル、α, β を任意の定数とするとき、任意の j について、線形性

$$\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, (\alpha\,\boldsymbol{a}_j + \beta\,\boldsymbol{b}), \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\
&= \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\
&\quad + \beta\,\det[\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_{j-1}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}_{j+1}, \ldots, \boldsymbol{a}_d]
\end{aligned} \tag{7.4.57}$$

が成り立つ[*52]。

iii) d 次元体積は「$d-1$ 次元体積かける高さ」で計算できる（ここで二つ目以降の列ベクトルの第一成分はすべて 0）。

$$\det\left[\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{d,2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,d} \\ \vdots \\ a_{d,d} \end{pmatrix}\right] = a_{1,1}\det\left[\begin{pmatrix} a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{d,2} \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} a_{2,d} \\ \vdots \\ a_{d,d} \end{pmatrix}\right] \tag{7.4.58}$$

これから見ていくように、これら i), ii), iii) の性質を満たす $\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d]$ は存在し、一つしかない。ま

*52　この式は、$d \geq 5$ かつ $3 \leq j \leq d-2$ のときにしか意味をなさないが、そこは深く追求せず、一般の場合に、何を言いたいかをくんでほしい。こういうことは、数学でも物理でも、しょっちゅうある。

た、この場合にも、i), ii), iii) から、

iv)　$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ が線形従属なら $\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d] = 0$ となる

ことがいえる。証明は、$d = 3$ の場合（1117 ページ）とまったく同じである。

■ディターミナントの決定　i), ii), iii) の基本性質をもとに、一気に (7.4.13), (7.4.14), (7.4.28) に相当するディターミナントの成分表示をつくってしまおう。ここでは、A は複素行列だとし、ii) に登場する「定数」は複素数の意味だと解釈しよう。

いつも通り、基底ベクトルを

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}^{(d)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.4.59}$$

と定義する。すると、

$$\det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}] = 1 \tag{7.4.60}$$

が成り立つ。これは、$d = 2, 3$ ではすでに知っている関係だが、一般の d については、上の (7.4.58) を使って帰納法で示せばよい。ピンと来ない人は $d = 4$ の場合を具体的に書いて、考えてほしい。

さて、$\det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}] = 1$ がわかったので、反対称性 i) を使えば、ここからベクトルを入れ替えたものについてもディターミナントが求まる。どれでもいいから、$\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}$ の中の二つを入れ替えると、ディターミナントは -1 になる。そのあと、さらに任意の二つを入れ替えると、また -1 がかかるから、ディターミナントは 1 に戻る。そこからさらに入れ替えると -1。これは、まさに互換をくり返したときのパリティーのふるまいそのものである。また、やはり反対称性 i) から、ディターミナントの中に、同じ基底ベクトルが二回あらわれるときには、ディターミナントは 0 になることもわかる。つまり、一般の d 個の基底

ベクトルの「符号付き d 次元体積」あるいはディターミナントは、完全反対称記号 (7.4.53) を使って、

$$\det[\boldsymbol{e}^{(i_1)}, \boldsymbol{e}^{(i_2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(i_d)}] = \epsilon_{i_1, i_2, \ldots, i_d} \tag{7.4.61}$$

とまとめられる。いうまでもなく、(7.4.10), (7.4.32) の自然な一般化になっている。

ここまで来れば、あとは線形性を使えばよい。まず、(7.4.55) の列ベクトル $\boldsymbol{a}_j$ を基底ベクトル (7.4.59) で展開すれば、

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i=1}^{d} a_{i,j}\, \boldsymbol{e}^{(i)} \tag{7.4.62}$$

なので、これを $\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d]$ に代入し、(7.4.12) で

やったように、線形性 (7.4.57) を d 回つかうと、

$$
\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\
&= \det\Big[\Big(\sum_{i_1=1}^{d} a_{i_1,1}\, \boldsymbol{e}^{(i_1)}\Big), \ldots, \Big(\sum_{i_j=1}^{d} a_{i_j,j}\, \boldsymbol{e}^{(i_j)}\Big), \\
&\qquad \ldots, \Big(\sum_{i_d=1}^{d} a_{i_d,d}\, \boldsymbol{e}^{(i_d)}\Big)\Big] \\
&= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_d=1}^{d} a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \cdots a_{i_d,d} \times \\
&\qquad\qquad \times \det[\boldsymbol{e}^{(i_1)}, \boldsymbol{e}^{(i_2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(i_d)}] \\
&= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_d=1}^{d} \epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_d}\, a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \cdots a_{i_d,d} \qquad (7.4.63)
\end{aligned}
$$

となり、$d = 2$ のときの (7.4.13)、$d = 3$ のときの (7.4.35) あるいは (7.4.28) の一つ目の表式を一般化したディターミナントの表式が得られた。

d 次の正方行列のディターミナント (7.4.63) は、$d!$ 個の項の和なので、$d \geq 4$ のディターミナントを具体的に書き下すのはきわめてめんどうだ。$d = 2$ では

(7.3.15)、$d = 3$ では (7.4.25), (7.4.26) のような「たすきがけ」あるいは「斜乗」の規則でディターミナントを計算できたが、残念ながら、$d \geq 4$ **では、このような簡単なやり方でディターミナントを求めることはできない**[*53]。

ここで、整理のしかたを変えた (7.4.14) や (7.4.28) の二つ目の書き方に対応する表式も導いておこう（以下の議論は、$d = 3$ ですべてを具体的に書きながら読み進めるといいだろう）。そのために、(7.4.63) の最後の表式を、置換とパリティーのことばを使って、

$$\begin{aligned}&\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d]\\&= \sum_P \sigma[P]\, a_{P(1),1}\, a_{P(2),2} \cdots a_{P(j),j} \cdots a_{P(d),d}\end{aligned}$$

[*53] 実際、四次の正方行列で無理に (7.4.25) のような「たすきがけ」をやろうとすると（時々やる人がいる！！）、どうがんばっても全部で八つの項しかでてこない。しかし、ディターミナントは二十四項の和だから、どうしようもない。

と書く。ここで和は $d!$ とおりの置換すべてについてとる。これが (7.4.63) と等しいことは、置換の意味と反対称記号の定義 (7.4.53) からすぐにわかるはずだ（これがすぐにわからないとしたら、理解できていないということ）。a の一つ目の添え字にも、1 から d までが一回ずつ登場することに注意して、a の順番を入れ替えて、

$$= \sum_P \sigma[P]\, a_{1,P^{-1}(1)}\, a_{2,P^{-1}(2)} \cdots$$
$$a_{j,P^{-1}(j)} \cdots a_{d,P^{-1}(d)}$$

とする。ここで、P^{-1} は置換 P の逆である（なぜこうなるか、$d = 3$ の例をベタに書きながらなっとくしよう）。P がすべての置換をうごくとき、P^{-1} もすべての置換をうごく。さらに、（ここで使いたくて示したわけだが）(7.4.52) でみたように $\sigma[P^{-1}] = \sigma[P]$ である。よって P^{-1} を P と書いてしまえば[*54]、

$$= \sum_P \sigma[P]\, a_{1,P(1)}\, a_{2,P(2)} \cdots a_{j,P(j)} \cdots a_{d,P(d)}$$
$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_d=1}^{d} \epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_d}\, a_{1,i_1}\, a_{2,i_2} \cdots a_{d,i_d} \qquad (7.4.64)$$

となり、求める結果が得られる。

こうして、1150 ページの i), ii), iii) を使って、d 次の正方行列のディターミナントの一般的な表式を導くことができた。これが、この長い 7.4 節の一つの到達点である。逆に、ディターミナントがこの形であれば、i), ii), iii) の性質を示すこともできる（もしそうでなければ、理論が破綻していることになる）。この重要な結果をまとめておこう。

*54 ダミーの変数名を付け替えてもいいことを利用した、やや乱暴な式変形。品のいい人は、P^{-1} をいったん Q とでも呼びなおして式をかいてみよう。

定理 7.19 (d 次正方行列のディターミナント)**.** *1150 ページの i), ii), iii)* により d 次の正方行列のディターミナントは、

$$\det[\mathsf{A}] = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_d=1}^{d} \epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_d}\, a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \cdots a_{i_d,d}$$
$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_d=1}^{d} \epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_d}\, a_{1,i_1}\, a_{2,i_2} \cdots a_{d,i_d} \tag{7.4.65}$$

の形に決まる（$\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_d}$ は (7.4.53) で定義した完全反対称記号)。逆に、(7.4.65) は、*i), ii), iii)* を満たす。

この定理の証明は、とくに気になる読者だけが読めばいいだろう。

証明：i), ii), iii) から (7.4.65) が得られることはすでに見てきた。逆に、(7.4.65) から i), ii), iii) が出ることを

見ればいい。i) の反対称性は、(7.4.65) の一つ目の表式で、i_j と i_k を入れ替えたとき、反対称記号が符号をかえることから、明らか。ii) の線形性は自明。iii) を示すには、この特別な形のベクトルを (7.4.65) の一つ目の表式に代入し、

$$(7.4.58)\text{ の左辺} = \sum_{i_2,\ldots,i_d=2}^{d} \epsilon_{1,i_2,\ldots,i_d}\, a_{1,1}\, a_{i_2,2} \cdots a_{i_d,d} \tag{7.4.66}$$

とし、$\epsilon_{1,i_2,\ldots,i_d} = \epsilon_{i_2,\ldots,i_d}$ に気づけばよい。 ∎

7.4.5　ディターミナントの基本的な性質

ようやく d 次の正方行列のディターミナントの形が決まったので、いくつかの基本的な性質をみよう。

(7.4.65) に現れたディターミナントの二つの表式が等しいという事実は、深い意味をもっている。この等式から、行列の成分 $a_{i,j}$ において行 i と列 j をそのまま入れ替えても、ディターミナントは変わらないこと

がわかる。これは次の事実を意味する。

定理 7.20 (転置行列のディターミナント)**.** A を任意の d 次の正方行列、A^{t} をその転置行列 ((7.2.44) を見よ）とすると

$$\det[\mathsf{A}] = \det[\mathsf{A}^{\mathrm{t}}] \tag{7.4.67}$$

が成立する。

この、「転置をとってもディターミナントは変わらない」という事実は、これからディターミナントの一般論においても、重要な役割を果たす。なお、ここでは**複素行列についても（エルミート共役ではなく）転置をとらなくてはならない**ことに注意しよう。複素行列について数学的に意味のある関係はすべてエルミート共役で書けるような気がするが、このようなディターミナントの関係は例外である。もちろん、エルミート共役のディターミナントについては、$\det[\mathsf{A}^{\dagger}] = (\det[\mathsf{A}])^{*}$

が成り立つ。

次の定理のように、「行列の積のディターミナントは、それぞれの行列のディターミナントの積に等しい」という (7.3.24) の関係も一般の場合に成り立つ。行列の積では、二つの行列の d 個の成分がきわめて複雑に絡み合っている。ディターミナントをとることで、その絡みあいが見事にほぐれるのだと言ってもいい。これはディターミナントのもっとも本質的な性質であり、ディターミナントは行列を特徴づけるもっとも基本的な「一つの数」と書いた理由でもある。

定理 7.21 (行列の積のディターミナント)**.** A, B を任意の d 次の正方行列とすると、

$$\det[\mathsf{AB}] = \det[\mathsf{A}]\,\det[\mathsf{B}] \tag{7.4.68}$$

が成り立つ。

証明：行列 $\mathsf{B} = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ を列ベクトルの集まり

$(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_d)$ と書く。列ベクトル $\boldsymbol{b}_j$ の第 i 成分は $b_{i,j}$ だから、$\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{d} b_{i,j}\, \boldsymbol{e}^{(i)}$ のように基底ベクトル (7.4.59) で展開できる。ここに左から A をかければ、$\mathsf{A}\boldsymbol{b}_j = \sum_{i=1}^{d} b_{i,j}\, \boldsymbol{a}_i$ となる。もちろん、$\boldsymbol{a}_j = \mathsf{A}\boldsymbol{e}^{(j)}$ を使った。よって、線形性 (7.4.57) を使って、

$$
\begin{aligned}
\det[\mathsf{AB}] &= \det[\mathsf{A}\boldsymbol{b}_1, \ldots, \mathsf{A}\boldsymbol{b}_d] \\
&= \det\Big[\Big(\sum_{i_1=1}^{d} b_{i_1,1}\, \boldsymbol{a}_{i_1}\Big), \ldots, \Big(\sum_{i_d=1}^{d} b_{i_d,d}\, \boldsymbol{a}_{i_d}\Big)\Big] \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{d} b_{i_1,1} \cdots b_{i_d,d}\, \det[\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_d}]
\end{aligned}
\tag{7.4.69}
$$

まず、和の中で、$(i_1, \ldots, i_d)$ が $(1, \ldots, d)$ の並べ替えになっているものに注目する。ディターミナントの反対称性 i) に注意して $\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_d}$ を $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ の順に並べかえると、

$$
\begin{aligned}
\det[\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_d}] &= \epsilon_{i_1,\ldots,i_d}\, \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\
&= \epsilon_{i_1,\ldots,i_d}\, \det[\mathsf{A}]
\end{aligned}
\tag{7.4.70}
$$

となる。

$(i_1, \ldots, i_d)$ が $(1, \ldots, d)$ の並べ替えになっていない場合は、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ の中に、同じものが二回以上現れる。よって反対称性 i) から、$\det[\boldsymbol{a}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{a}_{i_d}] = 0$ となる。

これと (7.4.70) を、(7.4.69) に代入すれば、

$$\begin{aligned}\det[\mathsf{AB}] &= \det[\mathsf{A}] \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{d} \epsilon_{i_1,\ldots,i_d}\, b_{i_1,1} \cdots b_{i_d,d} \\ &= \det[\mathsf{A}]\, \det[\mathsf{B}] \qquad (7.4.71)\end{aligned}$$

が得られる。∎

定理 7.21 の言い換えともいえる次の結果は、ディターミナントと d 次元体積の関係をよりはっきりさせてくれる。

系 7.22 (体積の倍率としてのディターミナント)**.** $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ を任意の d 個の列ベクトル、A を任意の

d 次の正方行列とすると、

$$\det[\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1, \ldots, \mathsf{A}\boldsymbol{v}_d] = \det[\mathsf{A}]\ \det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d] \tag{7.4.72}$$

が成り立つ。

証明：定理 7.21 の証明に登場する $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_d$ をそのまま $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ だと思えば、証明されている。∎

この系の意味を考えるため、A を実行列とし、d 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ は実ベクトルであり線形独立であるとする。すぐ下の定理 7.23 でみるように、線形独立性から $\det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d] \neq 0$ がいえるので、(7.4.72) より

$$\begin{aligned}\det[\mathsf{A}] &= \frac{\det[\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1, \ldots, \mathsf{A}\boldsymbol{v}_d]}{\det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d]} \\ &= \frac{(\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1, \ldots, \mathsf{A}\boldsymbol{v}_d \text{ がつくる立体の体積})}{(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d \text{ がつくる立体の体積})}\end{aligned} \tag{7.4.73}$$

が得られる。7.2.2 節で簡単にみたように、行列 A を、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を $\mathsf{A}\boldsymbol{v}$ にうつす線形写像とみなすことができる。(7.4.73) がいっていることは、この線形写像によって、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ がつくる立体の体積がちょうど $\det[\mathsf{A}]$ 倍されるということだ[*55]。**ディターミナントには、体積の倍率という幾何的な意味がある**のだ。

さいごに、ディターミナントと線形独立性を関連づける本質的な結果をまとめておく。

定理 7.23 (ディターミナントと線形独立性)**.** d 次元の d 個の（複素）列ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が線形独立であるための必要十分条件は、$\det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d] \neq 0$ となることである。

証明：$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が線形従属なら $\det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d] = 0$

[*55] (7.4.72) の特別な場合として、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ を $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}$ にとれば、$\det[\mathsf{A}]$ が $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ のつくる立体の体積に等しいという、われわれにとっての出発点に戻ることになる。

であることは、1152 ページの iv) のとおり。

線形独立ならディターミナントが 0 でないことをいうため、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が線形独立と仮定する。よって任意のベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ で展開できる（994 ページの定理 7.5)。とくに基底ベクトル $\boldsymbol{e}^{(j)}$ を $\sum_{i=1}^{d} b_{i,j}\boldsymbol{v}_i$ と展開する。これより

$$
\begin{aligned}
1 &= \det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}] \\
&= \det\Big[\Big(\sum_{i_1=1}^{d} b_{i_1,1}\,\boldsymbol{v}_{i_1}\Big), \ldots, \Big(\sum_{i_d=1}^{d} b_{i_d,d}\,\boldsymbol{v}_{i_d}\Big)\Big] \\
&= \det[\mathsf{B}]\,\det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d] \qquad (7.4.74)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、途中を激しく省略したが、それは (7.4.69) から (7.4.71) を導く流れとまったく同じである。$\det[\mathsf{B}]\,\det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d] = 1$ だから、$\det[\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d] \neq 0$ でなくてはならない。∎

さいごに、ほとんど当たり前のことだが、ディターミナントの表式 (7.4.65) から、すぐに次のことがわかる。

定理 7.24 (実行列のディターミナント)**.** 実行列 A のディターミナント $\det[\mathsf{A}]$ は実数である。

問 7.4.5.a　A を任意の d 次の正方行列、α を任意の複素数とするとき、

$$\det[\alpha\,\mathsf{A}] = \alpha^d \det[\mathsf{A}] \tag{7.4.75}$$

が成立することを示せ。右辺が $\alpha \det[\mathsf{A}]$ とならないことに注意。ディターミナントは、行列そのものについては、線形ではないのだ。

7.4.6　ディターミナントの計算法

一般の次数 d の正方行列のディターミナントが (7.4.65) となることがわかった。しかし、このような $d!$ 個の項の和をベタに計算すると（とくに d が大きいときには)、きわめて手間がかかる。

まず、$d = 2$ については (7.3.15)、$d = 3$ については (7.4.25), (7.4.26) のように図示できる「たすきがけ」の

ルールがあることを思い出しておこう。これらはディターミナントの本質を表すわけではないが、便利な公式だから、使える状況では積極的に使ってかまわない。また、これから見るように、より大きな行列のディターミナントの計算の際に「部品」としてこれらの公式を使うことも多い。

以下では、大きな行列のディターミナントを能率的に計算するための方法をみよう。行列を変形して上三角行列のディターミナントに帰着させる方法と、より機械的な余因子展開の方法について述べる。

■ディターミナントが簡単に求められる例　まず、当たり前のことだが、行列 A の一つの列の成分がすべて 0 なら、$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ はかならず線形従属なので、（すぐ上の定理 7.23 より）$\det[\mathsf{A}] = 0$ である。転置をとってもディターミナントが変わらないこと（1161 ページの定理 7.20）から、行列 A の一つの行の成分がすべて 0 のときも、$\det[\mathsf{A}] = 0$ である。

次に、A が対角行列、つまり、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.4.76}$$

としよう。A にディターミナントの表式 (7.4.65) を適用すると、$i_1 = 1, i_2 = 2, \ldots, i_d = d$ のときだけ和が生き残り、

$$\begin{aligned} \det[\mathsf{A}] &= \epsilon_{1,2,\ldots,d}\, a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{d,d} \\ &= a_{1,1}\, a_{2,2} \cdots a_{d,d} = \prod_{i=1}^{d} a_{i,i} \end{aligned} \tag{7.4.77}$$

となる。つまり、対角行列のディターミナントは、対角成分すべての積に等しい。よって、単位行列 (7.2.7) については、$\det[\mathsf{I}] = 1$ である。

$i > j$ なら $a_{i,j} = 0$ という条件をみたす d 次の正方行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ を、上三角行列ということを

思い出そう。上三角行列は、文字通り、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,d} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,d} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.4.78}$$

という形をしている。同様に、$i < j$ なら $a_{i,j} = 0$ という条件をみたす正方行列 A は下三角行列と呼ばれる。

これらの行列のディターミナントは、次のように、簡単に求められる。

系 7.25 (三角行列のディターミナント)**.** A を上三角行列あるいは下三角行列とすると、

$$\det[\mathsf{A}] = \prod_{i=1}^{d} a_{i,i} \tag{7.4.79}$$

が成り立つ。

証明：A を上三角行列とする。$\det[\mathsf{A}]$ の表式 (7.4.65) の一つ目の形を使う。$a_{i_1,1}\, a_{i_2,2} \cdots a_{i_d,d}$ のような項を

足し合わせることになる。まず最初の $a_{i_1,1}$ は、$i_1 = 1$ のとき以外は 0 だから、和の中で $i_1 = 1$ のみを考えればよい。次の $a_{i_2,2}$ は $i_2 = 1, 2$ のとき以外は 0。ところが、$\epsilon_{i_1,i_2,\ldots,i_d}$ があるから、$i_1 = 1$ かつ $i_2 = 1$ からの寄与はない。よって、和の中で $i_2 = 2$ のみを考えればよい。同様の考察をくり返せば、けっきょく、$j = 1, \ldots, d$ について $i_j = j$ とした項だけが和に寄与することがわかる。つまり (7.4.79) が得られた。下三角行列についても、ほとんど同じ。 ∎

以上をまとめると、次のケースについては、ディターミナントが一瞬で計算できることになる。

- ある行のすべての要素が 0、あるいは、ある列のすべての要素が 0 なら、ディターミナントは 0
- 対角行列、上三角行列、下三角行列のディターミナントは対角成分すべての積

もちろん、与えられた行列がたまたまこの形になっているということはほとんどないだろう。だが、次に見るように、ディターミナントを変えないように一般の行列を変形して、上三角行列に帰着することができる。

■行列を変形してディターミナントを求める方法　ディターミナントの基本的な性質を使えば、行列を適切に変形することで、ディターミナントを能率的に計算することができる。とくに、一般の行列を三角行列に変形するのが一つのスタンダードな戦略だ。また、次に述べる余因子展開をおこなう際も、ある程度の変形をしてから展開した方が能率的になることがある。

　行列を列に関して次のように「いじる」とディターミナントは規則的に変化する。

a) 行列の二つの列を入れ替えると、ディターミナントには -1 がかかる。

b) ある列全体を定数倍したものを別の列に加えても、ディターミナントは変化しない。

c) ある列の全体を α 倍すると、ディターミナントも α 倍される（α は任意の複素数)。

a) は、反対称性（1150 ページの i)）から、c) は線形性 ii) から、明らか。b) を示すため、実際に i 列目の α 倍を j 列目に加えることを考える。いつものように、もとの行列を $\mathsf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d)$ と書けば、変形した行列

のディターミナントは、

$$
\begin{aligned}
&\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_i}_{i\text{ 列目}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_j + \alpha\,\boldsymbol{a}_i}_{j\text{ 列目}}, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\
&= \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_i}_{i\text{ 列目}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_j}_{j\text{ 列目}}, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\
&+ \alpha\,\det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_i}_{i\text{ 列目}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_i}_{j\text{ 列目}}, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \\
&= \det[\boldsymbol{a}_1, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_i}_{i\text{ 列目}}, \ldots, \underbrace{\boldsymbol{a}_j}_{j\text{ 列目}}, \ldots, \boldsymbol{a}_d] \qquad (7.4.80)
\end{aligned}
$$

となる。もちろん、線形性 ii) と、二つの列が同じならディターミナントが 0 という性質を使った。

転置をとってもディターミナントが変わらないこと（1161 ページの定理 7.20）から、上の a), b) で列をすべて行に置き換えた操作についても、次のように、同じ性質が示される。

a') 行列の二つの行を入れ替えると、ディターミナントには -1 がかかる。

b') ある行全体を定数倍したものを別の行に加えても、ディターミナントは変化しない。

c') ある行の全体を α 倍すると、ディターミナントも α 倍される（α は任意の複素数)。

後の逆行列の計算（7.5.2 節）にも応用できるように、実際の計算には、これらの行をいじる変形を用いることにしよう。

具体例として、$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ という 3×3 行列のディターミナントを求めてみよう。計算の際に、いちいち det とかっこを書いていると面倒なので、$\det[\mathsf{A}]$ を $|\mathsf{A}|$ と書くことにしよう。

以下、a'), b'), c') のいずれかを使って、ディターミナントを書きかえていく。まず a') を使って 1 行目と 2 行目を入れ替えると、

$$|\mathsf{A}| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 5 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 3 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} \tag{7.4.81}$$

とマイナスがつく。c') を使い、1 行目を 5 で割り、そのかわりディターミナント全体を 5 倍すると、

$$|\mathsf{A}| = -\begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 3 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} \tag{7.4.82}$$

となる。次に、もっとも使い勝手のある b') を使い、1

行目を 2 倍したものを 3 行目から引くと、

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{A}| &= -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} \\
&= -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 2-2\times 1 & 4-2\times 2 & 9-2\times 3 \end{vmatrix} \\
&= -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad (7.4.83)
\end{aligned}
$$

とできる。ちょっとうまく行き過ぎなのだが、こういう風に左下に 0 を増やして上三角に近づけるのがコツだ。再び b') を使い、1 行目の 3 倍を 2 行目から引

くと、

$$
\begin{aligned}
|\mathsf{A}| &= -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 10 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3-3\times 1 & 7-3\times 2 & 10-3\times 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \\
&= -5\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad (7.4.84)
\end{aligned}
$$

となり、めでたく、もとの行列 A のディターミナントを上三角行列のディターミナントで表すことができた。上三角行列のディターミナントは単に対角成分の積だから、$1\times 1\times 3 = 3$ であり、$\det[\mathsf{A}] = -15$ と結果がでる。もとの行列のまま「たすきがけ」の公式で計算するよりはずっと楽な計算だった（しかし、楽になる例を選んだというのは事実)。

上の例にかぎらず、a'), b'), c') の変形を組み合わせて何度もおこなうことで、与えられた任意の行列を上

三角行列に変えることができる[*56]。行列要素が比較的小さな数のときには、これを利用してディターミナントを計算するのが実用的だ。

もう一つ、4 次の正方行列の（私が適当につくったものだが、計算しやすい用の「やらせ」ではない）例を見てみよう。以下、ディターミナント

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 0 & 8 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

から出発し、行についての変形 a'), b') を用いて、なるべく計算が楽になるように注意しながら進めると、

$$\text{4 行目の 3 倍を 2 行目から引く} \to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -9 & -4 \\ 2 & 5 & 1 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

[*56] 証明は、それほどむずかしくないと思うので考えてみよう。

$$
\begin{aligned}
\text{4 行目の 2 倍を 3 行目から引く} &\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \\
\text{1 行目を 4 行目から引く} &\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & -5 & -9 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\
\text{3 行目の 5 倍を 2 行目に足す} &\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -34 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} \\
\text{2, 3, 4 行目を入れ替え} &\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -34 & 1 \end{vmatrix} \\
\text{3 行目の 17 倍を 4 行目から引く} &\to \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\tag{7.4.85}
$$

のようにして、上三角行列に変えることができた。と

ちゅうで行を入れ替えたところでは、二回の入れ替えがあったので、マイナスが打ち消したことに注意。(7.4.79) により、最後の上三角行列のディターミナントは、$1\times1\times(-2)\times35=-70$ となるので、$\det[\mathsf{A}]=-70$ が得られる。

少し手間はかかるが、基本の表式 (7.1.15) に従って二十四個の項の和をとることを思えば、圧倒的に簡単な計算である。ただし、行列の形によっては、0 をつくるために（たとえ行列の成分がすべて整数でも）ややこしい分数の計算が必要になってしまうことがある[*57]。分数の計算にやたら時間を費やすようだと、能率的な計算とはいえなくなる。そういうときは、より機械的に計算が進む余因子展開の方法（この後に、述べる）に

[*57] 上の例で分数がでてこなかったのはラッキーだった。「やらせ」でつくった行列ではないが、やはり要素に 1 が多いから計算が楽なのだ。

切り替える方がいい。

問 7.4.6.a　以下の行列のディターミナントを求めよ。

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.4.86}$$

問 7.4.6.b　以下の行列について、上三角行列あるいは下三角行列に変形することで、ディターミナントを求めよ。

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \tag{7.4.87}$$

■余因子展開の方法　さいごに、より機械的なディターミナントの計算法である余因子展開を議論する。余因子展開は、ディターミナントの計算に便利なだけでなく、7.5.1 節でみるように、一般の正方行列の逆行列を求める際にも本質的な役割を果たす。

実は、余因子展開の基本的な考えは、7.4.2 節で三次のディターミナントを二次のディターミナントで表現するときに用いている。一般になっても、話はほとんど同じだ。

まず 7.4.2 節の議論を、そのまま d 次の正方行列に拡張しよう。少し省略気味に書くので、7.4.2 節の計算を参照しながら読むといいだろう。

いつものように、d 次の正方行列 A を $(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d)$ と書く。(7.4.21) にならって、$j = 1, \ldots, d$ について、

$$\boldsymbol{a}'_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{a}}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{d,j} \end{pmatrix} \tag{7.4.88}$$

と置く。求めるディターミナントは、

$$\det[\mathsf{A}] = \det[(\boldsymbol{a}'_1 + \tilde{\boldsymbol{a}}_1), \ldots, (\boldsymbol{a}'_d + \tilde{\boldsymbol{a}}_d)] \qquad (7.4.89)$$

なので、(7.4.22) と同様に、線形性を使って右辺を和に展開する。$\boldsymbol{a}'$ と $\tilde{\boldsymbol{a}}$ が入り混ざった項が、全部で 2^d 個でてくることになる。ところが、これらの中で生き残るのは、$\boldsymbol{a}'$ がちょうど一つで、残りの $d-1$ 個がすべて $\tilde{\boldsymbol{a}}$ という形の項だけである。$\boldsymbol{a}'_j$ が 1 次元的なベクトルであり、$\tilde{\boldsymbol{a}}_j$ が $d-1$ 次元的なベクトルであることから（991 ページの定理 7.4 を使えば)、$\boldsymbol{a}'_j$ が二つ以上あれば線形従属、また、$\tilde{\boldsymbol{a}}_j$ が d 個あれば線形従属になってしまうからだ。

生き残る項は、$\tilde{\boldsymbol{a}}$ を番号順に並べ、j 番目だけを $\boldsymbol{a}'$ で置き換えた

$\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}, \boldsymbol{a}'_j, \tilde{\boldsymbol{a}}_{j+1}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_d]$ という形をしている。ここで、$\boldsymbol{a}'_j$ を左隣の列ベクトルと次々に交換し、先頭までもっていく。この際、$j-1$ 回の交換が必要だから、反対称性から $(-1)^{j-1}$ がかかる。こうして、求

めるディターミナントは、

$$
\begin{aligned}
&\det[\mathsf{A}] \\
&= \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} \det[\boldsymbol{a}'_j, \tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_{j-1}, \tilde{\boldsymbol{a}}_{j+1}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_d] \\
&= \sum_{j=1}^{d} (-1)^{j-1} a_{1,j} \det \\
&\left[\begin{pmatrix}
a_{2,1} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,d} \\
a_{3,1} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3,d} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{d-1,1} & \cdots & a_{d-1,j-1} & a_{d-1,j+1} & \cdots & a_{d-1,d} \\
a_{d,1} & \cdots & a_{d,j-1} & a_{d,j+1} & \cdots & a_{d,d}
\end{pmatrix} \right]
\end{aligned}
\tag{7.4.90}
$$

となる[*58]。d 次のディターミナントを $d-1$ 次のディターミナントで表す (7.4.58) の関係を用いた。最右辺に現れたのは、A から第一行と第 j 列を取り除いてつ

[*58] 1151 ページの脚注 *52 を見よ。

くった $d-1$ 次の正方行列である。こうして、d 次のディターミナントを $d-1$ 次のディターミナントを使って表すことができた。

　このような表現を、もう少しだけ、一般化しておこう。行列 A から第 i 行と第 j 列を

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,d} \\ \hline a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,d} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,j-1} & a_{d,j} & a_{d,j+1} & \cdots & a_{d,d} \end{array}\right) \tag{7.4.91}$$

のように取り除いてつくった $d-1$ 次の正方行列を考える。この行列のディターミナントに $(-1)^{i+j}$ をかけ

たものを

$$\Delta_{i,j} := (-1)^{i+j} \det \left[\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,d} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,j-1} & a_{d,j+1} & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \right] \tag{7.4.92}$$

と書き、**余因子** (cofactor) とよぶ。ディターミナントを、次のように、余因子によって展開することができる。

定理 7.26 (ディターミナントの余因子展開)**.** 任意の i について、

$$\det[\mathsf{A}] = \sum_{j=1}^{d} a_{i,j}\,\Delta_{i,j} \tag{7.4.93}$$

が成り立つ。これを、ディターミナントの第 i 行についての展開という。同様に、任意の j について成り立つ

$$\det[\mathsf{A}] = \sum_{i=1}^{d} a_{i,j}\,\Delta_{i,j} \tag{7.4.94}$$

を、ディターミナントの第 j 列についての展開という。

展開 (7.4.93) では、行 i をひとつに固定して、すべての列 j について足しあげていることに注意。固定する行 i はどれでもかまわないが、いちど展開をはじめた

ら、とちゅうで行 i を変えてはいけない。(7.4.94) では、i と j の役割がちょうど逆転している。

定理 7.26 の証明：$i = 1$ の場合は (7.4.90) で示した。一般の第 i 行について展開する場合は、展開したい行を一つ上の行と次々に交換して、一番上までもっていく。この際、交換が $i-1$ 回必要だから、あらたに $(-1)^{i-1}$ をかける必要がある。こうして、$i = 1$ の場合に帰着(きちゃく)し、(7.4.93) が示された。行についての (7.4.93) が示されれば、列についての展開 (7.4.94) が成り立つことは、行列を転置してもディターミナントが変わらないことから明らか。∎

余因子展開は、抽象的な式を眺めているより、具体例で手を動かしてみた方が理解しやすい。次の 3 次の正方行列のディターミナントを、第 1 行について展開

すると、

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} &= 4 \times (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\
&\quad + 3 \times (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \\
&= 4\,(-15) + 2\,(-1)\,(-9) + 3 \times 3 \\
&= -33 \qquad (7.4.95)
\end{aligned}
$$

という風に計算できる。二次の行列のディターミナントは、たすきがけで求めた。この計算は、実際に鉛筆をもって計算して、確認してほしい。注意すべきは、符号がどうなるか、i 行 j 列を取り除いた行列の形がどうなるか、の二点である。

慣れておくために、同じ行列を第 2 行目についても

展開しよう。今度は、符号が少しかわって、

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -33 \tag{7.4.96}$$

となる。もう一つ、列についての展開もみておこう。同じディターミナントを、第 3 列について展開すると、

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -33 \tag{7.4.97}$$

となる。

　ある行（ないしは列）に、たまたま 0 がたくさん並んでいれば、余因子展開だけを使ってディターミナントを簡単に求めることができる。たとえば、ちょっと「やらせ」ではあるが、次の 4 次の正方行列の場合は、

まず

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -5 \begin{vmatrix} 8 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

のように、第 2 行について展開する。(7.4.93) の j についての和で生き残るのは、$j = 3$ のみ。$(-1)^{2+3} = -1$ なので、マイナスの符号がついた。次に、得られた 3 次の正方行列のディターミナントを第 3 行について展開することで

$$= -5 \times 6 \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -30\,(2 \cdot 4 - 2 \times 6) = 120 \tag{7.4.98}$$

のように二次のディターミナントの表式だけを使って、

求めるディターミナントが計算できる。

問 7.4.6.c　以下の行列のディターミナントを求めよ。

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.4.99}$$

■小行列が 0 に等しいとき　最後に、やや特殊な結果だが、行列がうまい形をしているときにディターミナントを簡単にするための定理を紹介しておく[*59]。

次の結果を述べるため、行列をいくつかの小さな行列に分割してあらわす書き方を導入する。n, m を $n+m=d$ を満たす正整数とし、$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ を $n \times n$ 行列、$\mathsf{B} = (b_{i,j})_{i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m}$ を $n \times m$ 行列、$\mathsf{C} = (c_{i,j})_{i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n}$ を $m \times n$ 行列、$\mathsf{D} =$

[*59] この部分を読まずに先に進んでもよい。

$(d_{i,j})_{i,j=1,\ldots,m}$ を $m \times m$ 行列とする。これらの成分を

$$\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{pmatrix} := \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} & b_{n,1} & \cdots & b_{n,m} \\ \hline c_{1,1} & \cdots & c_{1,n} & d_{1,1} & \cdots & d_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & \cdots & c_{m,n} & d_{m,1} & \cdots & d_{m,m} \end{array}\right) \tag{7.4.100}$$

のように並べれば、ひとつの d 次の正方行列が得られる。A, B, C, D は、小行列といわれる。

小行列 B あるいは C が 0 のときには、ディターミナントについて次の結果が成り立つ。

定理 7.27. A を任意の $n \times n$ 行列、B を任意の $n \times m$ 行列、C を任意の $m \times n$ 行列、D を任意の $m \times m$ 行列とすると、

$$\det\left[\begin{pmatrix} \mathsf{A} & 0 \\ \mathsf{C} & \mathsf{D} \end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ 0 & \mathsf{D} \end{pmatrix}\right] = \det[\mathsf{A}]\,\det[\mathsf{D}] \tag{7.4.101}$$

が成り立つ。ただし、ひとつめのディターミナントのなかの 0 は $n \times m$ のゼロ行列、ふたつめの 0 は $m \times n$ のゼロ行列である。

証明する前に、これが役に立つ例をみておこう。

この定理によって、たとえ四次の正方行列であっても、うまくゼロがかたまっていれば、

$$\det\left[\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & i & j \\ 0 & 0 & k & \ell \end{pmatrix}\right] = \det\left[\begin{pmatrix} a & b \\ e & f \end{pmatrix}\right] \det\left[\begin{pmatrix} i & j \\ k & \ell \end{pmatrix}\right] = (af - be)\,(i\ell - jk) \tag{7.4.102}$$

のように、二次のディターミナントの表式 (7.4.3) だけを用いて、ディターミナントが計算できる。

<u>定理 7.27 の証明</u>：左下に 0 がある場合を示せば、転置行列のディターミナントについての定理（1161 ページの定理 7.20）から、右上が 0 の場合も証明される。

$d = n + m$ 次元の列ベクトル

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_i = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{n,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{b}}_i = \begin{pmatrix} b_{1,i} \\ \vdots \\ b_{n,i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{d}}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ d_{1,i} \\ \vdots \\ d_{m,i} \end{pmatrix} \tag{7.4.103}$$

を使うと、調べたい行列は、$(\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n, (\tilde{\boldsymbol{b}}_1 + \tilde{\boldsymbol{d}}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{b}}_m + \tilde{\boldsymbol{d}}_m))$ と書ける。よって、求めるディターミナントは、

$$\begin{aligned} &\det\left[\begin{pmatrix} \mathsf{A} & \mathsf{B} \\ \mathsf{0} & \mathsf{D} \end{pmatrix}\right] \\ &\quad = \det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n, (\tilde{\boldsymbol{b}}_1 + \tilde{\boldsymbol{d}}_1), \ldots, (\tilde{\boldsymbol{b}}_m + \tilde{\boldsymbol{d}}_m)] \end{aligned} \tag{7.4.104}$$

である。線形性 (7.4.57) を使って右辺を展開すれば、$\tilde{\boldsymbol{a}}_i$, $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$, $\tilde{\boldsymbol{d}}_i$ が混ざったものについてのディターミナントの和が得られる。ところが、$\tilde{\boldsymbol{a}}_i$ と $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ は、どちらも実質的に n 次元のベクトルだから、$\tilde{\boldsymbol{a}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_n$ に一つ

でも $\tilde{\boldsymbol{b}}_i$ を付け加えたものは、線形従属になってしまう（991 ページの定理 7.4)。ディターミナントの基本的な性質（1150 ページの iv)）により、このようなベクトルの組み合わせのディターミナントは 0。よって、この膨大な展開で生き残る項は一つだけで、

$$\begin{aligned}\det\left[\begin{pmatrix}\mathsf{A} & \mathsf{B}\\ 0 & \mathsf{D}\end{pmatrix}\right] &= \det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\ldots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n,\tilde{\boldsymbol{d}}_1,\ldots,\tilde{\boldsymbol{d}}_m]\\ &= \det\left[\begin{pmatrix}\mathsf{A} & 0\\ 0 & \mathsf{D}\end{pmatrix}\right] \qquad (7.4.105)\end{aligned}$$

が言える。二つ目のイコールは、
$\det[\tilde{\boldsymbol{a}}_1,\ldots,\tilde{\boldsymbol{a}}_n,\tilde{\boldsymbol{d}}_1,\ldots,\tilde{\boldsymbol{d}}_m]$ が B の情報をまったく含まないことから明らか。最右辺が $\det[\mathsf{A}]\det[\mathsf{D}]$ に等しいことは、ディターミナントが体積だという直感をもっていれば、ほとんど自明に思えるはずだ。実際の証明は（どうも、おもしろくないが）ディターミナン

トの表式 (7.4.65) を使って、

$$
\begin{aligned}
&\det\left[\begin{pmatrix} \mathsf{A} & 0 \\ 0 & \mathsf{D} \end{pmatrix}\right] \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{m} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n,j_1+n,\ldots,j_m+n}\, a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n} \\
&\quad d_{j_1,1}\cdots d_{j_m,m} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \epsilon_{i_1,\ldots,i_n}\, a_{i_1,1}\cdots a_{i_n,n} \\
&\quad \sum_{j_1,\ldots,j_m=1}^{m} \epsilon_{j_1,\ldots,j_m}\, d_{j_1,1}\cdots d_{j_m,m} \\
&= \det[\mathsf{A}]\,\det[\mathsf{D}] \qquad (7.4.106)
\end{aligned}
$$

とすればよい。途中で $\epsilon_{i_1,\ldots,i_n,j_1+n,\ldots,j_m+n} = \epsilon_{i_1,\ldots,i_n}\,\epsilon_{j_1,\ldots,j_m}$ を用いたが、これは、置換の合成のパリティーについての (7.4.45) から証明できる。∎

7.4.7　ベクトルの線形独立性の判定法

ディターミナントの重要な応用として、与えられた n 個のベクトルが互いに線形独立かどうかを判定する方法を述べる[*60]。

すでに注意したように、一般に複数のベクトルが線形独立か線形従属かを判定することは、定義を知っただけでは、当たり前ではない。これからグラム行列による方法と小行列式を用いる方法の二つを述べる。状況に応じて、これらのうちの便利な方を用いれば、任意の与えられたベクトルの組が線形独立かどうかを判定することができる。

$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を n 個の任意の d 次元のベクトルとする。これらが線形独立かどうかを判定したい。もし $n > d$ なら、991 ページの定理 7.4 により、自動的に

[*60] この節の内容は当面は使わないので、この節は読まなくてもよい。ただし、内容は面白いと思うので、証明以外のところをざっと見ておく価値はあるだろう。

線形従属になる。また、$n = d$ なら、1166 ページの定理 7.23 により、$\det[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d]$ が 0 か 0 でないかを調べればよい。問題は、$n < d$ の場合に使える判定法だ。

■グラム行列を用いる方法　一つ目の判定法を述べるため、新たに $n \times n$ 行列 G を、

$$(\mathsf{G})_{i,j} := \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle \quad (i, j = 1, \ldots, n) \tag{7.4.107}$$

により定義する。G は**グラム**[*61]**行列** (Gram matrix) と呼ばれる。

定理 7.28 (グラム行列による線形独立性の判定法)**.** $n \leq d$ とする。$\det[\mathsf{G}] \neq 0$ となることが、n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であることの必要十分条件である。

[*61] 1011 ページの脚注 *16 を見よ。

証明：いつものように、グラム行列を n 個の n 次元列ベクトルを横に並べた形

$$\mathsf{G} = (\boldsymbol{g}_1\ \boldsymbol{g}_2\ \cdots\ \boldsymbol{g}_n) \tag{7.4.108}$$

に書く。(7.4.107) と見比べれば、

$$\boldsymbol{g}_j = \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_j \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_j \rangle \\ \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_n, \boldsymbol{v}_j \rangle \end{pmatrix} \tag{7.4.109}$$

である。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形従属性と $\det[\mathsf{G}] = 0$ が同値であることを示そう（もちろん、これは定理の命題と同じこと）。

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属とする。すべてが同時に 0 にはならない複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ があり、

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, \boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{0} \tag{7.4.110}$$

となる。これと $\boldsymbol{v}_i$ の内積をとることで、任意の $i = 1, \ldots, n$ について

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = 0 \tag{7.4.111}$$

となる。これを (7.4.109) と見比べれば、

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{g}_j = \boldsymbol{0} \tag{7.4.112}$$

が得られる。つまり、n 個の n 次元ベクトル $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ は線形従属。定理 7.23 により、$\det[\mathsf{G}] = 0$ を得る。

今度は、逆に $\det[\mathsf{G}] = 0$ を仮定する。やはり定理 7.23 により、$\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ は線形従属。よって、すべてが同時に 0 にはならない複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ があり (7.4.112) が成立。(7.4.109) と見比べれば、すべての $i = 1, \ldots, n$ について (7.4.111) が成立することがわかる。ここで、(7.4.111) の両辺に $(\alpha_i)^*$ をかけ、

$i = 1, \ldots, n$ について足し合わせると、

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_i)^* \, \alpha_j \, \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = 0 \tag{7.4.113}$$

が得られる。これは、

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \, \boldsymbol{v}_j \right|^2 = 0 \tag{7.4.114}$$

と書き直せるので、(7.4.110) を意味する。よって、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形従属である。 ∎

■小行列式を用いる方法　次の判定法を述べるため、まずベクトル $\boldsymbol{v}_i$ を

$$\boldsymbol{v}_i = \begin{pmatrix} v_{1,i} \\ v_{2,i} \\ \vdots \\ v_{d,i} \end{pmatrix} \tag{7.4.115}$$

と成分で表す。そして、これら n 個のベクトルを並べた

$$(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_n) = \begin{pmatrix} v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ v_{2,1} & \cdots & v_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{d,1} & \cdots & v_{d,n} \end{pmatrix} \tag{7.4.116}$$

という行列を考える。これは d 行 n 列の「縦長」の行列である。

この行列から、適当に選んだ $d-n$ 個の行を消去して $n \times n$ 行列をつくることができる。そのような作り方は全部で $\binom{d}{n} = d!\{n!\,(d-n)!\}^{-1}$ 通りある。

定理 7.29 (小行列式による線形独立性の判定法)**.** 上のようにして作った $n \times n$ 行列のうち、少なくとも一つの行列のディターミナントが *0* でないことが、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であることの必要十分条件である。

「小行列式」というのは、上のような部分的な行列のディターミナント（行列式）のことをいう。

この定理を証明する前に、証明の中で必要になる 995 ページの定理 7.6 を証明しておこう。ディターミナントを使えば、証明はほとんど自動的である。

995 ページの定理 7.6 の証明：背理法を使う。n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ によって任意のベクトルが (7.1.20) のように展開できると仮定する。単位ベクトル $\boldsymbol{e}^{(j)}$ も展開できるので、$j = 1, \ldots, d$ について $\boldsymbol{e}^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}\, \boldsymbol{v}_i$ と展開する。すると、(7.4.74) と同じように、

$$
\begin{aligned}
1 &= \det[\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}] \\
&= \det\Big[\Big(\sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i_1,1}\, \boldsymbol{v}_{i_1}\Big), \ldots, \Big(\sum_{i_d=1}^{n} \alpha_{i_d,d}\, \boldsymbol{v}_{i_d}\Big)\Big] \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_d=1}^{n} \alpha_{i_1,1} \cdots \alpha_{i_d,d} \det[\boldsymbol{v}_{i_1}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_d}]
\end{aligned}
\tag{7.4.117}
$$

とできる。ところが、$\boldsymbol{v}_i$ は n 種類しかない。$n < d$ だから、最右辺のディターミナントの中身には、かならず同じ $\boldsymbol{v}_i$ が二回以上あらわれなくてはならない。よって右辺は 0 であり、(7.4.117) は矛盾。∎

<u>定理 7.29 の証明</u>：まず、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形従属とする。上のような $n \times n$ 小行列を任意に一つとる。この小行列の各々の行を n 次元のベクトルとみなせば、これらも明らかに線形従属。よって、この小行列のディターミナントは 0 である。

この事実の対偶命題をとれば、少なくとも一つの小行列のディターミナントが 0 でないなら、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立であることが言えた。

次に、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が線形独立と仮定する。ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ に基底ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(d)}$ のうちの適切な一つを付け加えても線形独立である（もしそうでないとすると、すべての $\boldsymbol{e}^{(j)}$ を $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で表せることになり、995 ページの定理 7.6 と矛盾）。全体の個数が d 個になるま

で同じことをくり返せば、線形独立なベクトルの組 $\{\boldsymbol{e}^{(j_1)},\ldots,\boldsymbol{e}^{(j_r)},\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ が得られる（ここで $r = d - n$）。$j_1,\ldots,j_r$ の選び方は一般には一通りでないが、線形独立になる選び方が必ず存在することに注意。1166 ページの定理 7.23 により、$\det[\boldsymbol{e}^{(j_1)},\ldots,\boldsymbol{e}^{(j_r)},\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n] \neq 0$ である。これを行列の形で露骨に書くと、

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & v_{1,1} & \cdots & v_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & v_{j_1,1} & \cdots & v_{j_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & v_{j_r,1} & \cdots & v_{j_r,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & v_{d,1} & \cdots & v_{d,n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (7.4.118)$$

のようになる。少しややこしいが、右側の n 列は (7.4.116) そのものであり、左側の $r = d - n$ 列は基底ベクトルを並べたものだから、各々の列のどこかにちょうど一つずつ 1 がある。ここで、1176 ページの

a') の規則を使い、行を入れ替えて (7.4.118) を、

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 0 & v_{j_1,1} & \cdots & v_{j_1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & v_{j_r,1} & \cdots & v_{j_r,n} \\ & & & v_{j_{r+1},1} & \cdots & v_{j_{r+1},n} \\ & 0 & & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & v_{j_d,1} & \cdots & v_{j_d,n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.4.119}$$

という形に変形することができる。行を $j_1, \ldots, j_d$ の順に並べなおし（$j_1, \ldots, j_r$ はすでに決まっているので、$1, \ldots, d$ の残る要素を適当に並べて $j_{r+1}, \ldots, j_d$ と名付けた)、左上の r 行 r 列に単位行列が並ぶようにした。それによって左下の n 行 r 列にはすべて 0 が並ぶ。1195 ページの定理 7.27 を使うと、

$$\begin{vmatrix} v_{j_{r+1},1} & \cdots & v_{j_{r+1},n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{j_d,1} & \cdots & v_{j_d,n} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7.4.120}$$

が得られる。つまり、少なくとも一つの小行列式が 0 でないことがわかった。 ∎

問 7.4.7.a　以下の列ベクトルの組が線形独立かどうかを判定せよ。

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \tag{7.4.121}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}0\\1\\-1\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix} \tag{7.4.122}$$

7.5　逆行列と連立一次方程式

ディターミナントの強力な理論の一つ目の応用として、一般の d 次の正方行列の逆行列を求める。7.3.1 節で二次の行列の逆行列はいとも簡単に求められることを見たが、それに比べると、一般の表式はずっと複雑である。

ここでは、余因子の性質を利用して正方行列の逆行列を求め（7.5.1 節)、逆行列の具体的な計算方法を説

明する（7.5.2 節）。また、逆行列の応用として、連立一次方程式の一般論を述べる（7.5.3 節）。同次方程式についての結果は次の 7.6 節で行列の固有値、固有ベクトルを議論する際の基礎になる。

7.5.1　一般の正方行列の逆行列

$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ を d 次の正方行列とする。もちろん、一般の複素行列を考えている。

(7.4.92) によって余因子 $\Delta_{i,j}$ を定義すると、1189 ページの定理 7.26 により、

$$\sum_{k=1}^{d} a_{i,k}\,\Delta_{i,k} = \sum_{k=1}^{d} a_{k,j}\,\Delta_{k,j} = \det[\mathsf{A}] \qquad (7.5.1)$$

がすべての $i, j = 1, \ldots, d$ について成り立つ。

実は、この式で A と Δ の添え字をずらした

$$\sum_{k=1}^{d} a_{i,k}\,\Delta_{j,k} = \sum_{k=1}^{d} a_{k,j}\,\Delta_{k,i} = \det[\mathsf{A}]\,\delta_{i,j} \qquad (7.5.2)$$

という関係がすべての $i, j = 1, \ldots, d$ について成り立

つこともわかる。証明はあとまわしにして、ここから一般の行列の**逆行列**が構成できることをみよう。

行列 A が $\det[\mathsf{A}] \neq 0$ を満たすとしよう。このような行列を**正則** (regular) であるという。そして、

$$(\mathsf{A}^{-1})_{i,j} := \frac{1}{\det[\mathsf{A}]}\Delta_{j,i} \tag{7.5.3}$$

により行列 A^{-1} を定義する。これを (7.5.2) に代入すれば、ただちに、

$$\sum_{k=1}^{d} a_{i,k}\,(\mathsf{A}^{-1})_{k,j} = \sum_{k=1}^{d}(\mathsf{A}^{-1})_{i,k}\,a_{k,j} = \delta_{i,j} \tag{7.5.4}$$

つまり

$$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I} \tag{7.5.5}$$

となる。こうして、正則行列 A の逆行列 A^{-1} が得られた。

あるいは、余因子を並べて $\Delta := (\Delta_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と

いう**余因子行列**[*62]を定義すれば、(7.5.3) は、

$$\mathsf{A}^{-1} := \frac{1}{\det[\mathsf{A}]}\Delta^{\mathrm{t}} \tag{7.5.6}$$

と書ける。ここで、複素行列をあつかっている場合でも、エルミート共役ではなく転置が現れたことに注意。

二次の正方行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \tag{7.5.7}$$

を考えると、余因子の計算は（行と列を一つずつ取り除けば成分が一つしか残らないから）きわめて簡単で、余因子行列は

$$\Delta = \begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{2,1} \\ -a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix} \tag{7.5.8}$$

[*62] 余因子や余因子行列の定義にはいくつかの流儀があるので注意した方がいいだろう。もちろん、どの流儀をとろうと、逆行列の表式は同じである。

となる（確認しよう）。よって、(7.5.6) から

$$\mathsf{A}^{-1} := \frac{1}{\det[\mathsf{A}]}\begin{pmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1} \end{pmatrix} \tag{7.5.9}$$

が得られる。もちろん、これは以前に初等的に求めた (7.3.16) と同じものである。これを見ると、二次の行列の逆行列の表式が簡単だったのは二次の特殊性のためだということがわかるだろう。本来は余因子を並べた行列 Δ が、たまたま、(7.5.8) のように元の行列の成分を入れ替えてマイナスをつけただけの行列になってしまったのだ。

逆行列の一般的な表式 (7.5.3), (7.5.6) は抽象的なので、次の 7.5.2 節での具体例を検討し、表式の意味をなっとくしてほしい。

逆行列について二つの基本的な結果を示そう。

定理 7.30 (逆行列の存在)**.** (7.5.5) を満たす逆行列 A^{-1} が存在するための必要十分条件は、A が正則であることである。

証明：A が正則なら逆行列がつくれることは既にみた。逆をいうため、$\mathsf{A}\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{A}^{-1}\mathsf{A} = \mathsf{I}$ を仮定する。行列の積のディターミナントについての (7.4.68) を使うと、$\det[\mathsf{A}]\,\det[\mathsf{A}^{-1}] = 1$ となるが、これは $\det[\mathsf{A}] \neq 0$ でなくては成り立たない。よって A は正則。 ∎

定理 7.31 (逆行列の一意性)**.** A を任意の正方行列とし、$\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{I}$ または $\mathsf{Y}\mathsf{A} = \mathsf{I}$ が成り立つとすると、$\mathsf{X} = \mathsf{Y} = \mathsf{A}^{-1}$ でなくてはならない。

証明：$\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{I}$ ならば、両辺のディターミナントをとって $\det[\mathsf{A}]\,\det[\mathsf{X}] = \det[\mathsf{I}] = 1$（積のルール (7.4.68) を使った）だから、$\det[\mathsf{A}] \neq 0$ であり、A は正則。よって、A^{-1} が存在する。$\mathsf{A}\mathsf{X} = \mathsf{I}$ の両辺に左から A^{-1} をかけてやれば、$\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}$ となる。$\mathsf{Y}\mathsf{A} = \mathsf{I}$ が成り立つ場合も同様。 ∎

さらに、実行列 A のディターミナント $\det[\mathsf{A}]$ が実数であること（1167 ページの定理 7.24）を思い出せば、

余因子の定義 (7.4.92) と逆行列の表式 (7.5.3) から、次の結果を得る。

定理 7.32 (実行列の逆行列)**.** 実行列 A の逆行列は、実行列である。

残っていた等式を証明しておこう。

(7.5.2) の証明：$i = j$ のときは (7.5.1) で既に示されているので、$i \neq j$ とする。行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & a_{j,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.5.10}$$

の第 j 行目を、第 i 行目の値でそっくりそのまま置き

換えて、新しい行列

$$\tilde{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d,1} & \cdots & a_{d,d} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \text{第}\,i\,\text{行} \\ \\ \text{第}\,j\,\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \tag{7.5.11}$$

をつくる。表計算ソフトで、第 i 行目をコピーして、そのまま第 j 行目にペースト（上書き）したと思えばよい（よって、もともと第 j 行目にあった内容は消えてしまう）。第 i 行目は前と変わらない。行列 $\tilde{\mathsf{A}}$ は第 i 行目と第 j 行目が完全に同じなので $\det[\tilde{\mathsf{A}}] = 0$ である（たとえば 1166 ページの定理 7.23 を見よ）。これを知っていても、あえて $\det[\tilde{\mathsf{A}}]$ を第 j 行目で展開してみよう。

(7.4.93) をそのまま使って、

$$\det[\tilde{\mathsf{A}}] = \sum_{k=1}^{d} (\tilde{\mathsf{A}})_{j,k}\, \Delta_{j,k} = \sum_{k=1}^{d} a_{i,k}\, \Delta_{j,k} \qquad (7.5.12)$$

となる。ここで第 j 行目は A の第 i 行目に等しいことを使った。また、余因子 $\Delta_{j,k}$ は j 行目と k 列目を取り除いた行列から決まるから、もとの A の余因子に等しい。$\det[\tilde{\mathsf{A}}] = 0$ を思い出せば、(7.5.2) がいえた。∎

■逆行列の性質　以下、A を正則な d 次正方行列とする。逆行列の基本的な性質を列挙しよう。

まず、いかにも当たり前だが、

$$(\mathsf{A}^{-1})^{-1} = \mathsf{A} \qquad (7.5.13)$$

のように、逆行列のそのまた逆行列は、もとの行列に戻る。実際、逆行列の一意性があるから、これは当たり前の結果だ。$\mathsf{B} = \mathsf{A}^{-1}$ と書けば、$\mathsf{AB} = \mathsf{BA} = \mathsf{I}$ であり、1215 ページの定理 7.31 より $\mathsf{B}^{-1} = \mathsf{A}$ となる。

α を任意の 0 でない複素数とするとき、

$$(\alpha\,\mathsf{A})^{-1} = \alpha^{-1}\,\mathsf{A}^{-1} \tag{7.5.14}$$

であること、また既に (7.3.17) で見たように、任意の正則な d 次の正方行列 A, B について、

$$(\mathsf{A}\,\mathsf{B})^{-1} = \mathsf{B}^{-1}\,\mathsf{A}^{-1} \tag{7.5.15}$$

であることも、同様にして示される。

また、(7.2.46) に注意して、$\mathsf{A}\,\mathsf{A}^{-1} = \mathsf{I}$ の両辺の転置をとると、$(\mathsf{A}^{-1})^{\mathrm{t}}\,\mathsf{A}^{\mathrm{t}} = \mathsf{I}$ となる。つまり、

$$(\mathsf{A}^{\mathrm{t}})^{-1} = (\mathsf{A}^{-1})^{\mathrm{t}} \tag{7.5.16}$$

が示された。同様に、エルミート共役についても、

$$(\mathsf{A}^{\dagger})^{-1} = (\mathsf{A}^{-1})^{\dagger} \tag{7.5.17}$$

がいえる。

1214 ページの定理 7.30 の証明の中で見たように逆行列のディターミナントは、

$$\det[\mathsf{A}^{-1}] = \frac{1}{\det[\mathsf{A}]} \tag{7.5.18}$$

を満たす。

正の整数 n について、

$$\mathsf{A}^{-n} := (\mathsf{A}^{-1})^n \tag{7.5.19}$$

によって正則行列 A の負のべき乗を定義することができる。さらに、正則行列については、

$$\mathsf{A}^0 := \mathsf{I} \tag{7.5.20}$$

と定義するのが自然だ（0 でない複素数 α について $\alpha^0 = 1$ とするのが自然なのと同じ）。こうすれば、一般に n, m を整数とするとき、正則行列のべき乗について、

$$\mathsf{A}^n\,\mathsf{A}^m = \mathsf{A}^{n+m} \tag{7.5.21}$$

が成立する。

問 7.5.1.a　A, B を $d \times d$ 行列とする。$\mathsf{AB} = \mathsf{A} + \mathsf{B}$ ならば、$\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ となることを証明せよ。これは、単

に機械的に定義を使って計算すればいいというものではないので、他の問題に比べると難しいだろう[*63]。

[*63] この問題は飯高茂「いいたかないけど数学者なのだ」（NHK出版、2006）p. 49 から取った。数学の中でも最も難解といわれる代数幾何学の世界的リーダーである飯高さんが大学一年生のとき、線形代数のテストに出たこの問題が試験時間のあいだに解けなかったという。ご本人にこのエピソードについて聞いてみたところ、「あの問題だけが解けなかったんです」と悔しそうにおっしゃっていた。ひょっとして、生涯で解けなかった問題がこれ一つだけなのでわざわざ著書でも紹介されているということなのだろうか？　こう書くと恐ろしい難問だと思うかも知れないが、物理学科の学生さんでもちゃんと解いて来た人は何人もいるから、あきらめず挑戦してみよう。とくに、この問題が本のこの部分で出題されているということは、大きなヒントになる（この問題をほぼ見た瞬間に解いた私の友人は、これに必要なのは線形代数の深い理解や数学センスではなく「受験数学の回路」だと言っている。飯高さんがこの問題を解けなかったのは、学部時代の彼が既に本物の数学者だった証だというのが、その友人の意見だ）。

7.5.2　逆行列の計算法

言うまでもなく、二次の行列の逆行列は初等的な公式 (7.5.9) でそのまま求めればよい。

高次の行列の逆行列の計算方法を、具体例を通してみよう。

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.5.22}$$

という行列の逆行列を二通りのやり方で求める。

■余因子を用いる方法　まず、逆行列の定義 (7.5.6) をそのまま用いて、(7.5.22) の逆行列を求める。もちろん、定義に代入するだけだが、計算のコツも述べておこう。

まずは余因子を求める。符号を間違えないように、

$$((-1)^{i+j})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.5.23}$$

という表を作っておくといい。あとは、ひたすら (7.4.91) のような行と列を取り除いた 2×2 行列のディターミナントを求める作業をおこなう。たとえば、$\Delta_{3,2}$ を知るには、ディターミナント $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5$ と符号 -1 の積の 5 になる。同様にすべての成分を計算した結果を、$\Delta = (\Delta_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と余因子行列の形にまとめて書けば、

$$\Delta = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 6 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} \tag{7.5.24}$$

となる。

ここで、$\det[\mathsf{A}] = 10$ であることを使えば（ディターミナントは余因子展開で出してもいいし、(7.4.24)–(7.4.26) の「たすきがけ」の公式で出してもよい)、逆行列が、

$$\mathsf{A}^{-1} = \frac{1}{\det[\mathsf{A}]}\Delta^{\mathrm{t}} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \tag{7.5.25}$$

のように求められる。Δ の転置をとるのを忘れることが多いので注意！

これが実際に逆行列であることは簡単にチェックできる。

■消去法 — 計算方法　上のように定義 (7.5.6) をそのまま用いる逆行列の計算方法には、地道にやれば確実に計算できるというメリットがあるが、行列の次元が大きくなると、余因子の計算の手間が圧倒的に大変になる。多くの場合は、以下に述べるガウス[*64]の**消去法** (elimination) または**掃き出し法**を使う方が便利だ。

理屈を述べるよりも、上と同じ (7.5.22) を例にして、具体的な計算方法を説明しよう。

まず、逆行列を求めたい行列と、同じ次数の単位行列を横に並べて、

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{7.5.26}$$

[*64] 201 ページの脚注 *96 を見よ。

のように書く。分かりやすいように、あいだを縦の棒で仕切ったが、しばらくは、これを 3×6 行列のように扱っていく。

1176 ページでディターミナントの計算に用いたのと類似の三つの操作

a') 二つの行を入れ替える。 b') ある行全体を定数倍したものを別の行に加える（はじめの行は変わらない）。 c') ある行の全体を定数倍する。

を用いる。ここでは、これらの操作のうちの適当なものを、横長の行列 (7.5.26) に次々と施していく。その際、横にずらっと並んだ 6 個の要素を一つの行とみなして、**まとめて**操作する。

まず、ディターミナントの計算のときと同じように、左側の行列を上三角型に（つまり、対角成分よりも左

下にはゼロが並ぶように）変形していく。順にみていくと、

1 行目の 2 倍を 2 行目から引く →

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3 行目の 2 倍を 2 行目に足す →

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

2 行目と 3 行目を入れ替える →

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \tag{7.5.27}$$

という具合である。左側の行列の形が整っていくのにつれて、右側の行列の形は乱れていく。

　ディターミナントの計算なら上三角になったところで終了だったが、今度は、もう少し計算を進める必要がある。操作を続けて、左側の行列を単位行列に変形

するのだ。

2 行目を 1/2 倍、3 行目を −1/5 倍 →

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -2/5 \end{array}\right)$$

2 行目の 2 倍を 1 行目から引く →

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -2/5 \end{array}\right)$$

3 行目の 3 倍を 1 行目から引く →

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -2/5 \end{array}\right) \tag{7.5.28}$$

これで終わりだ。最後まできたところで、右側の行列をみてみよう。

$$\begin{pmatrix} -1/5 & 3/5 & 1/5 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 2/5 & -1/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix} \tag{7.5.29}$$

であり、(7.5.25) で求めた逆行列 A^{-1} とみごとに一致

する！

一般化してまとめれば、

(1) 逆行列を求めたい $d \times d$ 行列 A と $d \times d$ の単位行列を横に並べた $d \times 2d$ 行列を書く。

(2) 上の a'), b'), c') の操作を適当に組み合わせることで、左側の行列をまず上三角型に変形する。さらに、操作を続けて左側の行列を単位行列に変形する。このときの右側の行列が求める A^{-1} である。

ということになる[*65]。

ところで、逆行列 A^{-1} が存在するためには、行列 A は正則（つまり $\det[\mathsf{A}] \neq 0$）でなくてはならなかった。もし $\det[\mathsf{A}] = 0$ となるような行列 A の逆行列を計算しようとしたら、どこかでおかしくなるはずだ。

[*65] もちろん、行の変形ではなく列の変形を使って逆行列を求めることもできる。ただし、そのためには元の行列と単位行列を縦に並べた $2d \times d$ の縦長の行列を扱う必要がある。横書きのノートで計算するためには、これはあまり便利ではない。

たとえば（ちょっとわざとらしい例だが）

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \tag{7.5.30}$$

は $\det[\mathsf{B}] = 0$ を満たす行列だ。3×6 行列

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{7.5.31}$$

を作り、1 行目の 2 倍を 2 行目から引くと

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \tag{7.5.32}$$

となる。左半分は上三角行列になるが、二つ目の対角成分が 0 だ。（ディターミナントの計算法を思い出せば）この時点で $\det[\mathsf{B}] = 0$ だということが判明するので、逆行列 B^{-1} が存在しないとわかる。仮に、ここでディターミナントがゼロになることに気付かず、左側を単位行列に変形しようとがんばっても、決してうま

くいかないことは明らかだろう（ちょっとやってみれば分かる）。

■消去法 — 理論　なぜ消去法で逆行列が計算できるかを、(7.5.26)–(7.5.29) の例に沿って検討しよう。

まず、左側の行列の変化に注目する。はじめの「1 行目の 2 倍を 2 行目から引く」という操作は、もとの行列に左から $\mathsf{Y}^{(1,-2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ をかけることと同じである（実際に、かけ算を考えて、なっとくしよう）。同様に、「3 行目の 2 倍を 2 行目に足す」のは、左から $\mathsf{Y}^{(3,2,2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ を左からかけることである。そして、「2 行目と 3 行目を入れ替える」のは、左から $\mathsf{X}^{(2,3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ をかけることである（これもかけ算を考えてなっとくしておこう）。よって、(7.5.27)

での（左側の行列の）変形は、

$$\mathsf{X}^{(2,3)}\,\mathsf{Y}^{(3,2,2)}\,\mathsf{Y}^{(1,-2,2)}\,\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad (7.5.33)$$

と書ける。

これに続く「2 行目を 1/2 倍、3 行目を −1/5 倍」はもちろん $\mathsf{Z}^{(1,1/2,-1/5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 \end{pmatrix}$ をかけることと同じで、以下の変形も（上と同様に）行列の積で書ける。よって、(7.5.27), (7.5.28) の変形をすべてあわせれば、

$$\mathsf{Y}^{(3,-3,1)}\,\mathsf{Y}^{(2,-2,1)}\,\mathsf{Z}^{(1,1/2,-1/5)}\,\mathsf{X}^{(2,3)}\,\mathsf{Y}^{(3,2,2)}\,\mathsf{Y}^{(1,-2,2)}\,\mathsf{A} = \mathsf{I} \qquad (7.5.34)$$

ということになる。この式で、$\mathsf{Y}^{(3,-3,1)}\ldots\mathsf{Y}^{(1,-2,2)}$ という 6 個の行列の積を一つの行列とみよう。すると、その行列を A に左からかけると単位行列になるのだか

ら、$\mathsf{Y}^{(3,-3,1)}\dots\mathsf{Y}^{(1,-2,2)}$ は求める逆行列 A^{-1} に他ならない[*66]。

ここで、横長の行列の右側のことを思い出そう。こちらは、単位行列から出発して、上とまったく同じ操作を施していったわけだから、最終的には、まさに 6 個の行列の積 $\mathsf{Y}^{(3,-3,1)}\dots\mathsf{Y}^{(1,-2,2)}$ に変形される。これが、右側に A^{-1} が現れた理由だ。

以上の議論が一般化できるのはほぼ自明だと思うので、ごく簡単に一般の場合を議論しよう。A を正則な $d\times d$ 行列とする。

$d\times d$ 行列に対する 1225 ページの操作 a'), b'), c') が行列で表せることを確認しよう。まず、a') の「i 行

[*66] (7.5.34) から、X, Y, Z が正則行列であることがわかる。もちろん、定義から直接確かめるのも簡単。

目と j 行目を入れ替える」操作は、$d \times d$ の正則行列

$$
\mathsf{X}^{(i,j)} = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & i\text{列目} & & & & j\text{列目} & & & \\
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\text{行目} \\ \\ \\ \\ j\text{行目} \\ \\ \\ \\
\end{array}
\end{array}
\tag{7.5.35}
$$

を左からかけることに相当する（大げさな式になってしまったが、基本的には単位行列のように対角成分に 1 が並んでいて、i 成分と j 成分のところだけ、1 の位置がひっくり返っている）。また、b') の「i 行目の α 倍

を j 行目に足す」操作は、正則行列

$$
\mathsf{Y}^{(i,\alpha,j)} = \begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} & & & & i\text{列目} & & \end{array} \\
 & \begin{pmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ j\text{行目} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
\tag{7.5.36}
$$

を左からかけることであり（単位行列の (j,i) 成分に α を加えただけ)、c') (を各成分について組み合わせた)「$i = 1, \ldots, d$ について、i 行目を α_i」倍する操作（た

だし、全ての i について $\alpha_i \neq 0$）は、正則行列

$$\mathsf{Z}^{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_d)} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_d \end{pmatrix} \tag{7.5.37}$$

をかけることである。

出発点となる行列に、これら $\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z}$ を（適切な順番と適切なパラメターをとって）次々と左からかけていくことで、$\mathsf{Y}\cdots\mathsf{X}\mathsf{A} = \mathsf{I}$ のように単位行列をつくる（証明はしないが、A が正則なら、かならず単位行列に到達できる）。このとき、A に左からかけた $\mathsf{Y}\cdots\mathsf{X}$ が、求める A^{-1} そのものである。A と I を左右に並べた $d \times 2d$ 行列の変形で、$\mathsf{Y}\cdots\mathsf{X} = \mathsf{A}^{-1}$ が求められる

ことは、説明するまでもないだろう。

問 7.5.2.a　以下の行列の逆行列を求めよ。

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.5.38}$$

問 7.5.2.b　1176 ページの変形 a'), b'), c') を用いてディターミナントを計算する方法を、上の行列 X, Y, Z を用いて解釈するとどうなるか。

7.5.3　逆行列と連立一次方程式

7.3.1 節では、未知数が二つの連立一次方程式の解について考察することで、二次の行列の逆行列を導いた。ここでは、この議論を未知数がもっと多い場合に拡張

しよう。といっても、既に d 次の正方行列の逆行列を知っているのだから、それを応用するだけだ。

d 個の未知数 $x_1, \ldots, x_d$ についての d 元連立方程式

$$\begin{cases} a_{1,1}\,x_1 + a_{1,2}\,x_2 + \cdots + a_{1,d}\,x_d = c_1 \\ a_{2,1}\,x_1 + a_{2,2}\,x_2 + \cdots + a_{2,d}\,x_d = c_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{d,1}\,x_1 + a_{d,2}\,x_2 + \cdots + a_{d,d}\,x_d = c_d \end{cases} \tag{7.5.39}$$

を考える。ここで、$a_{i,j}$ と c_i は複素数の定数である。

行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と列ベクトル

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_d \end{pmatrix} \tag{7.5.40}$$

を使えば、連立方程式 (7.5.39) は、

$$\mathsf{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{c} \tag{7.5.41}$$

ときわめて簡単な形に書けてしまう。

行列をもち出すことで、単に記号が簡単になるだけでなく、行列についての強力な結果を連立方程式の問題にあてはめることができる。実際、もし行列 A が正則なら、(7.5.41) の両辺に左から逆行列 A^{-1} をかけることで、

$$\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\,\boldsymbol{c} \tag{7.5.42}$$

のように方程式の解を一気に書くことができる。逆行列の形は (7.5.3) のように一般的に求められているのだから、これで、きわめて一般的な連立一次方程式が解けてしまったことになる。これは、とてつもなく強力な結果である。まとめておこう。

定理 7.33 (正則行列に対応する連立一次方程式の解)**.** A が正則とする。連立一次方程式 (7.5.41) の解は一意的で、(7.5.42) で与えられる。

次に、(7.5.39) あるいは (7.5.41) の右辺の定数項を

ゼロとした連立一次方程式

$$\mathsf{A}\,\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{7.5.43}$$

について考えておこう。このような連立方程式を**同次方程式**あるいは**斉次方程式** (homogeneous equation) という。同次方程式は、すぐ後に 7.6 節であつかう固有値・固有ベクトルの理論において本質的に重要になってくる。

まず明らかなことは、もし A が正則なら、(7.5.42) の結果が使えて、同次方程式 (7.5.43) の唯一の解は $\boldsymbol{x} = \mathsf{A}^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$ である。これは、すべての未知数がゼロという面白みのない解で、「自明な解」と呼ばれる。これによって、(7.5.43) に $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 以外の解があるための必要条件は、A が正則でないこと（つまり $\det[\mathsf{A}] = 0$ となること）だとわかる。実は、これは十分条件であることもわかる。

定理 7.34 (同次方程式が非自明な解をもつための条件)**.** 同次方程式 (7.5.43) が非自明な解 ($\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 以外の解) をもつための必要十分条件は、$\det[\mathsf{A}] = 0$ となることである。

証明：十分であることをいう。つまり、$\det[\mathsf{A}] = 0$ を仮定し、実際に非自明な解が存在することを示す。

行列を $\mathsf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d)$ のように列ベクトルを並べたもので表す。$\det[\mathsf{A}] = 0$ だから、d 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_d$ は線形従属。よってすべてが同時に 0 にはならない複素数 $x_1, \ldots, x_d$ が存在して $\sum_{j=1}^{d} x_j \boldsymbol{a}_j = \mathbf{0}$ となる。ところが、この式は $\mathsf{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ と書けるから、非自明な解 $\boldsymbol{x}$ の存在が示された。∎

同次方程式 (7.5.43) の解は、次のような意味で、線形性をもっていることを注意しておこう。つまり、もし $\boldsymbol{x}$ が解ならば、任意の複素数 α について、$\alpha\boldsymbol{x}$ も解

である。さらに、もし $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ という二つの解があれば、任意の複素数 α, β について、$\alpha\,\boldsymbol{x}_1 + \beta\,\boldsymbol{x}_2$ も解になる。

問 7.5.3.a　すぐ上で述べた事実を証明せよ。

これまで、連立一次方程式 (7.5.39) に現れる定数 $a_{i,j}$, c_i は複素数としてきた。これらの定数がすべて実数なら、方程式の解も実数になる（より正確には、実数にとれる）と期待されるが、実際、それは正しい。

定理 7.35 (定数が実数の場合の連立一次方程式の解)**.** 連立一次方程式 (7.5.39) に現れる定数 $a_{i,j}$, c_i がすべて実数であるとする。方程式が解をもつなら、それはすべて実数にとれる。

証明：まず、非同次 (非斉次) の場合、つまり c_i の中に 0 でないものがある場合を考える。$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)^{\mathrm{t}}$ が解だとする。つまり、

$$a_{i,1}\,x_1 + a_{i,2}\,x_2 + \cdots + a_{i,d}\,x_d = c_i \tag{7.5.44}$$

がすべての i について成立する。ただし、x_j は複素数かもしれない。$a_{i,j}$, c_i が実数であることに注意して (7.5.44) の実部をとると、

$$a_{i,1}\,\mathrm{Re}\,(x_1) + a_{i,2}\,\mathrm{Re}\,(x_2) + \cdots + a_{i,d}\,\mathrm{Re}\,(x_d) = c_i \tag{7.5.45}$$

となる。$\mathrm{Re}\,(x_j)$ を新たに x_j と呼ぶことにすれば、すべてが実数の解が得られたことになる。

次にすべての c_i が 0 である同次（斉次）の場合を考える。やはり (7.5.44) が成り立つとする。もしすべての $x_1, \ldots, x_d$ が純虚数なら、$i\,x_1, \ldots, i\,x_d$ は実数であり、しかも方程式の非自明な解になっている。また、$x_1, \ldots, x_d$ の中に純虚数でないものがあれば、上と同じように $\mathrm{Re}\,(x_j)$ が実数の解になる。∎

7.6　行列の固有値、固有ベクトル、対角化

行列の応用でとりわけ重要な固有値と固有ベクトルを議論する。ディターミナントが行列を特徴づける「ひとつの数」だったのに対し、固有値は、行列をもっと詳しく特徴づける d 個の数である。念のため言っておくと、行列の固有値と固有ベクトルをしっかりと理解しておくと、量子力学を学ぶときに数学の部分であまり苦労せずに物理的な本質を楽しむことができる。

ここでは、まず固有値方程式と特性方程式を導入し、固有値の性質をみる（7.6.1 節）。次に、一般的な状況で、固有ベクトルの性質を述べ、行列の対角化を議論する（7.6.2 節）。行列を対角化すると、行列のべき乗を能率的に計算することができる。続く節では、エルミート行列（7.6.3 節）、実対称行列（7.6.4 節）、ユニタリー行列（7.6.5 節）の固有値、固有ベクトル、対角

化についての強力な結果を述べる。7.6.4 節では、二次形式の標準形についても議論する。7.6.6 節では、量子力学への応用などもにらんで、エルミート行列の固有値と固有ベクトルについて、いくつかの重要な性質をまとめておく。

7.6.1　行列の固有値と特性方程式

A を d 次の正方行列とする。一般の複素行列を考えている。いま、適当にとってきたベクトル $\boldsymbol{v}$ に行列 A をかけて、ベクトル $\mathsf{A}\boldsymbol{v}$ をつくることを考える。新しいベクトル $\mathsf{A}\boldsymbol{v}$ は、もとのベクトル $\boldsymbol{v}$ と比べると、絶対値も方向も異なっているのが普通だろう。ここでは、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}$ がたまたま $\boldsymbol{v}$ とまったく同じ方向を向くような、特別な $\boldsymbol{v}$ を（そういうものがあるとして）みつけるこ

とを考える[*67]。

これを式で表すと、

$$\mathsf{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v} \tag{7.6.1}$$

となる。**ベクトル $\boldsymbol{v}$ に行列をかけた結果と、同じベクトル $\boldsymbol{v}$ に複素数 λ をかけた結果が等しい**ということだ。このような関係を**固有値方程式**という。もしゼロベクトルでない $\boldsymbol{v}$ が何らかの定数 λ についてこの関係を満たすなら、ベクトル $\boldsymbol{v}$ は行列 A の**固有ベクトル** (eigenvector) であるといい、λ は行列 A の**固有値** (eigenvalue) であるという[*68]。

(7.6.1) の関係が成り立つとき、ゼロでない任意の複

---

*67 このあたりの説明は、幾何ベクトルを意識した言葉使いになっている。正確には、二つのベクトルが「同じ方向」というのは、一方のベクトルが他方のベクトルの複素数倍になることを意味する。

*68 eigen は「アイゲン」のように発音するので注意。eigenvector も eigenvalue も ei の部分をもっとも強く発音する。

素数 α によって $\boldsymbol{u} = \alpha\,\boldsymbol{v}$ とすると、

$$\mathsf{A}\,\boldsymbol{u} = \mathsf{A}\,(\alpha\,\boldsymbol{v}) = \alpha\,\mathsf{A}\,\boldsymbol{v} = \alpha\,\lambda\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\alpha\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{u} \tag{7.6.2}$$

であることがわかる。つまり、$\boldsymbol{u}$ も行列 A の固有ベクトルであり、対応する固有値は λ なのである。このように、固有ベクトルが一つあれば、その定数倍もかならず固有ベクトルになる。通常は（すべての定数倍を考えても無駄なので）何らかの意味で便利な固有ベクトルを一つ選んで用いる。

固有値方程式 (7.6.1) は、

$$(\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \tag{7.6.3}$$

と書き直すことができる。今、仮に λ を固定し、これを $\boldsymbol{v}$ についての同次方程式だとみなす。すると、1240 ページの定理 7.34 より、非自明な解が存在するための必要十分条件は、

$$\det[\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I}] = 0 \tag{7.6.4}$$

が成り立つことである。(7.6.4) は固有値 λ を決める方

程式であり、**特性方程式** (characteristic equation) あるいは**固有方程式**と呼ばれる。

$\det[\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}]$ は λ についての d 次の多項式なので、(7.6.4) は λ を未知数とする d 次方程式である。代数学の基本定理（202 ページの定理 2.15）により、特性方程式 (7.6.4) は、複素数の範囲で d 個の解 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ をもつことが保証される。これらが、行列 A の固有値である。もちろん、d 次方程式の d 個の解の中には、(たまたま）同じ値をとるものがあるかもしれない。同じ固有値が重複（ちょうふく）して現れるとき、その固有値は**縮退** (degenerate) しているという。

λ を A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ の一つとする。このとき、固有値方程式 (7.6.1) を満たすゼロでないベクトル $\boldsymbol{v}$（つまり、A の固有ベクトル）が必ず存在することに注意しよう。なぜなら、同次方程式 (7.6.24) が非自明な解をもつという条件（1240 ページの定理 7.34 を参照）から固有値を決めたからである。

特性方程式 (7.6.4) を、具体的にみておこう。

a, b, c, d を任意の実数とし、一般の 2×2 の実行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{7.6.5}$$

を考える。a, b, c, d は任意の実定数。特性方程式 (7.6.4) は、

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} &= (a-\lambda)(d-\lambda) - bc \\ &= \lambda^2 - (a+d)\,\lambda + (ad-bc) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{7.6.6}$$

という形になる。これは二次方程式だから解の公式からただちに、

$$\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}}{2} \tag{7.6.7}$$

という二つの固有値が求まる。$(a-d)^2 + 4bc > 0$ ならば固有値は二つとも実数であり、$(a-d)^2 + 4bc < 0$ なら固有値は互いに複素共役な複素数である。境目の $(a-d)^2 + 4bc = 0$ なら固有値は一つで二重に縮退している。

上の例でも明らかなように、**たとえ実行列を扱っていても、固有値は一般に複素数になりうる**ことに注意しよう。ディターミナント（1167 ページの定理 7.24 参照）や逆行列（1216 ページの定理 7.32 参照）を考えているかぎり、実行列から出発すれば、すべての議論が実数と実行列の範囲におさまっていた。しかし、固有値や固有ベクトルについて考え始めると、必然的に複素数をあつかうことになるのだ。

より具体的な例として

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{C} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{7.6.8}$$

という行列についてみよう。B の特性方程式は、

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0 \tag{7.6.9}$$

であり、解つまり固有値は $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ の二つである。C の特性方程式を求めるため、ディターミナント

を計算すると、

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & 2 \\ -1 & 3-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (5-\lambda)(3-\lambda)(4-\lambda) + 3\lambda - 12 \\
&= (4-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) \qquad (7.6.10)
\end{aligned}$$

という形になる。これを 0 に等しいとおいた方程式はあっさり解けて、固有値は $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$ の三つであることがわかる。

問 7.6.1.a　(7.2.34) の行列 A, B の固有値を求めよ。

■固有値の基本的な性質　固有値についての一般的な性質を簡単にみておこう。A を任意の d 次の正方行列とする。$\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ を、特性方程式 (7.6.4) の解とする。固有値が縮退している場合には、それらもくり返し列挙している。

ディターミナントには、行列を転置しても値が変わらないという顕著な性質があった（1161 ページの

定理 7.20)。もちろん $\mathsf{I}^{\mathrm{t}} = \mathsf{I}$ だから、$\det[\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}] = \det[\mathsf{A}^{\mathrm{t}} - \lambda\mathsf{I}]$ である。つまり、A の特性方程式 $\det[\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I}] = 0$ と A^{t} の特性方程式 $\det[\mathsf{A}^{\mathrm{t}} - \lambda\mathsf{I}] = 0$ は完全に等しい。ここから、次の（簡単だが、場合によっては便利な）定理が得られる。

定理 7.36 (転置行列の固有値)**.** 行列 A とその転置行列 A^{t} の固有値は完全に等しい。

次に、P を任意の正則行列とし、

$$\mathsf{B} = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P} \tag{7.6.11}$$

により行列 B を定義する。ここで、

$$\begin{aligned}\det[\mathsf{B} - \lambda\,\mathsf{I}] &= \det[\mathsf{P}^{-1}(\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I})\mathsf{P}] \\ &= \det[\mathsf{P}^{-1}]\,\det[\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I}]\,\det[\mathsf{P}] \\ &= \det[\mathsf{A} - \lambda\,\mathsf{I}] \qquad (7.6.12)\end{aligned}$$

であることから、行列 B についての特性方程式は A についての特性方程式とまったく同じ形になることがわかる。つまり、任意の正則行列 P を使って (7.6.11) の

ように関係づけられる二つの行列 A と B は完全に同じ固有値をもつことがわかる。

行列を特徴づける数として、すでにトレース（7.2.5 節）とディターミナント（7.4 節）を見た。これらの量は、固有値と以下のように関係している。

定理 7.37 (トレース、ディターミナントと固有値の関係)**.** A を任意の d 次の正方行列とし、$\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ を固有値とする（縮退したものも重複して列挙する）。このとき、

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}] = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i, \quad \det[\mathsf{A}] = \prod_{i=1}^{d} \lambda_i \tag{7.6.13}$$

が成り立つ。

本来の定義からも、「トレースは和、ディターミナントは積」という雰囲気ははっきりしていたと思う。固有値を使うと、文字通り和がトレースで積がディターミナントになるのだ。

証明：そもそも (7.6.4) の特性方程式 $\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]=0$ を λ の代数方程式とみたときの解が $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ だった。よって、$\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]=(\text{定数})(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_d)$ と因数分解できる。この「定数」を決めよう。$\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]$ の λ の最高の次数の項は $(-\lambda)^d$ である。なぜなら、最高の次数の項は A の成分を含まないから、$\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]$ において $\mathsf{A}=\mathsf{0}$ とおいた $\det[-\lambda\mathsf{I}]=(-\lambda)^d$ に等しいからである。よって、定数は $(-1)^d$ であり、

$$\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_d-\lambda) \quad (7.6.14)$$

と書ける。一方、$\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]$ の λ の最低の次数の項は $\lambda=0$ とおいたものに等しいから、$\det[\mathsf{A}]$ である。(7.6.14) と比較すれば、(7.6.13) のディターミナントの表式を得る。

トレースについての表式を示すためには、$\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]$ の $(-\lambda)^{d-1}$ の係数が $\mathrm{Tr}[\mathsf{A}]$ に等しいことを見て (7.6.14) と比較すればよい。これは、1159 ページの定理 7.19 のディターミナントの表式に $\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}$ を代入すればすぐにわかるのだが、少し面倒だ。すぐ下でシュー

ア分解を使った別の証明を与える。■

(7.6.13) のディターミナントの表式から、行列が正則かどうかを判定するための次の基準が得られる。

系 7.38 (行列の正則性と固有値)**.** 正方行列 A が正則である（つまり $\det[\mathsf{A}] \neq 0$）ための必要十分条件はすべての固有値 λ_i がゼロと異なることである。

問 7.6.1.b　1076 ページで見たように、$\mathsf{P}^2 = \mathsf{P}$ を満たす行列を射影行列という。射影行列の固有値は 0 か 1 であることを示せ。

■シューア分解　次に進む前に、やや進んだ結果だが、いろいろなところで威力を発揮するシューア[*69]分解について見ておこう[*70]。

[*69] Issaj Schur (1875–1941) ポーランドに生まれ、ドイツとイスラエルで活動した数学者。群の表現論に決定的な貢献をした。

[*70] この部分を飛ばして先に進んでも大きな問題はない。

定理 7.39 (シューア分解)**.** 任意の $d \times d$ 行列 A に対して、$\mathsf{T} = \mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ が上三角行列になるようなユニタリー行列 U が存在する。また T の d 個の対角成分は A の固有値と（縮退の次数も含めて）一致する。

上三角行列とは任意の $i > j$ について $(\mathsf{T})_{i,j} = 0$ を満たす行列のことだった。(7.2.42) を見よ。定理の主張である $\mathsf{T} = \mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ に左右から U と U^{-1} をかけて得られる

$$\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^{-1} \tag{7.6.15}$$

を**シューア分解**と呼ぶ。

シューア分解は、このすぐ後で見る対角化 (7.6.28), (7.6.29) に似ている。実際、エルミート行列の対角化についての定理 7.46（1283 ページ）もシューア分解を用いて証明する。ただし、T は（対角行列ではなく）上三角行列であり、また（任意の行列が対角化できるわけではないのに対して）任意の行列がシューア分解できるという点で、対角化とシューア分解は異なっている。

定理 7.39 を証明する前に、応用として、(7.6.13) の一つ目のトレースについての等式の別証明を見ておこう。

定理 7.37（1252 ページ）のトレースについての表式の別証明

シューア分解 (7.6.15) とトレースの基本的な性質 (7.2.118) を用いると、

$$\mathrm{Tr}[\mathsf{A}] = \mathrm{Tr}[\mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^{-1}] = \mathrm{Tr}[\mathsf{T}\mathsf{U}^{-1}\mathsf{U}] = \mathrm{Tr}[\mathsf{T}] \quad (7.6.16)$$

とわかる。T の対角成分は A の固有値と一致するから最右辺は $\sum_{i=1}^{d} \lambda_i$ である。 ∎

定理 7.39 の証明に入ろう。まず以下の補題を示す。

補題 7.40. B を任意の $n \times n$ 行列とする。任意の $i \geq 2$ に対して $(\mathsf{V}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{V})_{i,1} = 0$ となるような $n \times n$ のユニタリー行列 V が存在する。

証明：λ を B の固有値の一つとする。上で注意したように、固有値方程式 $\mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 = \lambda \boldsymbol{v}_1$ を満たすゼロでない (n 次元の）列ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ が必ず存在する。(必要なら定

数倍して）$|\boldsymbol{v}_1| = 1$ とする。$\boldsymbol{v}_1$ と $n-1$ 個の単位ベクトルを合わせて作った任意の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ をとり[*71]、これらをずらりと横に並べて $n \times n$ 行列 $\mathsf{V} = (\boldsymbol{v}_1 \ \ldots \ \boldsymbol{v}_n)$ を作る。1075 ページの定理 7.14 より V はユニタリー行列である。さらに、(7.2.105) のよ

[*71] このような正規直交基底が存在することは次のように示せる。$\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}$ を通常の単位ベクトルとすると、少なくとも一つの j について、$\langle \boldsymbol{e}^{(j)}, \boldsymbol{v}_1 \rangle \neq 0$ である。すると、n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{e}^{(1)}$, …, $\boldsymbol{e}^{(j-1)}$, $\boldsymbol{e}^{(j+1)}$, …, $\boldsymbol{e}^{(n)}$ は線型独立。ここにグラム・シュミットの直交化（1009 ページの定理 7.8）を適用して正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を作ればよい。

うに $\mathsf{V}^{-1} = \mathsf{V}^\dagger$ なので、

$$\mathsf{V}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{V} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^\dagger \\ \boldsymbol{v}_2^\dagger \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^\dagger \end{pmatrix} \mathsf{B}(\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2 \ldots\ \boldsymbol{v}_n)$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \boldsymbol{v}_1, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_1, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_1, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_n \rangle \\ \langle \boldsymbol{v}_2, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_2, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_2, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_n \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \boldsymbol{v}_n, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 \rangle & \langle \boldsymbol{v}_n, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_2 \rangle & \cdots & \langle \boldsymbol{v}_n, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_n \rangle \end{pmatrix} \tag{7.6.17}$$

とわかる。つまり、$(\mathsf{V}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{V})_{i,j} = \langle \boldsymbol{v}_i, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_j \rangle$ である。$\boldsymbol{v}_1$ が B の固有ベクトルだったことを思い出せば、$i \geq 2$ について、

$$\langle \boldsymbol{v}_i, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_1 \rangle = 0 \tag{7.6.18}$$

となる。∎

<u>定理 7.39 の証明</u>：$n = d$, $\mathsf{B} = \mathsf{A}$ として補題 7.40 を用

い、得られたユニタリー行列 V を U_1 と書くと、

$$\mathsf{U}_1^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}_1 = \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,d} \\ 0 & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,d} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a'_{d,2} & \cdots & a'_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.6.19}$$

となる。1 列目だけが上三角的な形になった。次に、$n = d - 1$ とし、(7.6.19) 右辺で 1 行目と 1 列目を取り去って作った $(d-1) \times (d-1)$ 行列を B として補題 7.40 を使う。得られた $(d-1) \times (d-1)$ のユニタリー行列 V の左上に 1 を付け加えて、$d \times d$ のユニタリー行列

$$\mathsf{U}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathsf{V} & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \tag{7.6.20}$$

を作る。これらユニタリー行列で A をはさめば、

$$\mathsf{U}_2^{-1}\mathsf{U}_1^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}_1\mathsf{U}_2 = \begin{pmatrix} a''_{1,1} & a''_{1,2} & a''_{1,3} & \cdots & a''_{1,d} \\ 0 & a''_{2,2} & a''_{2,3} & \cdots & a''_{2,d} \\ 0 & 0 & a''_{3,3} & \cdots & a''_{3,d} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{d,3} & \cdots & a''_{d,d} \end{pmatrix} \tag{7.6.21}$$

のように 1 行目と 2 行目が上三角的な形になる。次は、ここから 1,2 行目と 1,2 列目を取り去った $(d-2)\times(d-2)$ 行列を B として補題 7.40 を用い、という具合に同じことをくり返し、最終的に $\mathsf{U} = \mathsf{U}_1\cdots\mathsf{U}_{d-1}$ とすれば、$\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ は上三角行列になる。

$\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}$ の対角成分に A の固有値が並ぶことを上の構成法から直接に証明するのは意外に難しい。ここでは「飛び道具」であるディターミナントを使って証明しよう。$\tau_i = (\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U})_{i,i}$ とする。上三角行列のディターミナントについての (7.4.79) を思い出すと、任意

の λ について、

$$\det[\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}-\lambda\mathsf{I}]=\prod_{i=1}^{d}(\tau_i-\lambda) \tag{7.6.22}$$

となる。一方、行列の積のディターミナントについての (7.4.68) とすぐ上で求めた (7.6.14) より、

$$\begin{aligned}\det[\mathsf{U}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{U}-\lambda\mathsf{I}]&=\det[\mathsf{U}^{-1}(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})\mathsf{U}]\\&=\det[\mathsf{U}^{-1}]\det[\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I}]\det[\mathsf{U}]=\prod_{i=1}^{d}(\lambda_i-\lambda)\end{aligned} \tag{7.6.23}$$

が言える。(7.6.22) と (7.6.23) を見比べれば、$\tau_1,\ldots,\tau_d$ は $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ を並べ替えたものだとわかる。
∎

7.6.2　固有ベクトルと行列の対角化

A を任意の d 次の正方行列とする。一般の複素行列を考えている。行列 A の固有値を $\lambda_1,\ldots,\lambda_d$ とする。

すでに注意したように、各々の i について、

$$\mathsf{A}\,\boldsymbol{v}_i = \lambda_i\,\boldsymbol{v}_i \tag{7.6.24}$$

を満たす固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ が必ず存在する。ただし、固有値が縮退しているときには、同じ固有値に異なった i を割り振って何重かに数えているわけだが、異なった i に異なったベクトル $\boldsymbol{v}_i$ が対応するとは主張していないことに注意しよう[*72]。よって一般には A に線形独立な固有ベクトルが d 個あるとは限らない。

ここでは、行列 A には d 個の線形独立な固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ があると仮定する。これらの固有ベクトルを使うと行列を**対角化** (diagonalization) できることを見たい。列ベクトルである固有ベクトルをすべて並べて

$$\mathsf{P} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_d) \tag{7.6.25}$$

という正方行列を定義しよう。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が線形独立

[*72] この点についてはこの節の最後の「固有値が縮退している場合についての注意」を見よ。

だから $\det[\mathsf{P}] \neq 0$ である（1166 ページの定理 7.23 を参照)。つまり P は正則であり、逆行列 P^{-1} が存在する。

(7.6.25) の左から行列 A をかけ、(7.6.24) を使うと、

$$\begin{aligned}\mathsf{AP} &= (\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \mathsf{A}\boldsymbol{v}_d) = (\lambda_1\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \lambda_d\boldsymbol{v}_d) \\ &= (\boldsymbol{v}_1 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_d)\Lambda = \mathsf{P}\Lambda \end{aligned} \tag{7.6.26}$$

が得られる。ただし、

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} \tag{7.6.27}$$

は、固有値を対角成分に並べてつくった対角行列である。成分で書けば、$(\Lambda)_{i,j} = \lambda_i\,\delta_{i,j}$ となる。(7.6.26) の両辺に左から P^{-1} をかけると、

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{AP} = \Lambda \tag{7.6.28}$$

という関係が得られる。行列 A を P^{-1} と P で「はさ

む」ことで（質(たち)のいい）対角行列に変えることができたのだ。この操作を行列の対角化という。

以上の考察を次の定理にまとめておこう。

定理 7.41 (行列の対角化)**.** 正方行列 A がある正則行列 P によって (7.6.28) のように対角化できるための必要十分条件は、A の線形独立な d 個の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が存在することである。

証明：十分であることは上で見た。必要性をいうには、上で見たことを逆にたどればよい。(7.6.28) の形に書けるなら、左から P をかけて $\mathsf{AP} = \mathsf{P}\Lambda$ となる。$\mathsf{P} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d)$ と書けば、これは $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が固有ベクトルであることを意味している。∎

(7.6.26) の両辺に右から P^{-1} をかけると、今度は

$$\mathsf{A} = \mathsf{P}\Lambda\mathsf{P}^{-1} \tag{7.6.29}$$

という関係が得られる。対角行列 Λ によって行列 A を書き表すことができた。

(7.6.29) の表現は行列のべき乗を求める際に威力を発揮する。ためしに A^2 に (7.6.29) を代入してみると、逆行列の性質から

$$\mathsf{A}^2 = \mathsf{P}\Lambda\mathsf{P}^{-1}\mathsf{P}\Lambda\mathsf{P}^{-1} = \mathsf{P}\Lambda^2\mathsf{P}^{-1} \tag{7.6.30}$$

となる。同じことは一般のべき乗についてもいえて、n を正整数とすれば

$$\mathsf{A}^n = \mathsf{P}\Lambda^n\mathsf{P}^{-1} \tag{7.6.31}$$

が得られる。けっきょく Λ^n を計算しなくてはならないと思うかもしれないが、(7.6.27) のような対角行列のべき乗は自明で ((7.2.40) 参照)、

$$\Lambda^n = \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_3)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (\lambda_d)^n \end{pmatrix} \tag{7.6.32}$$

である。よって、行列を対角化できれば、任意の正整数 n についてのべき乗が計算できることになる。行列

の積の計算が一般にきわめて面倒なことを思うと、これは強力だ。

ただし、この節の最初に述べたことから分かるように、すべての行列が対角化できるわけではない。実用的に重要なエルミート行列、実対称行列、ユニタリー行列、直行行列は必ず対角化できることを 7.6.3 節、7.6.4 節、7.6.5 節で見る。ここでは次の一般的な結果を見ておこう。

定理 7.42 (固有値がすべて異なる行列の固有ベクトル)**.** d 次の正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ が、すべて互いに異なるとする。各々の i について対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ が存在し、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ は線形独立である。

定理 7.41 を思い出せばこのような行列が対角化できることがわかる。

証明：各々の i に対して固有ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ が存在することはすでに知っているから、線形独立性を示せばよい。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が線形独立でないと仮定し、

$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ の中の線形独立なベクトルの最大の個数を n とする（もちろん、$n < d$）。$\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}$ を線形独立な組み合わせとし、$\boldsymbol{v}_i$ をそれら以外の一つとすれば、$\boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_{i_j}$ と展開できる。この両辺に左から A をかけて、固有ベクトルの条件 (7.6.24) を使うと、$\lambda_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_{i_j} \boldsymbol{v}_{i_j}$ を得る。左辺は $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \lambda_i \boldsymbol{v}_{i_j}$ ともかけるから、これが右辺と等しいことから、$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (\lambda_i - \lambda_{i_j}) \boldsymbol{v}_{i_j} = 0$ となる。今、固有値がすべて異なることから $\lambda_i - \lambda_{i_j} \neq 0$ だから、この式は $\boldsymbol{v}_{i_1}, \boldsymbol{v}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{v}_{i_n}$ が線形従属であることを意味する。これは矛盾。∎

ところで、成分が全て実数の行列、つまり、実行列を扱っていても、固有値は一般に複素数になることを少し前に注意した。一方、もし実行列のある固有値が実数なら、それに対応する固有ベクトルはかならず実ベクトル（実数を成分にしたベクトル）にとれる。ほぼ当たり前のことだだし、実は 1241 ページの定理 7.35 と実質的に同じことなのだが、念のためにまとめてお

こう。

定理 7.43 (実行列の実数固有値に対応する固有ベクトル)**.** 実行列 A が実数の固有値 λ をもつなら、それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ を全ての成分が実数になるようにとることができる。

証明：$\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ であり、$\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1,\ldots,d}$ の少なくとも一つの成分の虚部がゼロでないとする。$\boldsymbol{v}$ の各々の成分の複素共役をとって $\bar{\boldsymbol{v}} = ((v_i)^*)_{i=1,\ldots,d}$ というベクトルを定義する。$\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ という関係を成分表示し、その複素共役をとると、$\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{v}} = \lambda\bar{\boldsymbol{v}}$ が得られる。そこで、$\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{v}})/2$ とすると、これはゼロでない実ベクトルであり、$\mathsf{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ を満たす。∎

■固有ベクトルと対角化の計算の例　7.6.1 節の簡単な例 (7.6.8) について、固有ベクトルを具体的に求め、対角化を実行しよう。

まず行列 B について。はじめてなので、ていねいに

やろう。固有値は $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ の二つ。まず $\lambda_1 = 2$ に対応する固有ベクトルを求めてみよう。固有ベクトルは固有値方程式 $\mathsf{B}\boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{v}$ を満たすベクトルである。$\boldsymbol{v} = (x, y)^{\mathrm{t}}$ のように成分表示してこの条件を書けば、

$$\begin{cases} x + 3y = 2x \\ -x + 5y = 2y \end{cases} \tag{7.6.33}$$

と、高校レベルの問題になる。まず一つ目の式を整理して、$x = 3y$ を得る。では、というので、二つ目の式をいじると、今度も $x = 3y$ になる。一瞬おやっと思いそうになるが、よく考えれば、これでいいのだ。ここで違う関係が出てしまうと、解は $x = y = 0$ しかあり得ないということになってしまう。ゼロでない解があることを要請して、固有値を求めたのだった。$x = 3y$ を満たす x, y はもちろんいくらでもあるが、たとえば $x = 3$, $y = 1$ と選ぶのがすなおだろう。同じように $\lambda_2 = 4$ に対応する固有ベクトルを求めると、たとえば $(1, 1)^{\mathrm{t}}$ が得られる（やってみよう。また、わざと $\mathsf{B}\boldsymbol{v} = 3\boldsymbol{v}$ のように、固有値以外の数を使った方程

式を調べてみて、たしかにゼロベクトルの解しかないことも確認しておこう)。こうして、行列 B の $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$ に対応する固有ベクトルとして、

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.6.34}$$

が取れることがわかった。

固有ベクトル (7.6.34) を (7.6.25) のように並べて行列をつくると、

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6.35}$$

となる。これは確かに正則行列で、逆行列は、(7.5.9) を使って

$$\mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{7.6.36}$$

となる。具体的に $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{BP}$ を計算すると（是非やってみよう)、

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{BP} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{7.6.37}$$

となり、確かに (7.6.28) のように対角化されている。

また、行列のべき乗について、(7.6.31) を使うと、

$$\begin{aligned}\mathsf{B}^n &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \times 2^n - 4^n & -3 \times 2^n + 3 \times 4^n \\ 2^n - 4^n & -2^n + 3 \times 4^n \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{7.6.38}$$

と具体形を一般的に計算することができる。

(7.6.8) の 3×3 行列 C についても同じように固有ベクトルを求めることができる。是非計算を実行していただきたいが、結果を書けば、$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 6$ に対応する固有ベクトルを、それぞれ

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.6.39}$$

と選ぶことができる。これに対応する行列 P とその逆

行列は、

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6.40}$$

となる。これを使って、実際に $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{CP}$ が対角行列になっていることを確かめておこう。

もう一つ、今度は固有値が複素数になる実行列の例を見ておこう。２次の正方行列

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6.41}$$

を考える。(7.6.7) から固有値は $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$ のように複素数になる。複素数の演算を思い出しつつ、上とまったく同じ計算をすれば（やってみよう）、

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \tag{7.6.42}$$

が固有ベクトルにとれることがわかる。さらに、これ

らを並べた複素成分の行列 P とその逆行列

$$\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}, \quad \mathsf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{7.6.43}$$

を使えば、

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{C}\mathsf{P} = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \tag{7.6.44}$$

のように行列を対角化することができる。さらに面白いことに、行列のべき乗の計算も、(7.6.31) を使って、

$$\begin{aligned} \mathsf{C}^n &= \mathsf{P}\begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}\mathsf{P}^{-1} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (1+i)^n & 0 \\ 0 & (1-i)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.6.45}$$

と求めることができる。C^n はもちろん実数のみを成分にもつ行列だが、その一般形は (7.6.45) のように複素数を使った形できれいに書くことができるのだ。

問 7.6.2.a　以下の行列の固有値と固有ベクトルを求

めよ。対角化し行列の n 乗を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 10 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \tag{7.6.46}$$

問 7.6.2.b　1056 ページの (7.2.77) で定義した二次元の回転行列

$$\mathsf{O}_\theta := \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{7.6.47}$$

（角度 θ は任意の実数）の固有値と固有ベクトルを求め、O_θ を対角化せよ。(7.2.79) で見たように

$$\mathsf{O}_\theta\,\mathsf{O}_\varphi = \mathsf{O}_{\theta+\varphi} \tag{7.6.48}$$

が成り立つが（回転行列の意味を考えればこれは明らか)、この事実は対角化した表示ではどのように理解さ

れるか？　オイラーの公式 (3.2.102)（402 ページ）を思い出しておこう。

問 7.6.2.c　フィボナッチ[*73]数列 $f_1, f_2, f_3, \ldots$ は、$f_1 = f_2 = 1$ および、任意の $n \geq 3$ について

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \tag{7.6.49}$$

で定義される。具体的には、1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ... といった具合。行列の対角化を利用して任意の n について f_n を求めることができる。定数 a, b, c, d をうまく選べば、任意の n について、(7.6.49) を

$$\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \end{pmatrix} \tag{7.6.50}$$

と書き直すことができる。定数 a, b, c, d を求めよ。行列の対角化によって行列のべき乗を計算する方法を

[*73] Leonardo Pisano Fibonacci (1170–1250) イタリアの数学者。アラビアの数学を紹介し復活させるのに大きな役割を果たしたという。

用いて、一般の n について f_n を求めよ。また、比 f_{n+1}/f_n が $n \to \infty$ でどうふるまうかを調べよ。

■固有値が縮退している場合についての注意　ここで、少し高級だが、重要な注意を。

定理 7.42 により、行列 A の固有値がすべて互いに異なれば、A は d 個の線形独立な固有ベクトルをもつ。よって、定理 7.41 の条件が満たされるので、行列 A は対角化できる。

では、固有値が縮退していて、定理 7.42 が使えないときはどうなるのか？　行列は対角化できないのか？

実は、以下でみるように、答えは場合による。

まず、固有値が縮退していても d 個の線形独立な固有ベクトルが存在することはある。当たり前の例は、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \tag{7.6.51}$$

のような対角行列だろう。特性方程式は $(\lambda - a)^2 = 0$ だから、固有値 a が二重に縮退している。固有ベクトルとして、たとえば $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0)^{\mathrm{t}}$ と $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1)^{\mathrm{t}}$ の二

つをとることができる。もちろん、この場合は、もともと対角行列なので、対角化できるかという問いへの答えにはならない。

これほど当たり前でない例として、

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} a+b & -a+b & a-b \\ -a+b & a+b & a-b \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix} \tag{7.6.52}$$

という 3 次の正方行列をみよう。簡単な計算により $\det[\mathsf{B} - \lambda \mathsf{I}] = -(\lambda - 2a)^2(\lambda - 2b)$ となるので、固有値は $\lambda_1 = \lambda_2 = 2a$, $\lambda_3 = 2b$ となり、$2a$ が二重に縮退している。これに対して、

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.6.53}$$

のように線形独立な固有ベクトルを選ぶことができる。これらを並べた行列は正則であり、行列 B は対角化できることがわかった。

しかし、いつでもうまくいくわけではない。たとえ

ば、簡単な

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \tag{7.6.54}$$

という行列の特性方程式は明らかに $(a-\lambda)^2 = 0$ だから、固有値 a が二重に縮退している。そこで、$\mathsf{C}\boldsymbol{v} = a\,\boldsymbol{v}$ という固有ベクトルの方程式を書き下すと、

$$\begin{cases} ax + by = ax \\ ay = ay \end{cases} \tag{7.6.55}$$

となる。一つ目の式から $y = 0$ となってしまうので、この方程式の解は $x = (\text{定数})$, $y = 0$ しかない。つまり、固有ベクトルとしては

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{7.6.56}$$

の定数倍しかないのである。1264 ページの定理 7.41 によって、行列 C は、$b \neq 0$ ならば対角化できないこ

とがわかる[*74]。

7.6.3　エルミート行列の対角化

行列の対角化の理論のなかで、きわだって強力で役に立つのは、エルミート行列と実対称行列についての一般的な結果だ。これらの行列の固有値はかならず実数であり、これらの行列は（固有値が縮退していても）かならず対角化できる[*75]。

この節ではエルミート行列についての結果をみよう。これは、量子力学にとって、もっとも重要な線形代数の結果と言ってもいいだろう。

[*74] このような行列は、たとえば線形常微分方程式の行列による取り扱いにも顔を出す。線形独立な固有ベクトルがとれないことに対応して、微分方程式の解も特異なふるまいを示す。詳しくは 8.3.3 節をみよ。

[*75] これは正規行列は対角化可能という一般的な結果の一部である。7.6.5 節を見よ。

■エルミート行列の固有値、固有ベクトル、対角化　エルミート行列とは、$\mathsf{A}^\dagger = \mathsf{A}$ つまり $(a_{i,j})^* = a_{j,i} \in \mathbb{C}$ を満たす正方行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ のことだった。まず、固有値についての最も基本的な結果を見ておこう。$\lambda \in \mathbb{C}$ を A の固有値とする。少なくとも一つの 0 でない固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ が存在し、$\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ が成り立つ。よって、内積の線形性 (7.1.22) から

$$\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \lambda\,\boldsymbol{v} \rangle = \lambda\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.6.57}$$

となる。次に、エルミート行列の基本的な性質 (7.2.90) と内積の基本的な性質 (7.1.23) より、同じ量について、

$$\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathsf{A}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \lambda\,\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \lambda^*\,\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.6.58}$$

がいえる。(7.6.57) と (7.6.58) を見比べて、$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \neq 0$ に注意すれば、$\lambda = \lambda^*$ であること、つまり λ が実数であることがわかる。以下の定理が示された。

定理 7.44 (エルミート行列の固有値)**.** エルミート行列の固有値は全て実数である。

つまり、エルミート行列はある意味で「実数的」な行列だということができる。実際、複素数 a が実数である条件 $a^* = a$ とエルミート性 $\mathsf{A}^\dagger = \mathsf{A}$ はきれいに対応している。

次の定理がこの節の最も重要な結果である。

定理 7.45 (エルミート行列の対角化可能性)**.** A をエルミート行列とする。$\Lambda = \mathsf{U}^{-1}\mathsf{AU}$ が対角行列になるようなユニタリー演算子 U が必ず存在する。

対角行列 Λ の成分は A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ そのものなので、もちろん全て実数である。ユニタリー行列については $\mathsf{U}^{-1} = \mathsf{U}^\dagger$ なので、対角化は $\Lambda = \mathsf{U}^\dagger\mathsf{AU}$ と書けることに注意しよう。対角化の計算では逆行列を求めるところが面倒なので、これは便利だ。

定理 7.45 はシューア分解（1255 ページの定理 7.39）を使えば即座に証明できる（シューア分解を学んでい

ない読者は次の証明を飛ばして読み進めていい)。

証明：定理 7.39（1255 ページ）により $\mathsf{U}^\dagger\mathsf{AU}$ が上三角行列になるユニタリー行列 U が存在する。$(\mathsf{U}^\dagger\mathsf{AU})^\dagger = \mathsf{U}^\dagger\mathsf{A}^\dagger\mathsf{U} = \mathsf{U}^\dagger\mathsf{AU}$ なので、$\mathsf{U}^\dagger\mathsf{AU}$ もエルミート行列である。しかし、上三角かつエルミートな行列は実数を成分とする対角行列である（ここで固有値が実数であることも示されたので実は定理 7.44 の証明は不要だった)。∎

(7.6.25) にならって A を対角化するユニタリー行列を

$$\mathsf{U} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_d) \tag{7.6.59}$$

と書く。1264 ページの定理 7.41 の証明で見たように、ここに現れた d 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_d$ は A の固有ベクトルである。さらに、ユニタリー行列の特徴づけについての 1075 ページの定理 7.14 から、これら d 個のベクトルは正規直交基底をなすことが分かる。つまり次の定理が示された。

定理 7.46 (エルミート行列の固有値と固有ベクトル)**.** A を d 次のエルミート行列とする。A の d 個の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ を正規直交基底になるように選ぶことができる。

ここで、固有値が実数であっても、固有ベクトルは一般には実ベクトルではないことに注意しよう。また、固有値が縮退しているときには、その固有値に対応する固有ベクトルの取り方は一通りには定まらない[*76]。

ここでは定理 7.45 から定理 7.46 を導いたが、実は二つの定理は同値である。これを見るためには、1264 ページの定理 7.41 により、定理 7.46 で存在が保証された正規直交基底 $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d\}$ から作ったユニタリー行列 (7.6.59) で A が対角化されることに注意すれ

[*76] $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が、ある縮退した固有値に対応する固有ベクトルだとする。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で作った、互いに直交する単位ベクトル $\tilde{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}_n$ も固有ベクトルである。

ばいい。

定理 7.46 はすでに証明されているが、シューア分解を学んでいない読者のために、A の固有値が縮退していない簡単な場合の定理 7.46 の証明を見ておこう。エルミート行列についての標準的で簡単な論法なのでシューア分解を用いた証明を読んだ読者も一読するといいと思う。

<u>縮退がない場合の定理 7.46 の証明</u>：$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と成分表示しよう。$(a_{i,j})^* = a_{j,i} \in \mathbb{C}$ である。ここでは固有値に縮退がないと仮定する。全ての固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ が異なるので、各々の固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が存在する（7.6.1 節の最初を見よ）。必要なら定数倍することでこれらは全て単位ベクトルとしてよい。あとは、これらが直交することを示せばよい。

λ, μ を A の異なった二つの固有値とし、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ をそれぞれに対応する固有ベクトルとする。$\mathsf{A}\boldsymbol{u} = \lambda\boldsymbol{u}$ の両辺の $\boldsymbol{v}$ との内積をとれば、$\langle \mathsf{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ となる。同

様に、$\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{u}$ の内積をとり、$\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$。$\mathsf{A}$ はエルミート行列だから (7.2.90) つまり $\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{v}\rangle = \langle \mathsf{A}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ が成り立つ。よって、$\lambda\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = \mu\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ だが、$\lambda \neq \mu$ だから $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle = 0$ となる。∎

重要な結果なのでくり返せば、任意のエルミート行列 A は適切なユニタリー行列 U を使って

$$\mathsf{U}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} \tag{7.6.60}$$

のように対角化できる。$\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ は A の固有値であり、対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ とすればユニタリー行列 U は (7.6.59) で与えられる。この表式が行列のべき乗などに使えることは、もちろん、7.6.2 節と同じである。

(7.6.60) の左右からそれぞれ U と $\mathsf{U}^\dagger$ をかけると、

$$\mathsf{A} = (\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \cdots\ \boldsymbol{v}_d)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_1^\dagger \\ \boldsymbol{v}_2^\dagger \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_d^\dagger \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j\, \boldsymbol{v} \tag{7.6.61}$$

が得られる。もちろん (7.6.59) を使った。ここで $\mathsf{P}_j = \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^\dagger$ とする。(7.2.68) で見たように、これは $\boldsymbol{v}_j$ の方向への直交射影行列である。こうして、任意のエルミート行列 A を

$$\mathsf{A} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \mathsf{P}_j \tag{7.6.62}$$

のように射影行列の線形結合として表現できることがわかった。この表式を行列 A の**スペクトル分解** (spec-

tral decomposition) と呼ぶ[*77]。また、エルミート行列のスペクトル分解は量子力学でも便利な道具として多用される。

$\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,d}$ が正規直交基底であることから直交射影行列 $\mathsf{P}_j = \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^\dagger$ は $\mathsf{P}_j \mathsf{P}_k = \delta_{j,k} \mathsf{P}_j$ を満たす。これを使えば直ちに

$$\mathsf{A}^n = \sum_{j=1}^{d} (\lambda_j)^n \, \mathsf{P}_j \tag{7.6.63}$$

が示される。もちろん、これは (7.6.31) の関係そのものである。より一般に、$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を任意の関数とす

[*77] スペクトルというのは関数解析に現れる固有値を一般化した概念である。この場合は「固有値分解」とでも呼べばよさそうなのだが、この呼び方が定着している。一般の対角化可能な行列についての (7.6.29) も（直交射影行列とは限らない）射影行列を使って (7.6.62) と同じ形に書けるのだが、そのような表式は（少なくとも物理への応用では）あまり使われない。

るとき、(7.6.63) にならって、

$$f(\mathsf{A}) = \sum_{j=1}^{d} f(\lambda_j)\,\mathsf{P}_j \tag{7.6.64}$$

のようにエルミート行列を別の行列に写す関数 $f(\cdot)$ が定義できる。この考え方は、行列の平方根 (7.6.124) や指数関数 (7.8.11) にも適用できる。

■例　エルミート行列の簡単な例として、

$$\mathsf{S} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{7.6.65}$$

という行列を調べよう。量子力学でスピン角運動量を表現するパウリ行列 (7.2.37) の一つである。成分が虚数ばかりだが、やってみればわかるように $\mathsf{S}^\dagger = \mathsf{S}$ を満たす。

特性方程式

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \tag{7.6.66}$$

の解は明らかに $\lambda = \pm 1$ で、確かに実数である。固有ベクトルをさがすと、たとえば、

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} \tag{7.6.67}$$

が得られる。絶対値を 1 にそろえておいた。これらを並べた

$$\mathsf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} \tag{7.6.68}$$

はユニタリー行列である。よって、

$$\mathsf{U}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix} \tag{7.6.69}$$

が U の逆行列になる（確かめよう）。こうして、

$$\mathsf{U}^\dagger\mathsf{S}\mathsf{U} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{7.6.70}$$

のように行列 S を対角化できる。

問 7.6.3.a　以下のエルミート行列をユニタリー行列

によって対角化せよ。

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & i \\ -1 & -i & 1 \end{pmatrix},$$
$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 2 & -i & 1 \\ i & 2 & -i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.71}$$

7.6.4　実対称行列の対角化

この節では、実対称行列についての結果をまとめる。もちろん、実対称行列はエルミート行列の特別な場合なので、前節に比べて本質的に新しいことは何もない。しかし、分野によってはエルミート行列よりも実対称行列が標準的に現れること、実対称行列には、二次形式や種成分分析などへの応用もあることから、あえて節を分ける。

■実対称行列の固有値、固有ベクトル、対角化　実対称行列とは、$\mathsf{A}^{\mathrm{t}} = \mathsf{A}$ を満たす実行列、つまり $a_{i,j} =$

$a_{j,i} \in \mathbb{R}$ を満たす正方行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ のことだった。

実対称行列はエルミート行列なので、前節の定理 7.44 と定理 7.46 がそのまま成り立つ。また、1268 ページの定理 7.43 により固有ベクトルの成分を全て実数にとることができる。よって次の結果が得られた。

定理 7.47 (実対称行列の固有値と固有ベクトル)**.** A を d 次の実対称行列とする。A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ はすべて実数である。固有ベクトルは実ベクトルに取ることができ、さらに、d 個の固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ を正規直交基底をなすように選ぶことができる。

行列 A を対角化するため、(7.6.25) にならって、

$$\mathsf{O} = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_d) \tag{7.6.72}$$

のように固有ベクトルを並べた行列を考える。これは、(7.2.91) そのものなので、O は直交行列である。直交行列については (7.2.95) のように、$\mathsf{O}^{-1} = \mathsf{O}^{\mathrm{t}}$ となるので、やはり転置をとるだけで逆行列が求められる。

こうして、任意の実対称行列 A は、適切な直交行列 O を使って

$$\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\mathsf{O} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} \tag{7.6.73}$$

と対角化できることがわかった。これが行列のべき乗などに使えることは、もちろん、7.6.2 節と同じである。スペクトル分解 (7.6.62) もそのまま成立する。

■例　まず簡単な二次の実対称行列として、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{7.6.74}$$

をみよう。特性方程式は、

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(3-\lambda)-4 = \lambda^2-9\lambda+14 = 0 \tag{7.6.75}$$

となる。これはすぐに解けて、$\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = 2$ の二つの固有値が得られる。固有ベクトルを求める計算も

7.6.2 節とまったく同じで、たとえば、二つの固有値に対応して

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.76}$$

という固有ベクトルが得られる（やってみよう）。これらの内積は 0 で、確かに直交している。ただし、まだ絶対値が 1 になっていないので、それぞれを絶対値で割って、

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.77}$$

とする。これらをあわせれば、正規直交基底になる。そして、これらを並べて作った行列

$$\mathsf{O} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.78}$$

は直交行列になる。実際、転置をとった

$$\mathsf{O}^{\mathrm{t}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.79}$$

が逆行列になっていることを確かめてみよ。そして、これらを使えば、

$$\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\mathsf{O} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.80}$$

のように、もとの行列は対角化される。

次に、以下のような 3 次の行列をみよう。

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.6.81}$$

やはり実対称だから、かならず対角化できるはずだ。まず特性方程式を求めると、

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & 2 \\ -4 & 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = 0 \tag{7.6.82}$$

と、三次方程式になる。三次方程式にも解の公式はあるのだが、あまりに込み入っているので、実質的な計算に役立つことは少ない。方程式が、たまたま（ある

いは、「やらせ」で）きれいな性質をもっているときには、それを勘で見抜いて解いてしまうのがよいやり方だ。今の場合、(7.6.82) の多項式に $\lambda = -1$ を代入すると 0 になることに気づけば、あとは二次式の問題になる。けっきょく、(7.6.82) は、$(-1-\lambda)^2(8-\lambda) = 0$ と書けるので、固有値は、$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 8$ と求められる。三つの固有値のうち、二つが縮退している。

もちろん実対称行列をあつかっているのだから、縮退があっても、固有値 -1 に対応する線形独立な固有ベクトルが二つみつかるはずだ。実際、$\mathsf{B}\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$ という関係を $\boldsymbol{v} = (x, y, z)^{\mathrm{t}}$ として書き下すと、

$$\begin{cases} 3x - 4y + 2z = -x \\ -4x + 3y - 2z = -y \\ 2x - 2y = -z \end{cases} \tag{7.6.83}$$

となる。落ち着いて、三つの式を吟味してみると、実はこれらはすべて同じ $2x - 2y = -z$ だということがわかる。条件が一つしかないと一瞬とまどうけれど、自由に選べる量の数を真面目に考えれば、これでちょ

うどいいのだ。ともかくやってみよう。まず、簡単そうだから $z = 0$ とすると、$2x - 2y = 0$ つまり $x = y$ という条件がでる。固有ベクトルの絶対値は自由だったから、絶対値が 1 になるように $x = y = 1/\sqrt{2}$ としよう。こうして、固有ベクトル $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^{\mathrm{t}}$ が得られた。もう一つの固有ベクトルがあるはずだから、今度は z を 0 以外にとる。式がきれいになるように $z = 2$ とすれば、$x - y = -1$ という条件が得られる。まだ具体的な数を決めずに $x = a$ とすれば、$y = a + 1$ になり、固有ベクトル $(a, a + 1, 2)^{\mathrm{t}}$ が得られる。これは、a が何であっても $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^{\mathrm{t}}$ と線形独立だが、とくに二つの固有ベクトルが直交するためには、内積 $a/\sqrt{2} + (a + 1)/\sqrt{2} = (2a + 1)/\sqrt{2}$ が 0 でなくてはならない。よって、これが 0 となるよう $a = -1/2$ と選べば、固有ベクトル $(-1/2, 1/2, 2)^{\mathrm{t}}$ が得られる。あとは、絶対値を 1 にするために、絶対値 $\sqrt{(1/2)^2 + (1/2)^2 + 2^2}$ で全体を割ればよい。$\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ という二重に縮退した固有に対応する固有ベ

クトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1/(3\sqrt{2}) \\ 1/(3\sqrt{2}) \\ 2\sqrt{2}/3 \end{pmatrix} \tag{7.6.84}$$

が得られた。$\lambda_3 = 8$ については、話は単純で（全体の定数倍を除けば）固有ベクトルは自動的に一つに決まり（やってみよう)、絶対値が 1 の固有ベクトルとして $\boldsymbol{v}_3 = (2/3, -2/3, 1/3)^{\mathrm{t}}$ が得られる。これは、（すでに一般的に示したように）(7.6.84) の二つの固有ベクトルと直交している。以上で、正規直交基底となる三つの固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が得られた。

これらを並べて作った

$$\mathsf{O} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) & -2/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \tag{7.6.85}$$

は直交行列になる。もとの行列は、

$$
\begin{aligned}
\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\mathsf{B}\mathsf{O} &= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/(3\sqrt{2}) & 1/(3\sqrt{2}) & 2\sqrt{2}/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\
&\quad \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/(3\sqrt{2}) & 2/3 \\ 1/\sqrt{2} & 1/(3\sqrt{2}) & -2/3 \\ 0 & 2\sqrt{2}/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad (7.6.86)
\end{aligned}
$$

のように対角化される。確かめてみよう。

問 7.6.4.a　上の計算で、-1 に対応する固有ベクトルはいろいろに選ぶことができる。たとえば、はじめから $z = 2$ とおいてしまっても、直交する二つの固有ベクトルをつくることができる。これを実行して、同じ

ように直交行列を求め、対角化せよ。

問 7.6.4.b　以下の実対称行列を、直交行列によって対角化せよ。

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{D} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\mathsf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.87}$$

(ヒント：行列 D の特性方程式を書いたとき、さっさと三次の項を展開しないで、整理するといい。)

■二次形式の標準形　実対称行列の対角化の、ほぼ自明だが、重要な応用について述べておく。

$i, j = 1, \ldots, n$ について、$\alpha_{i,j}$ を実定数とする。n 個の実変数 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ についての一般の二次の多項式

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{i,j}\, x_i\, x_j \tag{7.6.88}$$

のことを[*78]**二次形式** (quadratic form) と呼ぶ。

すべての i について $a_{i,i} = \alpha_{i,i}$ と、すべての $i \neq j$ について $a_{i,j} = (\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i})/2$ と定義する。明らかに $a_{i,j} = a_{j,i}$ が成り立つ。さらに、$x_i\,x_j = x_j\,x_i$ に注意すれば、$i \neq j$ について、

$$\begin{aligned}\alpha_{i,j}\,x_i\,x_j + \alpha_{j,i}\,x_j\,x_i &= (\alpha_{i,j} + \alpha_{j,i})x_i\,x_j \\ &= 2a_{i,j}\,x_i\,x_j = a_{i,j}\,x_i\,x_j + a_{j,i}\,x_j\,x_i \qquad (7.6.89)\end{aligned}$$

と書き換えることができる。最後の変形は、$2a_{i,j}\,x_i\,x_j$ を $a_{i,j}\,x_i\,x_j$ と $a_{j,i}\,x_j\,x_i$ という等しいもの二つの和に書き換えただけで、ちょっとわざとらしい。しかし、これによって実対称行列の性質が使えるようになる。(7.6.89) の形を足しあげれば、(7.6.88) は、

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\,x_i\,x_j \qquad (7.6.90)$$

のように対称な $a_{i,j}$ だけを使って書くことができる。

[*78] 今さら言うまでもないだろうが、和は i, j 独立に 1 から n までとる。

$a_{i,j}$ を成分にもつ $n \times n$ 行列 $\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ は、明らかに実対称行列である。また、$\boldsymbol{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{t}}$ のように変数を並べた列ベクトルを考えると、二次形式 (7.6.90) を

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle \tag{7.6.91}$$

のように行列とベクトルで簡単にあらわすことができる。

さらに、A は実対称行列だから、ある直交行列 O を使って (7.6.73) つまり $\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\mathsf{A}\mathsf{O} = \Lambda$ のように対角化できる。ここで、Λ は A の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ を対角成分にもつ対角行列 (7.6.27) である。もちろん、$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ はすべて実数であることが保証されている。対角化の式を書き直せば $\mathsf{A} = \mathsf{O}\Lambda\mathsf{O}^{\mathrm{t}}$ となるから、これを (7.6.91) に代入し、実行列のエルミート共役は転置であることを思い出しつつ (7.2.58) を使えば、

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \langle \boldsymbol{v}, \mathsf{O}\Lambda\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathsf{O}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}, \Lambda\mathsf{O}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v} \rangle \tag{7.6.92}$$

となる。ここで $\boldsymbol{u} = \mathsf{O}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{v}$ というベクトルを定義すれば、調べている二次形式について、

$$F(x_1, \ldots, x_n) = \langle \boldsymbol{u}, \Lambda \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, (y_i)^2 \qquad (7.6.93)$$

という表式が得られる。新しいベクトルを $\boldsymbol{u} = (y_1, \ldots, y_n)^{\mathrm{t}}$ と成分表示した。

$\mathsf{O} = (o_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ とすれば、$y_i = \sum_{j=1}^{n} o_{j,i}\, x_j$ であることに注意しよう。$y_1, \ldots, y_n$ は、古い変数 $x_1, \ldots, x_n$ の線形結合でつくられた、新しい変数とみてよい。そして、この新しい変数を使えば、二次形式 $F(x_1, \ldots, x_n)$ を、(7.6.93) のように、各々の変数の二乗だけを含んだ簡単な形に書き直すことができるのだ。(7.6.93) の書き方を、二次形式の標準形と呼ぶ。二次形式の標準形は、力学をはじめ、物理学のさまざまな局面で重要な役割を果たす。

一つ、初等幾何に関わる例をみておこう。二次元のデカルト座標を (x, y) とし、

$$5x^2 + 2y^2 + 4xy = 1 \qquad (7.6.94)$$

という方程式で表される平面上の図形を考えよう。このままでは、どういう図形なのか簡単にはわからない。そこで、二次形式

$$G(x,y) = 5x^2 + 2y^2 + 4xy = (x\ y)\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{7.6.95}$$

を定義し、図形を決める (7.6.94) を $G(x,y) = 1$ と表す。ここに現れた行列は、

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.6.96}$$

と対角化される。そこで、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x/\sqrt{5} + y/\sqrt{5} \\ -x/\sqrt{5} + 2y/\sqrt{5} \end{pmatrix} \tag{7.6.97}$$

によって新しい変数 $u,\ v$ を定義すると、二次形式 $G(x,y)$ を標準形

$$G(x,y) = 6u^2 + v^2 \tag{7.6.98}$$

図 7.3　方程式 (7.6.94) で決まる楕円。uv 座標系で描くと、ちょうど u 軸が短軸で v 軸が長軸になる（左）。もとの xy 座標系では全体が $\theta \simeq 0.46$（約 27 度）傾いている（右）。点線で u 軸と v 軸を示した。

に書き換えることができる。よって、図形の方程式 (7.6.94) は、

$$6u^2 + v^2 = 1 \tag{7.6.99}$$

となる。この方程式が表しているのは、u 軸とは $\pm 1/\sqrt{6}$ で交わり、v 軸とは ± 1 で交わるような二次曲線、つまり、u 軸が短軸で v 軸が長軸であり、短径が $2/\sqrt{6}$ で長径が 2 の楕円である（図 7.3 の左）。

7.2.4 節でみたように 2 次元の直交行列は回転行列 (あるいは、鏡映変換と回転行列の合成) になる。ここでは (7.6.97) を (6.1.12) の回転による座標変換とみなすと見通しがよい。二つの式を見比べて、$\cos\theta = 2/\sqrt{5}$, $\sin\theta = 1/\sqrt{5}$ となる $\theta \simeq 0.46$（27 度くらい）をとる。つまり、u, v の座標系はもとの x, y の座標系からみて (左に) $\theta \simeq 0.46$ だけ回転したものなのである。よって方程式 (7.6.94) で表される楕円は、図 7.3 の右図のように、長軸が y 軸から θ だけ傾いていることがわかる。

問 7.6.4.c　以下の方程式がどういう図形を表すかを標準形に変換することで調べよ。

$$x^2+xy+y^2 = 3, \quad 3x^2+4\sqrt{3}\,xy-y^2 = 15 \quad (7.6.100)$$

■主成分分析　実対称行列の対角化の応用例として、多変量解析の分野で標準的に用いられている**主成分分析** (pricipal component analysis) を紹介しよう。行列の数学が実用的な問題で威力を発揮する例の一つである。

図 7.4　主成分分析の概念図。$d = 2$ の場合。2 成分のデータ（例えば、物理と英語のテストの成績）を 2 次元の座標にプロットした（平均値はゼロとする）。原点を通る直線を描き、それに沿った座標を使ってデータを特徴づけることを考える。図のように、データ点が描く図形が「最も伸びている方向」に直線を引けば、最も上手にデータを特徴づけられる。

なんらかの調査の結果、d 成分のデータ N 個の集まり $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(N)}$ が得られたとしよう。各々の $n = 1, \ldots, N$ について $\boldsymbol{x}^{(n)} = (x_1^{(n)}, \ldots, x_d^{(n)}) \in \mathbb{R}^d$

である。例えば、n が個々の学生を表わしていて、$(x_1^{(n)}, \ldots, x_d^{(n)})$ はその学生の d 個の科目の成績のリストだと思えばいいだろう。簡単のため、$\sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(n)} = (0, \ldots, 0)$ と仮定する[*79]。

各々の n（つまり、学生）について d 個の数値があるのは場合によっては不便である。それぞれの n について、一つ（あるいは、二つなど、少数の）特徴量を使うだけで、なるべく上手にデータの性質を表わしたい。そこで、実成分をもつ単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ を用意して、内積 $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^{(n)} \rangle$ によって n 番目のデータを特徴づけることにする。これは、N 個のデータを d 次元の座標にプロットし、原点を通り $\boldsymbol{e}$ に平行な直線に沿った座標を取り、各々のデータ点からこの直線に射影した点を見ていることに相当する。図 7.4 を見よ。

[*79] これが成り立たない場合は、平均値を差し引いた $\boldsymbol{x}^{(n)} - \sum_{m=1}^{N} \boldsymbol{x}^{(m)}/N$ を新たに $\boldsymbol{x}^{(n)}$ と定義すればいい。

単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ に対して、

$$V(\boldsymbol{e}) := \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\left(\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^{(n)}\rangle\right)^2 \tag{7.6.101}$$

と定義する。これは、特徴量 $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^{(n)}\rangle$ がどの程度「ばらついて」いるかの目安だと考えられる。「ばらつき」$V(\boldsymbol{e})$ が大きいほど $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^{(n)}\rangle$ はデータの集まりの特徴を上手に捉えているとみなすことにしよう。そして、与えらえたデータの集まりに対して、$V(\boldsymbol{e})$ を最大にするような $\boldsymbol{e}$ をみつけ、それによって特徴量 $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^{(n)}\rangle$ を作ることにする。図形的に見れば、d 次元の座標にプロットしたデータの集まりが作る図形が「最も伸びている方向」を探すことに相当する（図 7.4)。このようにして得られた $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}^{(n)}\rangle$ を主成分（あるいは、第 1 主成分）と呼ぶ。

$V(\boldsymbol{e})$ を最大にする単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ を探す問題を考える。これは、何も知らなければかなりの難問だろうが、行列の数学を知っていれば簡単にできる。

$\boldsymbol{e} = (e_1, \ldots, e_d)$ と成分表示すれば、

$$V(\boldsymbol{e}) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\Big(\sum_{i=1}^{d} x_i^{(n)} e_i\Big)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{i,j=1}^{d} e_i\, x_i^{(n)} x_j^{(n)} e_j$$

$$= \sum_{i,j=1}^{d} e_i\,(\mathsf{C})_{i,j}\, e_j = \langle \boldsymbol{e}, \mathsf{C}\boldsymbol{e}\rangle \tag{7.6.102}$$

と書けることがわかる。ここで、相関行列 C を

$$(\mathsf{C})_{i,j} \coloneqq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} x_i^{(n)} x_j^{(n)} \tag{7.6.103}$$

によって定義した。C は明らかに実対称行列である。また、C の任意の固有値はゼロ以上である。なぜなら、固有値 λ に対応する規格化された固有ベクトルを $\boldsymbol{e}$ とすれば、(7.6.102) を右辺から左辺に逆にたどることで、

$$\lambda = \langle \boldsymbol{e}, \mathsf{C}\boldsymbol{e}\rangle = V(\boldsymbol{e}) \tag{7.6.104}$$

が言える。一方、定義 (7.6.101) から $V(\boldsymbol{e}) \geq 0$ である。

C の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ とし、対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ とする。定理 7.47 (1291 ページ) より固有ベクトルは全て実ベクトルに、また、正規直交基底をなすように取れる。固有値は全て実数かつゼロ以上なので、大きい方から順番に並べて $\lambda_1 > \lambda_2 \ldots \geq 0$ としておこう（λ_1 は縮退していないと仮定した)。任意の単位ベクトル $\boldsymbol{e}$ は、

$$\boldsymbol{e} = \sum_{i=1}^{d} c_i \, \boldsymbol{v}_i \tag{7.6.105}$$

と展開でき、また、展開係数 $c_i = \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{e} \rangle$ は $\sum_{i=1}^{d} (c_i)^2 = 1$ を満たす。(7.6.105) を (7.6.102) の最後の表式に代入すれば、

$$\begin{aligned} V(\boldsymbol{e}) &= \left\langle \sum_{i=1}^{d} c_i \, \boldsymbol{v}_i, \mathsf{C} \sum_{j=1}^{d} c_j \, \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{d} c_i \, \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{d} c_j \lambda_j \, \boldsymbol{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{d} (c_i)^2 \lambda_i \end{aligned} \tag{7.6.106}$$

が得られる。明らかに、$V(\boldsymbol{e})$ の最大値は λ_1 であり、それが達成されるのは $\boldsymbol{e} = \boldsymbol{v}_1$ のときである。つまり、主成分は最大固有値に対応する規格化された固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ とデータの内積 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{x}^{(n)} \rangle$ で与えられる。さらに、第 2 主成分を $\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{x}^{(n)} \rangle$ とすれば、各々の $\boldsymbol{x}^{(n)}$ を二つの特徴量で表現できる。

7.6.5　ユニタリー行列、直交行列の対角化

この節ではユニタリー行列と直交行列の対角化について見ておこう。直交行列はユニタリー行列の特別な場合だから、ユニタリー行列を扱かう。

固有値についての基本的な結果から始める。λ を U の固有値、$\boldsymbol{v}$ を対応する固有ベクトルとする。つまり、$\mathsf{U}\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$ である。この式の両辺の自分自身との内積をとれば、$\langle \mathsf{U}\boldsymbol{v}, \mathsf{U}\boldsymbol{v} \rangle = \langle \lambda\boldsymbol{v}, \lambda\boldsymbol{v} \rangle$ である。内積の基本性質 (7.2.58) とユニタリー性 $U^\dagger = U^{-1}$ より、左辺は $\langle \mathsf{U}^\dagger\mathsf{U}\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ に等しい。一方、ベクトルの定数倍の内積についての (7.1.22), (7.1.23) より、右辺は

$\langle \lambda \boldsymbol{v}, \lambda \boldsymbol{v} \rangle = |\lambda|^2 \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle$ に等しい。これらを比較すれば、$|\lambda|^2 = 1$ が得られ、以下が示された。

定理 7.48 (ユニタリー行列の固有値)**.** ユニタリー行列の固有値は絶対値が *1* の複素数である。

また、異なった固有値に対応する固有ベクトルが互いに直交することもいえる（これは下の定理 7.50 の帰結だが、定理を使わなくても簡単に証明できる）。

問 7.6.5.a　λ, μ を U の異なった二つの固有値とし、$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ をそれぞれに対応する固有ベクトルとする。$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = 0$ となることを示せ。

定理 7.48 と問題 7.6.5.a の結果から、固有値に縮退のない場合に限ればユニタリー行列が別のユニタリー行列で対角化できることが証明される（7.6.3 節での議論を思い出そう）。縮退も許した場合の対角化可能性を示すにはシューア分解（1255 ページの定理 7.39）を用いるのが便利だ。ここでは、せっかくなので、ユニタ

リー行列に限らない一般的な対角化可能性の定理を述べよう。

$\mathsf{AA}^\dagger = \mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ すなわち $[\mathsf{A}, \mathsf{A}^\dagger] = 0$ を満たす行列 A を**正規行列** (normal matrix) という。エルミート行列は明らかに正規行列である。また、ユニタリー行列 U も $\mathsf{UU}^\dagger = \mathsf{U}^\dagger\mathsf{U} = \mathsf{I}$ を満たすので正規である。以下の定理が示すように、行列が正規であることがユニタリー行列で対角化できるための必要十分条件である。

定理 7.49 (正規行列の対角化)**.** A が正規行列なら $\Lambda = \mathsf{V}^\dagger\mathsf{AV}$ が対角行列になるようなユニタリー行列 V が必ず存在する。逆に、ユニタリー行列 V と対角行列 Λ によって $\Lambda = \mathsf{V}^\dagger\mathsf{AV}$ と対角化できる行列 A は正規行列である。

証明：後半は簡単。対角化できることから $\mathsf{A} = \mathsf{V}\Lambda\mathsf{V}^\dagger$ である。$\mathsf{A}^\dagger = \mathsf{V}\Lambda^\dagger\mathsf{V}^\dagger$ に注意すれば、$\mathsf{AA}^\dagger = \mathsf{V}\Lambda\Lambda^\dagger\mathsf{V}^\dagger$ および $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A} = \mathsf{V}\Lambda^\dagger\Lambda\mathsf{V}^\dagger$ がわかる。対角行列は明らかに $\Lambda\Lambda^\dagger = \Lambda^\dagger\Lambda$ を満たすので A は正規行列である。

前半を示そう。シューア分解（1255 ページの定理 7.39）より、$\mathsf{B} = \mathsf{V}^\dagger \mathsf{A}\mathsf{V}$ が上三角行列になるユニタリー行列 V がある。$\mathsf{B}^\dagger = \mathsf{V}^\dagger \mathsf{A}^\dagger \mathsf{V}$ だから、$\mathsf{B}\mathsf{B}^\dagger = \mathsf{V}^\dagger \mathsf{A}\mathsf{A}^\dagger \mathsf{V}$ および $\mathsf{B}^\dagger \mathsf{B} = \mathsf{V}^\dagger \mathsf{A}^\dagger \mathsf{A}\mathsf{V}$ である。A が正規行列だから $\mathsf{B}\mathsf{B}^\dagger = \mathsf{B}^\dagger \mathsf{B}$ がいえる。つまり B も正規行列である。以下、上三角な正規行列は必ず対角行列であることを示す。$\mathsf{B} = (b_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と成分表示する。$i > j$ ならば $b_{i,j} = 0$ に注意すると

$$(\mathsf{B}^\dagger \mathsf{B})_{1,1} = \sum_{i=1}^{d} (\mathsf{B}^\dagger)_{1,i} (\mathsf{B})_{i,1} = \sum_{i=1}^{d} (b_{i,1})^* \, b_{i,1} = \sum_{i=1}^{d} |b_{i,1}|^2 = \tag{7.6.107}$$

となる。一方、$(\mathsf{B}\mathsf{B}^\dagger)_{1,1} = \sum_{j=1}^{d} |b_{1,j}|^2$ だから、これらが等しいことから全ての $j \geq 2$ について $b_{1,j} = 0$ が言える。こうして、B の第 1 行と第 1 列でゼロでないのは $b_{1,1}$ だけとわかった。B から第 1 行と第 1 列を取り去った $(d-1)$ 次の行列 $\tilde{\mathsf{B}}$ はやはり上三角な正規行列である。同じ議論をくり返せば B が対角行列であることが示される。∎

定理 7.49 の前半をユニタリー行列に適用すれば以下が得られる。

定理 7.50 (ユニタリー行列の対角化)**.** U を d 次のユニタリー行列とする。U の固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ はすべて $|\lambda_i| = 1$ を満たし、対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ を正規直交基底になるようにとることができる。ユニタリー行列 $\mathsf{V} = (\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d)$ により、U を

$$\mathsf{V}^\dagger \mathsf{U} \mathsf{V} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} \tag{7.6.108}$$

と対角化できる。

この結果を使えばエルミート行列の (7.6.62) と全く同様に、ユニタリー行列のスペクトル分解

$$\mathsf{U} = \sum_{j=1}^{d} \lambda_j \mathsf{P}_j = \sum_{j=1}^{d} e^{i\theta_j} \mathsf{P}_j \tag{7.6.109}$$

が得られる。最後の表式では $|\lambda_j| = 1$ に注意して $\theta_j \in \mathbb{R}$ を使って $\lambda_j = e^{i\theta_j}$ と書いた。

直交行列はユニタリー行列の特別な場合だから、上の定理 7.50 は直交行列にそのままあてはまり、スペクトル分解 (7.6.109) もそのまま成り立つ。ここで、行列の成分が実数でも、固有値は一般には実数とは限らないことを忘れてはいけない (±1 以外の固有値は実数ではない)。1274 ページの問 7.6.2.b が重要な例なので、まだ解いていなければ、解いておこう。

7.6.6 エルミート行列の固有値と固有ベクトルの性質

ここでは、エルミート行列の固有値と固有ベクトルについて、少し進んだ結果を紹介する。初学者は簡単に眺める程度でよいだろうが、いずれ、量子力学を本格的に学ぶとき、ここにまとめた知識が大いに役に立つだろう。

■二つのエルミート行列の同時対角化　A, B を d 次のエルミート行列とする。1283 ページの定理 7.46 により、これらの行列は実数の固有値をもち、固有ベクトルを正規直交基底をなすように選ぶことができる。そして、固有ベクトルを並べてつくったユニタリー行列により、(7.6.60) のように対角化することができる。

ただし、一般には、対角化のためのユニタリー行列は、A, B について、別々に用意する必要がある。もし、一つのユニタリー行列 U を使って、二つの行列を、

$$\begin{aligned}
\mathsf{U}^\dagger\mathsf{A}\mathsf{U} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}, \\
\mathsf{U}^\dagger\mathsf{B}\mathsf{U} &= \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_d \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.6.110}$$

のように対角化できるなら、A と B は**同時対角化可能**

(simultaneously diagonalizable) であるという[*80]。

エルミート行列が同時対角化できるかどうかは、次の定理のように、二つの行列が交換するかどうかで、完全に決まることがわかっている。この定理は、量子力学を学んでいくときには、本質的に重要になってくる。

定理 7.51 (エルミート行列の同時対角化)**.** 二つのエルミート行列 A, B が同時対角化できるための必要十分条件は、$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = 0$ が成り立つことである。

もちろん、$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = \mathsf{AB} - \mathsf{BA}$ は (7.2.33) で定義した交換子である。「$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = 0$ が成り立つ」という条件は、「A と B が交換する」と言いかえてもよい。

証明：まず、A, B が同時対角化できると仮定して、二つの行列が交換することを示そう。つまり、(7.6.110)

*80 「同時」というと、本当に「せーの」で一緒に対角化するようなイメージがあるので、この用語はそれほど適切だとは思わない。要は、一つのユニタリー行列で対角化できるかどうかということである。

が仮定だ。1075 ページの定理 7.14 と逆行列の一意性（1215 ページの定理 7.31）により、$\mathsf{UU}^\dagger = \mathsf{I}$ なので、(7.6.110) より

$$
\begin{aligned}
\mathsf{AB} &= \mathsf{UU}^\dagger\mathsf{AUU}^\dagger\mathsf{BUU}^\dagger \\
&= \mathsf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \rho_d \end{pmatrix}\mathsf{U}^\dagger \\
&= \mathsf{U}\begin{pmatrix} \lambda_1\rho_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2\rho_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d\rho_d \end{pmatrix}\mathsf{U}^\dagger \qquad (7.6.111)
\end{aligned}
$$

となる。BA から出発して同じ変形をしても、明らかに同じ結果が得られるから、$\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ であること、つまり $[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = 0$ が示された。

次に、$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = 0$ を仮定して、A, B が同時対角化できることを示そう。A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ とし、対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ を正規直交基底をなす

ように選ぶ。正規直交基底で任意のベクトルを展開できるので、

$$\mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \boldsymbol{v}_i \tag{7.6.112}$$

と書ける。この式の両辺に左から A をかけて、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ を使うと、

$$\mathsf{AB}\boldsymbol{v}_1 = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{d} \beta_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i \tag{7.6.113}$$

となる。次に、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \boldsymbol{v}_1$ という関係に左から B をかけて、(7.6.112) の展開を使うと、

$$\mathsf{BA}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1 \sum_{i=1}^{d} \beta_i \boldsymbol{v}_i \tag{7.6.114}$$

となる。$\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ だから、(7.6.113) と (7.6.114) は等しい。差をとれば、

$$\sum_{i=1}^{d} \beta_i (\lambda_i - \lambda_1) \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0} \tag{7.6.115}$$

となる。

今、A の固有値 λ_1 が縮退していないとしよう。すると、$i \neq 1$ については、$(\lambda_i - \lambda_1) \neq 0$ であり、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が線形独立だから、(7.6.115) が成り立つためには、$i \neq 1$ について $\beta_i = 0$ でなくてはならない。よって、(7.6.112) から $\mathsf{B}\boldsymbol{v}_1 = \beta_1 \boldsymbol{v}_1$ となり、$\boldsymbol{v}_1$ が B の固有ベクトルであることがわかる。A の固有値がすべて縮退しない場合は、同じ議論をくり返すことで、$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ が B の固有ベクトルであると言える。よって、ユニタリー行列 $\mathsf{U} = (\boldsymbol{v}_1 \ \boldsymbol{v}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{v}_d)$ によって、A と B を同時対角化できる。

縮退がある場合を扱うため、A の固有値 λ_1 が n 重に縮退しているとしよう。固有値の番号を適当に付け替えて、$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ としてよい。先ほどと同じ論法で、(7.6.115) から、$i > n$ について $\beta_i = 0$ が言える。同じ議論をくり返し、$j = 1, \ldots, n$ について、

$$\mathsf{B}\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} \boldsymbol{v}_i \tag{7.6.116}$$

と書けることがわかる ((7.6.112) と違って、和が n までになっていることに注意。上で β_i と書いたものは、$\beta_{i,1}$ に相当する)。正規直交性を使えば、$\beta_{i,j} = \langle \boldsymbol{v}_i, \mathsf{B}\boldsymbol{v}_j \rangle$ であり、B がエルミートだから、$\beta_{i,j} = (\beta_{j,i})^*$ が成り立つ。よって、$\tilde{\mathsf{B}} = (\beta_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}$ は n 次のエルミート行列とみなすことができる。よって、固有値と固有ベクトルが存在し、$k = 1, \ldots, n$ について、$\sum_{j=1}^n \beta_{i,j}\, u_j^{(k)} = \rho_k\, u_i^{(k)}$ が成り立つ。ただし、固有ベクトルは $\sum_{i=1}^n (u_i^{(k)})^*\, u_i^{(k')} = \delta_{k,k'}$ が成り立つように選ぶ。ここで、$k = 1, \ldots, n$ について、d 次元のベクトルを $\boldsymbol{u}_k = \sum_{j=1}^n u_j^{(k)} \boldsymbol{v}_j$ によって定義する。$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n$ だったから、これらは、すべて A の固有ベクトルである。また、B を作用させ、(7.6.116) を使うと、

$$\begin{aligned}
\mathsf{B}\boldsymbol{u}_k &= \sum_{j=1}^n u_j^{(k)} \mathsf{B}\boldsymbol{v}_j = \sum_{i,j=1}^n u_j^{(k)} \beta_{i,j} \boldsymbol{v}_i \\
&= \sum_{i=1}^n \rho_k u_i^{(k)} \boldsymbol{v}_i = \rho_k \boldsymbol{u}_k \qquad (7.6.117)
\end{aligned}$$

となり、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ は B の固有ベクトルであることがわかる。

同様の手続きをくり返せば、最終的に、A と B の共通の固有ベクトルになっている正規直交系をつくることができる。よって、縮退のない場合と同様、ふたつの行列は同時対角化できる。▮

問 7.6.6.a

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 0 \\ 8 & 10 & 8i \\ 0 & -8i & 2 \end{pmatrix} \tag{7.6.118}$$

とする。A の固有値と固有ベクトルを求めよ。$[\mathsf{A}, \mathsf{B}]$ を計算せよ。以上の結果を利用して、B の固有値と固有ベクトルを求めよ。

■変分原理　一般に、行列の固有値を求めたり、(大ざっぱにでも) 評価したりするのは、むずかしいことである。エルミート行列の場合は、固有値のうち最大のものと最小のものを、**変分原理** (variational principle)

という考え方で特徴づけることができる。変分原理も、量子力学への応用ではきわめて重要である。

A を任意のエルミート行列とし、その固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ とする。対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_d$ は、正規直交基底をなすようにとる。d 個の固有値の内で、最大のものと最小のものを、それぞれ、$\lambda_{\max}$ および $\lambda_{\min}$ と書こう。

$\boldsymbol{v}$ を任意のゼロでないベクトルとする。固有ベクトルで展開し、$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ と書いておこう。$\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \mathsf{A}\boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \lambda_i \boldsymbol{v}_i$ だから、正規直交性より、

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{d} \alpha_i \boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^{d} \alpha_j \lambda_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^{d} (\alpha_i)^* \alpha_j \lambda_j \langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \left|\alpha_i\right|^2\end{aligned}$$

となる。ここで、$|\alpha_i|^2 \geq 0$ だから、$\lambda_{\min}$ の定義から、

$$\geq \lambda_{\min} \sum_{i=1}^{d} \left|\alpha_i\right|^2 = \lambda_{\min} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle \qquad (7.6.119)$$

が成り立つ。つまり、任意のゼロでない $\boldsymbol{v}$ について、

$$\lambda_{\min} \leq \frac{\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \tag{7.6.120}$$

が言えたことになる。これは、$\lambda_{\min}$ が正確に求められなくても、その厳密な上界なら、簡単な計算だけで求められることを意味している。実用的にも重要な結果である。もちろん、まったく同様にして、最大固有値について、

$$\lambda_{\max} \geq \frac{\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \tag{7.6.121}$$

という不等式を示すこともできる。

当然だが、(7.6.120) の右辺で、$\boldsymbol{v}$ をたまたま $\lambda_{\min}$ に対応する固有ベクトルにとれば、右辺は $\lambda_{\min}$ と等しくなる。これによって、最小固有値についての変分原理の等式

$$\lambda_{\min} = \min_{\substack{\boldsymbol{v} \\ (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})}} \frac{\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \tag{7.6.122}$$

が示された。右辺の記号は、$\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ という条件を満たす範囲で、$\boldsymbol{v}$ を色々に動かして、最小値を探すことを意

味している。明らかに、最小値を実現する $\boldsymbol{v}$ は、固有値 $\lambda_{\min}$ に対応する固有ベクトルになる（証明は簡単）。

まったく同様に、最大値を探すことで、最大固有値についての変分原理の等式

$$\lambda_{\max} = \max_{\substack{\boldsymbol{v} \\ (\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0})}} \frac{\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \tag{7.6.123}$$

も得られる。ここでも、最大値を実現する $\boldsymbol{v}$ は、固有値 $\lambda_{\max}$ に対応する固有ベクトルになる。

■非負行列　変分原理との関連で、非負行列という便利な概念をみておこう。

エルミート行列 A が、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について $\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle \geq 0$ を満たすとする。このとき、A は**非負行列** (nonnegative matrix) あるいは、**正の半定符号行列** (positive semidefinite matrix) であるといい、$\mathsf{A} \geq 0$

と書く[*81]。また、エルミート行列 A, B が $\mathsf{A}-\mathsf{B}\geq 0$ を満たすとき、$\mathsf{A}\geq\mathsf{B}$ と書く。

A を非負行列とする。最小固有値についての変分原理 (7.6.122) の右辺はかならず 0 以上だから、直ちに次のことがいえる。

系 7.52 (非負行列の固有値)**.** 非負行列 A の固有値は、すべて非負（つまり、*0* 以上）である。

そういう意味で、非負行列という呼び方は、もっともだ。

非負行列 A を (7.6.62) のようにスペクトル分解しよう。$\lambda_j\geq 0$ なので、

$$\sqrt{\mathsf{A}}=\sum_{j=1}^{d}\sqrt{\lambda_j}\,\mathsf{P}_j \tag{7.6.124}$$

という行列を定義できる。$\sqrt{\mathsf{A}}$ も非負行列であり（記

[*81] 半正定値行列、非負定値行列とも呼ぶ。全ての成分が非負の行列を非負行列と呼ぶ流儀もある（7.7.1 節、7.7.2 節を参照）。これは、まったく別の概念なので、注意がいる。

号から明らかだが）A の平方根と呼ばれる。実際、$(\sqrt{\mathsf{A}})^2 = \mathsf{A}$ であることは定義から明らかである。

A, B を非負行列、α, β を非負の実数とする。任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について、

$$\langle \boldsymbol{v}, (\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B})\boldsymbol{v}\rangle = \alpha\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v}\rangle + \beta\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{B}\boldsymbol{v}\rangle \geq 0 \tag{7.6.125}$$

だから、行列 $\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}$ も非負である。以上の導出は自明だが、「行列 A と B の固有値がすべて 0 以上のとき、行列 $\alpha\mathsf{A} + \beta\mathsf{B}$ の固有値もすべて 0 以上である」ことを示せという問題として出題され、変分原理を使わずにこれに答えようと思うと、きわめて難しいということを認識してほしい。

また、C を任意の正方行列とすると、

$$\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{C}^\dagger\mathsf{C}\boldsymbol{v}\rangle = \langle \mathsf{C}\boldsymbol{v}, \mathsf{C}\boldsymbol{v}\rangle = |\mathsf{C}\boldsymbol{v}|^2 \geq 0 \tag{7.6.126}$$

が成り立つから、行列 $\mathsf{C}^\dagger\mathsf{C}$ は非負である。もちろん行列 $\mathsf{C}\,\mathsf{C}^\dagger$ も非負だが、実は、二つの行列 $\mathsf{C}^\dagger\mathsf{C}$ と $\mathsf{C}\,\mathsf{C}^\dagger$ の固有値は完全に一致することが知られている。7.6.7 節を見よ。

■ミニマックス原理　A, B を d 次のエルミート行列とする。A の固有値を、小さい方から順に $a_1, \ldots, a_d$ と並べる（つまり、$a_i \leq a_{i+1}$ が成り立つ）。同様に、B の固有値も、小さい方から $b_1, \ldots, b_d$ と並べる。すると、以下の定理が成立する。

定理 7.53 (エルミート行列の大小関係は、固有値の大小関係を意味する)**.** A $\geq$ B ならば、すべての $i = 1, \ldots, d$ について $a_i \geq b_i$ が成り立つ。

式面（しきづら）を見ると、いかにも当たり前に成り立ちそうな関係だが、実際に証明することを思うと、実は、まったく当たり前ではない。二つの行列 A, B が同時対角化可能なら、簡単に固有値の大小を比較できるが、一般には、そういうことは許されないからだ。

実は、定理 7.53 は、量子力学の応用でも強力な役割を果たす割には、物理の人たちには、あまり知られていない。証明の要になるのは、以下で説明する、**ミニマックス原理** (minimax principle) と呼ばれる、変分

原理の「上位バージョン」である。

$1 \leq n \leq d$ を満たす整数 n を固定する。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を、$\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ を満たすベクトルの集まりとする。$n = d$ ならば、正規直交基底だが、$n < d$ では個数が足りないから「正規直交基底もどき」である。A を任意のエルミート行列として、

$$E_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) := \max_{\substack{\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C} \\ \sum_{j=1}^n |\alpha_j|^2 = 1}} \left\langle \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j, \mathsf{A} \sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \tag{7.6.127}$$

という量を定義しよう。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の線形結合で作れる単位ベクトル $\sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{v}_j$ を色々と試して、A を「はさんだ」値をなるべく大きくしようということだ。

ここで、(7.6.127) 右辺の最大値が本当に存在するのかが気になる読者もいるだろう。実際、これは証明を要することなので、以下に最大値の存在証明も書いて

おく[*82]。ただし、普通に物理を学ぶ人はそこまでの厳密さにこだわる必要はないので、以下の存在証明は読み飛ばして一向にかまわない。

(7.6.127) 右辺の最大値が存在することの証明：複素数 α_j を実部と虚部に分けて $\alpha_j = x_{2j-1} + i\,x_{2j}$ と書く。上では $\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2 = 1$ を満たす n 個の複素数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を考えているが、これは、$\sum_{j=1}^{2n} (x_j)^2 = 1$ を満たす $2n$ 個の実数 $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ を考えることと同じ。

6.2.4 節で議論した高次元の極座標を使えば、このような制約を満たす $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ を $2n-1$ 個の角度座標 $\theta_{2n}, \theta_{2n-1}, \ldots, \theta_3, \varphi$ で表すことができる。さらに、最大化されるべき量 $\left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j, \mathsf{A} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle$ は（ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は固定されているから）これら $2n-1$ 個の角度座標の関数とみることができる。この関数は明らかに連続である。

[*82] 「コンパクト集合上の連続関数は最大値・最小値をもつ」という定理を理解している人には、最大値の存在は自明である。

やや技巧的だが、角度変数 φ が動く範囲を本来の $[0, 2\pi)$ から閉区間 $[0, 2\pi]$ に広げておく。もちろん、これでも最大化されるべき量はきちんと定まるし、連続性も成り立つ。すると、多変数の連続関数の最大値と最小値についての 271 ページの定理 2.31 により問題の最大値が存在することがいえる。∎

上と同様に、A の固有値を、小さい方から順に $a_1, \ldots, a_d$ と並べておくと、次の重要な性質が成り立つ。

補題 7.54 (ミニマックス原理)**.** $n = 1, \ldots, d$ について、

$$a_n = \min_{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n} E_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \tag{7.6.128}$$

が成り立つ。ただし、右辺では $\langle \boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \rangle = \delta_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ を満たす n 個のベクトルを色々に動かして、最小値を取る（最小値の存在も証明される）。

$n = 1$ のときは、$E_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{v}_1) = \langle \boldsymbol{v}_1, \mathsf{A}\boldsymbol{v}_1 \rangle$ なので、

(7.6.128) は変分原理 (7.6.122) そのものである。ミニマックス原理は、変分原理の拡張であるといっていいだろう。最小化 (minimize) すべき量が、別の量を最大化 (maximize) することで定義されているという、きわめて面白い形をした表式である。

ミニマックス原理の証明は後回しにして、これを使えば、定理 7.53 が証明できることを見ておこう。証明は驚くほど簡潔だが、実に巧妙で味わい深い。時間をかけて咀嚼(そしゃく)してほしい。

補題 7.54 を使った定理 7.53 の証明：$\mathsf{A} \geq \mathsf{B}$ だから、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について $\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle \geq \langle \boldsymbol{v}, \mathsf{B}\boldsymbol{v} \rangle$ が成り立つ。よって、任意の $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ について、

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j, \mathsf{A} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \geq \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j, \mathsf{B} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j \right\rangle \tag{7.6.129}$$

である。$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を動かして両辺をそれぞれ最大化しても、もちろん、大小関係は逆転しないから、任意

の $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して、

$$E_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \geq E_{\mathsf{B}}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n) \tag{7.6.130}$$

が成り立つ。$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を動かして両辺をそれぞれ最小化しても、もちろん、大小関係は逆転せず、(7.6.128) から $a_n \geq b_n$ を得る。∎

最後に、ミニマックス原理を証明する。少し抽象的な証明を短くまとめるので、余力のあるときに読んでいただきたい。

補題 7.54 の証明：A の $a_1, \ldots, a_d$ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を正規直交系をなすように選ぶ。ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を $\boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{d} \xi_j^{(i)} \boldsymbol{u}_i$ と展開できる。よって、$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{v}_j = \sum_{i=1}^{d} (\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(i)} \alpha_j) \boldsymbol{u}_i$ となる。ここで、$i = 1, 2, \ldots, n-1$ について $\sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(i)} \alpha_j = 0$ が成り立つように、$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 = 1$ を満たす $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を選ぶことができる（n 次元のベクトルの問題と考える。$i = 1, \ldots, n-1$ について、$\boldsymbol{\xi}^{(i)} = ((\xi_1^{(i)})^*, \ldots, (\xi_n^{(i)})^*)$ というベクトルを考え、こ

れら $n-1$ 個のベクトルすべてと直交するような n 次元単位ベクトル $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ を選べばよい（気になる読者は、このようなベクトルが存在することも証明せよ））。このような $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ を選ぶと、適当な $\gamma_n,\ldots,\gamma_d$ によって、

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\boldsymbol{v}_j=\sum_{i=n}^{d}\gamma_i\boldsymbol{u}_i \tag{7.6.131}$$

と書けることになる。両辺の絶対値の二乗を見比べれば $\sum_{j=1}^{n}|\alpha_j|^2=\sum_{i=n}^{d}|\gamma_j|^2$ であり、$\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|^2=1$ という仮定から $\sum_{i=n}^{d}|\gamma_j|^2=1$ である。よって、(7.6.131) より、

$$\left\langle\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\boldsymbol{v}_j,\mathsf{A}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\boldsymbol{v}_j\right\rangle=\sum_{i=n}^{d}|\gamma_i|^2\,a_i\geq a_n \tag{7.6.132}$$

が成り立つ。こうして、任意のベクトル $\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ について $E_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n)\geq a_n$ が示された。一方、$\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を固有ベクトル $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_n$ に選べば、

$E_{\mathsf{A}}(\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n) = a_n$ となるから、(7.6.128)（と最小値の存在）が示された。∎

7.6.7　行列の分解定理

さらに進んだ話題として、一般の正方行列についての強力な分解定理を二つ紹介しよう。これらの定理を利用するチャンスは当分はないだろうが、どちらも自然で美しい結果で証明も簡潔なので、興味を持った読者は目を通すといいだろう。

(3.2.116) のように、任意の複素数 z は極形式 $z = r\,e^{i\theta}$ に書ける。ここで $r = |z| > 0$ であり、また（もちろん）$|e^{i\theta}| = 1$ である。次の定理は任意の行列がこれと類似の**極分解** (polar decomposition) の形に書けることを示している。

定理 7.55 (行列の極分解)**.** 任意の $d \times d$ 行列 A は、ユ

ニタリー行列 W と非負の行列 C を用いて、

$$\mathsf{A} = \mathsf{WC} \tag{7.6.133}$$

と書ける。もし A が実行列なら W は直交行列に取ることができる。

行列の**特異値分解** (singular value decomposition) 定理は、必ずしも対角化可能ではない任意の行列が「ほとんど対角化可能」であることを示している。ここでは正方行列についての結果だけを述べるが、正方ではない行列についてもほとんど同様の特異値分解が成立し、いろいろな場面に応用されている。

定理 7.56 (行列の特異値分解)**.** 任意の $d \times d$ 行列 A は、ユニタリー行列 U, V と全ての成分が非負の対角行列 D を用いて、

$$\mathsf{A} = \mathsf{UDV}^{\dagger} \tag{7.6.134}$$

と書ける。もし A が実行列なら U と V は直交行列に取ることができる。

特異値分解 (7.6.134) の両辺に、左から $\mathsf{U}^\dagger$ をかけ、右から V をかければ、

$$\mathsf{U}^\dagger \mathsf{A} \mathsf{V} = \mathsf{D} \tag{7.6.135}$$

となる。これは、一般の対角化可能な行列についての (7.6.28) や、エルミート行列についての (7.6.60) と似た形をした関係である。

これから定理 7.55 と 7.56 をまとめて証明する。証明の内容を先取りして、上に現れた行列 U, V, D について少し詳しく見ておこう。

鍵になるのは行列 A から作った $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ という行列である。(7.6.126) で見たように $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ は非負行列である。$\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ とすると、系 7.52 により $\lambda_j \geq 0$ である。すると、以下の証明から、対角行列 D は

$$\mathsf{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \sqrt{\lambda_N} \end{pmatrix} \tag{7.6.136}$$

と書けることがわかる。

特異値分解 (7.6.134) に登場する二つのユニタリー行列を

$$\begin{aligned} \mathsf{U} &= (\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_d), \\ \mathsf{V} &= (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_d) \end{aligned} \tag{7.6.137}$$

と書こう。1075 ページの定理 7.14 により、$\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1,\ldots,d}$ と $\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,d}$ はいずれも正規直交基底である。実は、これらの正規直交基底は、それぞれ、二つの非負行列 $\mathsf{A}\,\mathsf{A}^\dagger$ と $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ の固有ベクトルからできている、つまり、$j = 1, \ldots, d$ について、

$$\mathsf{A}\,\mathsf{A}^\dagger\,\boldsymbol{u}_j = \lambda_j \boldsymbol{u}_j, \quad \mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}\,\boldsymbol{v}_j = \lambda_j \boldsymbol{v}_j \tag{7.6.138}$$

であることが証明からわかる。さらに、ここから $\mathsf{A}\,\mathsf{A}^\dagger$ と $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ の固有値が完全に一致することも読み取れる。

<u>定理 7.55 と 7.56 の証明</u>：$\{\boldsymbol{v}_j\}_{j=1,\ldots,d}$ を $\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ の固有ベクトルからなる正規直交基底とする。対応する固有値 $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ は、$j = 1, \ldots, M$ については $\lambda_j > 0$ で

あり、$j = M+1, \ldots, d$ については $\lambda_j = 0$ となるように並んでいるとする（M は d に等しくても構わない）。

$j = 1, \ldots, M$ について、$\boldsymbol{u}_j = (\lambda_j)^{-1/2}\mathsf{A}\boldsymbol{v}_j$ と定義する。すると、任意の $j, k = 1, \ldots, M$ について $\langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k \rangle = (\lambda_j\lambda_k)^{-1/2}\langle \mathsf{A}\boldsymbol{v}_j, \mathsf{A}\boldsymbol{v}_k \rangle = (\lambda_j\lambda_k)^{-1/2}\langle \boldsymbol{v}_j, \mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}\boldsymbol{v}_k \rangle = \delta_{j,k}$ とわかる。さらに、単位ベクトル $\boldsymbol{u}_{M+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_d$ を適切に選べば、$\{\boldsymbol{u}_j\}_{j=1,\ldots,d}$ を正規直交基底にすることができる[*83]。

$\mathsf{W} = \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{u}_j\boldsymbol{v}_j^\dagger$ としよう。$\mathsf{W}^\dagger = \sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{v}_j\boldsymbol{u}_j^\dagger$ より、$\mathsf{W}^\dagger\mathsf{W} = \sum_{j,k=1}^{d} \boldsymbol{v}_j\boldsymbol{u}_j^\dagger\boldsymbol{u}_k\boldsymbol{v}_k^\dagger = \mathsf{I}$ とわかるので、W はユニタリー行列である。ここで、$\boldsymbol{u}_j^\dagger\boldsymbol{u}_k = \langle \boldsymbol{u}_j, \boldsymbol{u}_k \rangle =$

[*83] このような操作は線形代数では標準的なのだが、この本ではまだ登場していなかった。まず、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M$ の全てと直交する単位ベクトルを一つ任意に選び、それを $\boldsymbol{u}_{M+1}$ と呼ぶ。次に、$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_M, \boldsymbol{u}_{M+1}$ の全てと直交する単位ベクトルを一つ任意に選び、それを $\boldsymbol{u}_{M+2}$ と呼ぶ。このプロセスを続けると必ず $\boldsymbol{u}_d$ までを選ぶことができる（途中で選べなくなると仮定すると次元が d であることと矛盾する）。

$\delta_{j,k}$ と完全性 $\sum_{j=1}^{d} \boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^\dagger = \mathsf{I}$ を用いた[*84]。さらに、$\mathsf{C} = \sum_{k=1}^{M} \sqrt{\lambda_k} \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^\dagger$ とする。任意のベクトル $\boldsymbol{w}$ について、$\langle \boldsymbol{w}, \mathsf{C}\boldsymbol{w} \rangle = \boldsymbol{w}^\dagger \mathsf{C} \boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{M} \sqrt{\lambda_k} \boldsymbol{w}^\dagger \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^\dagger \boldsymbol{w} = \sum_{k=1}^{M} \sqrt{\lambda_k} \, |\boldsymbol{v}_k^\dagger \boldsymbol{w}|^2 \geq 0$ となるので C は非負行列である。定義を素直に使えば、W と C の積は、

$$\begin{aligned} \mathsf{WC} &= \sum_{j,k=1}^{d} \sqrt{\lambda_k} \, \boldsymbol{u}_j \boldsymbol{v}_j^\dagger \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^\dagger \\ &= \sum_{k=1}^{M} \sqrt{\lambda_k} \, \boldsymbol{u}_k \boldsymbol{v}_k^\dagger = \sum_{k=1}^{M} \mathsf{A} \boldsymbol{v}_k \boldsymbol{v}_k^\dagger \end{aligned} \tag{7.6.139}$$

と書き直せる。

ここで、$j = M+1, \ldots, d$ としよう。$\lambda_j = 0$ だから $\mathsf{A}^\dagger \mathsf{A} \boldsymbol{v}_j = 0$ である。よって、$0 = \langle \boldsymbol{v}_j, \mathsf{A}^\dagger \mathsf{A} \boldsymbol{v}_j \rangle = \langle \mathsf{A}\boldsymbol{v}_j, \mathsf{A}\boldsymbol{v}_j \rangle = |\mathsf{A}\boldsymbol{v}_j|^2$ となるので、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_j = 0$ であることがわかる。よって (7.6.139) の右辺に $\mathsf{A}\boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^\dagger = 0$ を自

[*84] 成分表示での完全性 (7.1.47) をクロネッカー積 (7.2.66) で書いた。

由に足すことができるので、

$$\mathsf{WC} = \sum_{j=1}^{d} \mathsf{A}\boldsymbol{v}_j \boldsymbol{v}_j^\dagger = \mathsf{A} \tag{7.6.140}$$

が得られる。最後は完全性を使った。こうして極分解 (7.6.133) が示された。

ここで、行列 D を (7.6.136)、V を (7.6.137) 第二式により定義すれば、上の C は $\mathsf{C} = \mathsf{VDV}^\dagger$ と書ける。すると、上で示した極分解 (7.6.133) より、

$$\mathsf{A} = \mathsf{WC} = \mathsf{WVDV}^\dagger = \mathsf{UDV}^\dagger \tag{7.6.141}$$

となる。ここでユニタリー行列 $\mathsf{U} = \mathsf{WV}$ を定義した。特異値分解 (7.6.134) が導かれた。また、$\mathsf{W}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{u}_j$ に注意すれば、この U が (7.6.137) 第一式のように書けることもわかる。

最後に、特異値分解 (7.6.134) より、

$$\begin{aligned} \mathsf{A}\,\mathsf{A}^\dagger\mathsf{U} &= \mathsf{UDV}^\dagger\,\mathsf{VDU}^\dagger\,\mathsf{U} \\ &= \mathsf{UD}^2 = (\lambda_1\boldsymbol{u}_1, \ldots, \lambda_d\boldsymbol{u}_d) \end{aligned} \tag{7.6.142}$$

となることに注意する。これは、(7.6.138) 第一式そのものである。こうして、$\mathsf{A}^\dagger\mathsf{A}$ と $\mathsf{A}\,\mathsf{A}^\dagger$ の固有値が完全に一致することも示された。

実行列についての命題を示すには、実対称行列の固有ベクトルはすべて実に取れることに注意すればいい。
∎

7.7　実行列の固有値と固有ベクトル

この節では実行列（全ての成分が実数の行列）に議論を限定して、固有値と固有ベクトルに関連するいくつかの進んだ話題を述べる。主題となるのは、ペロン・フロベニウスの定理とよばれる、深く重要な定理だ。行列の非対角成分についてのいくつかの条件から、固有値と固有ベクトルについての強い情報が得られるのは驚異的だ。また、この定理は、確率過程や量子力学など、物理にも深く関わっている。ただし、これはあくまで「上級」の内容なので、線形代数を初めて学ぶ

読者は、この節は（将来の楽しみにとっておくことにして）読まなくていい。

7.7.1 節で、ペロン・フロベニウスの定理を (物理への応用にもっとも便利な形で）紹介し証明する。7.7.2 節では重要な応用として、マルコフ連鎖と確率行列を定式化し、強力な収束定理を述べる。最後に、以上の数学的な結果の応用例として、7.7.3 節で「ページランク」というネット検索で用いられるアルゴリズムについて解説する。

7.7.1　実行列に関するペロン・フロベニウスの定理

この節では、正の非対角成分が十分にたくさんある実行列に関する**ペロン**[*85]**・フロベニウス**[*86]**の定理**について述べよう。ペロン・フロベニウスの定理は、7.7.2 節

[*85] Oskar Perron (1880–1975) ドイツの数学者。

[*86] Ferdinand Georg Frobenius (1849–1917) ドイツの数学者。群論や数論にも功績がある。

でみるように確率過程の理論においては本質的な役割を果たすし、量子力学でも（うまく使える場合は）基底状態についての強い情報を与えてくれる。ここでは、これら双方への応用にとって見通しのよい形で定理を述べ、証明する。

なお、実対称行列に限定すれば、ペロン・フロベニウスの定理は一般の場合よりもずっと簡単に証明できる。一般の場合の証明はかなり込み入っているので、量子力学への応用だけに関心のある読者は、このすぐ下の (iii) 連結性の説明まで読んだところで、1363 ページの実対称行列についての定理 7.59 にとんでもいいだろう。

$d \times d$ 行列 A について、以下の三つの性質を考える。

(i) **実行列であること：**任意の $i, j = 1, \ldots, d$ について $(\mathsf{A})_{i,j} \in \mathbb{R}$ となる。

(ii) **非対角要素の非負性：**$i \neq j$ なる任意の $i, j = 1, \ldots, d$ について $(\mathsf{A})_{i,j} \geq 0$ となる。

(iii) **連結性：**A のゼロでない非対角成分を介して、$1, 2, \ldots, d$ がすべて「つながっている[*87]」。正確にいうと、$i \neq j$ なる任意の $i, j = 1, \ldots, d$ に対して、ある正整数 n があり、$n+1$ 個の数 $i_0, i_1, \ldots, i_n$ がとれて、$i_0 = j$, $i_n = i$ であり、$(\mathsf{A})_{i_\ell, i_{\ell-1}} \neq 0$ が $\ell = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つ（以下の例を見よ）。

(iii) の連結性は分かりにくいので、具体例を見ておこう。たとえば、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 3 \\ 8 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \tag{7.7.1}$$

は (i), (ii), (iii) をすべて満たす行列の例である。(i), (ii) は自明だ。非対角成分に注目すると、$(\mathsf{A})_{2,1}$, $(\mathsf{A})_{3,2}$, $(\mathsf{A})_{4,3}$, $(\mathsf{A})_{1,4}$ がゼロでない。一般に $i \neq j$ について

*87 「つながっている」という性質なので、そのまま連結性と呼んだが、これは標準の用語ではない。行列の理論では、この性質は既約性 (irreducibility) と呼ばれる。

$(\mathsf{A})_{i,j} \neq 0$ ならば、i 成分から j 成分への直接の「つながり」があるとみなし、その事実を $j \to i$ と表そう。今の場合、$1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$ という直接の「つながり」がある（よって、(iii) で、たとえば、$i = 4$, $j = 3$ としたときは、$n = 1$ および $i_0 = 3$, $i_1 = 4$ で条件が満たされる）。たとえば、$3 \to 2$ という直接の「つながり」はないが、$3 \to 4 \to 1 \to 2$ というルートでこれらも間接的に「つながっている」（よって、(iii) で $i = 2$, $j = 3$ としたときは、$n = 3$ および $i_0 = 3$, $i_1 = 4$, $i_2 = 1$, $i_3 = 2$ とすればよい）。図 7.5 を見よ。

一方、

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ 3 & 7 & 6 \end{pmatrix} \tag{7.7.2}$$

は (i), (ii) を満たすが (iii) は満たさない。非対角成分 $(\mathsf{B})_{1,2}$, $(\mathsf{B})_{2,1}$, $(\mathsf{B})_{3,1}$, $(\mathsf{B})_{3,2}$ がゼロではないが、これでは、図 7.5 からわかるように、たとえば 3 から 1 への「つながり」((iii) で $i = 3$, $j = 1$ とすることに相当）は作れない。

図 7.5　(7.7.1) の行列 A 、(7.7.2) の行列 B から決まる「つながり」の様子。行列の i, j 成分がゼロでないとき $j \to i$ という「つながり」が作られるとする。行列 A については、任意の二つの数が何本かの矢印を介してつながっているが、B については、たとえば、3 から 1 へのつながりは作れない。

まず、もっとも一般的な設定での定理を述べよう。

定理 7.57 (ペロン・フロベニウスの定理)**.** $d \times d$ 行列 A が上の *(i), (ii), (iii)* を満たすとする。A の固有値のうちの一つは実数であり、対応する固有ベクトルは全ての成分が正の実数になるようにとれる。これらの固有値、固有ベクトルを、ペロン・フロベニウス固有値、ペロン・フロベニウス固有ベクトルと呼び、$\lambda_{\mathrm{pf}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ と書く。ペロン・フロベニウス固有値 λ_{pf} は縮退していない。さらに、λ_{pf} 以外の任意の固有値 λ は $\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_{\mathrm{pf}}$ を満たす。

前節までは、ほとんどの場合、複素数を成分にもつ行列に一般にあてはまる性質について議論してきた。ペロン・フロベニウスの定理は、あくまで実数を成分とする行列にのみ適用できるという点で、これまでの結果と比べて異色である。また、多くの場合、行列 A と、任意の正則行列 P とその逆行列で A を「はさん

で」作った $\mathsf{P}^{-1}\mathsf{AP}$ は共通の性質をもっていた。しかし、行列 A がペロン・フロベニウスの定理の条件 (i), (ii), (iii) を満たしていても、$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{AP}$ は一般にはこれらを満たさないことにも注意しよう（たとえば、$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{AP}$ が対角行列なら (iii) は成り立ちようもない)。

以下、ペロン・フロベニウスの定理の証明に用いるため、この節だけで用いる実ベクトルについての特殊な不等号を導入しておこう[*88]。証明を読み飛ばすつもりの読者は、この部分は飛ばして、先に進んでほしい。実ベクトル（全ての成分が実数のベクトル）$\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1,\ldots,d}$ と成分表示しておく。全ての $i = 1, \ldots, d$ について $v_i > 0$ のとき、$\boldsymbol{v} \gneqq \boldsymbol{0}$ と書く。全ての $i = 1, \ldots, d$ について $v_i \geq 0$ のとき、$\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$ と書く。さらに、$\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$ であり、かつ $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ のとき、$\boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}$ と書く（つまり、$\boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}$ とは、全ての i について $v_i \geq 0$ であり、少なくとも一つの i について $v_i > 0$ と

[*88] ここでの記号は私の趣味で決めたものでスタンダードではない。

いうこと)。これらの不等号の「強さ」の関係は

$$\boldsymbol{v} \gneqq \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{v} \geq \mathbf{0} \tag{7.7.3}$$

となる（左に行くほど不等式は厳しい)。

<u>定理 7.57 の証明（最後の命題を除く)</u>：この証明はかなり長く、また技巧的な部分もあるので、いくつかの段階に分けて述べよう[*89]。

準備：正の実数 ε について $\tilde{\mathsf{A}} := (\mathsf{I} + \varepsilon\mathsf{A})^{d-1}$ とする。ε を十分に小さく取れば、任意の $i, j = 1, \ldots, d$ について $(\tilde{\mathsf{A}})_{i,j} > 0$ となる (全ての i について $1 + \varepsilon(\mathsf{A})_{i,i} > 0$ となるように ε を選び、行列の積の定義と (iii) に注意すれば、これが示される)。以下では ε をこのような値に固定する。$\tilde{\mathsf{A}}$ と A が可換であること、$\boldsymbol{v} > 0$ である任意の $\boldsymbol{v}$ に対して $\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v} \gneqq \mathbf{0}$ となることがこれからの証明で役に立つ。

[*89] この証明の多くの部分は井汲景太さんに教えていただいた。ただし、本書の記述に誤りがあれば、それは全て私の責任である。

ペロン・フロベニウス固有値と固有ベクトルの存在： $\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$, $|\boldsymbol{v}| = 1$ を満たすベクトル $\boldsymbol{v}$ の集合を S とする。$\boldsymbol{v} \in S$ を一つ固定したとき、

$$\mathsf{A}\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0} \tag{7.7.4}$$

が成り立つような実数 λ の中で最大のものを $\lambda(\boldsymbol{v})$ と呼ぶ[*90]。ここで、S 上の全ての $\boldsymbol{v}$ についての $\lambda(\boldsymbol{v})$ の最大値を考え、

$$\lambda_{\mathrm{pf}} := \max_{\boldsymbol{v} \in S} \lambda(\boldsymbol{v}) \tag{7.7.5}$$

と定義する。最大値を実現するベクトルを $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ とする。

[*90] A, $\boldsymbol{v}$ を固定しているので、(7.7.4) は単に $c_i \geq \lambda v_i$ という λ の一次不等式を $i = 1, \ldots, d$ について連立させたものに過ぎない（ここで $c_i = \sum_{j=1}^{d} (\mathsf{A})_{i,j} v_j$ も固定されている）。$v_i > 0$ となる i からは、$\lambda \leq c_i / v_i$ という (7.7.4) の必要条件が得られる。$v_i = 0$ となる i については、$c_i = \sum_{j\ (j \neq i)} (\mathsf{A})_{i,j} v_j \geq 0$ なので、$c_i \geq \lambda v_i = 0$ は任意の λ について成立する（つまり新たな条件は出てこない）。よって最大値 $\lambda(\boldsymbol{v})$ は、$v_i > 0$ となる i の中での c_i / v_i の最小値である。もし全ての i について $v_i > 0$ なら、$\lambda(\boldsymbol{v}) = \min_i c_i / v_i$ である。この場合、$\lambda(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v}$ について連続である。

最大値が存在することは自明ではないし、証明は少し難しい。最大値の存在証明は後回しにして話を先に進めよう。

まず、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ であること、つまり λ_{pf} が A の固有値であり $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ が対応する固有ベクトルであることを示そう。背理法を使う。作り方から、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} - \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \geq \mathbf{0}$ は明らかなので、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} - \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} > \mathbf{0}$ と仮定しよう。まず、$\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \neq \mathbf{0}$ に注意して、$\tilde{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{pf}} = \tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}/|\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}|$ と定義すると、$\tilde{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{pf}} > \mathbf{0}$ かつ $|\tilde{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{pf}}| = 1$ が成り立つ。「準備」で述べた $\tilde{\mathsf{A}}$ の性質と背理法の仮定から、$\tilde{\mathsf{A}}(\mathsf{A}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} - \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}) \gneqq \mathbf{0}$ であり、ここから $\mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} - \lambda_{\mathrm{pf}}\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \gneqq \mathbf{0}$ となる。つまり、$\mathsf{A}\tilde{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{pf}} - \lambda_{\mathrm{pf}}\tilde{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{pf}} \gneqq \mathbf{0}$ がいえた。ところが、これは ((7.7.4) を「余裕で」満たしているから）$\lambda(\tilde{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{pf}}) > \lambda_{\mathrm{pf}}$ を意味し、λ_{pf} の定義と矛盾。$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ がいえた。

$\mathsf{A}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ より直ちに $\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = (1+\varepsilon\lambda_{\mathrm{pf}})^{d-1}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ である。作り方からして $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} > \mathbf{0}$ だから $\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \gneqq \mathbf{0}$ とわかる。右辺と見比べれば $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ の成分はいずれもゼロ

ではないことがわかり、$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \gneqq \mathbf{0}$（つまり $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ の全ての成分が正であること）がいえる。

最大値の存在：(7.7.5) で最大値が存在することを示そう（この部分は少し難しい）。$\lambda(\boldsymbol{v})$ が S 上の連続関数なら最大値の存在は簡単にわかるのだが、一般に $\lambda(\boldsymbol{v})$ は連続とは限らない[*91]。そこで、$\boldsymbol{v} > \mathbf{0}$ に対して $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) = \tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}/|\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}|$ という（ベクトルに値をとる）関数を定義する。定義から $|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})| = 1$ であり、また「準備」で述べたことから $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \gneqq \mathbf{0}$ である。$\tilde{S} = \{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in S\}$ とする。明らかに $\tilde{S} \subset S$ となっている。ここで、$\boldsymbol{v} \in S$ に対して $\lambda(\boldsymbol{v}) \leq \lambda(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))$ が成り立つことに注意しよう（(7.7.4)、つまり、$\mathsf{A}\boldsymbol{v} - \lambda\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}$ が成り立つなら $\tilde{\mathsf{A}}$ をかけて $\mathsf{A}\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v} - \lambda\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v} \geq \mathbf{0}$ なので $\mathsf{A}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) - \lambda\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}) \geq \mathbf{0}$ である）。ここから、もし $\lambda(\boldsymbol{v})$ が $\tilde{S}$ 上で最大値を取るなら、それは S 上での最大値にもなっていることがわかる。よって、$\tilde{S}$ 上での $\lambda(\boldsymbol{v})$ の最大値の存在を示せばいい。これは、S 上で $\tilde{\lambda}(\boldsymbol{v}) = \lambda(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))$ の最大値が存

[*91] $\boldsymbol{v}$ の成分のいずれかがゼロになるところで不連続になりうる。

在することと同じである。

$\lambda(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v} \in S$ について連続とは限らないと述べたが、$\tilde{\lambda}(\boldsymbol{v})$ は $\boldsymbol{v} \in S$ について連続である（$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v})$ は明らかに連続であり、$\tilde{S}$ のベクトルはすべての成分が正なので $\tilde{S}$ 上では $\lambda(\boldsymbol{v})$ も連続である。脚注 *90 を見よ）。連続性から、$\boldsymbol{v} \in S$ について $\tilde{\lambda}(\boldsymbol{v})$ が最大値を取ることが以下のようにわかる[*92]。6.2.4 節で議論した d 次元空間の極座標を使えば、任意の $\boldsymbol{v} \in S$ を $d-1$ 個の角度変数 $\theta_d, \ldots, \theta_3, \varphi$ で表現できる（ただし、各成分が非負になるように角度の範囲を $\theta_i, \varphi \in [0, \pi/2]$ とする）。$\tilde{\lambda}(\boldsymbol{v})$ はこれらの角度変数の関数としても連続なので、多変数の連続関数の最大値と最小値についての 271 ページの定理 2.31 により最大値が存在することがいえる。このようにベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ が存在することまでも厳密に保証してくれるという意味で、定理 2.31 はき

[*92] コンパクト集合上の連続関数は最大値を持つという（この本では紹介していない）定理を理解していれば、S がコンパクトなので、これは明らか。

わめて強力なのだ。

転置行列 A^{t} のペロン・フロベニウス固有値と固有ベクトル：もう一つ、後の証明のための準備をしておこう。A の転置行列 A^{t} も定理 7.57 の条件を満たす。そのペロン・フロベニウス固有値と固有ベクトルを $\lambda'_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}$ と書く。これまでに証明した事実から $\boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}} \gneqq \boldsymbol{0}$ とわかる。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \gneqq \boldsymbol{0}$ なので $\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle > 0$ である。すると、

$$\begin{aligned} \lambda'_{\mathrm{PF}} \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle &= \langle \mathsf{A}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \mathsf{A} \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle \\ &= \lambda_{\mathrm{pf}} \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle \end{aligned} \tag{7.7.6}$$

であることから、結局、$\lambda'_{\mathrm{PF}} = \lambda_{\mathrm{pf}}$ とわかる。

縮退がないこと (1)：まず、固有値 λ_{pf} に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ の定数倍しかないことを示す。これは難しくない。

背理法を用いる。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ とは線形独立な $\boldsymbol{v}$ があって $\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \lambda_{\mathrm{pf}} \boldsymbol{v}$ とする。実行列の実数の固有値に対応する固有ベクトルだから、$\boldsymbol{v}$ の成分は全て実数にとれる（1268 ページの定理 7.43）。実数 α について、$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} + \alpha \boldsymbol{v}$ とする。仮定より、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}' = \lambda_{\mathrm{pf}} \boldsymbol{v}'$ であ

る。$|\alpha|$ が十分に小さければ明らかに $\boldsymbol{v}' \gneqq \mathbf{0}$ である。ここで、$|\alpha|$ を徐々に大きくしていくと（正か負かいずれかの）ある α において、$\boldsymbol{v}' > \mathbf{0}$ のまま、$\boldsymbol{v}'$ の少なくとも一つの成分がちょうど 0 になるようにできる（一気に $\boldsymbol{v}' = \mathbf{0}$ とならないのは、$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ と $\boldsymbol{v}$ の線形独立性の帰結）。ところが、「ペロン・フロベニウス固有値と固有ベクトルの存在」の最後の部分の議論をそのまま繰り返せば、$\mathsf{A}\boldsymbol{v}' = \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}'$ から $\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{v}' = (1+\varepsilon\lambda_{\mathrm{pf}})^{d-1}\boldsymbol{v}'$ が言え、そこから $\boldsymbol{v}' \gneqq \mathbf{0}$ が結論される。これは矛盾。

縮退がないこと (2)：λ_{pf} に対応する固有ベクトルが $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ しかないことがわかったが、これだけでは固有値 λ_{pf} に縮退がないとは言えない。(7.6.54) の例のように固有値が縮退していても固有ベクトルは一つしかないということがありうるからだ。これから縮退がないことを証明するが、この部分は複雑なので興味のある読者だけが読めばいいだろう[*93]。縮退があると仮定し

[*93] ジョルダン標準形についての知識があれば証明は容易である。齋藤正彦『線形代数入門』（東京大学出版会）を見よ。

て矛盾を導く。

$\boldsymbol{v}^{(d)} = \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ とし、線型独立な d 個のベクトル $\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)}$ をとる（例えば、(7.1.18) のベクトルを使って $j = 1, \ldots, d-1$ について $\boldsymbol{v}^{(j)} = \boldsymbol{e}^{(j)}$ とすればよい)。行列 $\mathsf{P} = (\boldsymbol{v}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{v}^{(d)})$ は（1166 ページの定理 7.23 により）正則なので P^{-1} が存在する。行ベクトル $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}, \ldots, \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d)}$ を用いて、$\mathsf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)} \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d)} \end{pmatrix}$ と書いておこう。ここで、$\tilde{\boldsymbol{v}}^{(i)} \boldsymbol{v}^{(j)} = \delta_{i,j}$ が成り立つ（行ベクトルと列ベクトルの「自然な積」を（久しぶりに）使った)。$\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(d)} = \lambda_{\mathrm{pf}} \boldsymbol{v}^{(d)}$ より $\tilde{\boldsymbol{v}}^{(i)} \mathsf{A} \boldsymbol{v}^{(d)} = \lambda_{\mathrm{pf}}\, \delta_{i,d}$ となる

ことに注意すると、

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(1)} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(d-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d-1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(1)} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d-1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(d-1)} & 0 \\ \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(1)} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(d-1)} & \lambda_{\mathrm{pf}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathsf{B} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c} & \lambda_{\mathrm{pf}} \end{pmatrix} \tag{7.7.7}$$

とわかる。ここで、

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(1)} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{v}}^{(1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(d-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d-1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(1)} & \cdots & \tilde{\boldsymbol{v}}^{(d-1)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(d-1)} \end{pmatrix} \tag{7.7.8}$$

は $(d-1)\times(d-1)$ 行列であり、$\mathbf{0} = (0,\ldots,0)^{\mathrm{t}}$ と $\boldsymbol{c} = (\tilde{\boldsymbol{v}}^{(d)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(1)},\ldots,\tilde{\boldsymbol{v}}^{(d)}\mathsf{A}\boldsymbol{v}^{(d-1)})$ は $(d-1)$ 次元のベクトルである。

(7.7.7) の両辺から $\lambda\mathsf{I}$ を引くと、

$$\mathsf{P}^{-1}(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})\mathsf{P} = \begin{pmatrix} \mathsf{B}-\lambda\mathsf{I}' & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c} & \lambda_{\mathrm{pf}}-\lambda \end{pmatrix} \tag{7.7.9}$$

となる（$d-1$ 次元の単位行列を I' と書いた）。両辺のディターミナントを取れば（余因子展開より）、

$$\det[\mathsf{A}-\lambda\,\mathsf{I}] = \det[\mathsf{B}-\lambda\,\mathsf{I}']\,(\lambda_{\mathrm{pf}}-\lambda) \qquad (7.7.10)$$

が得られる。A の固有値 λ_{pf} が縮退しているということは、λ_{pf} が特性方程式 $\det[\mathsf{A}-\lambda\,\mathsf{I}]=0$ の重根（あるいは、それ以上の縮退度の根）であることを意味する。つまり、$\det[\mathsf{B}-\lambda_{\mathrm{pf}}\,\mathsf{I}']=0$ であり、λ_{pf} は B の固有値でもある。対応する固有ベクトルを $(z_1,\ldots,z_{d-1})^{\mathrm{t}}$ と書こう。λ_{pf} が実数なので z_j は全て実数に取れる。このとき、d 次元ベクトル $\boldsymbol{w}=\sum_{j=1}^{d-1} z_j\,\boldsymbol{v}^{(j)} = \mathsf{P}(z_1,\ldots,z_{d-1},0)^{\mathrm{t}}$ はゼロではなく（$\boldsymbol{v}^{(1)},\ldots,\boldsymbol{v}^{(d)}$ の選び方から）$\boldsymbol{v}^{(d)}=\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ と独立である。ここで、(7.7.7) より $\mathsf{AP}=\mathsf{P}\begin{pmatrix}\mathsf{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{c} & \lambda_{\mathrm{pf}}\end{pmatrix}$ である。$(z_1,\ldots,z_{d-1},0)^{\mathrm{t}}$ に

この等式を左から作用させれば、

$$\begin{aligned}\mathsf{A}\boldsymbol{w} &= \mathsf{P}\begin{pmatrix}\mathsf{B} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{c} & \lambda_{\mathrm{pf}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1\\ \vdots\\ z_{d-1}\\ 0\end{pmatrix} = \mathsf{P}\begin{pmatrix}\lambda_{\mathrm{pf}}\, z_1\\ \vdots\\ \lambda_{\mathrm{pf}}\, z_{d-1}\\ \nu\end{pmatrix}\\ &= \lambda_{\mathrm{pf}}\,\boldsymbol{w} + \nu\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \qquad (7.7.11)\end{aligned}$$

となる。ここで $\nu = \boldsymbol{c}\,(z_1, \ldots, z_{d-1})^{\mathrm{t}}$ とした（これも「自然な積」）。こうして得られた等式 $\mathsf{A}\boldsymbol{w} = \lambda_{\mathrm{pf}}\,\boldsymbol{w} + \nu\,\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ と上で準備した A^{t} のペロン・フロベニウス固有ベクトル $\boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}$ との内積を取れば、

$$\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \mathsf{A}\boldsymbol{w}\rangle = \lambda_{\mathrm{pf}}\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{w}\rangle + \nu\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}\rangle \qquad (7.7.12)$$

である。ところが左辺は $\langle \mathsf{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{w}\rangle = \lambda_{\mathrm{pf}}\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{w}\rangle$ と等しいので $\nu\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}\rangle = 0$ となる。前述のように $\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}\rangle \neq 0$ だから、$\nu = 0$ でなくてはならない。(7.7.11) より、$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ と独立な $\boldsymbol{w}$ について $\mathsf{A}\boldsymbol{w} = \lambda_{\mathrm{pf}}\,\boldsymbol{w}$ となるが、これは「縮退がないこと (1)」で示した命題と矛盾。

最後の命題：最後の $\mathrm{Re}\,\lambda < \lambda_{\mathrm{pf}}$ という不等式は定理 7.61 を示した後で証明する（もちろん、それまではこの結果はどこでも用いない）。∎

また、以下のような意味でのペロン・フロベニウスの定理の「逆」も成り立つ。

定理 7.58. 行列 A が定理 *7.57* の条件を満たすとする。$\boldsymbol{v} > 0$ となる A の固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ は、ペロン・フロベニウス固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$（の定数倍）に等しい。

証明：転置行列 A^{t} のペロン・フロベニウス固有ベクトルを $\boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}$ とする。対応する固有値が λ_{pf} であることは上の証明で見た。$\boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}} \gneqq \boldsymbol{0}$ と $\boldsymbol{v} > 0$ より $\langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v} \rangle \neq 0$ である。よって、$\mathsf{A}\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ とすると、

$$\lambda_{\mathrm{pf}} \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \mathsf{A}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle = \lambda \langle \boldsymbol{u}_{\mathrm{PF}}, \boldsymbol{v} \rangle \tag{7.7.13}$$

となり、$\lambda = \lambda_{\mathrm{pf}}$ とわかる。固有値 λ_{pf} が縮退しないことから、$\boldsymbol{v}$ は $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ の定数倍とわかる。∎

■実対称行列についてのペロン・フロベニウスの定理

7.6.4 節で見たように、一般の実対称行列 A の固有値はすべて実数である。これを踏まえると、実対称行列については、定理 7.57 は以下のようになる。

定理 7.59 (ペロン・フロベニウスの定理（実対称行列）)**.** A を $d \times d$ の実対称行列とする。A の全ての非対角成分が非負（任意の $i \neq j$ について $(\mathsf{A})_{i,j} \geq 0$）であり、また A は *1345* ページの *(iii)* の連結性の条件を満たすとする。このとき、A の固有値のうち最大のもの（最大固有値）$\lambda_{\max}$ は縮退していない。また、$\lambda_{\max}$ に対応する固有ベクトルは、すべての成分が正になるようにとれる。

<u>定理 7.57 を認めた定理 7.59 の証明</u>：A は明らかに定理 7.57 の条件を満たす。ここで、すべての固有値 λ が実数だから定理の最後の不等式は単に $\lambda < \lambda_{\mathrm{pf}}$ となる。つまり、ペロン・フロベニウス固有値 λ_{pf} が最大固有値 $\lambda_{\max}$ とわかる。∎

実対称行列については、固有ベクトルは実ベクトルにとれること、7.6.6 節で見た変分原理が成り立つことなどがわかっている。これらの強力な結果を用いると、定理 7.59 を、一般の場合よりもはるかに簡単に証明できる。量子力学への応用を考えるかぎり、実対称行列さえ扱えれば十分なので、この場合の証明を書いておこう。

<u>定理 7.59 の直接の証明</u>：以下の証明では、固有ベクトルはすべて実ベクトルに選ぶ。

(1) まず、A の固有ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1,\dots,d}$ が $\boldsymbol{u} > \mathbf{0}$ を満たすなら必然的に $\boldsymbol{u} \gneqq \mathbf{0}$ を満たすことを言う（実ベクトルの不等号については 1350 ページを見よ）。そこで、$\boldsymbol{u} > \mathbf{0}$ で、ある j について $u_j = 0$ と仮定する。固有値方程式 $\lambda u_j = \sum_{i=1}^{d} (\mathsf{A})_{j,i} u_i$ より $\sum_{i=1}^{d} (\mathsf{A})_{j,i} u_i = 0$ である。さらに、全ての i について $(\mathsf{A})_{j,i} u_i \geq 0$ だから、$(\mathsf{A})_{j,i} \neq 0$ を満たす i については $u_i = 0$ となる。こうして、u_j がゼロという仮定は j とつながっている i にも「感染」して、ゼロになる成分が

増えた。この手続きをくり返し、さらに連結性 (iii) に注意すると、けっきょく全ての i について $u_i = 0$ が言えるが、これは矛盾。

(2) 次に、$\lambda_{\max}$ に対応する任意の固有ベクトル $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1,\dots,d}$ は $\boldsymbol{v} \gneqq \boldsymbol{0}$ または $-\boldsymbol{v} \gneqq \boldsymbol{0}$ を満たすことを言う。(1) を踏まえれば、$\boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}$ または $-\boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}$ を言えば十分である。そこで、その否定、つまり、ある j, k があって $v_j > 0$, $v_k < 0$ となることを仮定して、矛盾を導こう。

ここで、$u_i = |v_i|$（ただし $i = 1, \dots, d$）によって新しいベクトル $\boldsymbol{u}$ を定義する。明らかに $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle$ であり、さらに $\ell \neq m$ なら $(\mathsf{A})_{\ell,m} \geq 0$ なので、

$$\begin{aligned} \langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle &= \sum_{\ell,m=1}^{d} v_\ell (\mathsf{A})_{\ell,m} v_m \leq \sum_{\ell,m=1}^{d} u_\ell (\mathsf{A})_{\ell,m} u_m \\ &= \langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{u} \rangle \end{aligned} \tag{7.7.14}$$

が言える。これを固有値・固有ベクトルの定義と組み

合わせれば、

$$\lambda_{\max} = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \mathsf{A}\boldsymbol{v} \rangle}{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle} \leq \frac{\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{u} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \tag{7.7.15}$$

が得られる。ところが、変分原理 (7.6.123) によれば、この最右辺は $\lambda_{\max}$ を超えられないから、$\lambda_{\max}$ に等しいことになる。すると、やはり変分原理から、$\boldsymbol{u}$ も固有値 $\lambda_{\max}$ に対応する A の固有ベクトルとわかる。定義から $\boldsymbol{u} \geq \boldsymbol{0}$ だったが、$\boldsymbol{u}$ が固有ベクトルであることから (1) が使えて、$\boldsymbol{u} \gneqq \boldsymbol{0}$ であることがわかる。

元に戻れば、これは全ての i について $v_i \neq 0$ を意味する。$v_j > 0$, $v_k < 0$ を思い出せば、$\boldsymbol{v}$ の成分には正のものと負のものがある（そして、ゼロはない）ことがわかる。よって、$(\mathsf{A})_{\ell,m} \neq 0$ であって v_ℓ と v_m の符号が異なるような ℓ, m の組み合わせが必ず存在する（ないとすると、連結性と矛盾）。このような ℓ, m については、$v_\ell(\mathsf{A})_{\ell,m}v_m < u_\ell(\mathsf{A})_{\ell,m}u_m$ だから、(7.7.14) の不等

号は真の不等号に置き換えられる。すると、(7.7.15) は

$$\lambda_{\max} < \frac{\langle \boldsymbol{u}, \mathsf{A}\boldsymbol{u} \rangle}{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle} \tag{7.7.16}$$

となるが、これは $\lambda_{\max}$ が最大固有値であることと矛盾する。

(3) 最後に、固有値 $\lambda_{\max}$ が縮退しないことを言う。これは簡単。もし縮退していれば、二つの直交する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ が取れる。(2) で見たことから、これらの固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_1 \gneqq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{v}_2 \gneqq \boldsymbol{0}$ を満たすように選べる。しかし、そのような $\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交していないので、矛盾。∎

定理 7.59 を $\mathsf{H} = -\mathsf{A}$ という行列について言い換えておくと、量子力学に応用できる次の命題が得られる[*94]。

[*94] 量子力学を知らない読者は（量子力学を知るまでは）気にしないでよい。

系 7.60 (量子力学のハミルトニアンについてのペロン・フロベニウスの定理)**.** H を $d \times d$ の実対称行列とする。H の全ての非対角成分が負またはゼロ（任意の $i \neq j$ について $(\mathsf{H})_{i,j} \leq 0$）であり、また H は *1345* ページの *(iii)* の連結性の条件を満たすとする。このとき、H の最小（ゼロに近いという意味ではなく、「マイナス無限大」にもっとも近いという意味）の固有値 E_{GS} は縮退しておらず、対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{GS}}$ は全ての成分が正になるようにとれる。

量子力学の言葉で言えば、ハミルトニアン（の行列表示）H の基底エネルギー E_{GS}（GS は ground state = 基底状態の頭文字）は縮退しないこと、つまり、基底状態がただ一つであることがいえた。さらに、基底状態の詳細はわからないが「各成分が正」という符号

についての強い情報も得られる[*95]。

もちろん、量子力学の現場で出会うハミルトニアン（の行列表示）がたまたま系 7.60 の条件を満たしているという可能性はそれほど高くないだろう。ただし、いくつかの重要な問題で、適切な表示をとって系 7.60 を適用することで、基底状態について本質的な結果が示されている。

■非負の成分をもつ実行列　非負の成分をもつ行列[*96]に限定すると、定理 7.57 よりも強い結果を示すことができる。これが、ペロン・フロベニウスの定理にとって「由緒正しい」設定である。

定理を述べる前に、定理 7.57 の条件 (iii) の連結性

[*95] 量子力学を学んだ読者は、一粒子のシュレディンガー方程式では、基底状態の波動関数に「節がない」ことを学んだ（あるいは経験的に知っている）だろう。上で見た「各成分が正」ということは「節がない」ことに対応している。

[*96] 「成分が非負」である行列を「非負行列」と呼ぶこともある。しかし、われわれは 7.6.6 節（1328 ページ）で別の意味で「非負行列」という言葉を定義した。

をより強くした条件を定めておこう。

(iii') **強い連結性：**正の整数 n があって、全ての $i, j = 1, \ldots, d$ について $(\mathsf{A}^n)_{i,j} > 0$ が成り立つ[*97]。

以前の連結性 (iii) が成り立たなければ、明らかに、強い (iii') は成り立ちようがない。よって、条件 (iii') が成り立てば、自動的に条件 (iii) が成り立つ。しかし、たとえば行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} \tag{7.7.17}$$

(ただし、$a \neq 0$) が、連結性 (iii) を満たすが強い連結性 (iii') は満たさない[*98]。つまり、条件 (iii') は条件 (iii) よりも真に強い条件である。

---

*97 「強い連結性」もここだけの用語。行列の理論では原始性 (primitivity) と呼ばれる。

*98 n が偶数なら $(\mathsf{A}^n)_{1,1} = (\mathsf{A}^n)_{2,2} = a^n$, $(\mathsf{A}^n)_{1,2} = (\mathsf{A}^n)_{2,1} = 0$, であり、$n$ が奇数なら $(\mathsf{A}^n)_{1,1} = (\mathsf{A}^n)_{2,2} = 0$, $(\mathsf{A}^n)_{1,2} = (\mathsf{A}^n)_{2,1} = a^n$ である。一つの整数 n で $(\mathsf{A}^n)_{i,j} > 0$ を満たすものはない。

条件 (iii') は、たとえば、条件 (iii) に加えて、全ての i について $(\mathsf{A})_{i,i} > 0$ であれば $n = d - 1$ として成立する（A^n の成分表示を考えればいい）。

定理 7.61 (ペロン・フロベニウスの定理（非負の成分をもつ行列）). A が定理 *7.57* の条件 *(i), (ii), (iii)* を満たし、さらに全ての i について $(\mathsf{A})_{i,i} \geq 0$ を満たすとする。定理 *7.57* の結果に加えて、A の任意の固有値 λ は $|\lambda| \leq \lambda_{\mathrm{pf}}$ を満たす。さらに、A が上の *(iii')* を満たすなら、λ_{pf} 以外の任意の固有値 λ は $|\lambda| < \lambda_{\mathrm{pf}}$ を満たす。

複素平面で A の固有値を描くと、全ての固有値が半径 λ_{pf} の円の内側に入るということだ。特に後半では、全ての固有値が円の真の内側に入っていることもいっている。これは強力な結果である。

簡単だが基本的な例をみておこう。$a \geq 0$, $b > 0$ と

して、

$$\mathsf{C} = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{pmatrix} \tag{7.7.18}$$

という行列を考える。これは定理 7.57 の条件 (i), (ii), (iii) を満たし、かつ成分が非負の行列である。固有値は簡単に計算できて、

$$\lambda_1 = a + b, \quad \lambda_2 = a + e^{2\pi i/3} b, \quad \lambda_3 = a + e^{-2\pi i/3} b \tag{7.7.19}$$

の三つとわかる。λ_1 がペロン・フロベニウス固有値であり、対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = (1, 1, 1)^{\mathrm{t}}$ ととれる。$a = 0$ のときは、定理 7.61 の後半の条件は成り立たないが、実際、固有値の絶対値は $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = b$ となっている。一方、$a > 0$ なら後半の条件も成立し、確かに、$|\lambda_1| = a + b$, $|\lambda_2| = |\lambda_3| = \sqrt{a^2 + b^2 - ab} < a + b$ となっている。

<u>定理 7.61 の証明</u>：$\mathsf{A} = (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と成分表示しておく。A の λ_{pf} 以外の任意の固有値 λ と対応する固

有ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_i)_{i=1,\ldots,d}$ をとる（λ, u_i は一般に複素数であることに注意）。便利のため $|\boldsymbol{u}| = 1$ とする。ここで、$\bar{\boldsymbol{u}} = (|u_i|)_{i=1,\ldots,d}$ という非負の成分をもった実ベクトルを定義する（やはり $|\bar{\boldsymbol{u}}| = 1$ である）。$\sum_{j=1}^{d} a_{i,j}u_j = \lambda u_i$ の両辺の絶対値をとれば、$\left|\sum_{j=1}^{d} a_{i,j}u_j\right| = |\lambda u_i| = |\lambda|\,|u_i|$ であり、さらに、三角不等式 (2.2.69) と $|a_{i,j}| = a_{i,j}$ より

$$\sum_{j=1}^{d} a_{i,j}|u_j| \geq \left|\sum_{j=1}^{d} a_{i,j}u_j\right| = |\lambda|\,|u_i| \tag{7.7.20}$$

となる。これは、$\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{u}} - |\lambda|\bar{\boldsymbol{u}} \geq \boldsymbol{0}$ と書き換えられる。主定理（定理 7.57）の証明を思い出すと、ここから $|\lambda| \leq \lambda(\bar{\boldsymbol{u}})$ がいえる。もちろん $\lambda(\bar{\boldsymbol{u}}) \leq \lambda_{\mathrm{pf}}$ だから $|\lambda| \leq \lambda_{\mathrm{pf}}$ がいえた。

後半を示そう。まず $(\lambda_{\mathrm{pf}})^n$ が A^n のペロン・

フロベニウス固有値であることに注意する[*99]。$\mathsf{A}^n = (\tilde{a}_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$ と成分表示しよう。上と同じ $\boldsymbol{u}$ について、$\mathsf{A}^n\boldsymbol{u} = \lambda^n\boldsymbol{u}$ を用いて上と同じようにすれば、$\left|\sum_{j=1}^d \tilde{a}_{i,j}u_j\right| = |\lambda|^n\,|u_i|$ が得られる。ここで、(7.7.20) と同様に三角不等式を使うのだが、全ての i,j について $\tilde{a}_{i,j} > 0$ であることから、不等号を $=$ のない真の不等号にすることができる。

より正確に言えば、「$|\alpha| = 1$ なる複素数 α があって全ての i について $u_i = \alpha\,|u_i|$ と書ける」のでない限りは、全ての i について、

$$\sum_{j=1}^d \tilde{a}_{i,j}|u_j| > \left|\sum_{j=1}^d \tilde{a}_{i,j}u_j\right| = |\lambda|^n\,|u_i| \qquad (7.7.21)$$

がいえる。つまり、$\mathsf{A}^n\bar{\boldsymbol{u}} - |\lambda|^n\bar{\boldsymbol{u}} \gneqq \boldsymbol{0}$ である。これは、A^n のペロン・フロベニウス固有値よりも、$|\lambda|^n$ が真

[*99] $\mathsf{A}^n\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = (\lambda_{\mathrm{pf}})^n\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ より $(\lambda_{\mathrm{pf}})^n$ は A^n の固有値。ここで、$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \gneqq \boldsymbol{0}$ だから定理 7.58 により $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ は A^n のペロン・フロベニウス固有ベクトルである。

に小さいことを意味している。前者は $(\lambda_{\mathrm{pf}})^n$ だから、$|\lambda| < \lambda_{\mathrm{pf}}$ となる。

後は全ての i について $u_i = \alpha\,|u_i|$ と書ける場合を扱えばいい。$\alpha = 1$ としてよいから、$\boldsymbol{u} \geq \mathbf{0}$ である。行列の成分もベクトルの成分も全て非負だから、明らかに固有値 λ は非負の実数。すでに $|\lambda| \leq \lambda_{\mathrm{pf}}$ はわかっており、仮定により $\lambda \neq \lambda_{\mathrm{pf}}$ なので、$\lambda < \lambda_{\mathrm{pf}}$ である。
∎

定理 7.61 が証明されたので、定理 7.57 の残っていた部分を示す。

<u>定理 7.57 の最後の不等式の証明</u>：定理 7.57 の条件を満たす A と十分に小さな正の ε により $\mathsf{B} = \mathsf{I} + \varepsilon\mathsf{A}$ とすると、B は定理 7.61 の後半の条件を満たす（この事実は定理 7.57 の証明の前半で用いた）。λ_{pf} を A のペロン・フロベニウス固有値、λ を A の任意の固有値とすると、これらは B のペロン・フロベニウス固有値

$1+\varepsilon\lambda_{\mathrm{pf}}$ とそれ以外の固有値 $1+\varepsilon\lambda$ に対応する[*100]。よって定理 7.61 から、$|1+\varepsilon\lambda| < 1+\varepsilon\lambda_{\mathrm{pf}}$ である。ところが、

$$\begin{aligned} |1+\varepsilon\lambda| &= \sqrt{(1+\varepsilon\operatorname{Re}\lambda)^2+(\varepsilon\operatorname{Im}\lambda)^2} \\ &\geq 1+\varepsilon\operatorname{Re}\lambda \end{aligned} \tag{7.7.22}$$

だから、上の不等式とあわせて、$\operatorname{Re}\lambda < \lambda_{\mathrm{pf}}$ が示される。∎

[*100] $1+\varepsilon\lambda_{\mathrm{pf}}$ がペロン・フロベニウス固有値であることは脚注 *99 と全く同様にして証明できる。

7.7.2　離散時間のマルコフ連鎖と定常分布

ペロン・フロベニウスの定理の重要な応用例として、**マルコフ**[*101]**連鎖** (Markov chain[*102]) という**確率過程** (stochastic process) の仲間について見ていこう[*103]。確率過程とは、物理的な系が、外部からランダムな影響を受け、確率的にゆらぎながら時間発展していく様子を記述するための数学的な枠組みである。ここでは、有限個の状態をとり、時間が「とびとび」に進む、有限

[*101] Andrei Andreyevich Markov (1856 - 1922) ロシアの数学者。マルコフ連鎖の研究がもっとも有名。

[*102] 「chain=鎖」と考えて「マルコフ鎖」と訳すと意味が分からない（そういう訳もあるけれど)。英語の chain には「鎖」という具体的な物以外に、「連なったもの、一連のもの」の意味もある（a chain of events で「一連の事件」)。たとえば「連鎖反応」も英語では chain reaction である。

[*103] マルコフ連鎖について学ぶためにこれを読んでいる読者は、線形代数についての一定の知識があるなら、一つ前の 7.7.1 節の最初（1344 ページ）に戻って読み始めれば完全に理解できるはずだ。

状態・離散時間のマルコフ連鎖について議論する。有限状態・連続時間のマルコフ連鎖については、行列の指数関数を定義したあと、7.8.3 節で扱う。この本では、無限状態のマルコフ連鎖は取り上げない[*104]。

この部分の内容は、当然ながら、確率についてのある程度の知識がないと面白くない。確率について知らない読者は飛ばしていただきたい（だが、確率過程やマルコフ連鎖についての知識は仮定しない。読みやすいコンパクトな入門になっていると期待する）。

■確率行列　われわれの考えている系が Ω 通りの異なった状態をとるとしよう。イメージを描く場合は、マスが Ω 個ある双六（すごろく）の盤のようなものを思うといい。コマは一つだとして、どのマスにコマがあるかで状態

[*104] 無限個の状態をもつ系のマルコフ連鎖もきちんと定式化され、研究されている。「物理系はすべて有限だから、物理をやるには有限状態マルコフ連鎖だけで十分だ」と考えてはいけない。十分に大きな系の理想化として無限に大きい系を考えることは、多くの場合、物理的にもきわめて有効だ。

が決まるとする。

各々の状態 j について、次の「時点」での系の状態をどのように決めるかについての確率的なルールが決まっているとしよう。各々のマスに定められたルールに従って[*105]、サイコロを振って（あるいは、クジを引いて）コマを動かすと思えばいい。このルールは、次の「時点」での状態が i になる確率を $T_{i,j}$ で表現される。$T_{i,j}$ は状態が j から i に移る確率なので、**遷移確率**または**推移確率** (transition probability) と呼ばれる。確率である以上、$0 \leq T_{i,j} \leq 1$ および、各々の j についての**規格化条件** (normalization condition)

$$\sum_{i=1}^{\Omega} T_{i,j} = 1 \tag{7.7.23}$$

を満たす。これらの制約を満たせば遷移確率 $T_{i,j}$ は

[*105] あるマスには、「確率 1/2 で前へ一つ進み、確率 1/4 で後ろに一つ下がり、確率 1/4 で動かない」と書いてあり、また別のマスには「確率 0.9 で後ろに三つ、確率 0.1 で前へ一つ」と書いてある、といった具合。

（考えている系のモデルとなるように）自由に選んでよい。

遷移確率を成分とする $\Omega \times \Omega$ 行列 $\mathsf{T} := (T_{i,j})_{i,j=1,\ldots,\Omega}$ を**確率行列** (stochastic matrix) と呼ぶ。任意の確率行列 T と任意の（Ω 個の成分をもつ）列ベクトル $\boldsymbol{v}$ について、

$$\sum_{i=1}^{\Omega}(\mathsf{T}\boldsymbol{v})_i = \sum_{i,j=1}^{\Omega} T_{i,j}(\boldsymbol{v})_j = \sum_{i=1}^{\Omega}(\boldsymbol{v})_i \tag{7.7.24}$$

が成り立つ（(7.7.23) を使った）。つまり、確率行列が任意のベクトルに作用するとき、ベクトルの全成分の和が変わらないのだ。これは、確率行列の基本的で重要な性質である。

全ての成分に 1 を並べた列ベクトルを

$$\boldsymbol{d}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.7.25}$$

と書こう（本節では、これからこの記号を用いる）。

(7.7.23) は $\sum_{i=1}^{\Omega}(\mathsf{T}^{\mathrm{t}})_{j,i}=1$ とも書けるから、

$$\mathsf{T}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{d}_0=\boldsymbol{d}_0 \tag{7.7.26}$$

を意味している。任意の確率行列 T について、$\boldsymbol{d}_0$ は T^{t} の固有ベクトルであり、対応する固有値は 1 なのである。転置行列の固有値についての 1251 ページの定理 7.36 より、次の重要な事実が示されたことになる。

定理 7.62 (確率行列の固有値)**.** *1* は任意の確率行列 T の固有値である。

問 7.7.2.a　確率行列 T の任意の固有値が $|\lambda|\leq 1$ を満たすことを示せ（これは少し難しい。1395 ページの定理 7.64 の証明を読んだあとで取り組むのがいい。さらにヒントがほしい場合は脚注をみよ[*106]）。

■マルコフ連鎖　ある時点で、系の状態が j である確率が p_j だとする（$j=1,2,\ldots,\Omega$）。確率なので、規格化

[*106] まず、任意の $\boldsymbol{v}$ について $\|\mathsf{T}\boldsymbol{v}\|_1\leq\|\boldsymbol{v}\|_1$ を示す。

条件 $0 \leq p_j \leq 1$ と $\sum_{j=1}^{\Omega} p_j = 1$ が成り立つ。全ての状態についての確率をずらりと並べた $(p_1, p_2, \ldots, p_\Omega)$ を確率分布と呼ぶ。以下では、確率分布を列ベクトル $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_\Omega)^{\mathrm{t}}$ とみなすことにしよう。

確率分布 $\boldsymbol{p}$ で記述される状況から、一回だけ遷移がおこったあと、系の状態が i である確率は、

$$p'_i = \sum_{j=1}^{\Omega} T_{i,j} p_j \tag{7.7.27}$$

で与えられる。この式の意味は明らかだろう。遷移の前に状態 j にいる確率が p_j で、j から i に遷移する確率が $T_{i,j}$ だから、「遷移の前に j で遷移の後に i」という確率は $T_{i,j} p_j$ である。ここでは、遷移の前の状態は問わず、遷移後に i にいる確率を考えているので、j について足しあげたのである。$\boldsymbol{p}' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_\Omega)^{\mathrm{t}}$ とすれば、(7.7.27) を

$$\boldsymbol{p}' = \mathsf{T}\boldsymbol{p} \tag{7.7.28}$$

とコンパクトに書くことができる。$T_{i,j}$ が非負だから、

明らかに $p'_i \geq 0$。さらに、$\sum_{j=1}^{\Omega} p_j = 1$ と (7.7.24) から $\sum_{i=1}^{\Omega} p'_i = 1$ なので、$(p'_1, \ldots, p'_\Omega)$ は確率分布の条件を満たしている。

これでマルコフ連鎖を定義する用意ができた。

出発点での系の状態が確率分布 $\boldsymbol{p}^{(0)} = (p_1^{(0)}, p_2^{(0)}, \ldots, p_\Omega^{(0)})$ で記述されるとする。たとえば、決まった状態 j_0 から出発するなら、$p_j^{(0)} = \delta_{j,j_0}$ とすればよい。

離散時間のマルコフ連鎖の世界では、「時刻」は $n = 0, 1, 2, \ldots$ という非負の整数値をとる。時刻 1 での確率分布は、(7.7.28) の「時間発展」の規則から、$\boldsymbol{p}^{(1)} = \mathsf{T}\boldsymbol{p}^{(0)}$ であり、以下、$\boldsymbol{p}^{(2)} = \mathsf{T}\boldsymbol{p}^{(1)}$, $\boldsymbol{p}^{(3)} = \mathsf{T}\boldsymbol{p}^{(2)}$ のように、次々と先の時刻での確率分布が決定される。このように、確率分布が時間とともに確率的に変化していく様子を記述するのが（有限状態・離散時間の）**マルコフ連鎖**である。

より一般に、時刻 N での系の確率分布を $\boldsymbol{p}^{(N)}$ とす

る。マルコフ連鎖の時間発展の基本方程式は

$$\boldsymbol{p}^{(N)} = \mathsf{T}\boldsymbol{p}^{(N-1)} \tag{7.7.29}$$

である。同じ関係をくり返し用いれば、$\boldsymbol{p}^{(N)} = \mathsf{T}\boldsymbol{p}^{(N-1)} = \mathsf{T}^2\boldsymbol{p}^{(N-2)} = \cdots$ とできるから、けっきょく、

$$\boldsymbol{p}^{(N)} = \mathsf{T}^N\boldsymbol{p}^{(0)} \tag{7.7.30}$$

となる。つまり、ある時刻での確率分布を知ることに限定すれば、マルコフ連鎖の問題は確率行列 T のべき乗を求めることに尽きるのである。

もちろん、マルコフ連鎖からは、ある時刻での確率分布以上の情報も得られる。たとえば、初期分布が $\boldsymbol{p}^{(0)}$ であり、マルコフ連鎖によって時刻 n まで時間発展したとき、それぞれの時刻における系の状態が、$j_0, j_1, \ldots, j_N$ である確率は、

$$p(j_0, j_1, \ldots, j_N) = T_{j_N, j_{N-1}} T_{j_{N-1}, j_{N-2}} \cdots T_{j_1, j_0} p_{j_0}^{(0)} \tag{7.7.31}$$

に等しい。このような「経路の確率」あるいは「歴史の確率」を用いれば、系の確率的な時間発展について、

図 7.6　二状態のマルコフ連鎖の遷移確率。黒丸が二つの状態を表し、矢印が遷移を表す。

より深く議論することができる。これはきわめて魅力的なテーマなのだが、残念ながら、これよりも先に踏み込む余裕はない。

■基本的な例　もっとも基本的な例をみよう（図 7.6）。$\Omega = 2$、つまり、系の状態は二つとする。

状態 1 から 2 への遷移確率を $T_{2,1} = \alpha$、状態 2 から 1 への遷移確率を $T_{1,2} = \beta$ とする。$0 < \alpha < 1$ かつ $0 < \beta < 1$ としよう。確率行列の要請 (7.7.23) から残りの成分は $T_{1,1} = 1 - \alpha$, $T_{2,2} = 1 - \beta$ と決まるので、行列は

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \tag{7.7.32}$$

である。各々の列の要素の和が 1 になっている。

仮に、初期状態として系が完全に 1 にいる $\boldsymbol{p}^{(0)} = (1,0)^{\mathrm{t}}$ を選べば、時間が経ったときの確率分布を、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{p}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{p}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1-2\alpha+\alpha^2+\alpha\beta \\ 2\alpha-\alpha^2-\alpha\beta \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{7.7.33}$$

のように、次々と求めることができる。

もちろん、(7.7.32) は 2×2 行列だから、一般の $\boldsymbol{p}^{(n)}$ を求めるのも難しくはない。その際、計算を以下のように進めると見通しがよい。T の固有値は、1 と $1-(\alpha+\beta)$ であり、対応する固有ベクトルは、それぞれ、

$$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = \begin{pmatrix} \beta/(\alpha+\beta) \\ \alpha/(\alpha+\beta) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{7.7.34}$$

ととれる。特に一つ目の $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ は確率としての規格化 $(\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})})_1 + (\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})})_2 = 1$ が成り立つように選んだ。初期条

件の確率分布を $\boldsymbol{p}^{(0)} = (p, 1-p)^{\mathrm{t}}$ と書けば、

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} + \left(p - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\boldsymbol{q} \tag{7.7.35}$$

となることが（簡単な計算で）わかる。よって、マルコフ連鎖の基本の関係 (7.7.30) から

$$\begin{aligned}\boldsymbol{p}^{(N)} &= \mathsf{T}^N\boldsymbol{p}^{(0)} = \mathsf{T}^N\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} + \left(p - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\mathsf{T}^N\boldsymbol{q} \\ &= \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} + \{1-(\alpha+\beta)\}^N\left(p - \frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\boldsymbol{q}\end{aligned} \tag{7.7.36}$$

を得る。$|1-(\alpha+\beta)| < 1$ だから、ここから、任意の初期状態 $\boldsymbol{p}^{(0)}$ について、

$$\lim_{N\nearrow\infty}\boldsymbol{p}^{(N)} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \tag{7.7.37}$$

がいえる。どんな状況から出発しようと、図 7.6 のルールに従って時間発展していけば、長い時間の後には系の確率分布は $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ に落ち着くということである。このような「落ち着く先」の確率分布を、マルコフ連鎖の**定**

常分布 (stationary distribution) という（$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ の s は stationary の頭文字だった)。

■マルコフ連鎖の収束定理　唯一の定常分布への収束は、上の例だけでなく、連結性についての仮定を満たす一般のマルコフ連鎖でみられるふるまいである。ここでは、その事実を証明しよう。

ここでも、1349 ページの定理 7.57 のための連結性（既約性）の条件 (iii) が重要な役割を果たす。念のために（記号を本節にあわせて）くり返しておこう。

(iii) **連結性：**T のゼロでない（正の）非対角成分を介して、$1, 2, \ldots, \Omega$ がすべて「つながっている[*107]」。正確にいうと、$i \neq j$ なる任意の $i, j = 1, \ldots, \Omega$ に対して、ある正整数 n があり、$n+1$ 個の数 $i_0, i_1, \ldots, i_n$ がとれて、$i_0 = j$, $i_n = i$ であり、$(\mathsf{T})_{i_\ell, i_{\ell-1}} > 0$ が

[*107] 連結性（既約性）を持つ確率行列から定まるマルコフ連鎖は既約であるという。もちろん既約でないマルコフ連鎖を考えることもあり、その場合は以下の収束定理も成り立たない。

$\ell = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つ。

既約な確率行列から定まるマルコフ連鎖では、どんな状態 i からでも、十分に時間をかければ、別の任意の状態 j に移ることができる。物理的な系をマルコフ連鎖によってモデル化しようとする場合、これはきわめて自然な条件である。

確率行列は 1345 ページの条件 (i), (ii) を自動的に満たすので、連結性 (iii) をもつ確率行列について、ペロン・フロベニウスの定理 7.57 が成り立つ。ここでさらに、以下の事実が成り立つ。

定理 7.63 (確率行列のペロン・フロベニウス固有値)**.** T を連結性をもつ任意の確率行列とする。T のペロン・フロベニウス固有値は $\lambda_{\mathrm{pf}} = 1$ である。また、ペロン・フロベニウス固有値以外の任意の固有値 λ に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{q}$ は $\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle = 0$ を満たす。

<u>証明</u>：$\mathsf{T}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} = \lambda_{\mathrm{pf}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ と (7.7.26) より、$\lambda_{\mathrm{pf}}\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle = \langle \boldsymbol{d}_0, \mathsf{T}\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle = \langle \mathsf{T}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle = \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle$ だが、$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ の成

分はすべて正だから $\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \rangle \neq 0$ であり、$\lambda_{\mathrm{pf}} = 1$ が得られる。$\lambda \neq 1$ について $\mathsf{T}\boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{q}$ とすると、上と全く同じ計算により、$\lambda \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle = \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle$ が得られ、$\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle = 0$ が示される。∎

確率行列 T のペロン・フロベニウス固有ベクトル $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ が固有値 1 に対応することがわかった。$\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$ を定数倍して確率の規格化条件を満たすようにすることで、**定常分布**

$$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{\Omega} (\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}})_i} \boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}} \tag{7.7.38}$$

を定義する。もちろん、定常分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ とは、

$$\mathsf{T}\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \tag{7.7.39}$$

を満たす確率分布（あるいは、各成分の和が 1 に等しい列ベクトル）だと言っても同じことである。

ここで簡単だが重要な事実を指摘しておこう。もし、確率行列が対称（任意の i, j について $T_{i,j} = T_{j,i}$）な

ら、$\mathsf{T}^{\mathrm{t}} = \mathsf{T}$ と (7.7.26) から、$\boldsymbol{d}_0$ がペロン・フロベニウス固有ベクトルであることがわかる。よって、この場合の定常分布は一様分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = (1/\Omega, 1/\Omega, \ldots, 1/\Omega)$ であることがわかる。

さらに定常分布への収束を議論するためには、1371 ページの定理 7.61 の条件として導入した強い連結性を仮定する必要がある。これも、くり返しておこう。

(iii') **強い連結性：**正の整数 n があって、全ての $i, j = 1, \ldots, \Omega$ について $(\mathsf{T}^n)_{i,j} > 0$ が成り立つ[*108]。

連結性 (iii) をもつが強い連結性 (iii') をもたない確率行列の典型的な例は、

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.7.40}$$

[*108] 強い連結性（原始性）を持った確率行列に対応するマルコフ連鎖は、既約で非周期的であるといわれる。

である（これは、(7.7.17) で $a = 1$ としたもの）。これは、時間がたつごとに、「状態 1 から必ず状態 2 へ、状態 2 から必ず状態 1 へ」と移り変わるプロセスに対応している。系の状態は 1 と 2 のあいだを行ったり来たり、周期的に変化するだけで、一定の確率分布に収束することはない。

T を強い連結性 (iii') をもつ確率行列だとしよう。さらに、話を少し簡単にして、確率行列 T が線形独立な Ω 個の固有ベクトルをもつと仮定してみよう。T が実対称行列ならば 1291 ページの定理 7.47 によりこの仮定は必ず正しいが、一般にはこの仮定は必ずしも正しくはない[*109]（主定理は、この仮定なしに証明する）。Ω 個の固有ベクトルのうちの一つは $\boldsymbol{v}_{\mathrm{pf}}$（あるいは、$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$）である。残りを $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{\Omega-1}$ と呼び、対応する固有値をそれぞれ $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\Omega-1}$ と書く。

[*109] とはいっても「虚心坦懐に」選んだ確率行列の固有値がたまたま縮退しているということは、あまりないだろう。固有値に縮退がなければ、1266 ページの定理 7.42 により線形独立な Ω 個の固有ベクトルの存在が保証される。

$\boldsymbol{p}^{(0)}$ を任意の初期状態の確率分布とする。これを固有ベクトルで展開すると、

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} + \sum_{i=1}^{\Omega-1} \alpha_i \boldsymbol{q}_i \tag{7.7.41}$$

となる。$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ の係数が 1 なのは、確率分布の規格化条件により $\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{p}^{(0)} \rangle = \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \rangle = 1$ であり、定理 7.63 から $\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q}_i \rangle = 0$ となることからわかる[*110]。α_i は（一般には複素数の）展開係数である。

ここで、マルコフ連鎖の基本の関係 (7.7.30) を使えば、

$$\boldsymbol{p}^{(N)} = \mathsf{T}^N \boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} + \sum_{i=1}^{\Omega-1} \alpha_i (\lambda_i)^N \boldsymbol{q}_i \tag{7.7.42}$$

となる。ところが、非負の成分をもつ行列についてのペロン・フロベニウスの定理（1371 ページの定理 7.61）

[*110] この場合の基底は正規直交基底ではないので、展開係数を内積で表す (7.1.45) の関係は成立しない。量子力学を学び正規直交基底を使うことに慣れすぎると、こういう点を間違いやすいので注意。

の後半部分から $|\lambda_i| < \lambda_{\mathrm{pf}} = 1$ なので、$N \nearrow \infty$ では $(\lambda_i)^N$ は 0 に収束する[*111]。よって、例題での (7.7.37) と同じ

$$\lim_{N \nearrow \infty} \boldsymbol{p}^{(N)} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \tag{7.7.43}$$

が得られる。

同じ結果は、Ω 個の線形独立な固有ベクトルが存在するという仮定を設けなくても、比較的簡単に証明できる。

[*111] λ_i $(i = 1, \ldots, \Omega - 1)$ の中で絶対値が最大のものを λ_1 と呼ぶことにしよう。上の評価から、定常分布への収束の程度は $|\lambda_1|^N$ で決まっていることがわかる。つまり、$|\lambda_1| < 1$ が 1 に近いほど収束は遅く、1 よりも十分に小さければ収束は速いのである。

定理 7.64 (離散時間マルコフ連鎖の収束定理)**.** 強い連結性 *(iii')* をもつ任意の確率行列 T について

$$\lim_{N\nearrow\infty} \mathsf{T}^N = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}(\boldsymbol{d}_0)^{\mathrm{t}} \tag{7.7.44}$$

が成り立つ。特に、任意の初期の確率分布 $\boldsymbol{p}^{(0)}$ について、(7.7.43) が成り立つ。

(7.7.44) の右辺は、列ベクトルと行ベクトルのクロネッカー積で定義される射影行列[*112]である（1077 ページの (7.2.111) などを参照)。$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = (p_1^{(\mathrm{s})}, \ldots, p_\Omega^{(\mathrm{s})})^{\mathrm{t}}$ と

[*112] これは、一般には、直交射影行列ではない。直交射影になるのは、$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = (1/\Omega, 1/\Omega, \ldots, 1/\Omega)^{\mathrm{t}}$ の場合のみ。

成分表示すれば、

$$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}(\boldsymbol{d}_0)^{\mathrm{t}} = \begin{pmatrix} p_1^{(\mathrm{s})} \\ p_2^{(\mathrm{s})} \\ \vdots \\ p_\Omega^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix} (1, 1, \ldots, 1)$$

$$= \begin{pmatrix} p_1^{(\mathrm{s})} & p_1^{(\mathrm{s})} & \cdots & p_1^{(\mathrm{s})} \\ p_2^{(\mathrm{s})} & p_2^{(\mathrm{s})} & \cdots & p_2^{(\mathrm{s})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_\Omega^{(\mathrm{s})} & p_\Omega^{(\mathrm{s})} & \cdots & p_\Omega^{(\mathrm{s})} \end{pmatrix} \tag{7.7.45}$$

である。(7.7.44) を使えば、任意の $\boldsymbol{p}^{(0)}$ について、

$$\lim_{N \nearrow \infty} \boldsymbol{p}^{(N)} = \left(\lim_{N \nearrow \infty} \mathsf{T}^N \right) \boldsymbol{p}^{(0)} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} (\boldsymbol{d}_0)^{\mathrm{t}} \boldsymbol{p}^{(0)}$$

$$= \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{p}^{(0)} \rangle = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \tag{7.7.46}$$

となり、確かに (7.7.43) が得られる。

<u>証明</u>：任意の実ベクトル $\boldsymbol{v}$ について、$\alpha = \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{v} \rangle$ とし $\boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} + \boldsymbol{q}$ と書くと $\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle = 0$ となる。よっ

て、$\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle = 0$ を満たす任意の実ベクトル $\boldsymbol{q}$ について $\lim_{N \nearrow \infty} \mathsf{T}^N \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$ を示せば、$\lim_{N \nearrow \infty} \mathsf{T}^N \boldsymbol{v} = \alpha \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ となり、(7.7.44) が言えたことになる。

ここでいくつかの記号を導入する。一般のベクトル $\boldsymbol{v} = (v_i)_{i=1,\ldots,\Omega}$ について、$\|\boldsymbol{v}\|_1 := \sum_{i=1}^{\Omega} |v_i|$ と書く[*113]。また、強い連結性 (iii') に現れた n を使って、$m_{i,j} = (\mathsf{T}^n)_{i,j}$ とする。(iii') より $m_{i,j} > 0$ なので、$\mu = \min_{i,j} m_{i,j}$ は正である。

上と同様、$\boldsymbol{q} = (q_i)_{i=1,\ldots,\Omega}$ を $\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle = \sum_{i=1}^{\Omega} q_i = 0$ を満たす任意の実ベクトルとする。$\boldsymbol{q}$ を固定し、$I_- \cup I_+ = \{1, 2, \ldots, \Omega\}$ と $I_- \cap I_+ = \emptyset$ を満たす集合 I_-, I_+ を、$j \in I_-$ ならば $q_j \leq 0$ であり、$j \in I_+$ ならば $q_j > 0$ であるように決める。このとき、$\sum_{j \in I_-} |q_j| =$

[*113] 進んだ注：この記号は数学では一般的に用いられる。より一般に、$p > 0$ について $\|\boldsymbol{v}\|_p := (\sum_{i=1}^{\Omega} |v_i|^p)^{1/p}$ と定義する（普通のベクトルの絶対値は $\|\boldsymbol{v}\|_2$ である）。

$\sum_{j\in I_+}|q_j| = \|\boldsymbol{q}\|_1/2$ が成り立つ。すると、

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{T}^n\boldsymbol{q})_i &= \sum_{j=1}^{\Omega} m_{i,j}q_j = \sum_{j\in I_+} m_{i,j}|q_j| - \sum_{j\in I_-} m_{i,j}|q_j| \\
&= \sum_{j=1}^{\Omega} m_{i,j}|q_j| - 2\sum_{j\in I_-} m_{i,j}|q_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\Omega} m_{i,j}|q_j| - 2\sum_{j\in I_-} \mu\,|q_j| \\
&= \sum_{j=1}^{\Omega} m_{i,j}|q_j| - \mu\,\|\boldsymbol{q}\|_1 \qquad (7.7.47)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。I_- と I_+ の役割を入れ替えて同じ評価をすることで、

$$
|(\mathsf{T}^n\boldsymbol{q})_i| \leq \sum_{j=1}^{\Omega} m_{i,j}|q_j| - \mu\,\|\boldsymbol{q}\|_1 \qquad (7.7.48)
$$

が得られる。ここで $\sum_{i=1}^{\Omega} m_{i,j} = 1$ に注意して、これを i について足しあげれば、

$$
\|\mathsf{T}^n\boldsymbol{q}\|_1 \leq \|\boldsymbol{q}\|_1 - \Omega\mu\,\|\boldsymbol{q}\|_1 = (1-\Omega\mu)\,\|\boldsymbol{q}\|_1 \quad (7.7.49)
$$

を得る。確率行列の基本性質 (7.7.24) により、$\mathsf{T}^n\boldsymbol{q}$ も $\sum_{i=1}^{\Omega}(\mathsf{T}^n\boldsymbol{q})_i = 0$ を満たす。よって (7.7.49) をくり返し用いることができるので、任意の $\ell = 1, 2, \ldots$ について、

$$\left\|\mathsf{T}^{\ell n}\boldsymbol{q}\right\|_1 \leq (1-\Omega\mu)^{\ell}\left\|\boldsymbol{q}\right\|_1 \tag{7.7.50}$$

が成り立つ。さて、任意の自然数 N は、自然数 ℓ と $0 \leq m < n$ を満たす自然数 m を使って $N = \ell n + m$ と書ける。任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ について $\left\|\mathsf{T}\boldsymbol{v}\right\|_1 \leq \left\|\boldsymbol{v}\right\|_1$ が成り立つことから（これを示すのは簡単）

$$\left\|\mathsf{T}^N\boldsymbol{q}\right\|_1 = \left\|\mathsf{T}^m\mathsf{T}^{\ell n}\boldsymbol{q}\right\|_1 \leq \left\|\mathsf{T}^{\ell n}\boldsymbol{q}\right\|_1 \leq (1-\Omega\mu)^{\ell}\left\|\boldsymbol{q}\right\|_1 \tag{7.7.51}$$

が成り立つ。$\ell \nearrow \infty$ で右辺はゼロに収束するから、$N \nearrow \infty$ で $\mathsf{T}^N\boldsymbol{q}$ は $\mathbf{0}$ に収束する。∎

■例 — 一般のグラフ上のランダムウォーク　図 7.7 のように、いくつかの点（頂点と呼ぶ）を適当に線分で結んでつくった図形を、一般に**グラフ** (graph) と呼ぶ。

図 7.7　このように、いくつかの頂点を線分で結んだものをグラフと呼ぶ。

今、頂点が Ω 個ある連結なグラフを考える。グラフが連結というのは、もちろん、いくつかの線分を介してすべての二点がつながっていることである。グラフの頂点に $j = 1, 2, \ldots, \Omega$ と名前をつける。また、各々の頂点 j について、j と線分で結ばれている頂点すべての集合を $\mathcal{N}(j)$ とし（$\mathcal{N}(j)$ には j そのものは含まれない)、$\mathcal{N}(j)$ の要素の数を $n(j)$ と書く。

ここで、確率行列 $\mathsf{T} = (T_{i,j})_{i,j=1,\ldots,\Omega}$ を

$$T_{i,j} = \begin{cases} \alpha & i \in \mathcal{N}(j) \text{ のとき} \\ 1 - \alpha\, n(j) & i = j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{7.7.52}$$

と定義する。ここで α は $0 < \alpha < \{\max_j n(j)\}^{-1}$ を

満たす定数である。

状態 j を「頂点 j に粒子がいる」状態と解釈すると、この確率行列は、粒子が（一定の遷移確率 α で）線分で結ばれた頂点のいずれかにジャンプする様子を表している。このように、グラフ上を粒子がデタラメに動き回る問題を、一般に、**ランダムウォーク** (random walk) と呼ぶ。

実は、確率行列 (7.7.52) は対称である。これは、もし $i \in \mathcal{N}(j)$ なら必ず $j \in \mathcal{N}(i)$ であることからすぐに分かる。よって、計算するまでもなく、このマルコフ連鎖の定常分布は、一様分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = (1/\Omega, 1/\Omega, \ldots, 1/\Omega)$ だとわかる。また、グラフが連結であること、$T_{i,i} > 0$ であることから、T は強い連結性 (iii') を満たす。よって、どのような初期分布から出発しようと、十分に時間が経てば、ランダムウォークする粒子の位置を表す確率分布は一様分布に収束する。

ところで、(7.7.52) とよく似た

$$\tilde{T}_{i,j} = \begin{cases} \alpha/n(j) & i \in \mathcal{N}(j) \text{ のとき} \\ 1-\alpha & i = j \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{7.7.53}$$

で定義される確率行列 $\tilde{\mathsf{T}} = (\tilde{T}_{i,j})_{i,j=1,\ldots,\Omega}$（ただし $0 < \alpha < 1$）で決まるランダムウォークを考えることもできる。今度は、粒子は確率 $1-\alpha$ で何もせず、確率 α でジャンプしようと決める。ジャンプする場合は、さらに等確率で、線分で結ばれた頂点のいずれかを選ぶのである。上の問題とよく似ているが、($n(j)$ が j に依存しないという特別な場合を除けば）確率行列 $\tilde{\mathsf{T}}$ は対称ではないことに注意しよう。だから、この場合の定常分布は一様分布ではなく、グラフの構造を反映した複雑なものになりうる（その計算は一般には困難である)。

問 7.7.2.b　定数 $\alpha, \beta > 0$ が $\alpha + \beta < 1$ を満たすとする。確率行列 $\mathsf{T} = (T_{i,j})_{i,j=1,\ldots,\Omega}$ を、$T_{i+1,i} = \alpha$,

$T_{i,i+1} = \beta$（ただし、$i = 1, \ldots, \Omega-1$）、$T_{i,i} = 1-(\alpha+\beta)$（ただし、$i = 2, \ldots, \Omega-1$）、$T_{1,1} = 1-\alpha$、そして、$T_{\Omega,\Omega} = 1-\beta$ によって定義する（これ以外の $T_{i,j}$ は全てゼロ）。これも一種のランダムウォークの問題とみることができるが、どのようなルールで粒子が動くのかを考えよ。また、このマルコフ連鎖の定常分布を求めよ。

■詳細つり合いの条件　これまでは、確率行列（つまり、遷移確率）T がまず与えられ、そこから定常分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ が決まるという立場をとってきた。これが確率過程についての標準的な観点なのだが、場合によっては、まず定常分布が与えられ、それを実現するような遷移確率は何かと考えることもある。

定常分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = (p_i^{(\mathrm{s})})_{i=1,\ldots,\Omega}$ が与えられたとしよう。ただし全ての $i = 1, \ldots, \Omega$ について $p_i^{(\mathrm{s})} > 0$ とする。

このとき遷移確率 $T_{i,j}$ $(i, j = 1, \ldots, \Omega)$ が、定常分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ に関する**詳細つり合いの条件** (detailed balance

condition) を満たすとは、全ての i, j の組について、

$$T_{i,j}\, p_j^{(\mathrm{s})} = T_{j,i}\, p_i^{(\mathrm{s})} \tag{7.7.54}$$

が成り立つことをいう（$i = j$ のときは等号は自明なので、意味があるのは $i \neq j$ のとき)。(7.7.54) には行列とベクトルの成分が登場するが、i や j についての和はとっていないことに注意しよう。また、ある i, j について、$T_{i,j} = T_{j,i} = 0$ とすれば (7.7.54) は自明に成り立つが、もちろん、それでもかまわない。

詳細つり合いの条件 (7.7.54) の両辺を $j = 1, \ldots, \Omega$ について足しあげよう。左辺は明らかに行列とベクトルの積になり、右辺では確率行列の性質 (7.7.23) が使えるから、

$$\mathsf{T}\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \tag{7.7.55}$$

が得られる。つまり、（ねらったとおり）$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ は T で決まるマルコフ連鎖の定常分布になっている。さらに確率行列 T を強い連結性 (iii') が成り立つように選んでおけば、どんな初期分布から出発しても、長い時間

の後には確率分布がかならず $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ に収束することが 1395 ページの定理 7.64 によって保証される。

詳細つり合いの条件の意味は明らかだろう。今、系の状態が定常分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ に従って分布しているとしよう。この状況で、一回遷移がおこったとき、系の状態が j から i に移る確率は、もともと j にいる確率 $p_j^{(\mathrm{s})}$ と遷移がおこる確率 $T_{i,j}$ の積。つまり、(7.7.54) の左辺そのものである。一方、同じ状況で、状態が i から j に移る確率が (7.7.54) の右辺だ。詳細つり合いの条件 (7.7.54) は、これら二つの確率がちょうどバランスしていることを表す。もちろん、定常分布を維持するために、このような一対一のバランスが必要なわけではない。詳細つり合いの条件 (7.7.54) は $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ が定常分布になるための十分条件なのである（問題 7.7.2.c を参照)。

統計力学においては以下の**カノニカル分布** (canonical distribution) が重要な役割を果たす[*114]。まず、系

[*114] 統計力学を学んでいない読者は読まなくていい。

の各々の状態 i に、エネルギー E_i という定数を割り振っておく。また系の温度を β というパラメターで特徴付ける（β は絶対温度に反比例する）。系の状態 i が出現する確率が、カノニカル分布

$$p_i^{(\mathrm{can})} = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z} \tag{7.7.56}$$

で与えられるとすると、系の熱平衡状態の性質が再現されることが知られている（Z は規格化条件で定める定数）。カノニカル分布に関する詳細つり合いの条件 (7.7.54) は、

$$T_{i,j} = e^{\beta(E_j - E_i)}\, T_{j,i} \tag{7.7.57}$$

と書ける。ここに（一般に計算困難な量である）Z が顔をださず（一般に定義から簡単に決まる）エネルギー差 $E_j - E_i$ のみが現れるのは重要だ。これを利用して、適切な T を選び、カノニカル分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{can})}$ を数値計算によって（近似的に）生成する方法（モンテカルロ法と

呼ばれる）は統計力学の数値計算で多用されている。

問 7.7.2.c　$0 < \alpha < 1$ とする。確率行列

$$\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{pmatrix} \tag{7.7.58}$$

はどのような確率分布に関しても詳細つり合いの条件を満たさないことを示せ。T の定常分布を求め、詳細つり合いではなく、どのようなバランスが生じているかを議論せよ。

7.7.3　グーグルのページランク

確率行列の興味深い応用例として、web 検索のグーグル (Google[*115]) がページを評価するのに用いている**ページランク** (PageRank) という手法について簡単

[*115] 英語では最後の gle を「グル」とは発音しない。敢えて書けば、「グーゴー」と聞こえるような発音。apple が「アップル」でないのと同じ。

に解説しよう[*116]。物理学と直接の関係はないが、線形代数の美しい定理が、実生活に役立つ技術を本質的な意味で支えている素晴らしい例だと思う。

web を使っている人はよくご存知のように、グーグルのサイト (`https://www.google.co.jp/`) で検索したい文字列を入力すると、ほぼ一瞬で関連する web ページのリストが表示される[*117]。しかも、このリスト

---

*116 これは「趣味の応用編」なので、興味のない読者はとばしていただいて全くかまわない。ページランクの数学が知りたくてこれを読み始めた読者は、線形代数についての一定の知識があるなら、二つ前の 7.7.1 節の最初（1344 ページ）に戻って読み始めれば以下の内容を完全に理解できるはずだ（しかもペロン・フロベニウスの定理や確率行列の基礎も身につく）。とはいえ、予備知識のないままこの節を読み進めてもかなりのことは理解できると思う。

*117 もちろん、グーグルがその場で web を見て回っているわけではない。グーグルの（そして、他の検索サイトでも同様だが）巨大なコンピュータ群には、世界中の web ページから読み込んだテキスト情報が（検索に都合のよい形で）保存されている。われわれが検索すると、グーグルがもっている膨大な情報の中から、検索したキーワードに適合するページを選び出して表示してくれるわけである。

では「重要性」の高いページから順番に表示されるようになっており、上位のページを見ていくだけで（多くの場合に）かなり的確な情報が得られる。web ページの数が劇的に増えていくなかで、ユーザーにとって意味のある、ページの順位付けを導入したことがグーグルの成功の一つの要因だと言われている。検索結果のリストでのページの順位はきわめて多くの要素（百以上と発表されている）で決まっているが、その主要なものとしてページランクがある。

■ページランクの基本　以下では、ページランクを決める数学的な原理をみていこう[*118]。まず、重要なのは、ページランクは原理的には web ページ群の自動的な解析だけで決定され、(「中の人」がページを読んで

[*118] 以下の解説を書くにあたって部分的に、David Austin, “How Google Finds Your Needle in the Web’s Haystack”, (American Mathematical Society, FEATURE COLUMN, December 2006) (`http://www.ams.org/featurecolumn/archive/pagerank.html`) を参照した。

面白いかどうかを判定するといった）人間の判断に依存したプロセスを使わないということだ。また（この点を誤解している人が少なくないようだが）ページランクは、web ページが何人くらいの人に読まれたかという「アクセス数」（あるいは「ページビュー数」）で決まるのではない[*119]。ページランクを決めるのは、web ページ間にどのようなリンクがあるかという相互リンクについての情報だけなのである。

ページランクの基本的な考えは、**web ページ間のリンクを一種の「相互の人気投票」とみなし、そこから「人気」を数値化していく**ことである。ページ A から別のページ B にリンクがはられていれば[*120]、ページ A が「ページ B を評価する」という「投票」をしてい

[*119] そもそも、あるページへのアクセスが何件あったかは、普通は（グーグルのような）他人には知ることはできないはず。

[*120] 「ページ A からページ B リンクがはられている」とは、ページ A のどこかに「クリックすれば、ページ B に自動的に飛ぶ」部分があることをいう。

るとみなす[*121]。また、あるページが（面白みのないリンク集にときどきあるように）やたらと多くのページにリンクしているときには、その「一票」の重みは小さいとみなすべきだろう。具体的には、ページ A から ℓ_{A} 個のページにリンクがはられているなら、ページ A が本来もっている「票の重み」を ℓ_{A} で割ったものが、各々のリンク先に「投票」されるとする。

ここまでは素朴な発想だ。ページランクの原理で注目すべきなのは、もう一つの非凡なアイディアである。web ページの品質には激烈なばらつきがあり、しっ

[*121] だから、普通にリンクをはったときは、「このページは素晴らしい」と書いてリンクした場合も、「こんなひどいページがある」と書いてリンクした場合も、同じようにリンク先のページの評価に貢献する（web ページを書く人のための注：ただし、リンクをはる際に `<a href="http://www.kuzu/kuzu.htm" rel="nofollow">`**屑ページ**`</a>` という風に nofollow という指示をつけておくと、検索エンジンはその先をたどらないので「屑ページ」のページランクに貢献しない。「ニセ科学」批判の web ページをつくる人は知っておいたほうがいいだろう（という私も知ったばかりなのだが））。

かりと作られて多くの人に活用されている信頼できる（少数の）ページと、いい加減に作られて誰にも顧みられない（膨大な）ページが混在している。そこで、ページランクを決める際には、全てのページが同じ「票の重み」をもっているとは考えない。**「重要性」の高いページからの「一票」には高い価値があり、「重要性」の低いページからの「一票」の価値は低い**と考えて、「投票結果」を集計するのである。では、そもそも、もとのページの「重要性」はどうやって判断するのか？　それは、そのページへの他からの「投票結果」にもとづいて決める。堂々巡りだ！しかし、健全な「堂々巡り」ならば数学的にしっかりと正当化されるかもしれない。ともかく、**全てのページについて「投票結果」＝「重要性」となって「つじつまが合う」ように巧みに「重要性」を決める**ことを目指し、うまく結果が出たら、それをページランクとしようというわけである。

これ以上、言葉で議論していても混乱するばかりなので、数学的な設定に移ろう。考えているネットワー

ク[*122]に Ω 個の異なった web ページがあるとし[*123]、各々のページに $j = 1, 2, \ldots, \Omega$ と番号をふる。今、ページ j から ℓ_j 個のページへのリンクがはられているとしよう。これら ℓ_j 個のページの番号の集合を $\mathcal{L}(j) \subset \{1, 2, \ldots, \Omega\}$ とする。話を簡単にするため、全ての j について、$j \notin \mathcal{L}(j)$（自分自身へのリンクはない）であり、$\mathcal{L}(j) \neq \emptyset$（必ず一つはリンクをはっている）としよう[*124]（図 7.8 に簡単な例を示した）。全て

[*122] この解説では、ネットワークという言葉を「リンク構造をもった web ページの集まり」という、通常の用法よりはやや抽象的な意味で用いる。

[*123] 脚注 *118 に挙げた文献によれば、グーグルの場合の Ω は 250 億程度らしい！（今はもっと多いのだろう）

[*124] 細かい注：自分自身へのリンクをもった web ページは簡単につくれるが、そういうリンクは意味がないとしてカウントしないことにしよう。一方、どこにもリンクしていないようなページというのは（web を見る上では不便でよくないのだが）たくさん存在する。そういうページ j については、そのままでは以下の議論が続けられないので、$\mathcal{L}(j) = \{1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, \Omega\}$ と定義して、自分以外の全てのページにリンクをはっているとみなすことにする（これがページランクで採用されている処方箋）。

の $j = 1, 2, \ldots, \Omega$ について、リンク先の集合 $\mathcal{L}(j)$ を知ることが、このネットワークの「リンク構造」を知ることである。このネットワーク上の web ページのページランクは、リンク構造についての情報だけから数学的な手続きで決定される。

上で言葉で述べたことを数式化していこう。仮に、あるページ j のページランク（重要性）が r_j だったとしよう。このとき、ページ j はトータルで r_j の「評価」を他のページに「投票」する。ページ j からは ℓ_j 個のページへのリンクがあるから、トータルの「評価」を個数で割り、各々のページに r_j/ℓ_j だけの評価を「投票」することになる。すると、あるページ i が他のページから「受け取る評価」の合計は、$\sum_{j\,:\,i\in\mathcal{L}(j)} r_j/\ell_j$ となる（和は、ページ i にリンクをはっている全てのページ

の番号 j についてとる[*125])。上に書いたように、ページランクでは、この「受け取る評価」こそが、そのページの得点に他ならないとみなす。つまり、すべての i について、

$$r_i = \sum_{j\,:\,i \in \mathcal{L}(j)} \frac{r_j}{\ell_j} \tag{7.7.59}$$

が成り立つとするのである。

以上の議論が、一種の「自縄自縛」になっていることに注意しよう。上で、「仮に、ページ j のページランクが r_j」と書いたが、もちろん、ページ j のランクはまだ決まっていなかった。全てのページのランクは、(7.7.59) の関係が同時に満たされるように、いっせい

[*125] ここでの和がわかりにくいと感じる読者は、次のように考えればいいだろう。新たに $\mathcal{I}(i)$ を「ページ i に向けてリンクをはっているページの（番号の）集合」と定義する。図 7.8 の例なら、$\mathcal{I}(1) = \{2, 3, 4\}$, $\mathcal{I}(2) = \{1, 3\}$, $\mathcal{I}(3) = \{1, 4\}$, $\mathcal{I}(4) = \{2\}$ である。すると、ここでの和と (7.7.59) の右辺は、$\sum_{j \in \mathcal{I}(i)} r_j/\ell_j$ と書ける。

に決めなくてはならないのだ[*126]。そんなことが可能かどうかは決して自明ではない。

一般論に入る前に簡単な例を見ておくのがいいだろう。図 7.8 に四つの web ページからなる簡単なネットワークでのページランクを示したので、これを検討して、「つじつまが合っている」ことを確認してほしい。

■リンク行列とページランク　さて、(7.7.59) は明らかに行列とベクトルについての関係式とみることができる。全てのページのページランクを並べた $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_\Omega)^{\mathrm{t}}$ を列ベクトルとみなそう。そして、

$$L_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{1}{\ell_j} & i \in \mathcal{L}(j) \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \tag{7.7.60}$$

[*126] 仮に (7.7.59) の解 $(r_1, r_2, \ldots, r_\Omega)$ が一つ求まったとすると、これらに共通の定数 β をかけた $(\beta\, r_1, \beta\, r_2, \ldots, \beta\, r_\Omega)$ も (7.7.59) を満たす。だから、ページランクが完全に一意的に決まるということはない。

図 7.8　(a) ページが 1, 2, 3, 4 の四つしかない簡単なネットワーク（丸のなかの数字はページ番号）。リンク構造を決める集合は、$\mathcal{L}(1) = \{2, 3\}$, $\mathcal{L}(2) = \{1, 4\}$, $\mathcal{L}(3) = \{1, 2\}$, $\mathcal{L}(4) = \{1, 3\}$ である。どのページからも二つのリンクが出ているので、全てのリンクに同じ重みを与えて、「被リンク数」でページの「得点」を決めると、$n_1 = 3$, $n_2 = n_3 = 2$, $n_4 = 1$ となる。ページ 1 がもっとも重要で、ページ 2 と 3 は等価になる。(b) このリンク構造から決まるページランク（丸のなかの数字がページランク）。各々のページから、矢印の先の二つのページに、自分のページランクの半分ずつが「投票」される（半分にしたのはリンク先が二つだから）。自分が受け取った「投票」の総数が、自分のページランクになる。図でのページランクは、このプロセスの「つじつま」が合うように決めた。「重要なページからのリンクは重視する」ことになるため、ページ 3 よりも（ページ 3 からリンクされている）ページ 2 の重要度が上がっていることに注意。

によって、リンク行列[*127] $\mathsf{L} = (L_{i,j})_{i,j=1,\ldots,\Omega}$ を定義すれば、(7.7.59) は、

$$\mathsf{L}\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \tag{7.7.61}$$

と書ける。つまり、ページランクベクトル $\boldsymbol{r}$ はリンク行列 L の固有ベクトルであり、その固有値は 1 なのである。

定義 (7.7.60) より各々の j について $\sum_{i=1}^{\Omega} L_{i,j} = 1$ なので、リンク行列 L はつねに確率行列である。よって L の固有値として 1 があり[*128]、(7.7.61) を満たすベクトル $\boldsymbol{r}$ は必ず存在する。

図 7.8 の例については、リンク行列 (7.7.59) は、

$$\mathsf{L} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7.7.62}$$

---

*127 ハイパーリンク行列という呼び名があるが、ちょっと大げさかなと思うので、ここでは単にリンク行列と呼ぶ。

*128 この事実はペロン・フロベニウスの定理が使えない場合にも正しい。なぜか？

であり、固有値 1 に対応する固有ベクトルは $\boldsymbol{r} = (1/3, 2/7, 5/21, 1/7)^{\mathrm{t}} \simeq (0.33, 0.29, 0.24, 0.14)^{\mathrm{t}}$ と取れる[*129]。

■グーグル行列とページランク　上で見たように、ページランクの基本方程式 (7.7.61) を満たすベクトル $\boldsymbol{r}$ は必ず存在する。しかし、これだけではページランクの決定法としては不十分である。

まず解の一意性の問題がある。もしリンク行列 L が 1388 ページの (iii) の連結性（既約性）を満たせば、ペロン・フロベニウスの定理（1349 ページの定理 7.57）から固有値 1 に対応する固有ベクトルは縮退しないこと、つまり、基本方程式 (7.7.61) の解は（ベクトル全体を定数倍する自由度を除いて）一意的であることが言える。しかし、一般には、実現される web のネットワークが連結性（既約性）を満たすという保証はない。

[*129] ここでは、成分の和が 1 になるように規格化した。図 7.8 の説明では、各成分が偶数になるように規格化を変えてある。

よって、

(1) リンク構造を忠実に反映する行列 L を用いると、ページランクの基本方程式 (7.7.61) の解の一意性が保証されない。

ことが問題になる。

　しかし、これは（おそらく）どちらかというと些末な問題である。仮にリンク行列 L がたまたま連結性をもっていたとしても（あるいは、下の問 7.7.3.a のようにして連結性を回復したとしても)、少数のリンクが連なることで巨大なネットワークが維持されているという構造のために、次のようなより深刻な問題が生じるのだ。

(2) リンク行列 L の 1 以外の固有値の中で絶対値が最大のものを λ_1 とする。L が「辛うじて連結性をもっている」場合には、往々にして、$|\lambda_1|$ はきわめて 1 に近くなる（問 7.7.3.b を見よ)。これは、確率行列 L で定

まるマルコフ連鎖において、定常分布への収束がきわめて遅いことを意味する[*130]。この事実は（すぐ後で述べる）ページランクの実際の計算において致命的な問題になる。

ページランクのアルゴリズムでは、**グーグル行列** (Google matrix) を導入することで、以上の二つの難点を同時に解決する。α を $0 < \alpha < 1$ を満たす定数として、

$$\mathsf{G} = \alpha\,\mathsf{L} + (1-\alpha)\begin{pmatrix} 1/\Omega & 1/\Omega & \cdots & 1/\Omega \\ 1/\Omega & 1/\Omega & \cdots & 1/\Omega \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/\Omega & 1/\Omega & \cdots & 1/\Omega \end{pmatrix} \tag{7.7.63}$$

によりグーグル行列 G を定義しよう。右辺に現れたのは全ての成分が $1/\Omega$ の $\Omega \times \Omega$ 行列である。

全ての成分が $1/\Omega$ という行列をリンク構造に読み直せば、「全てのページが（自身を含めた）全てのページ

[*130] 1394 ページの脚注 *111 を見よ。

にリンクをはっている」という究極的に平等な（しかし全く面白みのない）ネットワークに対応する。グーグル行列 G は、現実のリンク構造を忠実に反映したリンク行列 L と、このような平等なネットワークに対応する行列を混ぜたものだ。「有名ページと無名ページの不平等」を少しだけ緩和しているとみることもできるし、リンク構造に意図的に「ノイズ」を混ぜたと解釈してもいい。α を 1 に近くとれば本来のネットワーク構造に忠実であり、α を小さくとればより「平等性」が強くなるといえる。

グーグル行列 G は明らかに確率行列である。また、すべての成分が正だから、連結性だけでなく、1391 ページの「強い連結性[*131]」を満たすこともわかる。

この段階で、ページランクの基本方程式を変更しよう。解の一意性が保証されない（そして、数値計算にも不向きな）(7.7.61) は放棄して、新たに、グーグル行

[*131] 行列の言葉では原始性、マルコフ過程の言葉では既約性かつ非周期性。

列の固有値方程式

$$\mathsf{G}\,\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r} \tag{7.7.64}$$

の解としてページランクベクトル $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_\Omega)^{\mathrm{t}}$ を定義する。ペロン・フロベニウスの定理（1349 ページの定理 7.57）により、(7.7.64) の解が一意的であることが保証される。つまり、(1) の一意性の問題は解決した（(2) の収束の問題については、この後で議論する）。もちろん、こうして定義したページランクベクトル $\boldsymbol{r}$ は定数 α に依存する。α は、ネットワークの構造がきちんと反映されるように選ばなくてはならない。

たとえば、図 7.8 の例に対応するリンク行列 (7.7.62) から、$\alpha = 0.85$ として作ったグーグル行列

$$\mathsf{G} = \begin{pmatrix} 0.0375 & 0.4625 & 0.4625 & 0.4625 \\ 0.4625 & 0.0375 & 0.4625 & 0.0375 \\ 0.4625 & 0.0375 & 0.0375 & 0.4625 \\ 0.0375 & 0.4625 & 0.0375 & 0.0375 \end{pmatrix} \tag{7.7.65}$$

を使って四つのページのページランクを（数値的に）求めると、それぞれ、$0.32, 0.28, 0.24, 0.16$ となる。リ

ンク行列だけを用いた以前の計算（$\alpha = 1$ に対応する）の $0.33, 0.29, 0.24, 0.14$ と比べると、大小関係は変わらないが、少しだけ「平等化」されて差が縮まっていることがわかる（ただし、あまりに規模が違うので、現実のグーグルの挙動と比較する意味はほとんどない）。

問 7.7.3.a　Ω 個のページからなる任意のネットワークがある。ここに、$\Omega + 1$ 番目の仮想的な「完全インデックスページ」を付け加える。$j = 1, \ldots, \Omega$ の全てのページは、インデックスページにリンクをはっており、さらに、インデックスページは自身を含めた全てのページにリンクをはっているとする。これだけの改造で対応するリンク行列は必ず「強い連結性」をもつことを示せ（よって、この改造は上の問題点 (1) を解決する）。

問 7.7.3.b　しかし、「完全インデックスページ」は問題点 (2) を一般には解決しないことを具体例でみよう。Ω を偶数とする。ページ $1, \ldots, \Omega/2$ は全て互いにリン

クをはりあっており、また、ページ $(\Omega/2)+1,\ldots,\Omega$ も全て互いにリンクをはりあっている。これら二つのグループの間に全くリンクはない。ここに問 7.7.3.a のような「完全インデックスページ」を一つ追加したネットワークを考え、そのリンク行列を L とする。L の 1 でない固有値を求め、Ω が大きいとき、この固有値がきわめて 1 に近いことを見よ。

■ページランク計算の基本定理　グーグル行列 G をマルコフ連鎖を定める確率行列だとみなせば、ページランクを表すベクトル $\boldsymbol{r}$ は定常分布に他ならない（定常分布の定義 (7.7.39) とページランクの基本方程式 (7.7.64) を見比べよ）。また、G は強い連結性をもつからマルコフ連鎖についての強力な収束定理（1395 ページの定理 7.64）がそのまま使える。

つまり、定理 7.64 により、成分の和が正になる任意の実ベクトル $\boldsymbol{r}^{(0)}$ を用いて、求めるページランクベクトルを、

$$\boldsymbol{r}=\lim_{N\nearrow\infty}\mathsf{G}^N\,\boldsymbol{r}^{(0)} \tag{7.7.66}$$

と表すことができるのである。

(7.7.66) によってページランクを求める手続きを、マルコフ連鎖の言葉で解釈することは興味深い。まず $\alpha = 1$ としよう。つまり $\mathsf{G} = \mathsf{L}$ である。ここに仮想的な「確率的 web 閲覧者」がいて、「web ページを一定時間だけ見たあと、ページ上のリンク先を一つランダムに選んでクリックして次のページにジャンプする」ということをひたすらくり返すとする。これは、まさに L で定まるマルコフ連鎖の時間発展のルールそのものである。よって極めて長い時間の後に「確率的 web 閲覧者」があるページを見ている確率は、そのページの（$\alpha = 1$ での）ページランクに正確に比例することになる。同じことなのだが、きわめて長い時間にわたって「確率的 web 閲覧者」が見たページを記録し、あるページに滞在していた時間の総計を求めると、それもペー

ジランクに正確に比例する[*132]。

$\alpha < 1$ のときには「確率的 web 閲覧者」のふるまいが変わる。次のページに移る際、確率 α で（上と同様に）ページ上のリンク先を一つランダムに選んでジャンプするのだが、確率 $1-\alpha$ で（なんらかの無茶なプログラムを使うのだろうが）web 上の全ページからランダムに選んだあるページへとジャンプする。これが G で決まるマルコフ連鎖の時間発展ルールである[*133]。

さらに、(7.7.66) での収束の速さについては以下の明快で有用な結果がある。

[*132] これは、既約で非周期的なマルコフ連鎖の（エルゴード性と呼ばれる）性質から来る。残念ながら、本書ではエルゴード性については述べていないので、ここでの説明は不完全である。

[*133] 後者の「確率的 web 閲覧者」の行動は現実的でないと思うだろうが、それは正しい。そもそもグーグル行列 (7.7.63) の第二項は、一意性や収束の問題を手っ取り早く解決するために人為的に導入されたものだ。それを無理に比喩的に解釈した結果が、この「確率的 web 閲覧者」の行動ルールなのである。だから、「『確率的 web 閲覧者』の行動を現実の閲覧者の行動に近づけることでアルゴリズムを改良しよう」という意見は的を射ないと思う。

定理 7.65 (ページランク計算の基本定理). $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_\Omega)^{\mathrm{t}}$ を (7.7.64) で定まるページランクベクトルとする ($\sum_{i=1}^{\Omega} r_i = 1$ と規格化しておく)。$\boldsymbol{r}^{(0)}$ を全成分の和が *1* の任意の実ベクトルとすると、任意の非負の整数 N に対して

$$\left\| \mathsf{G}^N \boldsymbol{r}^{(0)} - \boldsymbol{r} \right\|_1 \leq \alpha^N \left\| \boldsymbol{r}^{(0)} - \boldsymbol{r} \right\|_1 \tag{7.7.67}$$

が成立する。

証明：定理 7.64 の証明の中の評価を参照する。グーグル行列 G については、強い連結性は $n = 1$ として成り立つ。また、G の成分は全て $(1-\alpha)/\Omega$ 以上だから、$\mu = (1-\alpha)/\Omega$ とできる。すると、収束証明の要の評価 (7.7.49) は、

$$\|\mathsf{G}\boldsymbol{q}\|_1 \leq \alpha \|\boldsymbol{q}\|_1 \tag{7.7.68}$$

と書き換えられる（$\boldsymbol{q}$ は成分の和が 0 となる任意の実ベクトルで、一般に $\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{\Omega} |v_i|$ だった)。これ

をくり返し用いれば、

$$\left\|\mathsf{G}^N \boldsymbol{q}\right\|_1 \leq \alpha^N \left\|\boldsymbol{q}\right\|_1 \tag{7.7.69}$$

がいえる。定理を示すためには、$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{r}^{(0)} - \boldsymbol{r}$ とおき、$\langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{q} \rangle = \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{r}^{(0)} \rangle - \langle \boldsymbol{d}_0, \boldsymbol{r} \rangle = 1 - 1 = 0$ に注意すればよい。∎

つまり、求めるページランクベクトル $\boldsymbol{r}$ と $\mathsf{G}^N \boldsymbol{r}^{(0)}$ との差は（どう大きめに見積もっても）α^N に比例して小さくなっていく[*134]。よって、α をある程度小さくとっておけば、(7.7.66) で N をある程度大きく取りさえすれば、極限に十分に近い値が得られることになる。

[*134] 専門家向けの細かい注：ここで、二つのベクトルの「差」を評価するのに $\|\boldsymbol{v}\|_1 = \sum_{i=1}^{\Omega} |v_i|$ という「大きさ」を用いている。成分の個数が 250 億もある場合、このような「大きさ」を用いると、「全ての成分がほぼ同様に小さい」状況と「ほとんどの成分はきわめて小さく、少数の成分はあまり小さくない」状況を区別するのが難しくなる。成分の個数がいくら大きくても、$\|\boldsymbol{v}\|_\infty = \max\{|v_1|, \ldots, |v_\Omega|\}$（成分の絶対値の最大値）という「大きさ」を用いて同じ評価ができれば問題はないのだが（少なくとも私には）そういう不等式は作れなかった。

上で挙げた (2) の収束の問題は、グーグル行列のパラメター α によってみごとに解決されているのだ（同じことを固有値の立場からみることもできる。問 7.7.3.c を参照)。「適当に選んだ初期ベクトル $\boldsymbol{r}^{(0)}$ にグーグル行列 G を次々とかけていく」という方法[*135]で、ページランクを実際に計算できそうである。

ただし、α をあまり小さくして「平等性」を高めると、実際のリンク構造の情報が入らなくなり、ネットワーク解析の意味をなさなくなる。両者の兼ね合いで適切な α を決めることになる。グーグルでは（経験に

[*135] これをべき乗法 (power method) とよぶ。ここでは固有値が 1 と分かっている固有ベクトルを求めたいので、未知数が Ω 個の連立一次方程式を解けばよい。連立一次方程式の解をコンピューターで求める標準的な方法としては、掃き出し法（あるいは、ガウスの消去法）（1176 ページで解説した、行列の変形でディターミナントを求める方法や、1224 ページで解説した、逆行列の計算方法と類似の方法）がある。ただし、ページランクの計算の場合には、行列の次元が極端に大きく、その割に（リンク行列の）行列要素はほとんどがゼロという特殊性があるため、掃き出し法よりもべき乗法のほうが圧倒的に有利なのである。

もとづいて）$\alpha = 0.85$ と選んでいるという[*136]。

このように、ページランクの技術においては、巨大な計算機群を用いて複雑きわまりない計算を実装する段階より前に、行列についての美しい定理によって、解の存在や、解への収束などが完全に保証されているのだ。抽象的な数学が有用な技術を根本的に支えている

[*136] 1409 ページの脚注 *118 に挙げた文献によれば、N は 50 から 100 くらいにとれば十分だそうだ。ちなみに $(0.85)^{50} \simeq 3 \times 10^{-4}$, $(0.85)^{100} \simeq 9 \times 10^{-8}$ である。また、前述のように、総ページ数 Ω は 250 億にものぼる。250 億次元のベクトルに、同じ次元の行列を 100 回かける計算を想像すると気が遠くなるが、G の性質（たとえば、L の行列要素はほとんどゼロである）をうまく利用すれば、この計算は数日で終わるという。ページランクの計算は毎日行なうのではなく、一ヶ月に一回程度のペースで行なっているといわれている。

素晴らしい例である[*137]。

問 7.7.3.c　λ がリンク行列 L の固有値で、対応する固有ベクトル $\boldsymbol{v}$ の成分の和が 0 だとする（L が確率行列なので 1 以外の固有値は全てこの性質をもつ)。このとき、$\boldsymbol{v}$ はグーグル行列の固有ベクトルであり、その固有値は $\alpha\lambda$ であることを示せ。L が Ω 個の線形独立な固有ベクトルをもつと仮定して、定理 7.65 に相当する収束定理を証明せよ（L が連結性（既約性）をもち、1389 ページの定理 7.63 が使えるなら、これはほぼ自明。そうでない場合は、$\lambda = 1$ の固有ベクトルの扱いに少し注意が必要)。

---

*137 「あなたが単にページランクの計算をしたいなら、ページランクの公式と計算機への実装技術を学べばいいでしょう。しかし、あなたがページランクを越える新しいエレガントで有用な技術を生み出したいと思うなら、背後にある抽象的で美しい数学をも知っているべきではないでしょうか？」というのが、私にページランクのことを教えてくださった数学者・石井豊さんが九州大学における彼の講義「Google と線形代数」を通して学生さんたちに送っているメッセージだという。

7.8　行列の指数関数

少し進んだ話題として、行列を引数とする**指数関数**を定義しておこう[*138]。無限級数で指数関数を定義するやり方（3.2.2 節）に馴染んでいれば、ここでの定義は自然に感じられるだろう。行列の指数関数は、線形常微分方程式の形式的な議論に役立つだけでなく、量子力学や量子統計力学ではほとんど必須である。

7.8.1 節で基本的な定義をみたあと、7.8.2 節では行列の和の指数関数の基本的な性質を調べ、いくつかの重要な応用を解説する。最後に 7.8.3 節で、一つの応用として、連続時間のマルコフ連鎖（マルコフ過程）を定式化し、基本的な収束定理を証明する。

[*138] この節は特段に難しくはないが、量子力学などを学んで、行列の指数関数を扱う必要が出てから読めばいいだろう。

7.8.1　行列の指数関数の定義

A を任意の $d \times d$ 行列としよう。一般的な複素行列を考えることにする。

行列 A の指数関数 $\exp(\mathsf{A})$ または e^{A} を定義したい。いうまでもないだろうが、もはや「ネイピア数 e を A 回かけあわせる」という直観はまったく通用しない。後で詳しく議論するように、指数関数の性質を体現すると思われた $e^{x+y} = e^x e^y$ の関係（336 ページの定理 3.6、389 ページの定理 3.11）でさえ、一般には成り立たなくなるのだ。

指数関数 $\exp(x)$ のもっとも自然な拡張法は、無限級数による指数関数の定義 (3.2.11) をそのまま用いて、行列 A の指数関数を、

$$\exp(\mathsf{A}) := \mathsf{I}+\mathsf{A}+\frac{\mathsf{A}^2}{2}+\frac{\mathsf{A}^3}{3!}+\cdots+\frac{\mathsf{A}^n}{n!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathsf{A}^n}{n!} \tag{7.8.1}$$

と定義することだろう（もちろん、同じものを e^{A} とも書く）。ここで、一般項を書く際に $\mathsf{A}^0 = \mathsf{I}$, $0! = 1$ と約束した。よって $\exp(\mathsf{A})$ も $d \times d$ 行列になる。

(7.8.1) は行列の無限和だから、果たして収束してきちんと意味をもつのかを気にしなくてはならない。ただし、行列の式といっても、各々の成分に注目すれば、単なる（複素数の）無限級数に過ぎない。各々の成分を定義する無限級数が収束するかどうかを議論すればいい。少し考えれば、任意の行列 A について、(7.8.1) の無限級数の各成分が絶対収束することが簡単にわかる。つまり、(7.8.1) によって $\exp(\mathsf{A})$ はきちんと定義される。

(7.8.1) が絶対収束することの証明の概略：$a = \max_{i,j} |(\mathsf{A})_{i,j}|$ を成分の絶対値の最大値とする。簡単な帰納法により、任意の正の整数 n について、

$$|(\mathsf{A}^n)_{i,j}| \leq \frac{(ad)^n}{d} \tag{7.8.2}$$

が全ての成分 i, j に関して成り立つことが示される。この上界を使えば、各成分についての無限級数を、もっとも基本的な実数の指数関数の場合（221 ページの定理 2.19）と全く同様に扱うことができる。∎

行列の指数関数のエルミート共役については、定義 (7.8.1) から直ちに

$$(e^{\mathsf{A}})^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^n)^\dagger}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathsf{A}^\dagger)^n}{n!} = e^{\mathsf{A}^\dagger} \tag{7.8.3}$$

が得られる。ここで、A を任意のエルミート行列としよう。$(e^{\mathsf{A}})^\dagger = e^{\mathsf{A}}$ なので、e^{A} もエルミート行列である。一方、やはり A を任意のエルミート行列とすると、

$$\{e^{i\mathsf{A}}\}^\dagger = e^{(i\mathsf{A})^\dagger} = e^{-i\mathsf{A}} \tag{7.8.4}$$

である。すぐ後に (7.8.18) で見るように、$e^{i\mathsf{A}}$ と $e^{-i\mathsf{A}}$ は互いに逆行列になっている。つまり、$e^{i\mathsf{A}}$ はユニタリー行列である。これらの関係は、a を実数とするとき、e^a は実数であり、e^{ia} は絶対値が 1 の複素数であることと対応している。

また、P を正則行列、B を任意の正方行列とするとき、$(\mathsf{P}^{-1}\mathsf{B}\mathsf{P})^n = \mathsf{P}^{-1}\mathsf{B}^n\mathsf{P}$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\exp[\mathsf{P}\mathsf{B}\mathsf{P}^{-1}] &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\mathsf{P}\mathsf{B}\mathsf{P}^{-1})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathsf{P}\mathsf{B}^n\mathsf{P}^{-1}}{n!} \\ &= \mathsf{P}\,\exp[\mathsf{B}]\,\mathsf{P}^{-1} \qquad (7.8.5)\end{aligned}$$

が成り立つことがわかる。この関係は頻繁に使われる。

■簡単に計算できる場合　行列の n 乗が簡単に求まる場合には、指数関数 (7.8.1) も計算できる。とくに簡単

なのは、対角行列

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_d \end{pmatrix} \tag{7.8.6}$$

である。Λ^n は単に各成分を n 乗した対角行列だから、指数関数の定義から、

$$\begin{aligned} &\exp(\Lambda) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} (\lambda_1)^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\lambda_2)^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\lambda_d)^n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_1)^n/n! & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_2)^n/n! & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_d)^n/n! \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_d} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{7.8.7}$$

のように、各成分の指数関数を並べた対角行列が得られる。特別な場合として、

$$\exp(\mathsf{0}) = \mathsf{I} \tag{7.8.8}$$

であり、$e^0 = 1$ の素直な一般化になっている。

また、行列 A が

$$\mathsf{P}^{-1}\mathsf{A}\mathsf{P} = \Lambda \tag{7.8.9}$$

のように対角化できるとする（Λ は (7.8.6) と同じ対角行列で、$\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ は A の固有値）。$\mathsf{A} = \mathsf{P}\Lambda\mathsf{P}^{-1}$ なので、(7.8.5) と (7.8.7) からすぐに

$$\exp(\mathsf{A}) = \mathsf{P}\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_d} \end{pmatrix}\mathsf{P}^{-1} \tag{7.8.10}$$

が得られる。

A がエルミート行列の場合にはスペクトル分解 (7.6.62) が使える。A^n についての (7.6.63) と指数関

数の定義 (7.8.1) から、

$$e^{\mathsf{A}} = \sum_{j=1}^{d} e^{\lambda_j} \mathsf{P}_j \tag{7.8.11}$$

が示される。エルミート行列の指数関数が e^{A} が、(7.6.64) で $f(x) = e^x$ としたものと一致することがわかる。

問 7.8.1.a　行列 A の固有値 λ に対応する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}$ とする。$\boldsymbol{v}$ は $\exp(\mathsf{A})$ の固有ベクトルであることを示せ（これは簡単)。

問 7.8.1.b　行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{7.8.12}$$

の指数関数を求めよ（これは対角化できない行列なので、この本で述べた一般論では扱えない。地道に A^n の形を推測し（証明し）計算せよ)。

■ディターミナントとトレースについての等式　次の等式は物理への応用でも時に役に立つ。

定理 7.66. 任意の正方行列 A について、

$$\det[e^{\mathsf{A}}] = e^{\mathrm{Tr}[\mathsf{A}]} \tag{7.8.13}$$

が成り立つ。

証明：A の固有値を $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ とすると、(7.6.13) より (7.8.13) の右辺は $e^{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$ に等しい。よって、(7.8.13) の左辺が $e^{\sum_{i=1}^{d} \lambda_i}$ となることを言えばよい。シューア分解（1255 ページの定理 7.39）によりユニタリー行列 U と上三角行列 T によって A は $\mathsf{A} = \mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^{-1}$ と書ける。(7.8.5) と行列の積のディターミナントについての (7.4.68) より、

$$\begin{aligned} &\det[e^{\mathsf{A}}] = \det[e^{\mathsf{U}\mathsf{T}\mathsf{U}^{-1}}] = \det[\mathsf{U}\, e^{\mathsf{T}}\, \mathsf{U}^{-1}] \\ &= \det[\mathsf{U}] \det[e^{\mathsf{T}}] \det[\mathsf{U}^{-1}] = \det[e^{\mathsf{T}}] \end{aligned} \tag{7.8.14}$$

である。定理 7.39 より、上三角行列 T の対角成分は

（並ぶ順番は違うかもしれないが）$\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ である。上三角行列どうしの積についての定理 7.9（1038 ページ）を思い出せば、T^n も上三角行列であり、その対角成分は $(\lambda_1)^d, \ldots, (\lambda_d)^n$ とわかる。よって、e^{T} も上三角であり、その対角成分は $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_d}$ である。最後に、上三角行列のディターミナントについての (7.4.79) を使えば、$\det[e^{\mathsf{T}}] = \prod_{i=1}^{d} e^{\lambda_i}$ となり、求める等式が示される。∎

7.8.2　行列の和の指数関数とその応用

A, B を $d \times d$ 行列として、和の指数関数 $e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}}$ について考えてみよう。これが（一般には）$e^{\mathsf{A}}\, e^{\mathsf{B}}$ と積に分かれないことには既に触れたが、まず、この点をみていこう。実数の指数関数についての 338 ページでの計算を思い出し、ともかく、展開の低次でのふるまいを調べてみよう。等しくなってほしい量の差を、定義に

従って、A, B の二次までをみると、

$$
\begin{aligned}
& e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} - e^{\mathsf{A}}\, e^{\mathsf{B}} \\
&= \left\{ \mathsf{I} + (\mathsf{A}+\mathsf{B}) + \frac{(\mathsf{A}+\mathsf{B})^2}{2} + \cdots \right\} \\
&- \left\{ \mathsf{I} + \mathsf{A} + \frac{\mathsf{A}^2}{2} + \cdots \right\} \left\{ \mathsf{I} + \mathsf{B} + \frac{\mathsf{B}^2}{2} + \cdots \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ (\mathsf{A}+\mathsf{B})^2 - 2\mathsf{AB} - \mathsf{A}^2 - \mathsf{B}^2 + \cdots \right\} \\
&= -\frac{[\mathsf{A}, \mathsf{B}]}{2} + \cdots \qquad (7.8.15)
\end{aligned}
$$

となる（$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = \mathsf{AB} - \mathsf{BA}$ である）。省略された $\cdots$ には、行列の三乗以上の項が含まれているが、それらが $-[\mathsf{A}, \mathsf{B}]/2$ と打ち消し合うということは一般にはない。つまり、

$$
e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}}\, e^{\mathsf{B}} \quad \textbf{は一般には成立しない！} \qquad (7.8.16)
$$

という重要な結論が得られた。

(7.8.15) をみれば、望んだ関係が成り立たない原因は A と B の順番を交換できないことだとわかる。も

し、たまたま $\mathsf{AB} = \mathsf{BA}$ が成り立つなら、(7.8.15) 右辺の「おつり」はゼロになる。さらに、その場合には、3.2.3 節での「$e^{x+y} = e^x e^y$ の証明」をそのまま拡張することができる（「お気楽バージョン」は完全にそのまま。「厳密バージョン」についても誤差の評価を (7.8.2) の路線で少し変更すればいい)。つまり、

$$[\mathsf{A}, \mathsf{B}] = 0 \text{ ならば } \quad e^{\mathsf{A}+\mathsf{B}} = e^{\mathsf{A}}\, e^{\mathsf{B}} \qquad (7.8.17)$$

がいえる。この関係は、予想されるより、はるかに役に立つ。とくに、$\mathsf{B} = -\mathsf{A}$ とすれば、

$$e^{\mathsf{A}}\, e^{-\mathsf{A}} = e^0 = \mathsf{I} \qquad (7.8.18)$$

が得られる。すでに述べたように、e^{A} と $e^{-\mathsf{A}}$ は互いに逆行列なのである。

■指数関数の別の表式　(7.8.17) の最初の応用として、行列の指数関数の別の表式 (7.8.23) を導く。もちろん、

A の定数倍どうしは互いに交換するから、

$$\exp((t+s)\mathsf{A}) = \exp(t\mathsf{A})\exp(s\mathsf{A}) \tag{7.8.19}$$

が成り立つ。この関係をくり返し使うことで、任意の正整数 N について

$$\exp(\mathsf{A}) = \Big\{\exp\big(\frac{\mathsf{A}}{N}\big)\Big\}^N \tag{7.8.20}$$

が得られる。ここで定義 (7.8.1) を使うと

$$\exp\big(\frac{\mathsf{A}}{N}\big) = \mathsf{I} + \frac{\mathsf{A}}{N} + O\big(\frac{1}{N^2}\big) \tag{7.8.21}$$

なので、(7.8.20) に戻し、$1/N$ についてのオーダーで整理すると、

$$\exp(\mathsf{A}) = \Big\{\mathsf{I}+\frac{\mathsf{A}}{N}+O\big(\frac{1}{N^2}\big)\Big\}^N = \Big\{\mathsf{I}+\frac{\mathsf{A}}{N}\Big\}^N + O\big(\frac{1}{N}\big) \tag{7.8.22}$$

が得られる。ここで、$O(1/N^2)$ の項が N 個でてくるので、それらをまとめて $O(1/N)$ とした。よって、ここで $N \nearrow \infty$ の極限をとることで、

$$\exp(\mathsf{A}) = \lim_{N \nearrow \infty} \left\{ \mathsf{I} + \frac{\mathsf{A}}{N} \right\}^N \qquad (7.8.23)$$

が示された。これは、指数関数の基本的な (場合によっては定義としても採用される）表式 (3.2.23) に対応する表式である。行列の指数関数について何かを証明するときには、定義 (7.8.1) か表式 (7.8.23) か、いずれか使いやすいほうを用いることが多い。

なお、ここでの (7.8.23) の導出は如何にもラフだったが、$O(1/N)$ などと書いた「おつり」の項について、きちんとした評価をすれば、すべて厳密に導出できる。根本的に難しい点はないので、気になる読者は証明を試みてほしい。

■線形常微分方程式の形式解　行列の指数関数を用いると、定数係数の一階線形常微分方程式の解をコンパクトな形で書き表すことができる。定数係数の線形常微分方程式については 8.3 節で議論するが、ここでは

簡単に先取りをしておこう。

実変数 t, ε について、(7.8.19) と定義 (7.8.1) を用いて、

$$e^{(t+\varepsilon)\mathsf{A}} = e^{\varepsilon\mathsf{A}} e^{t\mathsf{A}} = \{\mathsf{I} + \varepsilon\mathsf{A} + O(\varepsilon^2)\} e^{t\mathsf{A}} \tag{7.8.24}$$

がいえる。よって、

$$\frac{e^{(t+\varepsilon)\mathsf{A}} - e^{t\mathsf{A}}}{\varepsilon} = \mathsf{A}\, e^{t\mathsf{A}} + O(\varepsilon) \tag{7.8.25}$$

となるから、$\varepsilon \to 0$ とすれば、

$$\boxed{\frac{d}{dt} e^{t\mathsf{A}} = \mathsf{A}\, e^{t\mathsf{A}} \qquad (7.8.26)}$$

というきれいな関係が得られる。もちろん、行列の微分は、各成分を微分するという意味に解釈する。この結果も十分に注意深く議論すれば厳密に証明できる。

8.3.1 節でみるように、一般の定数係数の一階線形常微分方程式は、

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \mathsf{A}\, \boldsymbol{x}(t) \tag{7.8.27}$$

と書くことができる（これは、(8.3.5)）。ここで、A は実行列であり、$\boldsymbol{x}(t)$ は時間に依存する未知の実ベクトルである[*139]。ここで、初期状態のベクトル $\boldsymbol{x}(0)$ が与えられたとして、任意の実数 t について、

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{t\mathsf{A}}\,\boldsymbol{x}(0) \tag{7.8.28}$$

とする。行列の指数関数の微分に関する (7.8.26) に注意すると、(7.8.28) は自動的に微分方程式 (7.8.27) を満たすことがわかる。つまり、定数係数の一階線形常微分方程式の一般解を、行列の指数関数を用いて「一言で」表すことができるのである。

もちろん、(7.8.28) の表式のおかげで、微分方程式が奇跡的に楽に解けるようになったりはしない。けっきょく、定数係数の一階線形常微分方程式の一般解を求めることと、行列の指数関数を求めることが完全に等価だとわかっただけで、必要な計算量は基本的には

[*139] もちろん、複素行列、複素ベクトルについても、以下の議論はそのまま成り立つ。

かわらない。ただ、(7.8.28) のような（形式的だが）簡潔な表現があれば、なんらかの議論の見通しがよくなることはある。7.8.3 節で見る連続時間のマルコフ連鎖の問題が、その好例である。

■リーの積公式とその応用　A, B を任意の $d \times d$ 行列とし、これらは必ずしも交換しないとしよう。よって、(7.8.17) の関係は使えないのだが、それに変わる関係式がいくつか知られている。ここでは、その代表であるリーの積公式をみておこう。

まず、行列の指数関数の表式 (7.8.23) をそのまま使うと、

$$\exp(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = \lim_{N \nearrow \infty} \left\{ \mathsf{I} + \frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{N} \right\}^N \tag{7.8.29}$$

である。ここで、かっこの中身を

$$\begin{aligned} \mathsf{I} + \frac{\mathsf{A}+\mathsf{B}}{N} &= \Big(\mathsf{I} + \frac{\mathsf{A}}{N}\Big)\Big(\mathsf{I} + \frac{\mathsf{B}}{N}\Big) + O\big(\frac{1}{N^2}\big) \\ &= \exp\big(\frac{\mathsf{A}}{N}\big)\exp\big(\frac{\mathsf{B}}{N}\big) + O\big(\frac{1}{N^2}\big) \end{aligned} \tag{7.8.30}$$

と書き換えておく（ここで (7.8.21) を用いた。(7.8.21) はこの先の計算でも断りなく使う）。これを、もとの (7.8.29) に戻し、$O(1/N^2)$ の項は N 個集まって $O(1/N)$ になることに注意すれば、

$$\exp(\mathsf{A}+\mathsf{B}) = \lim_{N\nearrow\infty}\left\{\exp\Big(\frac{\mathsf{A}}{N}\Big)\exp\Big(\frac{\mathsf{B}}{N}\Big)\right\}^N \tag{7.8.31}$$

という、**リー**[*140]**の積公式** (Lie product formula) が得られる[*141]。ここでも数学的な証明は省略したが、厳密な証明も難しくはない。この公式は、基礎的に重要

[*140] Marius Sophus Lie (1842–1899) ノルウェイの数学者。連続対称性についての数学をリー群やリー環として定式化した。これらの理論は物理学とも深く関わっている。

[*141] (7.8.31) をトロッター公式と呼ぶことがあるが、それは正確ではない。有限次元行列についての (7.8.31) をある種の無限次元行列（自己共役演算子）に拡張したのがトロッター公式である。

なだけでなく、量子力学の経路積分表示や常微分方程式の数値計算などにも応用されている。

積公式の興味深い応用を一つ紹介しよう。$e^{\mathsf{A}+\varepsilon\,\mathsf{B}}$ という形の指数関数を実変数 ε について展開してみる。この場合、積公式 (7.8.31) の右辺の極限の中身は、

$$
\begin{aligned}
&\left\{\exp\Bigl(\frac{\mathsf{A}}{N}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{\varepsilon\,\mathsf{B}}{N}\Bigr)\right\}^N \\
&=\left\{\exp\Bigl(\frac{\mathsf{A}}{N}\Bigr)\Bigl(\mathsf{I}+\frac{\varepsilon\,\mathsf{B}}{N}+O\bigl(\frac{\varepsilon^2}{N^2}\bigr)\Bigr)\right\}^N \\
&=\left\{\exp\Bigl(\frac{\mathsf{A}}{N}\Bigr)+\exp\Bigl(\frac{\mathsf{A}}{N}\Bigr)\frac{\varepsilon\,\mathsf{B}}{N}+O\Bigl(\frac{\varepsilon^2}{N^2}\Bigr)\right\}^N \\
&=\exp(\mathsf{A})+\sum_{n=1}^{N}\left\{\exp\Bigl(\frac{n\mathsf{A}}{N}\Bigr)\frac{\varepsilon\,\mathsf{B}}{N}\exp\Bigl(\frac{(N-n)\mathsf{A}}{N}\Bigr)\right\} \\
&\quad+O(\varepsilon^2)
\end{aligned}
\tag{7.8.32}
$$

と展開できる[*142]。ここで、$N\nearrow\infty$ の極限をとると、

[*142] ここで、$O(\varepsilon^2/N^2)$ の項が全部で $O(N^2)$ でてくるので、それらを最後の $O(\varepsilon^2)$ の項としてまとめた。

n についての和はちょうど $s = n/N$ についての積分に書き換えられ、

$$\exp(\mathsf{A} + \varepsilon\,\mathsf{B}) = \exp(\mathsf{A}) + \varepsilon \int_0^1 ds\, \exp(s\,\mathsf{A})\,\mathsf{B}\,\exp[(1-s)\,\mathsf{A}] + O(\varepsilon^2) \tag{7.8.33}$$

となる。行列が交換しないために、パラメター ε についての展開から自然に積分がでてくるのだ。この仕掛けはなかなか面白い。この表式は、量子力学や量子統計力学の摂動論などにおいて活躍する。

量子統計力学からの例をみよう。H と M を（一般には互いに交換しない）エルミート行列とし、考えている量子系のハミルトニアンが $\mathsf{H} - h\,\mathsf{M}$ という形をしているとしよう。h は実数のパラメターである[*143]。こ

[*143] たとえば、量子スピン系のモデルなら、H がスピン間の相互作用、M は全磁化、h は外部磁場になる。

の系の平衡状態の性質を表す自由エネルギーは、

$$F(\beta, h) = -\frac{1}{\beta} \log \mathrm{Tr}\big[\exp[-\beta(\mathsf{H} - h\,\mathsf{M})]\big] \tag{7.8.34}$$

と書ける。$\beta > 0$ は絶対温度に反比例するパラメターである。トレースの部分に (7.8.33) を適用する。トレースの線形性に注意すると、

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}\big[\exp[-\beta(\mathsf{H} - h\,\mathsf{M})]\big] - \mathrm{Tr}\big[\exp[-\beta\mathsf{H}]\big] \\
&= \beta h \int_0^1 ds\, \mathrm{Tr}\big[\exp(-\beta s\mathsf{H})\, \mathsf{M}\, \exp(-\beta(1-s)\mathsf{H})\big] \\
&\quad + O(h^2) \\
&= \beta h \int_0^1 ds\, \mathrm{Tr}\big[\mathsf{M}\, \exp(-\beta\mathsf{H})\big] + O(h^2) \\
&= \beta h\, \mathrm{Tr}\big[\mathsf{M}\, \exp(-\beta\mathsf{H})\big] + O(h^2)
\end{aligned} \tag{7.8.35}$$

となる。トレースの中で行列が交換できること ((7.2.118) 参照）を用い、最後は積分が「空回り」していることに注意した。この結果を用いて、自由エネ

ルギーの h 微分を $h=0$ で評価すると、

$$\left.\frac{\partial F(\beta,h)}{\partial h}\right|_{h=0} = -\frac{\mathrm{Tr}[\mathsf{M}\ \exp(-\beta\mathsf{H})]}{\mathrm{Tr}[\exp(-\beta\mathsf{H})]} \tag{7.8.36}$$

というきれいな形が得られる。右辺は、ちょうど、この平衡状態における M の期待値になっている。

問 7.8.2.a　(7.8.33) を拡張して $O(\varepsilon^2)$ まで正確な表式を求めよ。

問 7.8.2.b　（統計力学をよく知っている読者向け）問 7.8.2.a の結果を用いて、$\partial^2 F(\beta,h)/\partial h^2|_{h=0}$ の表式を求めよ。ここまで来ると、古典統計力学とは異なった結果が得られる。

7.8.3　連続時間のマルコフ連鎖

最後に、行列の指数関数（とくに、常微分方程式の形式解）の重要な応用として、連続時間の**マルコフ連鎖**について述べよう。7.7.2 節では、有限状態・離散時間の

マルコフ連鎖を扱った。ここで取り扱うのは、やはり有限状態だが、連続時間のマルコフ連鎖である。連続時間のマルコフ連鎖を**マルコフ過程** (Markov process) と呼ぶこともある。7.7.2 節での設定、アイディア、結果を多数用いるので、ここを読む前に 7.7.2 節をしっかりと読んでいただきたい。

■問題設定と基本方程式　われわれの考えている系は Ω 個の状態をとるとし、それらを $j = 1, \ldots, \Omega$ と呼ぶ。7.7.2 節とちがって、時間 t は（現実世界と同様[*144]）連続に流れていき、系の状態は、ある瞬間に、ある状態から別の状態へと一瞬でジャンプするとしよう。このようなジャンプのおこる割合は、過去の記憶に影響されず、その瞬間の系の状態だけで決まるとする。

　より具体的な時間発展のルールを以下のように定める。ある時刻に系が状態 j にいるとする。それから

[*144] 「現実の時間は果たして連続なのか？」と疑問に思う人は、まずは、2.2.2 節の最後の議論を読んでほしい。

（短い）時間間隔 Δt の後に、系が別の状態 i にいる確率は $\Delta t\, R_{i,j} + O((\Delta t)^2)$ だと定める。時間間隔 Δt の間のどの瞬間にもジャンプするチャンスがあったと考えると、i に移っている確率が Δt に比例するのはもっともだ。$i \neq j$ について、比例係数 $R_{i,j} \geq 0$ は j から i への**遷移率**または**推移率** (transition rate) と呼ばれる。$O((\Delta t)^2)$ が足してあるのは、時間間隔 Δt のあいだに、二回以上のジャンプがおきる可能性があるからだ。よって、ある時刻に系が状態 j にいるなら、それから時間間隔 Δt の後にも、やはり j にいる確率は、$1 - \Delta t \sum_{i\,(i\neq j)} R_{i,j} + O((\Delta t)^2) = 1 + \Delta t\, R_{j,j} + O((\Delta t)^2)$ である。ここで、$R_{j,j} = -\sum_{i\,(i\neq j)} R_{i,j} \leq 0$ とした。$\Omega \times \Omega$ 行列 $\mathsf{R} = (R_{i,j})_{i,j=1,\ldots,\Omega}$ を遷移率行列と呼ぼう。

遷移率行列は、定義から、任意の $j = 1, \ldots, \Omega$ に対して

$$\sum_{i=1}^{\Omega} R_{i,j} = 0 \tag{7.8.37}$$

を満たす。確率行列の (7.7.23) に対応する関係だ（ここでは右辺が 1 でなく 0 であることに注意)。ここでも、1 を並べた列ベクトルを

$$\boldsymbol{d}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{7.8.38}$$

と書こう（本節でも、ずっとこの記号を用いる)。(7.8.37) は $\mathsf{R}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{0}$ と書けるから、やはり転置行列の固有値についての 1251 ページの定理 7.36 を使って、0 が遷移行列 R の固有値だとわかる。

系の確率的な時間発展を定義しよう。ある時刻 t に系が状態 j をとる確率を $p_j(t)$ とする。もちろん、$0 \le p_j(t) \le 1$ と $\sum_{j=1}^{\Omega} p_j(t) = 1$ が任意の t において成り立つ。これらをずらりと並べた**確率分布** $\boldsymbol{p}(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots, p_\Omega(t))^{\mathrm{t}}$ を（時間 t に依存する）列ベクトルとみなそう。

さて、時刻 t に系の状態が j だったとすると、時

刻 $t+\Delta t$ に、状態が $i\,(\neq j)$ となる確率は $\Delta t\,R_{i,j}+O((\Delta t)^2)$、そのまま j に留まる確率は $1+\Delta t\,R_{j,j}+O((\Delta t)^2)$ だった。ここで、時刻 t に系が状態 j をとる確率は $p_j(t)$ であることを用いると、時刻 $t+\Delta t$ に系が状態 i にいる確率を

$$\begin{aligned} p_i(t+\Delta t) = \{1+\Delta t\,R_{i,i}+O((\Delta t)^2)\}p_i(t) \\ + \sum_{j\,(j\neq i)} \{\Delta t\,R_{i,j}+O((\Delta t)^2)\}p_j(t) \end{aligned} \tag{7.8.39}$$

と表すことができる。右辺第一項は系がずっと状態 i にいる場合の寄与、第二項はいずれかの状態 $j\,(\neq i)$ から i にジャンプしてきた場合の寄与である。時刻 t での状態 j は何でもかまわないので第二項では j についての和をとった。(7.8.39) を変形すると、

$$\frac{p_i(t+\Delta t)-p_i(t)}{\Delta t} = \sum_{j=1}^{\Omega} R_{i,j}\,p_j(t)+O(\Delta t) \tag{7.8.40}$$

となり、$\Delta t \to 0$ とすれば、

$$\frac{d}{dt}p_i(t) = \sum_{j=1}^{\Omega} R_{i,j}\, p_j(t) \quad (i = 1, \ldots, \Omega) \tag{7.8.41}$$

あるいは、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}(t) = \mathsf{R}\,\boldsymbol{p}(t) \tag{7.8.42}$$

という微分方程式（定数係数の一階常微分方程式）が得られる。この微分方程式を、物理では**マスター方程式** (master equation) と、数学では**コルモゴロフ**[*145]**の先進方程式** (Kolmogorov's forward equation) と呼ぶ[*146]。$\boldsymbol{p}(0)$ が確率分布であるとき、(7.8.41), (7.8.42)

[*145] Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) ロシア（ソ連）の数学者、数理物理学者。確率論の現代的な定式化をおこなった一人。確率論に多くの本質的な業績があり、ハミルトニアン力学系において本質的な KAM (Kolmogorov, Arnold, Moser) 理論にも貢献した。

[*146] 対応する (等価な情報をもった) 後進方程式 (backward equation) というものもあってそれなりに便利なのだが、物理の文献にはあまり登場しない（しかし、無限に大きな系のマルコフ連鎖を定式化する際には後進方程式を使うのが自然だ)。

で決まる $\boldsymbol{p}(t)$ も任意の t において確率分布になる。この事実は直接確かめることもできるが、後で証明する補題 7.67 からすぐに示される。

■もっとも簡単な例　ここでも、図 7.6 に相当する、もっとも簡単な例をみておこう。系の状態は二つ ($\Omega = 2$) とし、$R_{2,1} = \tilde{\alpha} > 0$, $R_{1,2} = \tilde{\beta} > 0$ とする。マスター方程式（先進方程式）(7.8.41) は、

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) &= -\tilde{\alpha}\, p_1(t) + \tilde{\beta}\, p_2(t) \\ \dot{p}_2(t) &= -\tilde{\beta}\, p_2(t) + \tilde{\alpha}\, p_1(t) \end{aligned} \tag{7.8.43}$$

となる。連立微分方程式のようにみえるが、$p_1(t) + p_2(t) = 1$ に注意すれば、これがきわめて初等的な（非斉次項を含む）減衰の方程式であることがわかる (5.2.2 節を見よ)。一般解は、C を任意定数として、

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} + C\, e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})t} \\ p_2(t) &= \frac{\tilde{\alpha}}{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}} - C\, e^{-(\tilde{\alpha}+\tilde{\beta})t} \end{aligned} \tag{7.8.44}$$

となり、定常分布にむかって指数的に収束していく様子がみてとれる。

■一般の収束定理　(7.8.28) の結果を用いれば、マスター方程式 (7.8.42) の形式的な解を

$$\boldsymbol{p}(t) = \exp(t\,\mathsf{R})\,\boldsymbol{p}(0) \tag{7.8.45}$$

と書き下すことができる。ここでも、遷移率行列 R に適切な条件を課して、時間 t が大きくなるとき解 $\boldsymbol{p}(t)$ が一意的な定常分布に収束することをみよう。

遷移率行列 R は非対角成分が非負の実行列なので、1345 ページのペロン・フロベニウスの定理のための条件 (i), (ii) を自動的に満たす。ここでは、さらに (iii) の連結性（既約性）も満たすと仮定しよう。つまり、

(iii) **連結性：**R のゼロでない（正の）非対角成分を介して、$1, 2, \ldots, \Omega$ がすべて「つながっている」。正確にいうと、$i \neq j$ なる任意の $i, j = 1, \ldots, \Omega$ に対して、ある正整数 n があり、$n+1$ 個の数 $i_0, i_1, \ldots, i_n$ がとれて、

$i_0 = j$, $i_n = i$ であり、$(\mathsf{R})_{i_\ell, i_{\ell-1}} > 0$ が $\ell = 1, 2, \ldots, n$ について成り立つ。

すると、ペロン・フロベニウスの定理（1349 ページの定理 7.57）より、R の固有値 0 は縮退しないこと、R の固有値 0 に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ は全ての成分が正になるようにとれること、R の 0 以外の任意の固有値 λ は $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ を満たすことがいえる（0 がペロン・フロベニウス固有値と同定する議論は 1389 ページの定理 7.63 の証明とまったく同じ）。$\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ を、全ての成分の和が 1 になるように規格化し、**定常分布**と呼ぶ。

ここで、任意の正の時間間隔 $\tau > 0$ を選び固定する。以下の事実は、連続時間のマルコフ連鎖と離散時間のマルコフ連鎖を結び付けてくれる。

補題 7.67 (遷移率行列と確率行列)**.** $\mathsf{T} := \exp(\tau\mathsf{R})$ は確率行列である。また、R が連結性 *(iii)* を満たすなら、任意の $i, j = 1, \ldots, \Omega$ について $T_{i,j} > 0$ である。

前半は定義を考えればほぼ自明。後半は「時間 $\tau > 0$

が経過するあいだには、十分に何回もジャンプがおきていて、どの状態から出発しようと、すべての状態に(小さいかもしれないが）正の確率で到達している」ことを言っている。やはり直観的には明らかだろう。後半の証明が少し面倒なので、補題 7.67 はこの節の最後で証明する。

ここで、遷移率行列 R には（弱い）連結性だけを要求したのに、対応する確率行列 T が自動的に「強い連結性 (1370 ページ、1391 ページ)」を満たすことに注意しよう。これは、連続時間のマルコフ連鎖では、(7.7.40) の例のように「いくつかの状態のあいだを周期的に移り変わる」ことがあり得ないからだ。そういう意味では、連続時間の定式化のほうが扱いやすいといっていいだろう。

補題 7.67 があれば、定常分布への収束の問題は、離散時間のマルコフ連鎖の問題に完全に還元できる。長い時間 t を $t = N\tau + s$（ただし、$0 \leq s < \tau$）と書けば、

$$\boldsymbol{p}(t) = \exp(t\,\mathsf{R})\boldsymbol{p}(0) = \exp(s\,\mathsf{R})\,\mathsf{T}^N\boldsymbol{p}(0) \qquad (7.8.46)$$

である。離散時間マルコフ連鎖の収束定理（1395 ページの定理 7.64）から、$t \nearrow \infty$（つまり $N \nearrow \infty$）では $\mathsf{T}^N \boldsymbol{p}(0)$ は定常分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ に収束する。もちろん $\exp(s\,\mathsf{R})\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ だから（$\mathsf{R}\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} = \boldsymbol{0}$ を使う）、$\boldsymbol{p}(t)$ が $t \nearrow \infty$ で定常分布 $\boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}$ に収束することが言えた。まとめておこう。

定理 7.68 (連続時間マルコフ連鎖の収束定理)**.** 連結性 *(iii)* をもつ任意の遷移率行列 R について

$$\lim_{t \nearrow \infty} \exp(t\,\mathsf{R}) = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})}(\boldsymbol{d}_0)^{\mathrm{t}} \tag{7.8.47}$$

が成り立つ。特に、任意の初期の確率分布 $\boldsymbol{p}^{(0)}$ に対応する解 (7.8.45) について、

$$\lim_{t \nearrow \infty} \boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}^{(\mathrm{s})} \tag{7.8.48}$$

が成り立つ。

最後に、いくつかの注意を。ランダムウォーク

(7.7.52) のような例題は、離散時間でも連続時間でもほぼ同様に議論することができる。また、連続時間のマルコフ連鎖の場合にも、(7.7.54) の T を R に置き換えて、**詳細つり合いの条件**を定式化することができる。その物理的な意味は離散時間の場合とまったく同じになるのでくり返さない。

補題 7.67 の証明：指数関数の表式 (7.8.23) を用いて、

$$\mathsf{T} = \exp(\tau\mathsf{R}) = \lim_{N\nearrow\infty}\left\{\mathsf{I} + \frac{\tau\mathsf{R}}{N}\right\}^N \tag{7.8.49}$$

と書く。行列の積の成分表示を使って

$$\begin{aligned}&\left(\left\{\mathsf{I} + \frac{\tau\mathsf{R}}{N}\right\}^N\right)_{i,j}\\ &= \sum_{k_1=1}^{\Omega}\cdots\sum_{k_{N-1}=1}^{\Omega}\left(\mathsf{I} + \frac{\tau\mathsf{R}}{N}\right)_{i,k_1}\left(\mathsf{I} + \frac{\tau\mathsf{R}}{N}\right)_{k_1,k_2}\\ &\cdots\left(\mathsf{I} + \frac{\tau\mathsf{R}}{N}\right)_{k_{N-1},j}\end{aligned} \tag{7.8.50}$$

と書けることに注意しておく。

まず、$\sum_{i=1}^{\Omega} T_{i,j} = 1$ を示す。任意の ℓ について $\sum_{k=1}^{\Omega} R_{k,\ell} = 0$ だから、

$$\sum_{k=1}^{\Omega} \left(\mathsf{I} + \frac{\tau \mathsf{R}}{N} \right)_{k,\ell} = 1 \tag{7.8.51}$$

である。(7.8.50) に注意して、この関係を何度も使うと、

$$\sum_{i=1}^{\Omega} \left(\left\{ \mathsf{I} + \frac{\tau \mathsf{R}}{N} \right\}^{N} \right)_{i,j} = 1 \tag{7.8.52}$$

が言える。(7.8.49) より、$\sum_{i=1}^{\Omega} T_{i,j} = 1$ がいえた。

あとは $T_{i,j} \geq 0$ がいえれば T が確率行列だとわかるが、これは簡単。N を十分に大きくとれば、任意の $k, k' = 1, \ldots, \Omega$ について $(\mathsf{I} + \tau \mathsf{R}/N)_{k,k'} \geq 0$ である。よって、(7.8.50) の和の中にある Ω^{N-1} 個の項はすべて非負であり、$T_{i,j} \geq 0$ が示された。

次に R の連結性を仮定して $T_{i,j} > 0$ を示そう。すぐ上で述べたように N が十分に大きければ (7.8.50) の和の中の項はすべて非負である。よって、その中から

好きなものだけ選んでくれば、厳密な下界が得られることになる。

まず $i = j$ のとき。ひたすら対角項だけを拾って、

$$\left(\left\{\mathsf{I} + \frac{\tau\mathsf{R}}{N}\right\}^N\right)_{i,i} \geq \left(1 + \frac{\tau R_{i,i}}{N}\right)^N \tag{7.8.53}$$

が得られる。右辺は $N \nearrow \infty$ で $\exp(\tau R_{i,i}) > 0$ となるので、

$$T_{i,i} \geq \exp(\tau R_{i,i}) > 0 \tag{7.8.54}$$

が言えた。

次は $i \neq j$ のとき。連結性の条件 (iii) で存在を保証された整数 n と列 $i_0, i_1, \ldots, i_n$ をとり、$r_{i,j} := R_{i_n,i_{n-1}} R_{i_{n-1},i_{n-2}} \cdots R_{i_1,i_0} > 0$ とする。やはり展開 (7.8.50) の中から好きな項だけを選んでくるのだが、今回は、なるべく多く対角成分を使い必要最低限だけ非

対角項を使うように、

$$
\begin{aligned}
&\Big(\{\mathsf{I}+\frac{\tau\mathsf{R}}{N}\}^N\Big)_{i,j}\\
&\geq \sum_{\substack{m_0,\ldots,m_n\\(\sum m_k=N-n)}}\Big(1+\frac{\tau R_{i_n,i_n}}{N}\Big)^{m_n}\\
&\quad\frac{\tau R_{i_n,i_{n-1}}}{N}\Big(1+\frac{\tau R_{i_{n-1},i_{n-1}}}{N}\Big)^{m_{n-1}}\\
&\qquad\cdots\Big(1+\frac{\tau R_{i_1,i_1}}{N}\Big)^{m_1}\ \frac{\tau R_{i_1,i_0}}{N}\Big(1+\frac{\tau R_{i_0,i_0}}{N}\Big)^{m_0}
\end{aligned}
$$

とする。ここで、$m_0,\ldots,m_n$ は各々の対角成分を何回拾うかを表しており、和が $N-n$ になる非負の整数の組全てについてたしあげる。さらに、$r_0:=\min_i R_{i,i}<0$ とすれば、これを

$$
\begin{aligned}
&\geq \frac{N!}{(N-n)!n!}\Big(1+\frac{\tau r_0}{N}\Big)^{N-n}\ \frac{\tau^n\, r_{i,j}}{N^n}\\
&=\Big(1+\frac{\tau r_0}{N}\Big)^{N-n}\ \frac{\tau^n\, r_{i,j}}{n!}\Big(1-\frac{1}{N}\Big)\Big(1-\frac{2}{N}\Big)\\
&\quad\cdots\Big(1-\frac{n-1}{N}\Big)
\end{aligned}
\tag{7.8.55}
$$

と書き直すことができる。ここで、$N!/\{(N-n)!\,n!\}$

は、N 項のうちのどこに n 個の非対角成分をはさむかの場合の数である。$N \nearrow \infty$ とすれば、

$$T_{i,j} \geq \exp(\tau r_0)\,\frac{\tau^n\, r_{i,j}}{n!} > 0 \tag{7.8.56}$$

が得られる。∎

第 8 章

常微分方程式の理論と解法

常微分方程式については、すでに 5 章でかなりの経験を積んでもらった。この章では、もう少し抽象的に議論を進め、一般論や線形微分方程式の一般的な解法をみていくことにしよう。

8.1 節では、もっとも基礎的なところに立ち

返り、そもそも常微分方程式に解が存在するのか、また解は一つだけかといった問題をあつかう。これによって、一般解に含まれる任意定数の個数もはっきりとする。その後の二つの節では、あつかいが楽で、また応用範囲も広い線形の常微分方程式について詳しく議論する。これは、7 章で学んだベクトルと行列の理論のもっとも優れた応用の一つでもある。8.2 節では線形常微分方程式の一般論を述べ、斉次方程式の基本解から非斉次方程式の一般解をつくる方法を紹介する。さいごの 8.3 節では、定数係数の線形常微分方程式に話をかぎり、いくつかの解法と物理への応用をみる。

- **常微分方程式についてのある程度の経験と、解とは何かについての理解。**
- **ベクトルと行列の理論。特に、行列の固有値と固有ベクトル。**

8.1　常微分方程式の解の存在と一意性

5 章では、与えられた微分方程式の解が本当にあるのか（解の存在)、あるいは、与えられた初期条件を満たす解は一つだけなのか（解の一意性)、といったことは当たり前だと思って問題にしてこなかった。だいたい、微分方程式を具体的に解いてしまえる場合には、解が存在することはわかりきっているから、そんな疑問を感じる余地もなかったわけだ。

この節では、これらの点について真面目に考えてみ

よう。単に数学的な厳密さを追いかけるというよりは、こういうことを考えるなかで、微分方程式の解というものがどうやって決まってくるのか、物理的なイメージもできてくる。さらに、おまけとして、手で解けない微分方程式の解をコンピューターを使って近似的に計算するための基本的なアイディアも理解できるのだ。

なお、この章では、基本的に実変数と実数値の関数だけをあつかう。とくに断らないかぎり、すべての量は実数と考えてよい。

8.1.1　近似解の構成 — 未知関数が一つの一階常微分方程式

ここでは、未知関数が一つの一階の常微分方程式だけを考える。より一般の場合への拡張はあとの節で考えるが、それは意外と簡単だ。

■基本になる考え方　未知関数が一つの一階の常微分方程式のもっとも一般的な形は、

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \tag{8.1.1}$$

だ。ここで、$f(t, x)$ は任意の実数値をとる二変数関数であり、$x(t)$ も実数値をとる一変数関数である。もちろん、イメージしやすいように、自分の好きな具体的な関数を思い浮かべながら、以下の一般論を読んでもらってかまわない。

以下、$t = 0$ での初期値 $x(0) = x_0$ を与えて、解 $x(t)$ をみつけることを考える[*1]。

そのため、小さな正の数 ε をとる。いずれ ε はどんどん小さくするわけだが、さしあたっては、ε は固定されているとしよう。

[*1] もちろん、x_0 は何らかの定数。わざわざ x_0 などと書かずに、「初期値 $x(0)$ を与えて」とやってもいいのだが、x_0 と書いた方が、あとあと抽象的な議論をするとき便利だ。

仮に解 $x(t)$ が存在したとする。ここにテイラー展開 (3.3.15) を使い、さらに (8.1.1) を代入すると、

$$\begin{aligned} x(t+\varepsilon) &= x(t) + \frac{dx(t)}{dt}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ &= x(t) + \varepsilon\, f(t, x(t)) + O(\varepsilon^2) \\ &\simeq x(t) + \varepsilon\, f(t, x(t)) \end{aligned} \tag{8.1.2}$$

が得られる。たとえ関数 $x(t)$ が未知であっても、テイラー展開が使えるという好例だ。(8.1.2) が解を一般的につくっていくための基本の式だ。以下、小さな誤差である $O(\varepsilon^2)$ のことはいったん忘れて話を進めよう (もちろん、いずれ思い出す)。

基本の式 (8.1.2) で $t = 0$ とすると、

$$x(\varepsilon) \simeq x_0 + \varepsilon\, f(0, x_0) \tag{8.1.3}$$

となる。ここで、右辺は完全にわかっている量だということに注目しよう。x_0 ははじめに与えられた初期条件だし、$f(0, x_0)$ も、与えられた関数 $f(t, x)$ に 0 と x_0 という定まった数を代入したものだ。つまり、$x(\varepsilon)$ が計算できた。

同じように、(8.1.2) で $t = \varepsilon$ とおけば、

$$x(2\varepsilon) \simeq x(\varepsilon) + \varepsilon\, f(\varepsilon, x(\varepsilon)) \tag{8.1.4}$$

のように、$x(\varepsilon)$ から $x(2\varepsilon)$ を求めることができる。これをくり返せば、

$$\begin{aligned} x(3\varepsilon) &\simeq x(2\varepsilon) + \varepsilon\, f(2\varepsilon, x(2\varepsilon)) \\ x(4\varepsilon) &\simeq x(3\varepsilon) + \varepsilon\, f(3\varepsilon, x(3\varepsilon)) \end{aligned} \tag{8.1.5}$$

というように、すでにわかっている $x(t)$ の値をもとにして、ε だけ時間がたったあとの $x(t)$ の値を求める式が、次々と得られる。これを一般化しておけば、$n = 1, 2, 3, \ldots$ について、

$$x(n\,\varepsilon) \simeq x((n-1)\varepsilon) + \varepsilon\, f\Big((n-1)\varepsilon, x((n-1)\varepsilon)\Big) \tag{8.1.6}$$

となる。いっけん抽象的な式だが、落ち着いて (8.1.3), (8.1.5) と比べれば、その意味はすぐにわかると思う。

問 8.1.1.a　以上のアイディアをもっとも簡単な微分

方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) \tag{8.1.7}$$

にあてはめてみよう。初期条件を $x(0) = 1$ とし、上の手続きをそのまま実行して、$x(1)$ を近似的に求めよ。$\varepsilon = 0.5, 0.2$（そして、根性があれば $\varepsilon = 0.1$）として、それぞれの場合の答えを求めよ。もちろん $x(1)$ の正確な値も知っているわけだから、その答えと比較せよ。

■近似解の構成　以上の考えをまとめることで、常微分方程式 (8.1.1) の近似解をつくることができる。これからつくる近似解を $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ と書こう。少しややこしいが、添え字に ε を書いたのは、時間の刻(きざ)み幅を ε にしたことを忘れないためだ。刻み幅が小さいほど近似がよくなることは、すぐにわかると思う。

　まず初期条件については、

$$\tilde{x}_\varepsilon(0) = x_0 \tag{8.1.8}$$

とする。つまり、$t = 0$ で、近似解と本当の解は完全に等しくしておく。つぎに、一般の $n = 1, 2, 3, \ldots$ につ

いて、漸化式

$$\tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon) = \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon) + \varepsilon\, f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \tag{8.1.9}$$

により $\tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon)$ を決める。これは、(8.1.6) の $\simeq$ を $=$ になおしただけの式になっている。あるいは、(8.1.8) と (8.1.9) をあわせて、形式的な和を用いて

$$\tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon) = x_0 + \sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon\, f(m\,\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon(m\,\varepsilon)) \tag{8.1.10}$$

と一気に書いてしまうこともできる。

以上で、近似解はほとんどできあがったのだが、このままでは t が「ε かける正の整数」という形になっているときにしか $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ が定義されていない。使い勝手(がって)が悪いので、一般の $t \geq 0$ でも $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ が値をもつように拡張しておこう。この拡張はどうやってもいいので、もっとも単純に、$0 \leq \tau < \varepsilon$ について、

$$\tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon + \tau) = \tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon) \tag{8.1.11}$$

図 8.1　近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ の時間変化の模式図。黒丸はそこに値があることを示し、白丸はそこには値がないことを示す。これは ε が大きすぎて近似が悪い状況を想定して描いた。

であるとしよう。要するに、近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ は、時間が ε たつごとにぽんぽんと不連続に変化し、それ以外の時はじっと一定値をたもっている（タクシーの料金方式）ということだ（図 8.1）。

こうして、時間の刻み幅を ε にとったときの近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ をつくった。定義 (8.1.8), (8.1.9) をみると、これはコンピューターでの数値計算にうってつけの形になっていることがわかるだろう。まず、（人間に）初期

値 $\tilde{x}_\varepsilon(0)$ を教えてもらい、それ以降は、(8.1.9) を使って[*2]、次々と $\tilde{x}_\varepsilon(\varepsilon), \tilde{x}_\varepsilon(2\varepsilon), \tilde{x}_\varepsilon(3\varepsilon), \tilde{x}_\varepsilon(4\varepsilon), \ldots$ を計算していけばよい。これは、コンピューターで常微分方程式の近似解を求めるときに使う方法の基本になっている[*3]。

■時間の刻み幅をゼロにする極限　さて、ここで時間の刻み幅 ε をどんどんゼロに近づける極限をとったとき、各々の $t \geq 0$ について

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) \to x(t) \tag{8.1.12}$$

のように、近似解がある関数 $x(t)$ に収束するとしよう。近似解の作り方から明らかに、このような関数 $x(t)$ は、微分方程式 (8.1.1) の解になっている。つまり、解の存

[*2] もちろん、コンピューターには関数 $f(t,x)$ をあらかじめ教えて、色々な変数の値について関数の値をすばやく計算できるようにしておく。

[*3] この方法そのもので近似解を計算することもできるが、実用的には、もっと精度のよい計算をするためのいろいろな工夫をする。

在が示される。

今、初期値の $x(0) = x_0$ から出発して、順番に少しずつ時間を先に延ばしながら進んでいったら、ちゃんとした解が得られた。これから、初期値 $x(0) = x_0$ に対応する解は、いま作ったもの一つしかないことになる。解の一意性もいえそうだ。

問題は、(8.1.12) のような収束がいえるか、ということだ。これについて、大ざっぱに考えてみよう（実は、この大ざっぱな考察の結果は正しくないのだが)。テイラー展開を用いた厳密な式 (8.1.2) と見比べると、近似的な漸化式 (8.1.6) にはだいたい $O(\varepsilon^2)$ の誤差が含まれているのがわかる。(8.1.9) も同じ式だから同じ誤差をもっている。つまり、近似解をつくるとき、時間刻み ε の 1 ステップごとに、$O(\varepsilon^2)$ の誤差が付け加わる。時間が全体で t だけたつあいだに、全部で t/ε ステップ程度が必要だから、トータルの誤差は $O(\varepsilon^2) \times (t/\varepsilon) = O(t\,\varepsilon)$ となる。よって、t がどんなに大きくなっても、ε をどんどん小さくしてやれば、こ

のトータルの誤差はいくらでも小さくなる。つまり、どんなに大きな t についても、(8.1.12) のような収束は保証され、よって、解の存在も一意性も成り立つ — と、一気に結論してしまいそうになるが、実は、これは甘い。

どこがどう甘いという前に、以下のような例をみれば、甘いことが明らかにわかる。たとえば、簡単な常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{1}{x(t)} \tag{8.1.13}$$

の解が

$$x(t) = \sqrt{2(C-t)} \tag{8.1.14}$$

となる（もちろん C は任意定数）ことは、微分してみればすぐにわかる。ところが、この解は $t \leq C$ では定義されているが、$t = C$ で $x = 0$ にずぼんと落ち込んで、そこで消えてなくなってしまう。どうがんばっても、これを $t > C$ まで延ばすことはできないのだ。解の存在は、それほど当たり前の話ではない。

上の例は、よくみると何が悪いかすぐにわかってしまうので、もう少しデリケートな例を。やはり簡単な微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sqrt{x(t)} \tag{8.1.15}$$

の解は、任意の定数 C を使って、

$$x(t) = \begin{cases} 0 & t \leq C \\ (t-C)^2/4 & t \geq C \end{cases} \tag{8.1.16}$$

と書ける。ずっと 0 で動かずにがまんしていて、$t = C$ を境に二次関数的に大きくなるような解だ。初期条件を $x(0) = 0$ と与えた場合、勝手な $C \geq 0$ について、(8.1.16) が解になることがわかる。初期条件を決めても解がたくさんあるのだから、一意性も成り立たない[*4]。

上の一般的な考察が正しければ、微分方程式の解は t がどんなに大きくても存在して、ただ一つのはずだった。何かがおかしいわけだ。

[*4] すべての t について $x(t) = 0$ というのも立派な解である。

8.1.2　解の存在と一意性 — 未知関数が一つの一階常微分方程式

前の節の大ざっぱなみつもりでは、一回のステップで $O(\varepsilon^2)$ の誤差が付け加わると言っただけで、その中身をまじめに考えなかった。実際、誤差のたまり方は、それほど簡単ではないのだ。たとえば、時刻 t まで近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ をつくったところで、そこからさらに時間を ε だけ進めることを考える。時刻 t の段階で、すでに真の解 $x(t)$ と近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ のあいだには何らかの誤差がある。本来、時間の進み方を決めるのに使うべきなのは $f(t, x(t))$ だが、われわれが使うのは $f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t))$ である。両者の差をみると、おおよそ

$$\begin{aligned} f(t, x(t)) &= f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t) + (\text{誤差})) \\ &\simeq f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t)) + (\text{誤差}) \times \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{x=\tilde{x}_\varepsilon(t)} \end{aligned} \tag{8.1.17}$$

となっている。ここで注目すべきなのは、前段階までの誤差に、偏微分 $\partial f(t,x)/\partial x$ がかかったものが、新しい誤差として付け加わることだ。それでも、小さな誤差が別の小さな誤差に変わるだけだと思いたいが、場合によっては偏微分 $\partial f(t,x)/\partial x$ がやたらと大きくなるかもしれない。そうすると、小さかった誤差がどんどん大きくなり、前の節のみつもりが破綻(はたん)してしまうかもしれない。

実際、解がとちゅうで消えてしまう (8.1.13) の例では、$f(t,x) = -1/x$ だから、問題の偏微分は $\partial f(t,x)/\partial x = 1/x^2$。たしかに解が消えてしまう $x = 0$ の付近では、いくらでも大きくなる。一意性が破れる (8.1.15) の方でも、ほぼ同じことがおきている (確かめよう)。

つまり、前の節でつくった近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ が正確かどうかは、一般論だけではわからない。与えられた関数 $f(t,x)$ の性質に応じて決まることなのだ。そして、(8.1.17) の誤差の伝わり方からもわかるように、**偏微**

分 $\partial f(t,x)/\partial x$ **がやたらと大きくなることがない**ことが、近似解が信頼できることを保証してくれる条件（の一つ）になる。

これを以下の定理としてまとめておこう。

定理 8.1 (解の存在と一意性)**.** x_0 を微分方程式の解の初期値とし、T, a を正の定数とする。$t \in [0, T]$, $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ を満たす t, x について、関数 $f(t, x)$ は、二つの変数について連続であり、二つの変数それぞれについて微分可能 (導関数が存在し、それは二つの変数について連続) とし、

$$f_0 := \max_{\substack{x \in [x_0 - a, x_0 + a] \\ t \in [0, T]}} |f(t, x)|, \quad T' := \min\left\{T, \frac{a}{f_0}\right\} \tag{8.1.18}$$

と定義する。このとき、各々の $t \in [0, T']$ について、$\varepsilon \searrow 0$ としたとき、上で構成した近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ はある関数 $x(t)$ に収束する。この $x(t)$ は、$t \in [0, T']$ の範囲で、微分方程式 (8.1.1) の $x(t) = x_0$ という初期値に対応する唯一の解である。

最大値 f_0 が存在することは連続関数についての 271 ページの定理 2.31 によって保証されている。

こうして、関数 $f(t,x)$ が「まとも」であると保証された範囲では、解の存在と一意性がいえることがわかった。初期条件 $x(0)=x_0$ を指定すれば解がひとつに決まることから、このような**未知関数が一つの一階常微分方程式の一般解には、ちょうど一つの任意定数が含まれる**ことも、はっきりとした。

注意： 実は定理の条件はもっと弱めることができて、上記の範囲で $f(t,x)$ が連続で、ある定数 K があり、任意の x, x' について $|f(t,x)-f(t,x')| \leq K|x-x'|$ が成り立てば同じことが示される。証明も以下に述べるものを少し改良するだけだが、少し技巧的になるので、ここでは触れない。

8.1.3　証明

これから、少しページを割いて、定理 8.1 を証明しよう。とくに興味のある人以外は読む必要はないだろうが、こういう抽象的なことが、それほどむずかしい数学を使わなくても証明できるという事実は知ってほしい。

以下の証明は、能率よりもストーリーの分かりやすさを優先して書いた。順を追って読んでいけば理解できるはずだ。まず、近似解で刻み幅 ε を小さくする極限が存在することを証明し、次に、この極限が実際に微分方程式の解になっていることをみる。最後に、こうして得られた解が微分方程式の唯一の解であることを示す。

証明が追いやすいように、必要な定義を思い出しておこう。まず、解くべき微分方程式 (8.1.1) は、

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \tag{8.1.19}$$

である。$\varepsilon > 0$ に対して、近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ を、初期条件 $\tilde{x}_\varepsilon(0) = x_0$ と (8.1.9) の漸化式

$$\tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon) = \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon) + \varepsilon\, f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \tag{8.1.20}$$

そして、$0 \le \tau < \varepsilon$ についての

$$\tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon + \tau) = \tilde{x}_\varepsilon(n\,\varepsilon) \tag{8.1.21}$$

によって定義する。以上をまとめれば、任意の $t \ge 0$ での近似解を一つの式で

$$\tilde{x}_\varepsilon(t) = x_0 + \sum_{m=0}^{[t/\varepsilon]-1} \varepsilon\, f(m\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon(m\varepsilon)) \tag{8.1.22}$$

と書くことができる。ただし $[a]$ は実数 a を越えない最大の整数[*5]で、和の上限が下限より小さいときには和は 0 と解釈する。

[*5] ガウス記号という。たとえば、$[\pi] = 3$, $[-12.34] = -13$, $[14] = 14$。任意の実数 x に対して $x - 1 < [x] \le x$ が成り立つ。

$f(t,x)$ の連続性と微分可能性の仮定と、連続関数の最大値・最小値についての定理（271 ページの定理 2.31）から、正の定数 f_0, f_1, f_2 があって、任意の $t \in [0,T]$ と $x \in [x_0 - a, x_0 + a]$ について、

$$|f(t,x)| \le f_0, \quad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right| \le f_1, \quad \left|\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right| \le f_2 \tag{8.1.23}$$

が成り立つことがいえる (一つ目は既に定理に現れた)。よって、任意の $x, x' \in [x_0 - a, x_0 + a]$ と $t, t' \in [0,T]$ について

$$\begin{aligned} &\left|f(t,x) - f(t',x)\right| \le f_1 \left|t - t'\right|, \\ &\left|f(t,x) - f(t,x')\right| \le f_2 \left|x - x'\right| \end{aligned} \tag{8.1.24}$$

がいえる。これらの関係は、以下の証明でくり返し用いる。

■極限の存在　まず近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ で、t を固定して ε を小さくしていったときの極限が存在することを示す。この証明の要（かなめ）となるのは、時間の刻み幅を半分にし

たときに近似解がどの程度変更されるかを示す次の評価だ。

補題 8.2. 定理 *8.1* の条件が満たされているとする。このとき、任意の $t \in [0, T']$ と任意の $\varepsilon > 0$ について

$$|\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_{\varepsilon/2}(t)| \leq \left\{(e^{tf_2} - 1)\tilde{f} + \frac{f_0}{2}\right\}\varepsilon \quad (8.1.25)$$

が成り立つ。ただし $\tilde{f} = (f_1 + f_0 f_2)/(4f_2)$ とした。

(8.1.25) の右辺が刻み幅 ε に比例しているのはよい兆候だ。これは、「刻み幅が細かければ細かいほど、刻み幅を半分にした際の変更が小さくなる」ことを意味している。つまり、$\varepsilon \searrow 0$ の極限が存在することを示唆している。

実際、この補題があれば、極限の存在を示すのは標準的な問題だ。まず、$t \in [0, T']$ を任意に選んで固定する。そして、$n = 0, 1, 2, \ldots$ について $a_n := \tilde{x}_{2^{-n}}(t)$ とする。(8.1.25) より直ちに、任意の $n \geq 0$ について、$|a_n - a_{n+1}| \leq C/2^n$ が成立。ただし $C = \{(e^{Tf_2} -$

$1)\tilde{f} + (f_0/2)\}$ とした。よって、任意の $m > n \geq 0$ について、

$$|a_n - a_m| \leq C \sum_{j=n}^{m-1} 2^{-j} \leq \frac{C}{2^{n-1}} \tag{8.1.26}$$

が成立する。つまり数列 $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ はコーシー列である（2.2.4 節参照）。極限 a_∞ が存在し、$|a_n - a_\infty| \leq C\,2^{-(n-1)}$ が成り立つ*6。

もとの近似解のことばで言えば、任意の $t \in [0, T']$ について、極限

$$x(t) := \lim_{n \nearrow \infty} \tilde{x}_{2^{-n}}(t) \tag{8.1.27}$$

が存在し（この式は $x(t)$ の定義と読む）、任意の n について、

$$|\tilde{x}_{2^{-n}}(t) - x(t)| \leq \frac{C}{2^{n-1}} \tag{8.1.28}$$

*6 「コーシー列は極限をもつ」といった、かなり抽象的な定理が、ここでは実質的に役立つことに注意しよう。実際、われわれは極限 a_∞ の値を事前には知らないわけだから、このような定理がなければ、極限の存在を証明することはできない。

が成り立つ。こうして、ともかく極限の解の「候補」$x(t)$ が構成できた。なお、(8.1.27) では、$\varepsilon = 2^{-n}$ と書ける特別な ε だけを使って $\varepsilon \searrow 0$ とする極限をとっている。もちろん、そのような制約なく単に $\varepsilon \searrow 0$ としても同じ極限が得られるのだが、それは（厳密には）証明を要することだ。これは、最後に (8.1.57) で証明する。

補題 8.2 の証明：以下 $\varepsilon > 0$ を任意に選んで固定する。

近似解の表式 (8.1.22) と条件 (8.1.23) から、一般に

$$\left|\tilde{x}_\varepsilon(t) - x_0\right| \le \varepsilon\, f_0\, \frac{t}{\varepsilon} = f_0\, t \tag{8.1.29}$$

である。時間は $t \le a/f_0$ の範囲に限定されているから、$\tilde{x}_\varepsilon(t)$ はつねに区間 $[x_0 - a, x_0 + a]$ の中にあることに注意しよう。

まず、一般の $t \in [0, T']$ ではなく、$n = 0, 1, 2 \ldots$ によって $t = n\varepsilon$ と書ける時刻に注目する。評価すべき差を

$$\delta_n := \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon) - \tilde{x}_{\varepsilon/2}(n\varepsilon) \tag{8.1.30}$$

と書こう。$\tilde{x}_{\varepsilon/2}(\cdot)$ についての (8.1.20) に対応する漸化式の 2 ステップ分は、

$$\begin{aligned}\tilde{x}_{\varepsilon/2}(n\varepsilon) &= \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)\Big) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2} f\Big((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big) \qquad (8.1.31)\end{aligned}$$

である。これと、もとの (8.1.20) との差をとれば、

$$
\begin{aligned}
\delta_n &= \delta_{n-1} + \varepsilon\, f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \\
&\qquad - \frac{\varepsilon}{2}\, f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)\Big) \\
&\qquad - \frac{\varepsilon}{2}\, f\Big((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big) \\
&= \delta_{n-1} + \frac{\varepsilon}{2}\Bigg[\Bigg\{ f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \\
&\qquad - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)\Big)\Bigg\} \\
&\qquad\qquad + \Bigg\{ f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \\
&\qquad - f\Big((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
$$

となる。一行目の f をわざと二つに分けて、差を取りやすい形にした。さらに、最終行を二つに分けて、

$$
\begin{aligned}
&= \delta_{n-1} + \frac{\varepsilon}{2}\Bigg[\Bigg\{ f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon}((n-1)\varepsilon)\Big) \\
&\quad - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)\Big)\Bigg\} \\
&\qquad + \Bigg\{ f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon}((n-1)\varepsilon)\Big) \\
&\quad - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big)\Bigg\} \\
&\qquad + \Bigg\{ f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big) \\
&\quad - f\Big((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big)\Bigg\}\Bigg]
\end{aligned}
\tag{8.1.32}
$$

としよう。ここで最左辺と最右辺の絶対値をとれば、

$$
\begin{aligned}
|\delta_n| &\le |\delta_{n-1}| \\
&\quad + \frac{\varepsilon}{2}\Big[|f(\cdots) - f(\cdots)| + |f(\cdots) - f(\cdots)| \\
&\quad + |f(\cdots) - f(\cdots)|\Big]
\end{aligned}
\tag{8.1.33}
$$

という形の不等式が得られる（形を見るだけなので f の引数を省略した)。また、各々の $|f(\cdots)-f(\cdots)|$ は (8.1.24) の評価が使える形になっているので、順に評価していこう。まず、一つ目は

$$\begin{aligned}\Big|f\Big((n-1)\varepsilon,&\tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big)\\&\qquad - f\Big((n-1)\varepsilon,\tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)\Big)\Big|\\&\qquad \le f_2\left|\tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)-\tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)\right|\\&\qquad = f_2\left|\delta_{n-1}\right| \qquad (8.1.34)\end{aligned}$$

と評価できる。二つ目を評価するため、まず

$$\begin{aligned}&\left|\tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)-\tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\right|\\&\qquad \le \left|\tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)-\tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)\right|\\&\qquad\quad + \left|\tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-1)\varepsilon)-\tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\right|\\&\qquad \le \left|\delta_{n-1}\right| + f_0\,\frac{\varepsilon}{2} \qquad (8.1.35)\end{aligned}$$

とできることに注意しておく（漸化式 (8.1.20) を使っ

た)。これを使えば、二つ目については、

$$\begin{aligned}&\Bigg|f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big)\\&\qquad - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big)\Bigg|\\&\le f_2\left\{|\delta_{n-1}| + f_0\,\frac{\varepsilon}{2}\right\}\end{aligned} \tag{8.1.36}$$

とできる。三つ目は時間変数が $\varepsilon/2$ ずれているだけなので、簡単で、

$$\begin{aligned}&\Bigg|f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big)\\&\qquad - f\Big((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n-\tfrac{1}{2})\varepsilon)\Big)\Bigg|\\&\le f_1\,\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned} \tag{8.1.37}$$

と評価できる。後は、(8.1.34), (8.1.36), (8.1.37) を (8.1.33) に戻して整理すれば、漸化不等式

$$\begin{aligned}|\delta_n| &\le (1+f_2\,\varepsilon)\,|\delta_{n-1}| + \frac{f_1+f_0 f_2}{4}\,\varepsilon^2\\&= (1+f_2\,\varepsilon)\,|\delta_{n-1}| + \tilde{f}\,f_2\,\varepsilon^2\end{aligned} \tag{8.1.38}$$

が得られる。また、定義より $\delta_0 = 0$ だったので、(8.1.38) より、任意の $n = 0, 1, 2 \ldots$ について

$$|\delta_n| \leq (e^{n\varepsilon f_2} - 1)\tilde{f}\,\varepsilon \tag{8.1.39}$$

が成り立つことがいえる（代入し帰納法で示せ）。

これで肝心の部分は終わったので、後は一般の t についての評価を考えればよい。途中の時刻での近似解の作り方 (8.1.21) を思い出せば、$t \in [n\varepsilon, (n + \frac{1}{2})\varepsilon)$ の範囲では $\tilde{x}_\varepsilon(t) = \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)$ および $\tilde{x}_{\varepsilon/2}(t) = \tilde{x}_{\varepsilon/2}(n\varepsilon)$ が成り立つので、

$$|\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_{\varepsilon/2}(t)| = |\delta_n| \leq (e^{tf_2} - 1)\tilde{f}\,\varepsilon \tag{8.1.40}$$

である。一方、$t \in [(n + \frac{1}{2})\varepsilon, (n + 1)\varepsilon)$ の範囲では $\tilde{x}_\varepsilon(t) = \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)$ だが、刻みの細かいほうは 1 ステップ進むので $\tilde{x}_{\varepsilon/2}(t) = \tilde{x}_{\varepsilon/2}((n + \frac{1}{2})\varepsilon) = \tilde{x}_{\varepsilon/2}(n\varepsilon) + (\varepsilon/2)\, f(n\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}(n\varepsilon))$ となる。よって、

$$\begin{aligned} |\tilde{x}_\varepsilon(t) - \tilde{x}_{\varepsilon/2}(t)| &= |\delta_n| + \frac{\varepsilon}{2}\left|f(n\varepsilon, \tilde{x}_{\varepsilon/2}(n\varepsilon))\right| \\ &\leq \left\{(e^{tf_2} - 1)\tilde{f} + \frac{f_0}{2}\right\}\varepsilon \end{aligned} \tag{8.1.41}$$

となる。こうして、(8.1.25) が示された。∎

■構成した極限が本当に解であること　次に (8.1.27) で定義した $x(t)$ が実際に微分方程式 (8.1.19) の解であることを示す必要がある。そんなことは作り方からして当たり前ではないか、と思うのは正しい直感だが、ともかくきちんと証明しよう。

t も $t+\Delta t$ も区間 $[0,T']$ に入るように、t と $\Delta t>0$ をとる。任意の $\varepsilon>0$ について、近似解の表式 (8.1.22) から、

$$\tilde{x}_\varepsilon(t+\Delta t)-\tilde{x}_\varepsilon(t)=\sum_{n=[t/\varepsilon]}^{[(t+\Delta t)/\varepsilon]-1}\varepsilon\, f(n\varepsilon,\tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)) \tag{8.1.42}$$

が得られる。ここで、同じ和の範囲で単に ε を足しあげると、

$$\sum_{n=[t/\varepsilon]}^{[(t+\Delta t)/\varepsilon]-1}\varepsilon=\varepsilon\left\{\left[\frac{t+\Delta t}{\varepsilon}\right]-\left[\frac{t}{\varepsilon}\right]\right\}=:\Delta t-\tau \tag{8.1.43}$$

だが、これは ε が十分に小さければほとんど Δt に等しい。上の式で定義される「おつり」τ はガウス記号による小数部分の丸めだけから生じるので、$|\tau| \leq \varepsilon$ と評価できる[*7]。

(8.1.42) と (8.1.43) をあわせれば、

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_\varepsilon(t+\Delta t) - \tilde{x}_\varepsilon(t) - \Delta t\, f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t)) \\
&\quad = \tau\, f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t)) \\
&\quad + \sum_{n=[t/\varepsilon]}^{[(t+\Delta t)/\varepsilon]-1} \varepsilon\{f(n\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)) - f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t))\}
\end{aligned} \tag{8.1.44}$$

[*7] 任意の $x < y$ について $y - x + 1 \geq [y] - [x] \geq y - x - 1$ である。

がいえる。補題 8.2 の証明で行なったのと同様にして、

$$
\begin{aligned}
&|f(n\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)) - f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t))| \\
&= |f(n\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)) - f(t, \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon))| \\
&\quad + |f(t, \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)) - f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t))| \\
&\le f_1\,|n\varepsilon - t| + f_2\,|\tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon) - \tilde{x}_\varepsilon(t)| \\
&\le (f_1 + f_0\,f_2)\,|n\varepsilon - t| \le (f_1 + f_0\,f_2)\Delta t \qquad (8.1.45)
\end{aligned}
$$

が (8.1.44) の和の範囲内の n についていえる。これを用い、(8.1.44) の絶対値をとって、

$$
\begin{aligned}
&\left|\tilde{x}_\varepsilon(t + \Delta t) - \tilde{x}_\varepsilon(t) - \Delta t\, f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t))\right| \\
&\le |\tau|\,|f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t))| \\
&\quad + \sum_{n=[t/\varepsilon]}^{[(t+\Delta t)/\varepsilon]-1} \varepsilon \left|f(n\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon)) - f(t, \tilde{x}_\varepsilon(t))\right| \\
&\le f_0\,\varepsilon + \left(\frac{\Delta t}{\varepsilon} + 1\right)\varepsilon\,(f_1 + f_0\,f_2)\,\Delta t \\
&\le \{f_0 + (f_1 + f_0\,f_2)\Delta t\}\,\varepsilon + (f_1 + f_0\,f_2)(\Delta t)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (8.1.46)
\end{aligned}
$$

と評価しよう。この不等式の両辺を Δt で割り、t と $\Delta t > 0$ を固定し、$\varepsilon = 2^{-n}$ と置いて $n \nearrow \infty$ の極限を

とる。極限は (8.1.27) のように存在するので、

$$\left|\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}-f(t,x(t))\right| \leq (f_1+f_0 f_2)\,\Delta t \tag{8.1.47}$$

が得られる。ここで $\Delta t \to 0$ とすると右辺はゼロになるので

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=f(t,x(t)) \tag{8.1.48}$$

が得られ、関数 $x(t)$ が微分方程式 (8.1.19) を満たすことが示される。

■解の一意性　さいごに、微分方程式 (8.1.19) の解はかならず極限 (8.1.27) と一致すること、つまり、解が一つしかないことをみる。これは、技術的には極限の存在の証明とほとんど同じである。

$x_{\mathrm{s}}(t)$ を、$t \in [0, T']$ で定義され、初期条件 $x_{\mathrm{s}}(0) = x_0$

をもつ、微分方程式 (8.1.1) の任意の解としよう[*8]。解であることから、

$$x_{\mathrm{s}}(t) - x_0 = \int_0^t ds\, \frac{dx_{\mathrm{s}}(s)}{ds} = \int_0^t ds\, f(s, x_{\mathrm{s}}(s)) \tag{8.1.49}$$

が成り立つ。さて、任意の $\varepsilon > 0$ をとり、近似解 $\tilde{x}_\varepsilon(t)$ と解 $x_{\mathrm{s}}(t)$ を比較したい。そこで、(8.1.49) を使って

$$x_{\mathrm{s}}(n\varepsilon) = x_{\mathrm{s}}((n-1)\varepsilon) + \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} ds\, f(s, x_{\mathrm{s}}(t)) \tag{8.1.50}$$

という、近似解の漸化式と似た形の関係を出しておく。

近似解と解の差を

$$\tilde{\delta}_n := x(n\varepsilon) - \tilde{x}_\varepsilon(n\varepsilon) \tag{8.1.51}$$

[*8] 既に少なくとも一つの解 $x(t)$ があることを証明したので、このように仮定してもいい。もちろん、$x_{\mathrm{s}}(t)$ は $x(t)$ と同じかもしれないし、そうでないかもしれない。

とする。漸化式 (8.1.20) と (8.1.50) の差をとれば、

$$\tilde{\delta}_n = \tilde{\delta}_{n-1} + \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} ds \left\{ f(s, x_{\mathrm{s}}(s)) - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \right\} \tag{8.1.52}$$

が得られる。以前の証明と同様、ここに現れた f の差の絶対値を

$$\begin{aligned}
&\left| f(s, x_{\mathrm{s}}(s)) - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \right| \\
&\le \left| f(s, x_{\mathrm{s}}(s)) - f((n-1)\varepsilon, x_{\mathrm{s}}(s)) \right| \\
&\quad + \left| f((n-1)\varepsilon, x_{\mathrm{s}}(s)) - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \right| \\
&\le f_1 \{s - (n-1)\varepsilon\} + f_2 \left| x_{\mathrm{s}}(s) - \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon) \right| \\
&\le f_1 \{s - (n-1)\varepsilon\} + f_2 \left| x_{\mathrm{s}}(s) - x_{\mathrm{s}}((n-1)\varepsilon) \right| \\
&\quad + f_2 \left| x_{\mathrm{s}}((n-1)\varepsilon) - \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon) \right| \\
&\le (f_1 + f_0 f_2) \{s - (n-1)\varepsilon\} + f_2 \left| \tilde{\delta}_{n-1} \right|
\end{aligned} \tag{8.1.53}$$

のように評価しておく。(8.1.52) の絶対値をとって

(8.1.53) の評価を使い（簡単な）積分を実行すると、

$$
\begin{aligned}
&|\tilde{\delta}_n| = |\tilde{\delta}_{n-1}| \\
&+ \int_{(n-1)\varepsilon}^{n\varepsilon} ds \left| f(s, x_{\mathrm{s}}(s)) - f\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{x}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \right| \\
&\leq (1 + f_2\varepsilon)\,|\tilde{\delta}_{n-1}| + \frac{f_1 + f_0 f_2}{2}\varepsilon^2 \qquad (8.1.54)
\end{aligned}
$$

が得られる。ここでも $\tilde{\delta}_0 = 0$ に注意して (8.1.54) をくり返し使うと、任意の $n = 0, 1, \ldots$ について

$$
|\tilde{\delta}_n| \leq (e^{f_2 n\varepsilon} - 1)\tilde{f}'\varepsilon \qquad (8.1.55)
$$

がいえる。ここで $\tilde{f}' = (f_1 + f_0 f_2)/(2f_2)$ である。

以上は時間がちょうど $t = n\varepsilon$ のときの評価だった。あとは近似解が「タクシーの料金型」の時間変化をすることを思い出せば、一般の $t \in [0, T']$ については、

$$
|x_{\mathrm{s}}(t) - \tilde{x}_\varepsilon(t)| \leq \Big\{(e^{f_2\, t} - 1)\tilde{f}' + f_0\Big\}\varepsilon \qquad (8.1.56)
$$

という不等式が得られる。

ここで、$t \in [0, T']$ を固定し $\varepsilon = 2^{-n}$ とおいて $n \nearrow \infty$ の極限をとる。(8.1.27) のように $\tilde{x}_{2^{-n}}(t)$ は

$x(t)$ に収束し、右辺はゼロに近づくので、$x_{\mathrm{s}}(t) = x(t)$ が得られる。つまり、任意の選んだ解 $x_{\mathrm{s}}(t)$ は、近似解の極限として構成した解 $x(t)$ に等しいことがわかった。これが解の一意性である

この証明にはボーナスがある。(8.1.56) をみると、(8.1.27) のように $\varepsilon = 2^{-n}$ とした特別の極限ではなく、各々の t において単に ε をゼロにする極限について

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \tilde{x}_{\varepsilon}(t) = x(t) \tag{8.1.57}$$

が成り立つこともわかる（もちろん $x_{\mathrm{s}}(t) = x(t)$ を使った)。これで定理 8.1 が完全に証明された。

8.1.4　連立の一階常微分方程式のあつかい

次に、未知関数がたくさんある、連立の一階常微分方程式について、解の存在と一意性の問題を考えておこう。

■未知関数が二つの場合　まず、$x_1(t), x_2(t)$ という二つの未知関数についての一階常微分方程式を考えよう。もっとも一般的な方程式は、

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(t, x_1(t), x_2(t)),\\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(t, x_1(t), x_2(t))\end{aligned} \tag{8.1.58}$$

という形になる。ここで、$f_1(t, x_1, x_2)$ と $f_2(t, x_1, x_2)$ は、任意の与えられた三変数関数である。$x_1(t)$ と $x_2(t)$ が互いに影響を及ぼし合いながら時間的に発展していくというルールが読み取れるだろう。

このような連立の微分方程式は、ベクトルの記号を使うと見通(みとお)しよく書き表すことができる。二つの未知関数を縦に並べて、二次元列ベクトル

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{8.1.59}$$

を定義する。時刻 t を決めれば、$\boldsymbol{x}(t)$ は普通の列ベクトルになる。よって $\boldsymbol{x}(\cdot)$ はベクトルに値をとる時間の

関数であるといってよい。

さらに既知関数の方も、

$$\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t,x_1,x_2) \\ f_2(t,x_1,x_2) \end{pmatrix} \tag{8.1.60}$$

という風にベクトルで書く。すると連立の微分方程式 (8.1.58) を、

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t)) \tag{8.1.61}$$

と簡単に書くことができる。もちろん、左辺でベクトル値関数 $\boldsymbol{x}(t)$ を微分しているというのは、各成分を微分しろということであり、左辺と右辺が等しいというのは、ベクトルの各成分が等しいという意味だ。

いうまでもないことだが、ベクトルでひとまとめに書いた (8.1.61) と、成分をていねいに書いた (8.1.58) は、完璧に同じ式だ。これら二つの書き方を、必要に応じて、自在に使い分けられるようにしておくべきだろう。ベクトルと数を記号のレベルで書き分けない**（非常に悪い）**癖をつけてしまうと、このような（あるいは、もっと未知関数の多い）連立方程式と、未知関数

が一つの常微分方程式 (8.1.1) の区別がつかなくなってしまう。

さて、8.1.1 節で考えた（近似）解の構成を、連立の常微分方程式に拡張してみよう。やってみると、想像するよりずっと簡単にできてしまう。

まず、テイラー展開 (8.1.2) に対応して、まったく同じ形の展開の式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}(t+\varepsilon) &= \boldsymbol{x}(t) + \frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}\,\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ &= \boldsymbol{x}(t) + \varepsilon\,\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t)) + O(\varepsilon^2) \\ &\simeq \boldsymbol{x}(t) + \varepsilon\,\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t)) \qquad (8.1.62)\end{aligned}$$

が成り立つ。その理由は、この式をきちんと成分ごとに書き下してみれば、明らかだろう。ふつうの一変数（この場合は、時間 t）についてのテイラー展開を各成分に使っているだけだ。

これを見ると、近似解をどのようにつくればいいかは、すぐにわかる。時間の刻み幅 $\varepsilon > 0$ を（小さい値に）固定する。初期値を $\tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(0) = \boldsymbol{x}_0$ とし、(8.1.9) と

類似の漸化式

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(n\,\varepsilon) = \tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon((n-1)\varepsilon) + \varepsilon\,\boldsymbol{f}\Big((n-1)\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon((n-1)\varepsilon)\Big) \tag{8.1.63}$$

を用いる。さらに、間の時刻での値を「タクシー料金方式」で決めれば、近似解は

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(t) = \boldsymbol{x}_0 + \sum_{m=0}^{[t/\varepsilon]-1} \varepsilon\,\boldsymbol{f}(m\varepsilon, \tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(m\varepsilon)) \tag{8.1.64}$$

のように決まる（しつこいが、和を取るときは、ベクトルの各成分について和を取る）。ここで、(8.1.22) と同じガウス記号を用いた。

(8.1.64) 右辺にあらわれた

$$\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} x_{0,1} \\ x_{0,2} \end{pmatrix} \tag{8.1.65}$$

は、初期条件を決めるベクトルである。(8.1.64) は、初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$（つまり、ベタに書けば $x_1(0) = x_{0,1}$ と $x_2(0) = x_{0,2}$ という二つの条件）での解 $\boldsymbol{x}(t)$ の近似をあたえている。

ここから先の話は、未知関数が一つのときとまったく同じだ。時間発展を決める関数 $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ が「まともな」範囲では、時間の刻み幅 ε を 0 に近づけると、近似解 $\tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(t)$ は本物の解 $\boldsymbol{x}(t)$ に収束する。解は存在して、ただ一つである。さらに、初期条件として二次元ベクトル $\boldsymbol{x}_0$ を指定したのだから、このとき、**解に含まれる任意定数はちょうど二つである**こともわかる。

この結果を、1488 ページの定理 8.1 のようにまとめた定理は、このあと、より一般の定理 8.3 としてまとめる。

■未知関数が n 個ある一般の場合　一階常微分方程式としては、もっとも一般的な、$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ という n 個の未知関数のある問題を考えよう。微分方

程式は、n 個の式の連立で、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = f_1(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ \dfrac{d}{dt}x_2(t) = f_2(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d}{dt}x_n(t) = f_n(t, x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)) \end{cases} \tag{8.1.66}$$

となる。ここで、$i = 1, 2, \ldots, n$ のそれぞれについて、$f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ は与えられた任意の $n+1$ 変数関数。

(8.1.66) のような大きな式でも、ベクトルの書き方

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix} \tag{8.1.67}$$

を用いると、前とまったく同じ、たった一行の (8.1.61) の形に書けてしまう。たしかに、ベクトルの記法は便

利だ！　みかけが便利なだけではない。こうして、未知関数が二つの場合と同じ形に方程式を書くことができたのだから、あとは、微分や和の意味を正しく n 成分ベクトルに翻訳しさえすれば、先ほどの、(8.1.61) から (8.1.64) までの話を、そっくりそのまま一般の場合に焼き直すことができる。

これによって、**未知関数が n 個の（連立の）一階常微分方程式についても、関数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ が「まとも」な範囲で、解の存在と一意性が成り立つ**ことが、わかった。また、初期条件 $\boldsymbol{x}_0$ は n 成分のベクトルだから、**解には n 個の任意定数が含まれる**こともわかる。1488 ページの定理 8.1 を一般化した定理を書いておこう。

定理 8.3 (解の存在と一意性)**.** $\boldsymbol{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \ldots, x_{0,n})^{\mathrm{t}}$ を微分方程式の解の初期値とし、T, a を正の定数とする。$t \in [0,T]$, $x_i \in [x_{0,i} - a, x_{0,i} + a]$ $(i = 1, \ldots, n)$ を満たす t と $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ について、関数 $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ の全ての成分は全ての変数について連続であり、全ての変数につ

いて微分可能（導関数が存在し、それは全ての変数について連続）と仮定し、

$$f_0 := \max_{\substack{x_i \in [x_{0,i}-a, x_{0,i}+a]\ (i=1,\ldots,n) \\ t \in [0,T]}} |\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})|,$$

$$T' := \min\left\{T, \frac{a}{f_0}\right\} \tag{8.1.68}$$

と定義する。このとき、各々の $t \in [0, T']$ について、$\varepsilon \to 0$ としたとき、(8.1.64) の近似解 $\boldsymbol{x}_\varepsilon(t)$ はある $\boldsymbol{x}(t)$ に収束する。この $\boldsymbol{x}(t)$ は、$t \in [0, T']$ の範囲で、微分方程式 (8.1.67) の、$\boldsymbol{x}_0$ という初期値に対応する唯一の解である。

<u>証明の方針</u>：成分が増えたことに対応する必要があるが、それ以外は基本的には 8.1.3 節の未知関数が一つの場合の証明と同じである。各々の成分について前と同じ評価を作るという方針もあるが、すべての成分を「一網打尽」に扱うのが便利だろう。具体的には、定理

の仮定から、(8.1.24) に対応して

$$\begin{aligned}\left|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t',\boldsymbol{x})\right| &\le f_1\,|t-t'|,\\ \left|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}')\right| &\le f_2\,|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\end{aligned} \tag{8.1.69}$$

という評価を作っておく[*9]。そして、たとえば、(8.1.25) に対応して

$$|\tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(t)-\tilde{\boldsymbol{x}}_{\varepsilon/2}(t)| \le \left\{(e^{tf_2}-1)\tilde{f}+\frac{f_0}{2}\right\}\varepsilon \tag{8.1.70}$$

という不等式を示す。8.1.3 節の証明でのスカラーをほぼ機械的にベクトルで置き換えるだけで、この場合の証明が得られる[*10]。 ∎

[*9] 絶対値を使う必然性があるわけではない。たとえば、$\|\boldsymbol{v}\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$ で定義されるベクトルの「大きさ」を使うのも自然な方針である。

[*10] $\mathbb{R}^n$ の中のコーシー列が極限を持つことを使うが、これは各々の成分がコーシー列であることから自明。

8.1.5　高階の常微分方程式のあつかい

さいごに、高階の微分を含む方程式についての解の存在と一意性をみよう。実は、**高階の常微分方程式はかならず（連立の）一階常微分方程式に書きなおすことができる**という事実に気付けば、これまでの話がそのままあてはまるのだ。

まず、一つの未知関数 $x(t)$ についての二階の常微分方程式を考えよう。もっとも一般の方程式は、任意の与えられた三変数関数 $f(t, x, v)$ を使って、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right) \tag{8.1.71}$$

と書ける。ここで、新しい未知関数

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \tag{8.1.72}$$

を定義しよう。もちろん、$x(t)$ と $v(t)$ は密接にかかわりあっているわけだが、これらがどちらも未知の関数だというのは事実だ。

さて、(8.1.71) と (8.1.72) を、無理矢理ひとまとめにすると、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = v(t) \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = f(t, x(t), v(t)) \end{cases} \tag{8.1.73}$$

と書くことができる。これを、落ち着いて眺めてみると、未知関数が二つの一階常微分方程式 (8.1.58) の形そのままになっている（$x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = v(t)$ と書き直すとよい。$f_1(t, x_1, x_2) = x_2$, $f_2(t, x_1, x_2) = f(t, x_1, x_2)$ という対応がみえる）。

よって、8.1.4 節の話がすべてそのまま使えて、解が存在してただ一つであることがわかる。また、**未知関数二つの連立の問題だったから、解には任意定数が二つ含まれる**こともわかる。これは、初期値として、たとえば、$x(0)$ と $v(0)$ を指定することに対応する。

これを、より一般の高階の常微分方程式に拡張するのは簡単だ。たとえば、一つの未知関数 $x(t)$ についての n 階の常微分方程式を考えよう。$f(t, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$

を任意の与えられた $n+1$ 変数関数とし、一般の微分方程式を、

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = f(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}) \tag{8.1.74}$$

と書いておく。$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ の各々について、未知関数

$$y_i(t) = \frac{d^i x(t)}{dt^i} \tag{8.1.75}$$

を定義する。明らかに、$y_0(t) = x(t)$ である。すると、n 階の常微分方程式 (8.1.74) は、次のような n 個の連

立の一階常微分方程式に書き換えることができる。

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}y_0(t) = y_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}y_1(t) = y_2(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d}{dt}y_i(t) = y_{i+1}(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d}{dt}y_{n-2}(t) = y_{n-1}(t) \\ \dfrac{d}{dt}y_{n-1}(t) = f(t, y_0(t), y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)) \end{cases} \tag{8.1.76}$$

ふたたび、前節の一階常微分方程式についての結果が使えて、解の存在と一意性が示される。また、**解には n 個の任意定数が含まれる**ことも、はっきりとわかる。

8.2　線形常微分方程式の一般論

この節と次の節では、線形常微分方程式を一般的な立場から調べておく。この節ではもっとも一般の場合をあつかい、次の 8.3 節では特に定数係数の場合をあつかう。

5.5.1 節で述べたように、線形の常微分方程式とは、未知関数や未知関数の導関数の、二次以上の項があらわれないような微分方程式のことだった。

8.1.5 節で見たように、一般に、二階以上の常微分方程式も、すべて、連立の一階常微分方程式に書き直すことができる[*11]。だから、一般論をすすめようと思うなら、連立の一階常微分方程式だけを考えればよい。この節では、8.2.3 節で二階の方程式に少しだけ触れる以

[*11] ただし、具体的な方程式を解くときには、一階の方程式に直してしまうのが賢いやり方とはいえない。たとえば、二階の微分方程式は二階のまま解く方が有利なことも多い。

外は、一階の方程式だけをあつかう。

8.2.1　斉次の線形一階常微分方程式

未知関数とその導関数の一次の項のみを含む微分方程式は、斉次の線形常微分方程式といわれる。

■もっとも一般の方程式　$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ という n 個の未知関数についての斉次の線形一階常微分方程式を考えよう。もっとも一般的な形は、(8.1.66) で右辺の $f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の一次関

数に限定したものだから、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = f_{1,1}(t)\,x_1(t) + f_{1,2}(t)\,x_2(t) + \\ \qquad\qquad \cdots + f_{1,n}(t)\,x_n(t) \\ \dfrac{d}{dt}x_2(t) = f_{2,1}(t)\,x_1(t) + f_{2,2}(t)\,x_2(t) + \\ \qquad\qquad \cdots + f_{2,n}(t)\,x_n(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d}{dt}x_n(t) = f_{n,1}(t)\,x_1(t) + f_{n,2}(t)\,x_2(t) + \\ \qquad\qquad \cdots + f_{n,n}(t)\,x_n(t) \end{cases} \tag{8.2.1}$$

と書ける。ここで、$i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, n$ の各々について、$f_{i,j}(t)$ は時間 t の任意の（与えられた）実数値関数である。全部で n^2 個の関数がある。

斉次の線形一階常微分方程式はよい性質をもっており、解の存在や一意性の定理は、以前の定理 8.1 や定理 8.3 よりも、ゆるい条件で成立する。一言でいえば、関数 $f_{i,j}(t)$ のふるまいが「まとも」であれば、任意の初期条件について、いくらでも長い時間範囲に関して、

解の存在と一意性が保証されるのだ。

定理 8.4 (斉次の線形一階常微分方程式の解の存在と一意性)**.** 定数 $T > 0$ があり、$t \in [0, T]$ の範囲で $f_{i,j}(t)$ がすべて一回微分可能（一階の導関数が存在して連続）と仮定する。このとき、任意の初期条件について、微分方程式 (8.2.1) の $t \in [0, T]$ の範囲での解がただ一つだけ存在する[*12]。

変数 $x_1, \ldots, x_n$ の範囲を限定していないのが、定理 8.1 や定理 8.3 と違うところである。また、時間範囲 T を T' に取り直す必要もない。斉次の線形一階常微分方程式では、解が急激に発散してしまったり、急激にゼロに落ち込んだりといった病的なふるまいがおきないことの反映である。病的なことがおきる例 (8.1.13), (8.1.15) は、どちらも非線形の微分方程式だったことを思い出そう。この定理の証明の概略をこ

[*12] 証明を工夫すれば、微分可能性の条件は、単に、この閉区間で $f_{i,j}(t)$ が連続という条件におきかえることもできる。

の節の最後で説明する。

微分方程式 (8.2.1) は、省略の $\cdots$ を用いないで、

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(t)\, x_j(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (8.2.2)$$

という形に書くことができる。(8.2.2) では、i が n 通りの値をとるので、実際、連立の (8.2.1) と同じことを表している。

(8.2.1) のような書き方は、方程式の形を直感的にとらえるためには優れているが、書くときにスペースをとるし、省略記号の意味を推測する手間がいる。一方、(8.2.2) のような書き方は、抽象的で直感的にわかりづらいのだが、まちがわないように式を変形していくときには、とても便利だ。これら二つがまったく同じ式だということを、時間をかけて納得し、一方から他方へと好きなように書き換えられるようになってほしい。

さて、ここでも n 個の未知関数を n 次元の列ベクト

ルとみる書き方

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.3}$$

を使ってみよう。それに対応して、関数を成分にもつ $n \times n$ 行列

$$\begin{aligned} \mathsf{F}(t) &= \bigl(f_{i,j}(t)\bigr)_{i,j=1,\ldots,n} \\ &= \begin{pmatrix} f_{1,1}(t) & f_{1,2}(t) & \cdots & f_{1,n}(t) \\ f_{2,1}(t) & f_{2,2}(t) & \cdots & f_{2,n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n,1}(t) & f_{n,2}(t) & \cdots & f_{n,n}(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.2.4}$$

を定義すると、連立常微分方程式 (8.2.1) を、

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}(t) \tag{8.2.5}$$

という、圧倒的に簡単な形に書くことができる。行列とベクトルの積の規則 (7.2.50) を落ち着いて使えば、

(8.2.5) が (8.2.1) とまったく同じものだということがわかるだろう。

8.1.4 節でベクトルの表示の便利さをみた。行列を利用することで、より便利になる。これから見ていくように、相当に複雑な計算を、短い式で書き表すことができるようになるのだ。ただし、こういう便利な短い式を、意味がわからないまま使っていると、とんでもないまちがいをしてしまう。記号に負けないよう、その内容をしっかりと把握する努力をしてほしい。

定理 8.4 の証明の概略：定理 8.1、定理 8.3 で (8.1.18), (8.1.68) のように新しい時間 T' を導入したのは、考えている時間の範囲では、近似解がある有限の領域の内側に収まっていることを保証するためだった。ここでは、このような細工をしなくても、近似解が一定の範囲にとどまることが示せる。

近似解 (8.1.64) を $\tilde{\boldsymbol{x}}_\varepsilon(t) = (\tilde{x}_{\varepsilon,1}(t), \ldots, \tilde{x}_{\varepsilon,n}(t))$ と

成分表示し、

$$X_\varepsilon(t) := \sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_{\varepsilon,i}(t)| \geq 0 \tag{8.2.6}$$

という関数を考える。近似解を決める漸化式 (8.1.63) を微分方程式 (8.2.1), (8.2.2) に即して書き直せば、

$$\begin{aligned}&\tilde{x}_{\varepsilon,i}(m\varepsilon)\\&= \tilde{x}_{\varepsilon,i}((m-1)\varepsilon) + \varepsilon \sum_{j=1}^{n} f_{i,j}((m-1)\varepsilon)\, \tilde{x}_{\varepsilon,j}((m-1)\varepsilon)\end{aligned} \tag{8.2.7}$$

となる。これを使えば、(8.2.6) の量について、

$$
\begin{aligned}
X_\varepsilon(m\varepsilon) &= \sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_{\varepsilon,i}(m\varepsilon)| \\
&\le \sum_{i=1}^{n} |\tilde{x}_{\varepsilon,i}((m-1)\varepsilon)| \\
&\quad + \varepsilon \sum_{i,j=1}^{n} |f_{i,j}((m-1)\varepsilon)|\,|\tilde{x}_{\varepsilon,j}((m-1)\varepsilon)| \\
&\le (1+\varepsilon\bar{f})\, X_\varepsilon((m-1)\varepsilon) \le e^{\varepsilon\bar{f}}\ X_\varepsilon((m-1)\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{8.2.8}
$$

という漸化不等式が得られる。ここで、

$$
\bar{f} := \max\left\{ \sum_{i=1}^{n} |f_{i,j}(t)| \,\middle|\, t \in [0,T],\ j = 1,\dots,n \right\}
\tag{8.2.9}
$$

とした。仮定よりこのような $\bar{f}$ は必ず存在する。

$X_\varepsilon(t)$ の初期値を $X_0 := \sum_{i=1}^{n} |x_{i,0}|$ と書けば、(8.2.8) をくり返し用いて $X_\varepsilon(m\varepsilon) \le X_0\, e^{\bar{f}\varepsilon m}$ が得ら

れる。よって任意の $t \in [0, T]$ に対して、

$$0 \leq X_\varepsilon(t) \leq X_0\, e^{\bar{f}\, t} \tag{8.2.10}$$

が示された。よって $a := X_0\, e^{\bar{f}\, T}$ とすれば、任意の $\varepsilon > 0$, $t \in [0, T]$, $i = 1, \ldots, n$ について $\tilde{x}_{\varepsilon,i}(t) \in [-a, a]$ がいえる。これさえ保証されれば、あとは定理 8.1 の証明をそのまま（多成分に拡張し）くり返せば、目標の定理が証明できる。▮

■重ね合わせの原理　斉次の線形常微分方程式 (8.2.1)（同じものだが、(8.2.2), (8.2.5)）の一つの重要な性質は、次のような、**重ね合わせの原理** (principle of superposition) が成り立つことだ。

$\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ と $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$ がどちらも (8.2.1) の解だとしよう（ただし、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ というのは、こういう名前のベクトル関数。ベクトルの成分は下付の添え字で書いたから、

名前は上につけて区別する。$\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ 自身が、

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \vdots \\ x_n^{(1)}(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.11}$$

という列ベクトルだということに注意)。また、α_1, α_2 を任意の実数とする。このとき、二つの解の重ね合わせ（線形結合）でつくった

$$\boldsymbol{x}(t) = \alpha_1\, \boldsymbol{x}^{(1)}(t) + \alpha_2\, \boldsymbol{x}^{(2)}(t) \tag{8.2.12}$$

も、また (8.2.1) の解である。

この性質の証明は (8.2.5) の行列の書き方を使うと、きわめて簡単になる。まず、(8.2.12) と微分の線形性 (足し算の微分は、微分の足し算) (3.1.25) を使って、

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \alpha_1\, \frac{d\boldsymbol{x}^{(1)}(t)}{dt} + \alpha_2\, \frac{d\boldsymbol{x}^{(2)}(t)}{dt}$$

さらに、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$ と $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$ が (8.2.5) を満たすことから、

$$= \alpha_1\, \mathsf{F}(t)\, \boldsymbol{x}^{(1)}(t) + \alpha_2\, \mathsf{F}(t)\, \boldsymbol{x}^{(2)}(t)$$

行列とベクトルの積の線形性 (7.2.52) から、

$$
\begin{aligned}
&= \mathsf{F}(t)\,\{\alpha_1\,\boldsymbol{x}^{(1)}(t) + \alpha_2\,\boldsymbol{x}^{(2)}(t)\} \\
&= \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}(t) \qquad (8.2.13)
\end{aligned}
$$

となり、証明おわり。(8.2.1) の書き方のまま同じことをやったら、と思うと、気が遠くなる。逆に、この簡略な式の中にそれだけの意味が凝縮(ぎょうしゅく)されていることを実感すべきだろう。

重ね合わせの原理は、二つの解についてだけでなく、もっと多くの解についても、そのままの形で、成り立つ。具体的には、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ がすべて (8.2.1) の解で、$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ が実数なら、$\alpha_1\,\boldsymbol{x}^{(1)}(t) + \alpha_2\,\boldsymbol{x}^{(2)}(t) + \cdots + \alpha_m\,\boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ も解ということだ。これは、直接に示すこともできるし、上の二つの解についての結果をくり返し使って示すこともできる。

■線形独立な解　微分方程式 (8.2.1) の m 個の解 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ が**線形独立** (linearly in-

dependent) であるとは、t を固定したとき、m 個のベクトル $\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ が線形独立[*13]であることをいう。

上の線形独立の定義は、一見すると、固定する t の選び方によってしまいそうだ。しかし、おもしろいことに、t はどんな値に選んでもよい。混乱するといけないので、いちおう以下にまとめておこう。

補題 8.5. $0 \leq t \leq T$ の範囲で、微分方程式 (8.2.1) の解の存在と一意性が保証されているとする。$0 \leq t \leq T$ を満たすある一つの t について、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ が線形独立

[*13] ベクトルの線形独立性の定義を忘れてしまっている場合は、6.3.4 節に戻って幾何ベクトルの場合にイメージを作り、それから、7.1.2 節で代数ベクトルの一般論を見るのがいいだろう。大ざっぱな幾何的なイメージは、$m = 2$ なら線形独立な二つのベクトルは平面図形をつくり、$m = 3$ なら線形独立な三つのベクトルは立体図形をつくるということだった。m 個のベクトルがつくる図形が「つぶれていない」ことが線形独立のもっとも大ざっぱな意味である。

なら、$0 \leq t \leq T$ を満たす任意の t について、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ は線形独立である。

証明：対偶命題を示す。ある t_0 について、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t_0), \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}(t_0)$ が線形従属、つまり、$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ をうまく選べば、$\alpha_1 \boldsymbol{x}^{(1)}(t_0) + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}^{(m)}(t_0) = \mathbf{0}$ となることを仮定する。重ね合わせの原理より、$\alpha_1 \boldsymbol{x}^{(1)}(t) + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ は微分方程式の解。他方、$\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ は明らかに解なので、解の一意性から、ある t_0 において $\mathbf{0}$ に等しい解は、すべての t において $\mathbf{0}$。よって、$\alpha_1 \boldsymbol{x}^{(1)}(t) + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}^{(m)}(t) = \mathbf{0}$。つまり、任意の t について、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(m)}(t)$ が線形従属とわかる。∎

n 次元の空間に、線形独立なベクトルは n 個までとることができるから (7.1.2 節を参照)、線形独立な解も n 個までとることができる。線形独立な n 個の解 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ をまとめて斉次の線形微分方程式 (8.2.1) の**基本解** (fundamental solution)

と呼ぶ。

基本解をつくるには、たとえば、次のようにすればよい。

$\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}$ を線形独立な n 次元の列ベクトルとする。このとき、完全性が成り立ち、任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ を、適切な係数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ を用いて、

$$\boldsymbol{v} = \alpha_1 \boldsymbol{e}^{(1)} + \alpha_2 \boldsymbol{e}^{(2)} + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}^{(n)} \tag{8.2.14}$$

のように書き表すことができる。

ここで、$i = 1, \ldots, n$ の各々について、初期値 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{e}^{(i)}$ をもつ解を、$\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ としよう。もちろん、一般に、そのような解が簡単な式で書ける形に求められるとはかぎらない。ここでは、解が具体的にどうなるかといったことは考えず、ともかく（存在することはわかっている）解をこのように書いておく。$\boldsymbol{x}^{(1)}(0), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(0)$ が線形独立なので、補題 8.5 により、n 個の解 $\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ は線形独立である。これらをまとめたものは、基本解になる。

$\boldsymbol{x}_0$ を任意の n 次元の列ベクトルとして、初期値が

$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ となるような、微分方程式 (8.2.1) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めたい。そのために、まず、完全性 (8.2.14) を使って $\boldsymbol{x}_0$ を

$$\boldsymbol{x}_0 = c_1\,\boldsymbol{e}^{(1)} + c_2\,\boldsymbol{e}^{(2)} + \cdots + c_n\,\boldsymbol{e}^{(n)} \tag{8.2.15}$$

と展開する。そして、この展開に現れた係数 $c_1, \ldots, c_n$ を用いて、

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1\,\boldsymbol{x}^{(1)}(t) + c_2\,\boldsymbol{x}^{(2)}(t) + \cdots + c_n\,\boldsymbol{x}^{(n)}(t) \tag{8.2.16}$$

のように $\boldsymbol{x}(t)$ を定義する。すると、重ね合わせの原理から、この $\boldsymbol{x}(t)$ は微分方程式 (8.2.1) の解になっている。また、(8.2.15), (8.2.16) より初期条件 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ を満たす。つまり、(8.2.16) という解で、任意の初期条件に対応できるのである。こうして、微分方程式 (8.2.5) の一般解が求まったことになる。

つまり、**未知関数が n 個ある斉次の線形一階常微分方程式 (8.2.1) では、n 個の線形独立な解（つまり、基本解）$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ を求めておけば、一般解を (8.2.16) のように線形結合で書き表すことがで**

きるのだ。基本解を知ることは微分方程式を完全に解いてしまうことに相当する。

■例　まず、もっとも基本的な例として、ω を定数とし、

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \omega\, x_2(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = -\omega\, x_1(t) \tag{8.2.17}$$

という斉次の微分方程式をみよう。二つの未知関数が互いに相手の時間微分を決定している形になっている。この場合、むずかしいことは考えなくても、式をよくみていればサイン・コサインで解が書けそうなことが見える。たとえば、$x_1^{(1)}(t) = \sin(\omega\, t)$, $x_2^{(1)}(t) = \cos(\omega\, t)$ としてやれば、明らかに解になっている。ここで、二つの線形独立な解があることを見越して、この解に (1) という名前をつけた。もう一つの解もすぐにみつかって、たとえば、$x_1^{(2)}(t) = \cos(\omega\, t)$, $x_2^{(2)}(t) = -\sin(\omega\, t)$ ととればよい。二つの解をベクトル表示で、

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega\, t) \\ \cos(\omega\, t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega\, t) \\ -\sin(\omega\, t) \end{pmatrix} \tag{8.2.18}$$

と書いておこう。これらが線形独立であることは、たとえば $t=0$ において

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(2)}(0)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \tag{8.2.19}$$

となることから明らかにわかる (1535 ページの補題 8.5 を参照)。よって、(8.2.18) は微分方程式 (8.2.17) の基本解である。一般解は、これらの線形結合 (8.2.16) だから、任意定数 c_1, c_2 によって、

$$\begin{aligned} x_1(t)&=c_1\,\sin(\omega\,t)+c_2\,\cos(\omega\,t),\\ x_2(t)&=c_1\,\cos(\omega\,t)-c_2\,\sin(\omega\,t) \end{aligned} \tag{8.2.20}$$

と書くことができる。

もう少し当たり前でない例。a,b を定数とし、未知変数が二つの斉次の線形微分方程式

$$\frac{dx_1(t)}{dt}=-a\,x_1(t)+b\,\cos(\omega\,t)\,x_2(t) \tag{8.2.21}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt}=-a\,x_2(t)-b\,\cos(\omega\,t)\,x_1(t) \tag{8.2.22}$$

を考える。まず $x_i(t) = e^{-a\,t}\,y_i(t)$ $(i = 1, 2)$ により新しい未知関数 $y_1(t), y_2(t)$ をつくる。この式を t で微分して (8.2.21), (8.2.22) に代入すると、

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = b\,\cos(\omega\,t)\,y_2(t) \tag{8.2.23}$$

$$\frac{dy_2(t)}{dt} = -b\,\cos(\omega\,t)\,y_1(t) \tag{8.2.24}$$

となる。この解は、よく見ればわかって $s = (b/\omega)\sin(\omega\,t)$ として[*14]、$y_1^{(1)}(t) = \cos s, y_2^{(1)}(t) = -\sin s$ および $y_1^{(2)}(t) = \sin s, y_2^{(2)}(t) = \cos s$ である。元の変数に戻してベクトル表記すれば、

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-at}\cos(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\,t)) \\ -e^{-at}\sin(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\,t)) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-at}\sin(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\,t)) \\ e^{-at}\cos(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\,t)) \end{pmatrix} \tag{8.2.25}$$

という二つの解になる。$t = 0$ で、これらの解は

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.2.26}$$

[*14] 変数を t から s に変数変換して方程式を書き直せばわかる。

となるから、明らかに線形独立。(8.2.25) は基本解である。(8.2.22) の一般解は、これらの線形結合だから、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1\, e^{-at}\, \cos\Bigl(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\, t)\Bigr) \\ &\qquad + c_2\, e^{-at}\, \sin\Bigl(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\, t)\Bigr) \\ x_2(t) &= -c_1\, e^{-at}\, \sin\Bigl(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\, t)\Bigr) \\ &\qquad + c_2\, e^{-at}\, \cos\Bigl(\frac{b}{\omega}\sin(\omega\, t)\Bigr) \end{aligned} \tag{8.2.27}$$

（c_1, c_2 は任意定数）となる。

三つ目の例は、かなりわざとらしいが、$t \geq t_0 > 0$ での

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{x_2(t)}{a} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -12a\frac{x_1(t)}{t^2} + 6\frac{x_2(t)}{t} \end{aligned} \tag{8.2.28}$$

という斉次の線形方程式。これは、$x_1(t) = t^\alpha$ という形を仮定して計算していくと、解が見えて、

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 3a\, t^2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t^4 \\ 4a\, t^3 \end{pmatrix} \tag{8.2.29}$$

という二つの解が得られる。この場合も、$\boldsymbol{x}_1(t_0)$ と $\boldsymbol{x}_2(t_0)$ は線形独立なので、(8.2.29) は基本解である。一般解はこれらの線形結合で、

$$x_1(t) = c_1\, t^3 + c_2\, t^4, \quad x_2(t) = c_1\, 3a\, t^2 + c_2\, 4a\, t^3 \tag{8.2.30}$$

である。

8.2.2　非斉次の線形一階常微分方程式

続いて、非斉次の項、つまり、未知関数を含まない項のある一階線形微分方程式の一般論をみておこう。

■もっとも一般の方程式　$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ という n 個の未知関数についての非斉次の線形一階常微分方程式のもっとも一般的な形を考えよう。対応する斉次の方程式の一般形 (8.2.1) に非斉次の項をたせばよい

わけで、

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = f_{1,1}(t)\,x_1(t) + \cdots + f_{1,n}(t)\,x_n(t) + g_1(t) \\ \dfrac{d}{dt}x_2(t) = f_{2,1}(t)\,x_1(t) + \cdots + f_{2,n}(t)\,x_n(t) + g_2(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d}{dt}x_n(t) = f_{n,1}(t)\,x_1(t) + \cdots + f_{n,n}(t)\,x_n(t) + g_n(t) \end{cases} \tag{8.2.31}$$

となる。ここで、$i = 1, 2, \ldots, n$ の各々について、$g_i(t)$ は時間 t の任意の与えられた関数。これもまた、抽象的な和を用いれば、

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} f_{i,j}(t)\,x_j(t) + g_i(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.2.32}$$

とコンパクトに書ける。

これも、もちろん、ベクトルを使って書ける。前節と同じように、$\boldsymbol{x}(t)$ を (8.2.3) とし、$\mathsf{F}(t)$ を (8.2.4) と

し、さらに関数 $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ をベクトル表示した

$$\boldsymbol{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.33}$$

を使うと、(8.2.31) は、

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}(t) \tag{8.2.34}$$

というすっきりした形になる。斉次の項 $\mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}(t)$ と非斉次の項 $\boldsymbol{g}(t)$ が、一目でわかる。

このような微分方程式についても、1526 ページの定理 8.4 と全く同様に、$\mathsf{F}(t)$ と $\boldsymbol{g}(t)$ が「まとも」にふるまう範囲で解の存在と一意性が保証される。

定理 8.6 (非斉次の線形一階常微分方程式の解の存在と一意性)**.** 定数 $T > 0$ があり、$t \in [0, T]$ の範囲で $f_{i,j}(t)$ と $g_i(t)$ がすべて一回微分可能（一階の導関数が存在して連続）と仮定する。このとき、任意の初期条

件について、微分方程式 (8.2.31) の $t \in [0, T]$ の範囲での解がただ一つだけ存在する。

証明の概略：定理 8.4 の証明（1529 ページ）とまったく同様に進む。今度は $X_\varepsilon(\cdot)$ に関する漸化式は、

$$X_\varepsilon(m\varepsilon) \le (1 + \varepsilon \bar{f})\, X_\varepsilon((m-1)\varepsilon) + \varepsilon \bar{g} \tag{8.2.35}$$

となる。ただし、

$$\bar{g} := \max_{t \in [0,T]} \sum_{i=1}^{n} |g_i(t)| \tag{8.2.36}$$

とした。$\bar{h} = \bar{g}/\bar{f}$ とすれば、(8.2.35) は

$$\begin{aligned} X_\varepsilon(m\varepsilon) + \bar{h} &\le (1 + \varepsilon \bar{f}) \left\{ X_\varepsilon((m-1)\varepsilon) + \bar{h} \right\} \\ &\le e^{\varepsilon \bar{f}} \left\{ X_\varepsilon((m-1)\varepsilon) + \bar{h} \right\} \end{aligned} \tag{8.2.37}$$

と書き換えられる。再びこれをくり返し用いれば、

$$X_\varepsilon(t) \le X_0\, e^{\bar{f} t} + \bar{h}\, (e^{\bar{f} t} - 1) \tag{8.2.38}$$

がいえる。やはり近似解が有限の範囲内にとどまることがいえたので、あとは定理 8.1 の証明をくり返せばよい。▮

これから、対応する斉次の方程式 (8.2.1) の基本解がわかっているとき、どうやって非斉次の方程式の一般解を作るかについて、二通りの方針を説明する。

■解の作り方 — （勘で）特解を一つみつける　仮に、非斉次の方程式 (8.2.31) の解が一つだけでもみつかったとしよう。今までと同じように、その解を $\boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t)$ と書き、**特解** (particular solution) と呼ぶ。特解は、どんな方法で求めてもかまわない。場合によっては、勘で、特解のおおよその形が「みえて」しまうことがある。そうしたら形を仮定して代入し、パラメターを調整すれば、（うまくすれば）特解がみつかる。

ここでも、$\boldsymbol{x}_0$ を任意の n 次元ベクトルとして、初期値 $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ に対応する、微分方程式 (8.2.31) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を求めたい。

$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ を、前節でつくった斉次の方程式 (8.2.1) の基本解としよう。n 個のベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}$ の完全性を使って $\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(0)$ というベクトルを

$$\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(0) = c_1\,\boldsymbol{e}^{(1)} + c_2\,\boldsymbol{e}^{(2)} + \cdots + c_n\,\boldsymbol{e}^{(n)} \quad (8.2.39)$$

と展開する。そして、この係数 $c_1, \ldots, c_n$ を用いて、

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t) + c_1\,\boldsymbol{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\,\boldsymbol{x}^{(n)}(t) \quad (8.2.40)$$

という関数をつくろう。明らかに、$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ になっている（そうなるように作った)。さらに、

$$\frac{d\boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t)}{dt} = \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t) + \boldsymbol{g}(t), \quad \frac{d\boldsymbol{x}_i(t)}{dt} = \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{(i)}(t) \quad (8.2.41)$$

$(i = 1, \ldots, n)$ だったことを思いだして、(8.2.40) を t

で微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t)}{dt} + c_1\,\frac{d\boldsymbol{x}^{(1)}(t)}{dt} + \cdots + c_n\,\frac{d\boldsymbol{x}^{(n)}(t)}{dt} \\ &= \{\mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t) + \boldsymbol{g}(t)\} \\ &\quad + c_1\,\mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{(1)}(t) \cdots + c_n\,\mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{(n)}(t) \\ &= \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{g}(t) \qquad (8.2.42)\end{aligned}$$

となる。$\boldsymbol{x}(t)$ は求める非斉次の方程式 (8.2.31) の解になっている。任意の初期条件 $\boldsymbol{x}_0$ に対応する解が求まったのだから、これは一般解だ。

つまり、**対応する斉次方程式の基本解と、非斉次の方程式の特解が一つわかれば、非斉次の方程式の一般解が得られる**ことがわかった。

■解の作り方 — 定数変化法　勘で特解をみつけられない場合は、定数変化法を使って、非斉次の方程式 (8.2.31) の一般解をみつけることができる。考え方の大きな筋道は 5.6.5 節であつかった未知関数が一つのときと同じだが、もちろん、連立の方程式のあつかいは、はるかに高級だ。以下、順をおってみていこう。

ここでも、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ を、斉次の方程式 (8.2.1) の基本解とする。これらの解を横に並べて、

$$\mathsf{X}(t) = (\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)) \tag{8.2.43}$$

と書こう。各々の $\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ は n 次元の列ベクトルだったから、これらを横に並べたものは n 次の正方行列とみることができる。成分をあからさまに書けば、

$$\mathsf{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & x_1^{(2)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) & x_2^{(2)}(t) & \cdots & x_2^{(n)}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & x_n^{(2)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.44}$$

となる。あるいは、$\mathsf{X}(t) = (x_i^{(j)}(t))_{i,j=1,\ldots,n}$ とも書ける（行列の成分による表示 (7.2.4) を使った）。

この行列を**基本行列** (fundamental matrix) と呼ぶ。n 個の解が線形独立なので、ディターミナントの基本的な性質（1166 ページの定理 7.23）から、

$$\det[\mathsf{X}(t)] \neq 0 \tag{8.2.45}$$

が成り立つ。よって、基本行列 $\mathsf{X}(t)$ は正則行列であり、逆行列 $\{\mathsf{X}(t)\}^{-1}$ が存在する (1215 ページの定理 7.31)。さらに、各々の解が斉次の微分方程式 $d\boldsymbol{x}^{(i)}(t)/dt = \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{(i)}(t)$ を満たすことから、(8.2.43) を t で微分して（もちろん、行列の微分は、各成分の微分)、

$$\begin{aligned}\frac{d\mathsf{X}(t)}{dt} &= \left(\frac{d\boldsymbol{x}^{(1)}(t)}{dt}, \ldots, \frac{d\boldsymbol{x}^{(n)}(t)}{dt}\right)\\ &= \Big(\mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}^{(n)}(t)\Big)\\ &= \mathsf{F}(t)\,\Big(\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)\Big)\\ &= \mathsf{F}(t)\,\mathsf{X}(t) \qquad (8.2.46)\end{aligned}$$

という関係が示される。以上で、道具立てはそろった。

非斉次の方程式 (8.2.31) の一般解を、斉次方程式の基本解を使って、

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1(t)\,\boldsymbol{x}^{(1)}(t) + c_2(t)\,\boldsymbol{x}^{(2)}(t) + \cdots + c_n(t)\,\boldsymbol{x}^{(n)}(t) \qquad (8.2.47)$$

と書いてみよう。$c_1(t), c_2(t), \ldots, c_n(t)$ は n 個の未知

の関数。例によって、これら未知関数を

$$\boldsymbol{c}(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.48}$$

とベクトル表示すると、一般解（の候補）(8.2.47) は、

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{(1)}(t) & \cdots & \boldsymbol{x}^{(n)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ \vdots \\ c_n(t) \end{pmatrix} = \mathsf{X}(t)\,\boldsymbol{c}(t) \tag{8.2.49}$$

と表される。少しとまどう式かもしれないが、右辺は「行列かける列ベクトル」という形だから、左辺の列ベクトルと等しいということは（少なくともベクトルと行列の「文法」からしても）もっともらしい。実際に等式が成り立つことを、成分を書き下すなどして、確認しておこう。

これから、(8.2.49) の $\boldsymbol{x}(t)$ が非斉次の微分方程式 (8.2.34) を満たすことを仮定し、未知関数（ベクトル）

$\boldsymbol{c}(t)$ を決めよう。基本行列をつかった書き方をすることで、相当にこみ入った計算を、とても能率的にすませることができる。まず、(8.2.49) を t で微分し、(8.2.46) を使うと[*15]、

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} &= \frac{d\mathsf{X}(t)}{dt}\,\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{X}(t)\,\frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt} \\ &= \mathsf{F}(t)\,\mathsf{X}(t)\,\boldsymbol{c}(t) + \mathsf{X}(t)\,\frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt} \\ &= \mathsf{F}(t)\,\boldsymbol{x}(t) + \mathsf{X}(t)\,\frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt} \qquad (8.2.50)\end{aligned}$$

となる。これを方程式 (8.2.34) と比較すれば、すぐに、

$$\mathsf{X}(t)\,\frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt} = \boldsymbol{g}(t) \qquad (8.2.51)$$

とわかる。基本行列の逆行列 $\{\mathsf{X}(t)\}^{-1}$ を左からかければ、

$$\frac{d\boldsymbol{c}(t)}{dt} = \{\mathsf{X}(t)\}^{-1}\,\boldsymbol{g}(t) \qquad (8.2.52)$$

[*15] 行列とベクトルの積に、積の微分の公式 $(fg)' = f'g + fg'$ を使っている。なぜこれが許されるのか、考えよう。

となる。ベクトルの各成分に注目すれば、これは 5.6.1 節でみた、積分だけで解けてしまう微分方程式になっている。よって

$$\boldsymbol{c}(t) = \boldsymbol{c}(0) + \int_0^t ds\,\{\mathsf{X}(s)\}^{-1}\,\boldsymbol{g}(s) \tag{8.2.53}$$

のように、形式的に解が求まる。もちろん、ベクトル関数の積分は、各々の成分を積分してできるベクトルである。さいごに (8.2.49) を思い出して、求める解を書くと、

$$\boldsymbol{x}(t) = \mathsf{X}(t)\,\boldsymbol{c} + \mathsf{X}(t)\int_0^t ds\,\{\mathsf{X}(s)\}^{-1}\,\boldsymbol{g}(s) \tag{8.2.54}$$

となる。$\boldsymbol{c}(0)$ は任意定数ベクトルなので、単に $\boldsymbol{c}$ と書いた。

(8.2.54) を (8.2.40) の書き方と比較しよう。右辺の一つ目の項は、基本解
$\boldsymbol{x}^{(1)}(t), \boldsymbol{x}^{(2)}(t), \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}(t)$ の線形結合になっている。よって、(8.2.54) の右辺の二つ目の項が非斉次方程式の特解だと解釈できる。これを改めて書いておこう。

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t) = \mathsf{X}(t) \int_0^t ds \, \{\mathsf{X}(s)\}^{-1} \, \boldsymbol{g}(s) \quad (8.2.55)$$

やや難しかったかもしれないが、このような複雑な非斉次線形微分方程式の一般解を、形式的にせよ、構成できたというのは、すごいことである。以上の導出は、あまり長くないから、さらりと読めてしまうかも知れない。しかし、ひとつひとつのステップで相当に複雑なことが行われていることを注意すべきだ。この導出をじっくりと時間をかけて理解すれば、線形代数（つまり、ベクトルと行列）という「ことば」を手に入れたことで、われわれがどれほどの力を身につけたかを実感できるはずだ。

■例　簡単な例として、

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = \omega\, x_2(t) + a\, \sin(\omega' t),$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = -\omega\, x_1(t) + a\, \cos(\omega' t) \tag{8.2.56}$$

という非斉次の方程式を考えよう。ω, ω', a は定数。

まず、対応する斉次の方程式 ($a = 0$ としたもの) は、(8.2.17) そのものなので、基本解は (8.2.18) のように求められている。

まずは、特解を勘でさがしてみよう。非斉次の項が振動数 ω' で振動しているから、同じ振動数の解を仮定し、かつ $\sin, \cos$ の対称性をにらんで、

$$x_1^{\mathrm{ps}}(t) = A\, \cos(\omega' t), \quad x_2^{\mathrm{ps}}(t) = B\, \sin(\omega' t) \tag{8.2.57}$$

とおいてみよう。(8.2.56) に代入してみると、これでうまくいき、

$$A = -B = \frac{a}{\omega - \omega'} \tag{8.2.58}$$

のとき、(8.2.57) が特解になることがわかる。よって、

一般解は、基本解との和なので

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a\,(\omega-\omega')^{-1}\,\cos(\omega'\,t) + c_1\,\sin(\omega\,t) + c_2\,\cos(\omega\,t) \\ -a\,(\omega-\omega')^{-1}\,\sin(\omega'\,t) + c_1\,\cos(\omega\,t) - c_2\,\sin(\omega\,t) \end{pmatrix} \tag{8.2.59}$$

（c_1, c_2 は任意定数）となる。

ただし、この解は $\omega \neq \omega'$ のときしか使えない。$\omega = \omega'$ のときには「共鳴」がおきるわけだが、それに応じて、上の単純な勘では解がみつからなくなってしまう。そこで定数変化法を用いる。斉次の方程式の基本解が (8.2.18) だから、基本行列は

$$\mathsf{X}(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega\,t) & \cos(\omega\,t) \\ \cos(\omega\,t) & -\sin(\omega\,t) \end{pmatrix} \tag{8.2.60}$$

であり、うまい具合に $\{\mathsf{X}(t)\}^{-1} = \mathsf{X}(t)$ となっている。(8.2.55) の積分計算は実に簡単で、特解

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{ps}}(t) = \mathsf{X}(t)\int_0^t ds\,\{\mathsf{X}(s)\}^{-1}\,\boldsymbol{g}(s) = \begin{pmatrix} a\,t\,\sin(\omega\,t) \\ a\,t\,\cos(\omega\,t) \end{pmatrix} \tag{8.2.61}$$

が得られる。共鳴現象をみせる解である。斉次方程式の一般解 (8.2.56) とあわせて、非斉次方程式の一般解は

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} a\,t\,\sin(\omega\,t) + c_1\,\sin(\omega\,t) + c_2\,\cos(\omega\,t) \\ a\,t\,\cos(\omega\,t) + c_1\,\cos(\omega\,t) - c_2\,\sin(\omega\,t) \end{pmatrix} \tag{8.2.62}$$

(c_1, c_2 は任意定数) となる。

次の例として、斉次方程式の例としてみた (8.2.28) に非斉次の項をたした、$t \geq t_0 > 0$ での

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= \frac{x_2(t)}{a} + b\,t \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= -12a\frac{x_1(t)}{t^2} + 6\frac{x_2(t)}{t} + ab \end{aligned} \tag{8.2.63}$$

を調べよう (非斉次項の形は計算が楽になるようにつくった)。基本解 (8.2.29) から基本行列をつくると、

$$\mathsf{X}(t) = \begin{pmatrix} t^3 & t^4 \\ 3a\,t^2 & 4a\,t^3 \end{pmatrix} \tag{8.2.64}$$

となる。逆行列はすぐに計算できて、

$$\{\mathsf{X}(t)\}^{-1} = \frac{1}{a\,t^4}\begin{pmatrix} 4a\,t & -t^2 \\ -3a & t \end{pmatrix} \tag{8.2.65}$$

よって、(8.2.55) の特解は、

$$\begin{aligned} &\mathsf{X}(t)\int_{t_0}^{t} ds\,\{\mathsf{X}(s)\}^{-1}\begin{pmatrix} bs \\ ab \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} -2bt^2 + 3b\frac{t^3}{t_0} - b\frac{t^4}{{t_0}^2} \\ -5abt + 9ab\frac{t^2}{t_0} - 4ab\frac{t^3}{{t_0}^2} \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{8.2.66}$$

となる。よくみると、t_0 を含む部分は斉次方程式の基本解の重ね合わせなので、それを引き去ると、きれいな形の特解

$$x_1^{\mathrm{ps}}(t) = -2b\,t^2, \quad x_2^{\mathrm{ps}}(t) = -5ab\,t \tag{8.2.67}$$

が得られる。一般解は、この特解と斉次方程式の一般解 (8.2.30) を足したものになる。

8.2.3 非斉次の線形二階常微分方程式への応用

前節のさいごで議論した非斉次の方程式の定数変化法でのあつかいは、未知関数が一つの非斉次の線形二階常微分方程式にも使うことができる。8.1.5 節でみたように、二階の常微分方程式は、連立の一階常微分方程式に書き換えられるのだから、これは当たり前だ。当たり前のことだから、ここにわざわざ書くまでもないのだが、それなりに使い勝手のある結果なので、以下、簡単にまとめておこう。

未知関数が一つの非斉次の線形二階常微分方程式のもっとも一般の形

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = f(t)\,x(t) + g(t)\,\frac{dx(t)}{dt} + h(t) \qquad (8.2.68)$$

を考えよう。$f(t), g(t), h(t)$ は任意の与えられた関数である。これは、$v(t) = dx(t)/dt$ とすれば、連立の一

階常微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = v(t) \\ \dfrac{d}{dt}v(t) = f(t)\,x(t) + g(t)\,v(t) + h(t) \end{cases} \tag{8.2.69}$$

になってしまう。よって、前節の一般論をそのまま使うことができる。

まず (8.2.68) で $h(t) = 0$ とした斉次の方程式の解を二つみつける。それらを $x^{(1)}(t), x^{(2)}(t)$ と呼ぶ。これらは線形独立でなくてはならない。線形独立がどうかの判定は、二つのベクトル

$$\begin{pmatrix} x^{(1)}(t) \\ \dfrac{d}{dt}x^{(1)}(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x^{(2)}(t) \\ \dfrac{d}{dt}x^{(2)}(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.70}$$

が（好きに選んだ t について）線形独立であるかをみればよい。二つのベクトルが線形独立でないときには、一方が他方の定数倍になっているわけだから、独立かどうかはベクトルの形をよく見ればわかる。

非斉次の方程式の解をつくるため、基本解 (8.2.70)

を横に並べて基本行列

$$\mathsf{X}(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)}(t) & x^{(2)}(t) \\ \dfrac{d}{dt}x^{(1)}(t) & \dfrac{d}{dt}x^{(2)}(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.71}$$

をつくる。2×2 行列だから逆行列は (7.5.9) で簡単に計算できて、

$$\{\mathsf{X}(t)\}^{-1} = \frac{1}{\det[\mathsf{X}(t)]} \begin{pmatrix} \dfrac{d}{dt}x^{(2)}(t) & -x^{(2)}(t) \\ -\dfrac{d}{dt}x^{(1)}(t) & x^{(1)}(t) \end{pmatrix} \tag{8.2.72}$$

となる。基本行列のディターミナント

$$\det[\mathsf{X}(t)] = x^{(1)}(t)\,\frac{dx^{(2)}(t)}{dt} - \frac{dx^{(1)}(t)}{dt}\,x^{(2)}(t) \tag{8.2.73}$$

を**ロンスキー**[*16]**行列式**または**ロンスキアン** (Wronskian) と呼ぶ。

[*16] Josef Hoëné de Wronski (1778 – 1853) ポーランドに生まれフランスに移った。哲学を数学に応用することを試みたという。

あとは、微分方程式 (8.2.69) から非斉次項の形を読み取り、(8.2.55) に代入すれば、特解が

$$\begin{pmatrix} x^{\mathrm{ps}}(t) \\ \dfrac{d}{dt}x^{\mathrm{ps}}(t) \end{pmatrix} = \mathsf{X}(t) \int_0^t ds\, \{\mathsf{X}(s)\}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ h(s) \end{pmatrix} \tag{8.2.74}$$

と書けることがわかる。第一成分だけを計算すれば十分で、結果は、

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{ps}}(t) = &- x^{(1)}(t) \int_0^t ds\, \frac{h(s)}{\det[\mathsf{X}(s)]}\, x^{(2)}(s) \\ &+ x^{(2)}(t) \int_0^t ds\, \frac{h(s)}{\det[\mathsf{X}(s)]}\, x^{(1)}(s) \end{aligned} \tag{8.2.75}$$

となる。言うまでもなく、(8.2.68) の一般解は、

$$x(t) = x^{\mathrm{ps}}(t) + c_1\, x^{(1)}(t) + c_2\, x^{(2)}(t) \tag{8.2.76}$$

（c_1, c_2 は任意定数）である。

■例　$\alpha > 0$ を定数とすると、

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{\alpha}{m}\,x(t) + \frac{f(t)}{m} \tag{8.2.77}$$

は不安定な平衡点 $(x = 0)$ のそばにいる粒子[*17]に時間に依存する任意の外力 $f(t)$ が働くさいの Newton の運動方程式だ。$f(t) = 0$ とした斉次の方程式の解は、$\nu = \sqrt{\alpha/m}$ として、

$$x^{(1)}(t) = e^{\nu\,t}, \quad x^{(2)}(t) = e^{-\nu\,t} \tag{8.2.78}$$

の二つがすぐにみつかる。(8.2.70) の二つのベクトルは明らかに線形独立なので、一般論が使える。簡単な計算から $\det[\mathsf{X}(t)] = -2\nu$ となり、特解 (8.2.3) は、

$$x^{\mathrm{ps}}(t) = \frac{1}{2\sqrt{m\alpha}}\{e^{\nu\,t}\int_0^t ds\,f(s)\,e^{-\nu\,s} - e^{-\nu\,t}\int_0^t ds\,f(s)\,e^{\nu\,s}\} \tag{8.2.79}$$

[*17] 粒子には原点からの距離に比例する力がはたらく。ただし、力は原点から遠ざかる方向を向いている。

と求められる。さらに $f(t)$ が与えられれば具体的な積分を実行することになる。

問 8.2.3.a　微分方程式 (8.2.77) で $f(t) = f_0\, e^{\kappa t}$（$f_0$, κ は定数）とした場合の一般解を求めよ。

問 8.2.3.b　調和振動子に時間に依存する任意の外力 $f(t)$ がかかった系の微分方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega^2\, x(t) + \frac{f(t)}{m} \tag{8.2.80}$$

の一般解を求めよ（(8.2.79) のような、積分を含んだ表現になる）。さらに、$f(t) = f_0\, \cos(\omega\, t)$（$f_0$ は定数）の場合の解を求めよ。これは、5.3.5 節であつかった強制振動で、共鳴がおきる状況である。5.3.5 節では「そ

の場しのぎ[*18]」の方法で解を求めたが、同じ解を、このように一般理論から求めることができる。

8.3　定数係数の線形常微分方程式

線形一階常微分方程式の特別な場合として、係数がすべて定数である方程式を調べておく。物理の現場でも、そういう方程式に出会うことは多い。

なお、非斉次の方程式は、(斉次方程式の基本解がわ

[*18] 数学や物理の手法には、かなり一般の場合に使えるものと、特定の例だけで使えるものがある。一般論をつくるためにはいろいろなことが深くわかっていなければならないし、一般論は「重く」なりすぎる場合もあるので、特定の例だけに使える「その場しのぎ」の方法が悪いと思う必要はない。ちなみに、英語では「その場しのぎの方法」のことを ad hoc method と呼ぶ。ad hoc は「特定の目的のための」とか「その場かぎりの」といった意味を持つラテン語。人文系の（かっこをつけた）会話や文章でも「アドホックな議論」といった言い方がよくでてくるし、最近では技術系でも「アドホック会議」という言葉があるらしい。こういう言葉も知っておいた方がいいでしょう。

かっていれば）8.2.2 節の一般論であつかうことができるので[*19]、以下では斉次の方程式にかぎって話を進めよう。

8.3.1　もっとも一般の定数係数の線形一階常微分方程式

再び、$x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ という n 個の未知関数をあつかう。斉次の線形一階常微分方程式のもっとも一般的な形は、(8.2.1) だった。定数係数というのは、係数の関数 $f_{i,j}(t)$ が時間によらない定数ということだ。つまり、$f_{i,j}(t)$ を与えられた任意の実定数 $a_{i,j}$ に

[*19] ここで、非斉次の項は、定数でなくてもよいことに注意。

置き換えた

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x_1(t) = a_{1,1}\,x_1(t) + a_{1,2}\,x_2(t) + \cdots + a_{1,n}\,x_n(t) \\ \dfrac{d}{dt}x_2(t) = a_{2,1}\,x_1(t) + a_{2,2}\,x_2(t) + \cdots + a_{2,n}\,x_n(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d}{dt}x_n(t) = a_{n,1}\,x_1(t) + a_{n,2}\,x_2(t) + \cdots + a_{n,n}\,x_n(t) \end{cases} \tag{8.3.1}$$

がもっとも一般的な形になる。あるいは、(かなり慣れてきたと思うが) 和の記号を用いて

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\,x_j(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.3.2}$$

としてもよい。

ここでも、未知関数のベクトル表示

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{8.3.3}$$

と、係数を並べた実行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{8.3.4}$$

を用いて、連立常微分方程式 (8.3.1) を、

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \mathsf{A}\,\boldsymbol{x}(t) \tag{8.3.5}$$

と書くことができる。

なお、7.8.2 節では「上級編」の話題として、(8.3.5) の一般解を行列の指数関数で (7.8.28) のように表現できることをみた。しかし、そういう難しい一般論を使ったからといって、具体的な微分方程式の解を求める計算が楽になるわけではない。以下では、7.8.2 節の結果は用いずに議論を進めることにする。

8.3.2 未知関数が二つの方程式 — 線形独立な固有ベクトルのある場合

これから、線形代数の知識をいかして、線形常微分方程式 (8.3.1) あるいは (8.3.5) の基本解を求めていく。ここでは、簡単のため[*20]、未知関数は二つだとしよう。それでも話の本質は見えてくる。$n = 2$ であり、A は 2×2 行列になる。

行列 A の固有値を、λ_1, λ_2 とする。A が実数の成分をもつ行列なので、その固有方程式（特性方程式）(7.6.4) は、実数を係数とする λ の二次方程式になる。よって、固有値 λ_1, λ_2 はどちらも実数であるか、あるいは、複素数で $(\lambda_1)^* = \lambda_2$ が成り立つか、のいずれかである。以下、この二つの場合を別々にあつかっていく。

[*20] 「簡単のため」という表現については 456 ページの脚注 *3 を見よ。

■固有値が実数の場合　まず、行列 A の固有値 λ_1, λ_2 がともに実数の場合をみよう。ここで、これらの固有値に対応する線形独立な固有ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ が存在すると仮定しよう。すると、固有ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ の成分はすべて実数にとれる。念のために、式で書いておけば、

$$\mathsf{A}\,\boldsymbol{e}^{(1)} = \lambda_1\,\boldsymbol{e}^{(1)}, \quad \mathsf{A}\,\boldsymbol{e}^{(2)} = \lambda_2\,\boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.3.6}$$

である。もし $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば、二つの固有ベクトルが存在するという仮定は正しい (1266 ページの定理 7.42)。しかし、$\lambda_1 = \lambda_2$ のとき、この仮定が成り立たないことがあることを 7.6.2 節でみた (たとえば、(7.6.54) の例)。そのような場合、ここで述べる方法は使えないので、8.3.3 節で別にあつかう。

さて、ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ は線形独立なので、任意のベクトルをこれらの線形結合で書くことができる。これを、微分方程式 (8.3.5) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ について行ない、

$$\boldsymbol{x}(t) = y_1(t)\,\boldsymbol{e}^{(1)} + y_2(t)\,\boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.3.7}$$

と書こう。解 $\boldsymbol{x}(t)$ はまだ求まっていないのにそれを展開するのは無茶だと思うかも知れないが、解が存在することは確かなのだから、われわれが知っていようが知っていまいが、展開することはできるのだ。ここで、$y_1(t)$, $y_2(t)$ は線形結合の係数だから、それぞれ実数値関数である。

(8.3.7) を t で微分すると、

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \frac{dy_1(t)}{dt}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + \frac{dy_2(t)}{dt}\,\boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.3.8}$$

であり、また (8.3.7) に左から行列 A をかけて (8.3.6) を使うと、

$$\mathsf{A}\,\boldsymbol{x}(t) = \lambda_1\,y_1(t)\,\boldsymbol{e}^{(1)} + \lambda_2\,y_2(t)\,\boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.3.9}$$

となる。これら二つが等しいわけだが、ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ が線形独立なので、それぞれの係数が等しくなければならない。よって、二つの独立な常微分方程式

$$\frac{dy_1(t)}{dt} = \lambda_1\,y_1(t), \quad \frac{dy_2(t)}{dt} = \lambda_2\,y_2(t) \tag{8.3.10}$$

が得られる。これらの解は、もちろん、C_1, C_2 を任意定数として、

$$y_1(t) = C_1\, e^{\lambda_1\, t}, \quad y_2(t) = C_2\, e^{\lambda_2\, t} \tag{8.3.11}$$

となる。

(8.3.11) を (8.3.7) に代入した

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1\, e^{\lambda_1\, t}\, \boldsymbol{e}^{(1)} + C_2\, e^{\lambda_2\, t}\, \boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.3.12}$$

は、明らかに、もとの微分方程式 (8.3.5) の一般解である。同じことを、基本解ということばを使って言えば、たとえば（(8.3.12) で、それぞれ、$C_1 = 1,\, C_2 = 0$ および $C_1 = 0,\, C_2 = 1$ とした）

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda_1\, t}\, \boldsymbol{e}^{(1)}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}(t) = e^{\lambda_2\, t}\, \boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.3.13}$$

という二つの解の組みが基本解を与える、ということになる。ふたつの基本解は、異なった指数的減衰ないしは増大を表している。

■固有値が複素数の場合　次に、行列 A の固有値 λ_1, λ_2 が複素数の場合をあつかおう。$(\lambda_1)^* = \lambda_2$ だから、実数 α, β があって、

$$\lambda_1 = \alpha + i\,\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\,\beta \tag{8.3.14}$$

と書ける。ここで、λ_1, λ_2 が実数でないのだから $\beta \neq 0$。二つの固有値が異なるから、対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ は線形独立になる (1266 ページの定理 7.42)。ただし、これらのベクトルは複素数を成分にもつ。固有値が互いに複素共役だから、固有ベクトルも $(\boldsymbol{e}^{(1)})^* = \boldsymbol{e}^{(2)}$ を満たすように選ぶことができる[*21]。

ここでも、微分方程式 (8.3.5) の解 $\boldsymbol{x}(t)$ を (8.3.7) のように展開しよう。今度はベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \boldsymbol{e}^{(2)}$ が複素数の成分をもつので、係数の $y_1(t), y_2(t)$ も複素数にな

[*21] 列ベクトル $\boldsymbol{v}$ の複素共役 $\boldsymbol{v}^*$ とは、ベクトルの各成分の複素共役をとった列ベクトル。$(\boldsymbol{e}^{(1)})^* = \boldsymbol{e}^{(2)}$ と取れることは、$\mathsf{A}\boldsymbol{e}^{(1)} = \lambda_1\boldsymbol{e}^{(1)}$ という式のすべての量の複素共役をとれば $\mathsf{A}(\boldsymbol{e}^{(1)})^* = (\lambda_1)^*(\boldsymbol{e}^{(1)})^* = \lambda_2(\boldsymbol{e}^{(1)})^*$ となることから、わかる。

る。前と同様に、二つの微分方程式 (8.3.10) が得られるので、これらを解くと、

$$y_1(t) = C_1\, e^{(\alpha + i\,\beta)\,t}, \quad y_2(t) = C_2\, e^{(\alpha - i\,\beta)\,t} \tag{8.3.15}$$

となる。もちろん、C_1, C_2 は複素数の定数。

ここでも、(8.3.12) と同様、二つの解に固有ベクトルをかけて重ね合わせた

$$\boldsymbol{x}(t) = C_1\, e^{(\alpha + i\,\beta)\,t}\, \boldsymbol{e}^{(1)} + C_2\, e^{(\alpha - i\,\beta)\,t}\, \boldsymbol{e}^{(2)} \tag{8.3.16}$$

が求める一般解になる。ここで、基底ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}$, $\boldsymbol{e}^{(2)}$ の成分や係数 C_1, C_2 が複素数なので余分な注意がいる。解 $\boldsymbol{x}(t)$ は実数の成分を持つべきだから、そうなるように C_1, C_2 を適切に選ばなくてはならないのだ。(8.3.16) の各成分の複素共役をとると、

$$(\boldsymbol{x}(t))^* = (C_1)^*\, e^{(\alpha - i\,\beta)\,t}\, \boldsymbol{e}^{(2)} + (C_2)^*\, e^{(\alpha + i\,\beta)\,t}\, \boldsymbol{e}^{(1)} \tag{8.3.17}$$

となる（$(\boldsymbol{e}^{(1)})^* = \boldsymbol{e}^{(2)}$ を使った）。$\boldsymbol{x}(t) = (\boldsymbol{x}(t))^*$ でなくてはならないので、(8.3.16) と (8.3.17) を見比べ

ると、$(C_1)^* = C_2$ が得られる。この関係が成り立つように、C_1, C_2 を選べばよい。

たとえば、$C_1 = C_2 = 1/2$ とすれば

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(1)} + e^{(\alpha-i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(2)}\right) \tag{8.3.18}$$

という解が得られる。あるいは、$C_1 = 1/(2i)$, $C_2 = -1/(2i)$ としても

$$\boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \frac{1}{2i}\left(e^{(\alpha+i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(1)} - e^{(\alpha-i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(2)}\right) \tag{8.3.19}$$

という実数の解が得られる。(8.3.18) と (8.3.19) を、この方程式の基本解として採用しよう。

これらの解の形を具体的にみるため、実数 γ, θ を使って、二つの固有ベクトルを、

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma e^{i\theta} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ \gamma e^{-i\theta} \end{pmatrix} \tag{8.3.20}$$

のように書こう。どんな固有ベクトルだろうと、適切に定数倍してやれば、この形になる。(8.3.20) を、

(8.3.18) と (8.3.19) に代入して、整理すれば、

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t) \\ \gamma\,e^{\alpha\,t}\,\cos(\beta\,t+\theta) \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} e^{\alpha\,t}\,\sin(\beta\,t) \\ \gamma\,e^{\alpha\,t}\,\sin(\beta\,t+\theta) \end{pmatrix} \tag{8.3.21}$$

という形に書き直すことができる。解は、全体としては $e^{\alpha\,t}$ に比例して増加ないしは減衰し、それとともに角振動数 β で振動している。二つの基本解は、振動の位相が 90 度ずれたものになっている。

問 8.3.2.a　微分方程式

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = x_1(t)+x_2(t), \quad \frac{d}{dt}x_2(t) = -2\,x_1(t)+3\,x_2(t) \tag{8.3.22}$$

の一般解を求めよ。

問 8.3.2.b　行列の固有値と固有ベクトルの知識を用いて、斉次の常微分方程式

$$\dot{x}(t) = 2\,x(t) + 4\,y(t)$$
$$\dot{y}(t) = x(t) - y(t) \tag{8.3.23}$$

の基本解を求めよ。基本行列の方法（8.2.2 節）を用いて、非斉次の常微分方程式

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= 2\,x(t) + 4\,y(t) + e^{3\,t} \\ \dot{y}(t) &= x(t) - y(t)\end{aligned} \tag{8.3.24}$$

の一般解を求めよ。

8.3.3　線形独立な固有ベクトルがない場合

8.3.2 節では、微分方程式を表す行列 A が二つの線形独立な固有ベクトルをもつ場合だけをあつかった。この仮定が成立しない例もあるので、そのような場合の扱いを見ておこう[*22]。

微分方程式を (8.3.5) の形に書く。$n = 2$ であり、2×2 行列 A の固有値 λ は実数で二重に縮退しているとしよう（固有値が複素数になる場合は、縮退するこ

[*22] 初心者はこの節をとばしてもかまわないだろう。こういう場合のやり方がここに書いてあったと覚えていてもし必要になったら読めばいい。

とはない)。さらに、λ に対応する固有ベクトルは一つしかないと仮定し、それを $\boldsymbol{e}$ と書く。

補題 8.7. $\boldsymbol{v}$ を $\boldsymbol{e}$ と線形独立な任意のベクトルとすると、*0* でない実数 β があり $(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})\,\boldsymbol{v}=\beta\,\boldsymbol{e}$ が成り立つ。よって $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{v}/\beta$ とおけば、$(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})\,\boldsymbol{f}=\boldsymbol{e}$ が成り立つ。

証明：仮定により $(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})\,\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0}$ であり、この関係を満たすのは $\boldsymbol{e}$ とその定数倍のみ。線形独立性から、一般に $(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})\,\boldsymbol{v}=\beta\,\boldsymbol{e}+\gamma\,\boldsymbol{v}$ と展開できる。$\beta\neq 0,\gamma=0$ であることを示せばよい。まず、もし $\gamma\neq 0$ であれば、$\boldsymbol{u}=(\beta/\gamma)\boldsymbol{e}+\boldsymbol{v}$ とおけば、$(\mathsf{A}-\lambda\mathsf{I})\,\boldsymbol{u}=\gamma\,\boldsymbol{u}$ が成り立つ。つまり、$\mathsf{A}\boldsymbol{u}=(\lambda+\gamma)\boldsymbol{u}$ となるが、これは λ が A の唯一の固有値であることと矛盾。よって $\gamma=0$ しかあり得ない。また、もし $\beta=0$ なら $\boldsymbol{e}$ が唯一の固有ベクトルという仮定に矛盾。∎

微分方程式 (8.3.5) の二つの基本解をさがそう。ま

ず、一つ目は今までの (8.3.13) などと同じように、

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = e^{\lambda\, t}\, \boldsymbol{e} \tag{8.3.25}$$

とすればよい。これが解になることはこれまでと同じ計算で簡単にわかる。

もう一つの基本解は、天下りだが、

$$\boldsymbol{x}^{(2)}(t) = t\, e^{\lambda\, t}\, \boldsymbol{e} + e^{\lambda\, t}\, \boldsymbol{f} \tag{8.3.26}$$

という形にとる。ここで、$\boldsymbol{f}$ は補題 8.7 で決めたもので、$\mathsf{A}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} + \lambda \boldsymbol{f}$ を満たす。これが実際に解になっていることを確かめよう。まず (8.3.26) を t で微分すると、

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x}^{(2)}(t) = e^{\lambda\, t}\, \boldsymbol{e} + \lambda\, t\, e^{\lambda\, t}\, \boldsymbol{e} + \lambda\, e^{\lambda\, t}\, \boldsymbol{f} \tag{8.3.27}$$

である。また、微分方程式 (8.3.5) の右辺に (8.3.26) を代入すると、

$$\mathsf{A}\boldsymbol{x}^{(2)}(t) = t\, e^{\lambda\, t}\, \lambda\, \boldsymbol{e} + e^{\lambda\, t}(\boldsymbol{e} + \lambda \boldsymbol{f}) \tag{8.3.28}$$

となり、よく見ると、これは (8.3.27) に等しい。

$t=0$ では、$\boldsymbol{x}^{(1)}(0)=\boldsymbol{e}$ と $\boldsymbol{x}^{(2)}(0)=\boldsymbol{f}$ は線形独立。よって、$\boldsymbol{x}^{(1)}(t)$, $\boldsymbol{x}^{(2)}(t)$ は基本解になる。

■例　簡単な例として、

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x_1(t)&=x_1(t)+2\,x_2(t),\\ \frac{d}{dt}x_2(t)&=-2\,x_1(t)-3\,x_2(t)\end{aligned}\tag{8.3.29}$$

という連立の線形常微分方程式を考えよう。(8.3.5) の形に書けば、行列は、

$$\mathsf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}\tag{8.3.30}$$

である。固有方程式は、$\det[\mathsf{A}-\lambda\,\mathsf{I}]=(1-\lambda)(-3-\lambda)-2(-2)=(\lambda+1)^2=0$ だから、固有値は二重に縮退していいて、$\lambda=-1$ である。さらに、固有ベクトルを決める関係

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\tag{8.3.31}$$

からは、$x+y=0$ という条件が出てくるので、固有ベクトルして、たとえば $\boldsymbol{e}=(1,-1)^{\mathrm{t}}$ が取れる。しか

し、これに線形独立な固有ベクトルはない。そこで、$\boldsymbol{e}$ と線形独立な適当なベクトルとして、$\boldsymbol{v} = (1,1)^{\mathrm{t}}$ をとる。補題 8.7 に出てくる量を具体的に計算すると、ここでは $(\mathsf{A} - \lambda\mathsf{I})\,\boldsymbol{v} = 4\,\boldsymbol{e}$ となる（やってみよう）。よって、補題に従って、$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{v}/4 = (1/4, 1/4)^{\mathrm{t}}$ と取る。あとは、(8.3.25), (8.3.26) に代入すれば、基本解が、

$$\boldsymbol{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} t\,e^{-t} + e^{-t}/4 \\ -t\,e^{-t} + e^{-t}/4 \end{pmatrix} \tag{8.3.32}$$

と求められる。もちろん、一般解は、C_1, C_2 を任意定数として、

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} C_1\,e^{-t} + C_2\,(t\,e^{-t} + e^{-t}/4) \\ -C_1\,e^{-t} + C_2\,(-t\,e^{-t} + e^{-t}/4) \end{pmatrix} \tag{8.3.33}$$

である。

問 8.3.3.a　微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x_1(t) &= 2\,x_1(t) + 3\,x_2(t), \\ \frac{d}{dt}x_2(t) &= -3\,x_1(t) - 4\,x_2(t) \end{aligned} \tag{8.3.34}$$

の一般解を求めよ。

8.3.4　未知関数が n 個の方程式

8.3.2 節の方法を、未知関数が n 個の一般の場合に拡張しよう。考え方はまったく同じだから、少し抽象的に、話をさっさと進めよう。

解くべき微分方程式は (8.3.5)。$n \times n$ 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする[*23]。これらの内、最初の $2m$ 個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2m}$ は複素数で、$(\lambda_{2j-1})^* = \lambda_{2j}$ $(j = 1, \ldots, m)$ を満たし、残る $n - 2m$ 個の $\lambda_{2m+1}, \ldots, \lambda_n$ は実数とする。そして (これは、固有値が縮退するときには、一般には成立しないことだが) これらの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}$ が存在し、互いに線形独立であるとしよう。ただし、$(\boldsymbol{e}^{(2j-1)})^* = \boldsymbol{e}^{(2j)}$ $(j = 1, \ldots, m)$ のようにとっておく。

[*23] 縮退がある場合は、等しいものも重複して数え上げる。

(8.3.7) と同じように、解を

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t)\, \boldsymbol{e}^{(j)} \tag{8.3.35}$$

と展開する。これを微分方程式 (8.3.5) に代入し、線形独立性を使えば、各々の j について、$d\,y_j(t)/dt = \lambda_j\, y_j(t)$ という簡単な微分方程式が得られ、その解は $y_j(t) = C_j\, e^{\lambda_j\, t}$。よって、これらを足し合わせた

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} C_j\, e^{\lambda_j\, t}\, \boldsymbol{e}^{(j)} \tag{8.3.36}$$

が微分方程式 (8.3.5) の一般解になる。ただし、係数 $C_1, \ldots, C_n$ は解が実数になるようにとらなくてはならない[*24]。

ここでも、前と同じように（全ての成分が実数になる）基本解をあからさまに作っておくと便利だ。複

[*24] つまり、$j = 1, \ldots, m$ については $(C_{2j-1})^* = C_{2j}$ となるように選び、$\ell = 2m+1, \ldots, n$ については単に C_ℓ を実数にとればよい。

素固有値に対応する前半 $2m$ 個の基本解は (8.3.18), (8.3.19) と同じ思想で、

$$\boldsymbol{x}^{(2j-1)}(t) = \frac{1}{2}\left\{e^{(\alpha+i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(2j-1)} + (e^{(\alpha+i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(2j-1)})^*\right\} \tag{8.3.37}$$

$$\boldsymbol{x}^{(2j)}(t) = \frac{1}{2i}\left\{e^{(\alpha+i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(2j-1)} - (e^{(\alpha+i\,\beta)\,t}\,\boldsymbol{e}^{(2j-1)})^*\right\} \tag{8.3.38}$$

$(j = 1, \ldots, m)$ とする[*25]。残る実固有値に対応する $n - 2m$ 個の基本解は、(8.3.13) と同じで、単に

$$\boldsymbol{x}^{(\ell)}(t) = e^{\lambda_\ell\,t}\,\boldsymbol{e}^{(\ell)} \tag{8.3.39}$$

$(\ell = 2m+1, \ldots, n)$ ととればよい。

n 個の線形独立な固有ベクトルがとれないときにどうすればいいか、ごく簡単に触れておこう。もし、ある固有値が二重に縮退していて、対応する固有ベクトルが一つしかないときは、8.3.3 節の方法が使える。つまり、$\boldsymbol{e}$ を唯一の固有ベクトルとし、$\boldsymbol{f}$ を $\boldsymbol{e}$ と独立で

[*25] もちろん、これを (8.3.21) の形に書くこともできる。

$\mathsf{A}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{e} + \lambda\boldsymbol{f}$ を満たすベクトルとして、基本解 (8.3.26) をつくればよい。ベクトル $\boldsymbol{f}$ の計算が少しややこしくなるが、存在することは保証される。ある固有値が三重以上に縮退している場合も、同じ精神で解くことができるのだが、そこまでややこしいものに出会うチャンスは低いだろうから、ここでは述べないことにしよう[*26]。

8.3.5　定数係数の線形二階常微分方程式

さいごに、定数係数の線形二階常微分方程式を取り上げよう。一般的な扱いの技術は既に一階の方程式で述べたもののくり返しになるが、さらに、物理にとって重要な応用例をあつかうことにする。

■固有ベクトルを使う方法　8.3.2 節で述べた行列の固有ベクトルを使う方法で、定数係数の線形二階常微分

[*26] もし物理の現場でそういうのに出会ったという声があれば、改訂して、そこまで書こうと思います。

方程式を取り扱ってみよう。もちろん、二階の常微分方程式は（未知関数をふやせば）かならず一階の常微分方程式に書き直すことができる（8.1.5 節）。しかし、これから見るような未知関数の一階微分を含まない方程式の場合は、一階の方程式に書きなおさず直接に取り扱う方がはるかに能率的だ。

ここで扱う方程式は、

$$\begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2}x_1(t) = a_{1,1}\,x_1(t) + a_{1,2}\,x_2(t) + \cdots + a_{1,n}\,x_n(t) \\ \dfrac{d^2}{dt^2}x_2(t) = a_{2,1}\,x_1(t) + a_{2,2}\,x_2(t) + \cdots + a_{2,n}\,x_n(t) \\ \qquad\qquad \vdots \\ \dfrac{d^2}{dt^2}x_n(t) = a_{n,1}\,x_1(t) + a_{n,2}\,x_2(t) + \cdots + a_{n,n}\,x_n(t) \end{cases} \tag{8.3.40}$$

である。未知関数の二階微分だけを含む、斉次の定数係数線形常微分方程式だ。後でみるように、摩擦項のないニュートン方程式の中に、この形になるものがある。

すっかり慣れてきたと思うが、未知関数のベクトル

表示

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \tag{8.3.41}$$

と、係数を並べた行列

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \tag{8.3.42}$$

を用いて、連立常微分方程式 (8.3.40) を、

$$\frac{d^2\boldsymbol{x}(t)}{dt^2} = \mathsf{A}\,\boldsymbol{x}(t) \tag{8.3.43}$$

と書くことができる。

$n \times n$ 行列 A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とする。ここでは、物理への応用を考えて、これら固有値がすべて実数である場合のみを考える。さらに、(これは、固有値が縮退するときには、一般には成立しないことだが)

これらの固有値に対応する固有ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(n)}$ が存在し、互いに線形独立であるとしよう。

n 個の固有値の内、最初の m 個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ は正で、残る $n-m$ 個の $\lambda_{m+1}, \ldots, \lambda_n$ は負とする。ちょうど 0 の固有値がある場合は、あとで別に考えよう。正の実数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ と $\omega_{m+1}, \ldots, \omega_n$ を使って、$\lambda_j = (\alpha_j)^2$ $(j = 1, \ldots, m)$ および $\lambda_j = -(\omega_j)^2$ $(j = m+1, \ldots, n)$ と書いておく。

(8.3.7), (8.3.35) と同じように、固有ベクトルをつかって、(まだ知らない) 解を

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} y_j(t)\, \boldsymbol{e}^{(j)} \tag{8.3.44}$$

と展開する。これを微分方程式 (8.3.43) に代入して、固有ベクトルの線形独立性を使えば、

$$\frac{d^2 y_j(t)}{dt^2} = \lambda_j\, y_j(t), \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{8.3.45}$$

という簡単な二階の常微分方程式が得られる。つまり、もとの微分方程式の解のふるまいが、n 個の独立な部

分に分離されたのだ。このような「独立して運動する部分」のことを、物理では、(運動の) **モード**[*27] (mode) と呼ぶことがある。

各々のモードの微分方程式 (8.3.45) を、λ_j の符号に注意して解けば、$j = 1, \ldots, m$ については、c_j, c'_j を実数の任意定数として、

$$y_j(t) = c_j\, e^{\alpha_j\, t} + c'_j\, e^{-\alpha_j\, t} \tag{8.3.46}$$

$j = m+1, \ldots, n$ については、c_j, θ_j を実数の任意定数として、

$$y_j(t) = c_j\, \cos(\omega_j\, t + \theta_j) \tag{8.3.47}$$

となる。未知関数が n 個の二階常微分方程式だから、任意定数が $2n$ 個で話があっている。固有値の符号に応じて、指数関数的にふるまうモード (8.3.46) と振動

[*27] 英語の mode には、「方法」、「様式」、「流儀」などの他、「存在の仕方」、「存在の形態」などの意味がある。ここでは後二者の意味で使っている。

するモード (8.3.47) が現れた。これらを (8.3.44) に戻してやれば、

$$\boldsymbol{x}(t) = \sum_{j=1}^{m} \{c_j\, e^{\alpha_j\, t} + c'_j\, e^{-\alpha_j\, t}\}\, \boldsymbol{e}^{(j)} + \sum_{j=m+1}^{n} c_j\, \cos(\omega_j\, t + \theta_j)\, \boldsymbol{e}^{(j)} \tag{8.3.48}$$

という一般解が得られる。

なお、行列 A の固有値で 0 になるものがあるときは、そのモード[*28]の微分方程式は単に $d^2 y_j(t)/dt^2 = 0$ になる。解は、明らかに $y_j(t) = c_j + c'_j\, t$ という一次関数だ。ゼロモードがあれば、それを一般解 (8.3.48) に付け加えればよい。

■連成振動への応用　上の考察の応用として、複数の調和振動子（バネ）が互いに影響を及ぼしあう**連成振動** (coupled oscillation) の問題をあつかおう。

[*28] 固有値 0 に対応するモードは「ゼロモード」と呼ぶ。なんとなく専門家っぽい言い方だ。

図 8.2　三つのバネでつながれた二つの質点。（われながら怠慢な絵だと思うが）両側の黒い箱が固定された壁を、横棒がバネをあらわしている。

典型的な例として、図 8.2 のように、質量 m_1, m_2 の二つの質点がバネ定数 k_1, k_2, k_3 の理想的なバネで結ばれた系を考える。すべてのバネと質点が一直線に並んで力がバランスした平衡点から、二つの質点が（その一直線の方向に沿って）一次元的に動くことしよう。平衡点からの二つの質点のずれを x_1, x_2 とする。

質点に働く復元力を考えると、この系の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} &= -k_1\, x_1(t) - k_3\{x_1(t) - x_2(t)\} \\
m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} &= -k_2\, x_2(t) - k_3\{x_2(t) - x_1(t)\}
\end{aligned}
\tag{8.3.49}
$$

となる。平衡点で、バネが自然長なのか、延びきっているのか、縮められているのか、といったことを特に言わなかった。実は、そういった条件に関係なく、運動方程式は (8.3.49) になるのだ。考えてみよう[*29]。

(8.3.49) は、ベクトルと行列を使えば、

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(k_1+k_3)/m_1 & k_3/m_1 \\ k_3/m_2 & -(k_2+k_3)/m_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} \tag{8.3.50}$$

のように書ける。上の一般論をあてはめれば、この行列の固有値、固有ベクトルを使って運動方程式 (8.3.49)

[*29] ただし、これは直線上の運動を考えたときだけ正しい。これと垂直な方向の運動を考えると、バネの延び方が方程式に現れる。

の一般解をつくることができる[*30]。

一般の場合を解くと式が煩雑になるので、簡単のため、m, k, k' の三つのパラメターによって $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$, $k_3 = k'$ と書ける場合をみよう。微分方程式を (8.3.43) の形に書いたときの行列 A は、

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} -(k+k')/m & k'/m \\ k'/m & -(k+k')/m \end{pmatrix} \tag{8.3.51}$$

という実対称行列になる。いつものように計算すれば、行列 A の固有値は二つとも負で、$\lambda_1 = -k/m$ と $-(k+2k')/m$、である。つまり、二つの振動モードがある。また、これらのモードに対応する固有ベクト

[*30] ここで、(8.3.50) に現れる行列は、実行列だが、一般には対称ではない。もちろん、対称行列でなくても、固有値と固有ベクトルが求まれば、上の一般論はそのまま適用できる。しかし、(慣れの問題もあるが) 実対称行列を扱うほうが便利なことも多い。すぐ下の問題 8.3.5.b で述べるように、$y_i(t) = \sqrt{m_i}\, x_i(t)$ という変数変換をして、$y_i(t)$ についての微分方程式をつくると、実対称行列が現れる。

ルは、

$$\boldsymbol{e}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{8.3.52}$$

のようにとれる（これくらいの計算はいつでもできた方がいい）。よって、(8.3.47) の解を使えば、一般解は、二つの振動モードの重ね合わせで、

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) + c_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \\ x_2(t) &= c_1 \cos(\omega_1 t + \theta_1) - c_2 \cos(\omega_2 t + \theta_2) \end{aligned} \tag{8.3.53}$$

となる。ただし、$\omega_1 = \sqrt{k/m}$, $\omega_2 = \sqrt{(k+2k')/m}$ である。解 (8.3.53) をみれば、振動数 ω_1 のモードでは、二つの質点が同じ方向にいっしょに動き、振動数 ω_2 のモードでは、二つの質点がちょうど逆方向に動くことがわかるだろう。

より一般の連成振動の問題も、同じようにして、行列の固有値、固有ベクトルを求める問題に帰着することができる。下の問題 8.3.5.b を見よ。

問 8.3.5.a　質量 m の三つの粒子が、バネ定数 k の理

想的なバネ二つでつながれて一次元的に運動する際の運動方程式

$$
\begin{aligned}
m\frac{d^2x_1(t)}{dt^2} &= -k\left\{x_1(t)-x_2(t)\right\} \\
m\frac{d^2x_2(t)}{dt^2} &= -k\left\{x_2(t)-x_1(t)\right\}-k\left\{x_2(t)-x_3(t)\right\} \\
m\frac{d^2x_3(t)}{dt^2} &= -k\left\{x_3(t)-x_2(t)\right\} \qquad (8.3.54)
\end{aligned}
$$

を解け（ゼロモードに注意)。

問 8.3.5.b　これまで見てきた例では、連成振動の方程式に現れる行列 A はいつもゼロ以下の実数の固有値をもち、また固有ベクトルは線形独立だった。これは実は偶然ではなく、連成振動では一般に成り立つのだ。これを示そう[*31]。

[*31] この問題は、ちょっと抽象的でレベルが高い。まず質点が二つの (8.3.49) で同じことをやってみて、それから本格的な一般論に取り組むのがよいだろう。なお、この問題では簡単のためゼロモードは現れない設定になっている。

n 個の未知関数（位置座標）$x_1(t), \ldots, x_n(t)$ が連成振動の運動方程式

$$m_i \frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = -k_i\, x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} k_{i,j} \left\{ x_i(t) - x_j(t) \right\} \tag{8.3.55}$$

$(i = 1, \ldots, n)$ を満たす。ただし、バネ定数について、$k_i > 0$, $k_{i,j} = k_{j,i} \geq 0$ を仮定する。また $k_{i,i} = 0$ とする。(8.3.55) をそのまま (8.3.43) の形に書きなおすと、行列 A は一般には対称ではない（(8.3.50) が実例）。そこで、新しく $y_i(t) = \sqrt{m_i}\, x_i(t)$ という未知関数を定義して、(8.3.55) を、

$$\boldsymbol{y}(t) = \mathsf{A}\, \boldsymbol{y}(t) \tag{8.3.56}$$

という形に書きなおす。行列 A の成分を求め、これが実対称行列であることを確認せよ。実対称行列は、実数の固有値と、n 個の互いに直交する固有ベクトルをもつから（1291 ページの定理 7.47)、これで n 個の運動のモードがあることがはっきりとわかった。

さらに、これら固有値がすべて負であること、つまり、すべてのモードが振動モードであることも実対称行列の性質から証明できてしまう。まず、$\boldsymbol{y} = (\sqrt{m_1}\,x_1, \ldots, \sqrt{m_n}\,x_n)^{\mathrm{t}}$ とするとき、

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{A}\,\boldsymbol{y} = -\sum_i k_i\,(x_i)^2 - \sum_{i<j} k_{i,j}\,(x_i - x_j)^2 \leq 0 \tag{8.3.57}$$

が成り立つことを示せ。つまり、任意のゼロでない実ベクトル $\boldsymbol{v}$ について、$\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{A}\,\boldsymbol{v} < 0$ がいえることになる。他方、$\boldsymbol{v}$ を規格化した固有ベクトルで $\boldsymbol{v} = \sum_i v_i\,\boldsymbol{e}^{(i)}$ と展開すれば、固有ベクトルが互いに直交することから、$\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}\,\mathsf{A}\,\boldsymbol{v} = \sum_i \lambda_i\,(v_i)^2$ である。この量がつねに負なのだから、すべての固有値について $\lambda_i < 0$ でなくてはならない。

こうして、たくさんの質点を多数のバネで好き勝手につないだ系は、かならず振動運動を示すことが厳密にわかった。直感的には当たり前のような気もするが、ややこしいバネのネットワークができたとき、他の運

動があり得ないことを示すのは一筋縄ではいかない。上の証明では、線形代数で学んだ直交行列の美しい性質が、実に巧みに使われていることを感じてほしい。しつこいが、抽象数学は、物理にとって具体的な力になるのだ。

■平衡点近傍での運動の一般論　やや高級な応用として[*32]、N 個の質点の系での平衡点のまわりでの運動を、一般的にあつかってみる。多変数関数のテイラー展開、実対称行列の性質、など少し進んだ数学が威力を発揮するのをみることができる。

N 個の質点に名前をつけて $i = 1, \ldots, N$ と呼ぶ。粒子 i の質量を m_i、位置座標を $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ とする。これら質点に働く力はポテンシャル $V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N)$ で

[*32] というわけで、初学者は読まなくてもよい。しかし、これから力学などいろいろな物理を学んでいく過程で、一度は、ここに立ち返って理解する価値のある内容だと思う。

記述されるとしよう[*33]。時刻 t における粒子 i の位置を $\boldsymbol{r}_i(t)$ とする。この系の運動方程式は、

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i(t)}{dt^2} = -\mathrm{grad}_i\, V(\boldsymbol{r}_1(t), \ldots, \boldsymbol{r}_N(t)) \quad (8.3.58)$$

$(i = 1, \ldots, N)$ である。ただし、

$$\mathrm{grad}_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial z_i} \right) \quad (8.3.59)$$

は粒子 i の座標 $\boldsymbol{r}_i$ についてのグラディエント[*34]。

この系には、その配置になれば粒子たちが動かずにじっとしているような平衡点があるとしよう。平衡点での粒子の配置を $\boldsymbol{r}_1^{(\mathrm{eq})}, \ldots, \boldsymbol{r}_N^{(\mathrm{eq})}$ と書く。平衡点では粒子にトータルでは力が働かないことから、

$$\mathrm{grad}_i\, V(\boldsymbol{r}_1^{(\mathrm{eq})}, \ldots, \boldsymbol{r}_N^{(\mathrm{eq})}) = \boldsymbol{0} \quad (8.3.60)$$

[*33] 一般に、$V(\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N) = \sum_i v_i(\boldsymbol{r}_i) + \sum_{i<j} v_{i,j}(\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j)$ と書ける。$v_i(\cdot)$ は i 番目の粒子に働く外力のポテンシャル、$v_{i,j}(\cdot)$ は粒子 i, j 間に働く力のポテンシャル。

[*34] グラディエントについては、10.3.1 節で詳しく述べる。ただし、ここでの計算は、9.1.2 節の多変数関数のテイラー展開を知っていれば、理解できる。

が $i = 1, \ldots, N$ について成り立つ。

平衡点のまわりでの系の運動を書き表すために、新しい座標 $\xi_1, \ldots, \xi_{3N}$ を使って、粒子 i の位置座標を

$$\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_i^{(\mathrm{eq})} + \frac{1}{\sqrt{m_i}} \left(\xi_{3i-2}, \xi_{3i-1}, \xi_{3i}\right) \tag{8.3.61}$$

$(i = 1, \ldots, N)$ と書こう。さらに、座標 $\xi_1, \ldots, \xi_{3N}$ で表したポテンシャルを

$$\begin{aligned} U(\boldsymbol{\xi}) = V\Bigg(&\boldsymbol{r}_1^{(\mathrm{eq})} + \frac{1}{\sqrt{m_1}} \left(\xi_1, \xi_2, \xi_3\right), \ldots, \\ &\boldsymbol{r}_N^{(\mathrm{eq})} + \frac{1}{\sqrt{m_N}} \left(\xi_{3N-2}, \xi_{3N-1}, \xi_{3N}\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{8.3.62}$$

とする。もちろん $\boldsymbol{\xi}$ は $\xi_1, \ldots, \xi_{3N}$ を縦に並べた $3N$ 成分の列ベクトル。(8.3.61) を使えば、時刻 t での粒子の位置を関数 $\boldsymbol{\xi}(t)$ で表すことができる。運動方程式 (8.3.58) に (8.3.61) を代入して少し計算すると、$\boldsymbol{\xi}(t)$ についての運動方程式は

$$\frac{d^2 \xi_j(t)}{dt^2} = - \left.\frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\right|_{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(t)} \tag{8.3.63}$$

$(j = 1, \ldots, 3N)$ というきれいな形になる。

さて、平衡点の近傍での運動を調べるため、平衡点からのずれ ξ_j が小さいと仮定して、(8.3.63) の右辺の量を次のように展開しよう。

$$\begin{aligned}\frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j} &= \left.\frac{\partial U(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} + \sum_{k=1}^{3N} \left(\left.\frac{\partial^2 U(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k \, \partial \xi_j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \right) \xi_k \\ &\quad + O(\xi^3) \\ &= -\sum_{k=1}^{3N} H_{j,k} \, \xi_k + O(\xi^3) \qquad (8.3.64)\end{aligned}$$

一階微分の項が消えたのは、平衡点の条件 (8.3.60) のためである。ここで**ヘッセ**[*35]**行列** (Hessian[*36]) $\mathsf{H} = (H_{j,k})$ を、

$$H_{j,k} = H_{k,j} = -\left.\frac{\partial^2 U(\boldsymbol{\xi})}{\partial \xi_k \, \partial \xi_j}\right|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}} \qquad (8.3.65)$$

[*35] Ludwig Otto Hesse (1811-1874) ドイツの数学者。

[*36] Hessian という言葉は、ヘッセ行列そのものとヘッセ行列のディターミナントと、二つの意味で用いられる。

により定義した。$O(\xi^3)$ の項を無視すれば、平衡点からのずれ $\boldsymbol{\xi}(t)$ についての運動方程式 (8.3.63) は、

$$\frac{d^2\boldsymbol{\xi}(t)}{dt^2} = \mathsf{H}\,\boldsymbol{\xi}(t) \tag{8.3.66}$$

という (8.3.41) の形の定数係数の線形二階常微分方程式になる。しかもヘッセ行列 H は実対称なので、かならず線形独立な（さらに、互いに直交する）$3N$ 個の固有ベクトル $\boldsymbol{e}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{e}^{(3N)}$ がとれる。言いかえれば、平衡点からの微小なずれの運動は、かならず $3N$ 個のモードに分離する。以前と同様に、はじめの m 個の固有値を正とすれば、一般解は (8.3.48) と同じ

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\xi}(t) = &\sum_{j=1}^{m}\{c_j\, e^{\alpha_j\, t} + c'_j\, e^{-\alpha_j\, t}\}\,\boldsymbol{e}^{(j)} \\ &+ \sum_{j=m+1}^{3N} c_j\, \cos(\omega_j\, t + \theta_j)\,\boldsymbol{e}^{(j)}\end{aligned} \tag{8.3.67}$$

という形になる。

一般解 (8.3.67) に現れる $e^{\alpha_j\, t}$ という項は、時間とともにどんどん成長していく。ヘッセ行列 H に正（また

は、ゼロ）の固有値があるなら、このような項（または、t に比例する項）が現れるから、系の配置が平衡点から少しずれると、一般には、そのずれがどんどん増幅して、系の配置はいずれは平衡点から遠く離れてしまうことになる[*37]。こういうとき、平衡点は不安定であるという。逆に、ヘッセ行列 H の固有値がすべて負なら、一般解 (8.3.67) は、二つ目の振動する項のみの和になる。このときには、系の配置が平衡点からずれても、けっきょく平衡点のまわりで振動をつづけるだけで平衡点から遠ざかりはしない。こういうとき、平衡点は安定であるという。

問 8.3.5.c　三次元空間の中を運動する質量 m の質点を考える。（これは非現実的な設定だが）$(0,0,0)$ に質量 M_1 の物体が、$(L,0,0)$ に質量 M_2 の物体が、それぞれ静止していて、質点に万有引力を及ぼしていると

[*37] ある程度、離れてしまうと、$\xi_j(t)$ が小さいとした近似は成り立たなくなってしまう。それでも、平衡点から離れるという事実は確かだ。

する。このとき、質点の平衡点を求め、平衡点近傍での運動のモードを調べよ。

第 9 章

多変数関数の微分と積分（予定地）

この章では多変数関数の微分と積分について書く予定なのだが、ご覧のようにほとんど中身はない。9.1 節は実はずっと前に 3 章の最後の節として書いたものを（2020 年 3 月に）ここに移動して来ただけなので新しいことはまだ何も

書いていない。これから頑張ります。

9.1　偏微分

偏微分は、大学ではじめて学ぶ難しい概念だという偏見があるようだが、(少なくとも一変数の微分をきちんと理解していれば）とりたてて目新しい話ではなく、簡単に理解できる。ここでは、多変数関数ならではの微妙な問題や技術には踏み込まず、ともかく、偏微分を定義し、もっとも基本的な性質をみておく。

9.1.1　二変数関数と偏微分

■二変数関数　(2.1.70) の集合の積の書き方によれば、$\mathbb{R}^2$ というのは、二つの実数の組 (x, y) すべてからなる集合だった。後に 6.1 節でみるが、これは無限に広い平面を座標表示したものとみなすこともできる。

さて、2.4.1 節でみた一般的な写像のことばを使って、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array} \tag{9.1.1}$$

と書けるような関数 $f(\cdot,\cdot)$ を考えよう。これは、$\mathbb{R}^2$ 上の実数値関数である。同じことだが、二変数の実数値関数である、ともいう。要するに、「実数を二つ入れたら、一つの実数が返ってくる」ような仕掛けだと思えばよい。物理の現場で、こういう二変数関数（あるいは、もっと変数の多い関数）がしょっちゅうでてきそうだということはなっとくできるだろう。

抽象的な話だけではイメージがつかめないだろうから、例をあげよう。a, b を定数とするとき、

$$f(x,y) = a\,\log\sqrt{x^2+y^2}, \quad g(x,y) = \frac{a}{\sqrt{x^2+y^2+b}} \tag{9.1.2}$$

などは典型的な二変数関数である。それぞれ、電磁気学のポテンシャルの例として登場するのだが、そういっ

たことをここで議論する必要はないだろう。ともかく、二つの実数 x, y を入力すると、一つの実数（$f(x,y)$ または $g(x,y)$）が返ってくることをなっとくしてもらえればよい。

このような二変数関数をグラフに表すと（関数が連続なら）図 9.1 のような曲面になる。たとえば、x を経度、y を緯度とし、$h(x,y)$ としてその経度緯度に対応する土地の標高をとれば、$h(x,y)$ のグラフは立体的な地形そのものになる。このようなグラフ的なイメージを念頭におくのは、よいことだ。

■偏微分　$f(x,y)$ を一般の二変数関数とする。

変数が二つもあるとややこしいので、今、仮に y は変数ではなくただの定数なのだと思うことにする。そう思えば、$f(x,y)$ も（余分な記号がついただけで）ただの x の関数になってしまうから、一変数のときの導関数の定義 (3.1.7) をそのまま使って、

図 9.1　(9.1.2) の二変数関数 $g(x,y)$ のグラフ。x 軸と y 軸を水平面内で互いに直交するようにとり、縦軸に $g(x,y)$ をとる。各々の (x,y) について対応する $g(x,y)$ を描けば、三次元の中の曲面ができる。

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \tag{9.1.3}$$

のように微係数を定義できる。$\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ を、(x,y) における x についての**偏微分係数** (partial differential

coefficient) という。x, y をいろいろに動かすと、偏微分係数 $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ が新しい二変数関数になる。これを**偏導関数** (partial derivative) と呼ぶ。偏微分係数ないしは偏導関数を求める操作を**偏微分** (partial differentiation) という。

このような微分の仕方は、新しいものではない。すでに（というより、高校時代から）x が変数であるときの

$$\frac{d}{dx}(a\,x^2 + b\,x + c) = 2a\,x + b \tag{9.1.4}$$

のような計算には頻繁（ひんぱん）に出会っている。このとき、a, b, c は、同じアルファベットの文字の仲間であるにもかかわらず、x とは別格にあつかって、変化しない定数のように（つまり、2 とか π とかと同じに）みなした。(9.1.3) が言っているのは、本来は変数であった y も（さしあたっては）定数とみなしなさい、ということだ。よって、具体的な計算は、今までと同じように

すればよくて、たとえば、

$$\frac{\partial}{\partial x}(a\,x^2\,y + b\,x\,y + c\,y) = 2a\,x\,y + b\,y \tag{9.1.5}$$

という風になる。y をただの定数のようにあつかうため、y の微分が 0 になることに注意。

まったく同じように、今度は x を定数だとみなすことで、y についての偏微分を

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad (9.1.6)}$$

と定義する。

(9.1.3), (9.1.6) と同じものを、$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

あるいは $\partial f(x,y)/\partial x$, $\partial f(x,y)/\partial y$ とも書く[*1]。

偏導関数については、一変数関数のときの $f'(\cdot)$ のように、変数名を特定せずに導関数であることを明示するすぐれた書き方がない。いつでも、仮の変数名を書いて、そのうちのどちらで偏微分するのかを分母の ∂ の後ろに書き足さなくてはならない。よって、偏導関数に何かを代入する際には、

$$\left.\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0}, \quad \left.\frac{\partial\{a\sqrt{x^2+y^2+b}\}}{\partial x}\right|_{x=y=b} \tag{9.1.7}$$

[*1] 偏微分記号 ∂ は、アルファベットの d あるいはギリシャ文字の δ を変形して作られたといわれている（文字としては、d に対応するキリル文字と同じ）。読み方はあまり定まっていないようだが、気楽に dee と読む人は（私も含めて）多い。どうしても d と区別したいときは、del あるいは partial と呼ぶという記載が英語版 wikipedia にあった。日本では、「ディー」の他に「デル」、「ラウンド」といった呼び方が多いらしい。「ラウンド」は “rounded d”（丸められた d）の省略形（訛り？）と思われるが、ちょっと略しすぎでは？（携帯電話を「ケータイ」と略すのと同じだから、かまわないといえば、かまわないけれど）。

のような二度手間の書き方がどうしても必要になる。なかなか不便だが、混乱を避けるためにはしかたがない。297 ページ近辺の議論を参照。

問 9.1.1.a　(9.1.2) の $f(x,y)$ と $g(x,y)$ を、x と y それぞれについて偏微分せよ。

■関数の微小変化と偏微分　二変数関数について、(3.1.14)（同じものだが、(3.3.19)）に相当する関数の微小変化の表現を求めよう。

まず、当たり前のことだが、二変数関数 $f(x,y)$ で y を定数とみなせば、一変数関数についての (3.1.14) がそのまま使えるから

$$f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\Delta x+O((\Delta x)^2) \tag{9.1.8}$$

が成り立つ[*2]。つまり、y を一定にとめて x だけを微小に動かしたときの（つまり、x 軸に平行な向きに少し

[*2] ここでは、関数はいつでも二回微分可能としている。

だけ移動したときの）関数の変化が $\partial f(x,y)/\partial x$ に比例するのだ。図 9.1 を見て、イメージを描こう。

ここで本当に議論したいのは、(x,y) がともに変化して $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ になったときの二変数関数 $f(x,y)$ の変化だ。

そのために、まず $f(x+\Delta x, y)$ を、y のみの関数と見て (3.1.14) を使うと、

$$\begin{aligned} &f(x+\Delta x, y+\Delta y) \\ &= f(x+\Delta x, y) + \frac{\partial f(x+\Delta x, y)}{\partial y}\,\Delta y + O((\Delta y)^2) \end{aligned}$$

となる。次に第一項を x の関数と見て (9.1.8) を使うと、

$$\begin{aligned} &= f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\Delta x + O((\Delta x)^2) \\ &\quad + \frac{\partial f(x+\Delta x, y)}{\partial y}\,\Delta y + O((\Delta y)^2) \end{aligned} \tag{9.1.9}$$

となる。このままでは形が悪いから、さらに

$\dfrac{\partial f(x+\Delta x, y)}{\partial y}$ を x の関数と見て再度 (9.1.8) を使い、

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(x+\Delta x, y)}{\partial y} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right\}\Delta x \\ &\quad + O((\Delta x)^2) \\ &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + O(\Delta x) \qquad (9.1.10)\end{aligned}$$

とする[*3]。これを (9.1.9) に戻せば、けっきょく

$$\begin{aligned}&f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + O(\Delta^2)\end{aligned} \qquad (9.1.11)$$

という x と y について対称なきれいな関係が得られる。

[*3] この計算がわかりにくい人は、$g(x,y) = \partial f(x,y)/\partial y$ として、$g(x,y)$ に (9.1.8) の関係を使うとどうなるかを考えてみよう。

ただし、$O(\Delta^2)$ というのは $O((\Delta x)^2) + O((\Delta y)^2) + O(\Delta x\,\Delta y)$ の省略である。

(9.1.11) が、目標だった関数の微小変化の表式である。ここで、きわめて重要なのは、$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ という二つの偏導関数を知ってさえいれば、(x,y) が勝手な方向に変化して $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ になった際の関数の変化がわかるということである。

9.1.2　多変数関数への拡張

■三変数関数　三つの実数の組 (x,y,z) すべてからなる集合 $\mathbb{R}^3$ は、後に 6.2 節で詳しくみるように、無限に広い三次元空間に相当する。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array} \tag{9.1.12}$$

という図式で書ける関数、つまり、$\mathbb{R}^3$ 上の実数値関数、あるいは、三変数の実数値関数 $f(\cdot,\cdot,\cdot)$ を考えよ

う。三つの実数を入力すると、一つの実数を返してくるような仕掛けである。あるいは、三次元空間の各点に実数が対応していると思ってもよい。物理が三次元空間を舞台にしている以上、このような関数がちょくちょく登場するのはもっともだろう。

三変数関数 $f(x,y,z)$ を図 9.1 のようにグラフにあらわそうとすると、四次元空間の中の三次元の部分空間になってしまう。三次元に住んでいるわれわれには、そのようなグラフをみることはできない（想像することはできるが)。

三変数関数 $f(x,y,z)$ の偏微分も、二変数のときの (9.1.3), (9.1.6) とまったく同様に、

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z) &:= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x}\\
\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z) &:= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y}\\
\frac{\partial}{\partial z}f(x,y,z) &:= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}
\end{aligned} \tag{9.1.13}$$

と定義する。すると、関数の微小変化についての (9.1.11) も、そのまま拡張できて、

$$\begin{aligned} & f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) - f(x,y,z) \\ &= \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}\,\Delta y \\ &\quad + \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\,\Delta z + O(\Delta^2) \end{aligned} \tag{9.1.14}$$

が成り立つ。

問 9.1.2.a　$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ を、x, y, z それぞれについて偏微分せよ。$f(\cdot)$ を任意の一変数関数とする。このとき、$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ という三変数関数をつくることができる。$f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ を、x, y, z のそれぞれについて偏微分した結果を、$f'(\cdot)$ を使って表せ。

問 9.1.2.b　上の結果を使い、$1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\log(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$ を x, y, z それぞれについて偏微分した結果を求めよ。

■n **変数関数**　n を自然数とする。$\mathbb{R}^n$ は n 個の実数の組すべてからなる集合である。$\mathbb{R}^n$ の要素を書くのに、(x, y) とか (x, y, z, w) とかアルファベットだけを使っていたのでは、とうてい足りそうにない。そこで、$x_1, x_2, \ldots, x_n$ が実数値をとる変数だとして、$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ のように要素を表す。

$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の実数値関数、あるいは、n 変数の実数値関数とする。この際にも、各々の $j = 1, 2, \ldots, n$ について、偏微分を、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\
&:= \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{\Delta} \Big[f(x_1, \ldots, x_j + \Delta, \cdots, x_n) \\
&\qquad - f(x_1, \ldots, x_j, \cdots, x_n) \Big]
\end{aligned} \tag{9.1.15}$$

と定義する。関数の微小変化の表式も、

$$
\begin{aligned}
&f(x_1+\Delta x_1,\ldots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,\ldots,x_n)\\
&=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(x_1,\ldots,x_n)}{\partial x_j}\,\Delta x_j+O(\Delta^2)
\end{aligned}
\tag{9.1.16}
$$

という形で成立する。ここで、変数 x_j の微小変化を Δx_j と書いた。

第 10 章

場の量の微分と積分

この章では、さまざまな場の量をあつかうための数学的な方法をみていこう。いわゆるベクトル解析の分野である。

スカラー場やベクトル場の微分や積分は、学部の物理の範囲でも、力学や電磁気学などで不可欠の「ことば」だ。さらに進んだ物理を学んでいくと、場によって記述するのがもっとも自

然な対象に数多く出会うことになる。

この章では、ベクトル解析の主要な道具立てと結果をくわしく解説する。

10.1 節では、準備として、場という概念そのものについて述べる。10.2 節では、ベクトル場の線積分を扱う。基礎から出発して、具体的な計算も行なう。10.3 節では、スカラー場の微分であるグラディエントを導入し、線積分との関連を議論する。さらに、線積分についての考察を進めることで、10.4 節では、ベクトル場の微分であるローテーションを導入する。10.5 節では、ベクトル場のもう一つの自然な積分である面積分を扱う。続く、10.6 節では、強力な積分定理であるストークスの定理を議論する。10.7 節では、ベクトル場の微分であるダイバージェンスを導入し、もう一つの積分定理であるガウスの定理について述べる。10.8 節では、ラプラシアンとポテンシャルについて詳しく議論する。

また、10.9 節では、量子力学などの学習で不可欠になってくる場の微分の極座標表示について解説する。最後に、10.10 節で重要な公式などをまとめる。

新しく登場する重要な考え方は、ベクトル場の線積分 (10.2 節)、ベクトル場の面積分 (10.5 節) といった場の量の積分、そして、スカラー場のグラディエント（10.3 節)、ベクトル場のローテーション（10.4 節)、ベクトル場のダイバージェンス（10.7 節）といった場の量の微分である。さらに、これらのことばで書き表される二つの積分定理、ストークスの定理（10.6 節）とガウスの定理（10.7 節）はきわめて強力だ。

- **多変数関数の偏微分。**
- **一変数関数の積分（とくに定積分）についてのしっかりとした理解。**
- **幾何ベクトルについての基本的な知識（6.3 節）**

10.1　場とその表わし方

この節では、場の本格的な数学に入る準備として、そもそも、場とは何か、場をどうのように表現するのかといった点をみておこう。10.1.1 節で場の考え方を復習し、10.1.2 節で具体例を見ながら場の数学的な表現を整理する。電磁気学などで場に慣れていると思っている読者も、もう一度、手を動かして計算してみることをおすすめする。

10.1.1　場とはなにか

物理の舞台設定として、三次元空間の各点になんらかの物理的な自由度が「住んでいる」という状況がよく登場する。このような自由度のことを、一般に**場** (field) と呼んでいる。空間の各点に数（スカラー）が住んでいるなら**スカラー場** (scalar field)、各点にベクトルが住んでいれば**ベクトル場** (vector field) というふうに呼ぶ（図 10.1)。ただし、この章でベクトルというときは、つねに「三次元空間の矢印」という意味をもった幾何ベクトル（6.3 節）の事を指す。幾何ベクトルと代数ベクトルの違いについては、7.1.1 節の冒頭も参照してほしい。

スカラー場の典型的な例は、電磁気学、とくに静電気学の主役である**電位** (electric potential) だろう。この場合には、空間の各々の点に（たとえば J/C の単位ではかる）電位という量がびっしりと並んでいる。この点には 3.4 J/C、少し離れたこちらの点には −2.4 J/C

図 10.1　場の気楽なイメージ。スカラー場（左）とは、空間の各点に数字（ただし、単位のついた数字）がびっしりとならんでいるようなもの。ベクトル場（右）とは、空間の各点に矢印がびっしりとならんでいるようなものだ。ただし、これは位置ベクトルではないので、矢印の終点にはさしたる意味はない。矢印の始点の場所に、この矢印で表されるようなベクトルが「乗っかっている」とイメージしよう。矢印の向きはベクトルの向きに等しく、矢印の長さはベクトルの大きさに比例するように描く。なお、いずれの場合も、実際の空間は三次元。さらに、図には何も描いていない隙間の点にもびっしりと数や矢印が乗っていることに注意。

という具合に、隙間(すきま)なく、空間のすべての点に電位の値が書き込まれていると思えばよい。日常的な感覚からすると気味が悪いかもしれないが、電磁気学で学んでいるように、このような電位を用いた書き方こそが静電気学のもっとも簡潔な表現方法なのだ。

ベクトル場の典型例は、やはり電磁気学の電場や磁場だろう。それ以外にも、三次元的に広がった流体の流れがあるとき、ある瞬間における空間の各点での流体の速度はベクトル場ととらえられる。この点では東北東・上向き 30 度に 30 m/s の風が吹いていて、そこから少し離れた点では南東・下向き 10 度に 20 m/s の風が吹いている、という具合。空間のどの点をとっても、大きさと方向をもったベクトルが住んでいるのだ。

このような場による記述方法は、粒子の力学でなじんでいる物の見方とは大きくちがうことに注意しておこう。粒子の力学では、たとえば、粒子の速度はベクトルで表される。しかし、これはベクトル場ではない。粒子はどちらに向かってどれくらいの速さで走ってい

るかを示す「速度ベクトル」をかかえているわけだが、この速度ベクトルはちょうど粒子の上に「住んでいる」と思うべきだ。粒子がいない空っぽの場所には速度ベクトルなど、ない。これに対して、電磁気学での電場ベクトルというのは、電荷や測定装置があろうがなかろうが、空間のすべての点にびっしりと存在しているものとみなす。空っぽの空間にみえるところにも、電場はきちんと存在していて、測ってみさえすれば、ちゃんとその値は決まると考えるのだ[*1]。粒子の力学のときにもっていた世界の見方と、空間にびっしりと場が「住んでいる」という見方が、根本的にちがうことをかみしめておいてほしい。

[*1] より正確に言うと、そういう風に、いたるところに電場が存在しているという描像をとると、様々の電磁気現象が、もっとも簡潔に書き表される、ということ。「誰も測らないとき、電場は存在するのか？」といった疑問をいだいていろいろと考えるのは少しも悪いことではないが、そういう（頭のいい人なら誰でも思いつく）疑問が物理の発展に直結することはそれほど多くない。

さて、風のつくる速度の場や、電磁気学に登場するいろいろな場は、もちろん、一般には時間とともに変化する。実際、風や水の中の速度場がどう時間変化するかを記述するのが、流体力学の重要な課題だし、電磁気学をさいごまで学べば、電場と磁場がからみあいながら時間変化する様子をあつかうことができるようになる。しかし、ここでは、場の時間変化のことは考えず、場が空間にどう依存するか、そして、そのような場をどうやって「料理するか」を中心に話を進めよう。時間変化のない場をあつかっていると思うこともできるし、あるいは、（風の例のように）時間をある瞬間にとめて場の様子をみて、いろいろと調べているのだと思ってもいい。もちろん、ここで学んだ方法や道具は、時間変化する場にもそのまま使うことができる[*2]。

[*2] 実際、電磁気学の Maxwell 方程式がその例になる。

10.1.2　場の数学的な表現と例

では、場を数学的に書き表わすことを考えてみよう。まず空間の点を $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ のようにデカルト座標で表現する。

スカラー場の場合には、空間の各点に対してスカラーが対応する。それは、実数値をとる位置の関数 $\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(x, y, z)$ で表わされることになる。具体的に位置 $\boldsymbol{r}$ を指定すれば、その場所に「住んでいる」スカラーの値が $\varphi(\boldsymbol{r})$ とわかるということだ。あるいは、x, y, z の三つの数字を指定すると、$\varphi(x, y, z)$ という一つの数字が返ってくるような関数といってもよい。2.4.1 節の書き方を使えば、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \boldsymbol{r} & \longmapsto & \varphi(\boldsymbol{r}) \end{array} \tag{10.1.1}$$

ということになる。

当然だが、三次元空間に住んでいるわれわれには、

$\varphi(x, y, z)$ のような関数のグラフを想像することはできない。けれど、二次元空間のスカラー場 $\varphi(x, y)$ ならば、グラフを用いてイメージできる。平面上の位置 (x, y) に対して関数の値 $\varphi(x, y)$ が対応するわけだから、図 10.2 のように、$\varphi(x, y)$ を高さに対応させて地形図のようなグラフを思い浮かべればよいのだ。このように三次元での概念をイメージしづらいときに、一つ次元を下げて二次元のことを考えるのは（もちろん限界はあるが）便利な常套（じょうとう）手段だ[*3]。

三次元空間のスカラー場の典型として、静電気学

[*3] 空間が四次元の世界にわれわれが生まれていれば、$\varphi(x, y, z)$ のグラフも直感的にイメージできるはず。しかし、四次元で物理をやっていくためには $\varphi(w, x, y, z)$ のような四次元空間の場を扱わなくてはいけないので、やっぱり苦労する。そして、「イメージが難しいときは、一つ次元を下げて三次元のことを考えよう」と言っているはずだ。ちなみに空間が二次元の世界の人たちは、一つ次元を下げると一次元になってしまう。一次元の場というのは単なる一変数関数なので、これではイメージを磨きにくい。二次元は不便だ（二次元に住んでいて不便なことは、他にもっといっぱいあるだろうけれど）。

図 10.2　二次元のスカラー場 $\varphi(x, y)$ は、このような地形図として理解することができる。横方向の x, y が二次元の位置をあらわし、高さが場の値 $\varphi(x, y)$ をあらわす。

における電位の例をみておこう。たとえば、点 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ に固定された電荷 q の点電荷の作る電位は、

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right|} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}\end{aligned} \tag{10.1.2}$$

である（ただし、$(4\pi\varepsilon_0)^{-1} \simeq 8.9875 \times 10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2}$ は電磁気学の基本定数の一つ）。これは確かに、位置 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の関数になっており、位置を決めた際の値 $\varphi(\boldsymbol{r})$ はスカラー（ただの数）であることをまず納得しよう。つぎに、このスカラー場は点 $\boldsymbol{r}_0$ からの距離に反比例して変化すること、とくに $\boldsymbol{r}_0$ の近辺では発散すること、を読み取ろう。このような「解読」をするときには、(10.1.2) の二つ目の $q/\{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|\}$ という書き方の方が便利だ。一方、(10.1.2) の三つ目の x, y, z を使った式は、ぱっと見にはややこしいが、$\varphi(\boldsymbol{r})$ を微分したりといった具体的な計算の際には必要になる。これら二つの書き方が同じものを表しているということを自然に感じられるようになろう。

次にベクトル場の典型として、やはり静電気学から例をかりて、点電荷のつくる静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ をみよう。空間の各点にベクトルが対応するのがベクトル場だか

ら、写像の書き方を使えば、

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\boldsymbol{E}} & \mathbb{R}^3 \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \boldsymbol{r} & \longmapsto & \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \end{array} \tag{10.1.3}$$

ということになる。左側の $\mathbb{R}^3$ は三次元空間であり、右側の $\mathbb{R}^3$ は三次元のベクトルの空間を表す。

まず、簡単のため、原点 $(0,0,0)$ に電荷 q の点電荷が固定されている場合の電場を考えてみよう。クーロンの法則によれば、電場の大きさは $q/\{4\pi\varepsilon_0\,(\text{原点からの距離})^2\}$ であり、方向は原点から外に向かう向き。ベクトル場なのだから、大きさも方向も空間の点ごとに異なることに注意。このベクトル場の様子をおおざっぱに図示したのが、図 10.3。

こうやって言葉や図で表したベクトル場を、数式で表現しよう。まず、原点から点 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ までの距離は $|\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$。よって電場の大きさは $q/\{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{r}|^2\}$ となる。次に、ベクトルの方向を表すために、「ある場所で、原点から外向きを向いたベクトル」

図 10.3　原点にある点電荷のつくる電場の模式図。xy 平面のいくつかの点について、その点における電場ベクトルを、その点を始点とするようなベクトルで表した。図 10.1 と同様、ベクトルの終点に意味はない。電場は原点付近で発散するので、ベクトルはいくらでも長くなってしまう。図を描こうとすると、どうしてもベクトルどうしが重なってしまって具合が悪い。

というものをもってくる必要がある。これは実は簡単で、位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ が、まさに $\boldsymbol{r}$ から外向きに向かう方向を示したベクトルになっている。ただし、このままだと原点からの距離に等しい大きさをもっているので、これを大きさでわった $\boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ が、原点から外向きを向いた単位ベクトルになる。この考え方はとても大事なので、読み飛ばさず、百パーセント理解しよう。二次元におりていけば、以上のことを図 10.4 のように図にして理解できる。

こうして、大きさと方向がわかったのだから、ベクトル場の具体的な表式は、各点での大きさと方向をかけあわせて、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{r}|^2}\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \frac{q\,\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{r}|^3} \tag{10.1.4}$$

となる。電場の大きさは距離の逆二乗に比例するのに、最右辺では $|\boldsymbol{r}|^3$ が分母にあるので一見すると不思議かもしれない。言うまでもなく、分子の $\boldsymbol{r}$ まで考えて絶対値をとればきちんと $|\boldsymbol{r}|^{-2}$ に比例している。これが、

図 10.4　場所 (x, y) において、原点から外向きを向いた単位ベクトルをつくる方法。左の図は、位置 (x, y) を表す位置ベクトルの普通の描き方。原点が始点になっている。ここでベクトルを平行移動して (x, y) を始点にすると、真ん中の図のようになる。さいごに、このベクトルを大きさ $\sqrt{x^2 + y^2}$ で割れば、長さ 1 のベクトルになる。この雰囲気を伝えるのが右の図（この図の座標軸は長さの次元をもっている。一方、単位ベクトルの長さは無次元の 1 である。よって、本当のことをいうと、単位ベクトルを図示することにそれほどの意味はない)。

上にことばで表現した電場を式で表したものであることを、時間をかけて納得してほしい。さらに、(10.1.4) の最右辺の形でベクトル場が表されたら、これまでの話を順番に逆にたどって、それがどういうベクトル場

であるかを頭の中に描き出し、ことばで言い表せるようになっているべきだ。そうやって場に慣れてこそ、ベクトル場の活躍する物理（たとえば、電磁気学）のすごみと面白さがわかるはずだ。

(10.1.4) の書き方だけをみていると、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が三つの成分を持ったベクトルであること、$\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ も三つの成分からなることを忘れがちだ。ちゃんと思い出すために、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = (E_{\mathrm{x}}(x, y, z), E_{\mathrm{y}}(x, y, z), E_{\mathrm{z}}(x, y, z)) \tag{10.1.5}$$

と成分表示しよう[*4]。各々の成分が、三つの変数 x, y, z に依存しうることに注意。あるいは、より幾何ベクトルらしさを強調したければ、デカルト座標で標準の基

[*4] 829 ページの脚注 *4 で述べた方針に従って、成分の「名前」を表すときは x, y, z という立体を用い、変数を表すときは x, y, z というイタリック体を用いる。

底ベクトル

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} := (1,0,0), \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} := (0,1,0), \quad \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} := (0,0,1) \tag{10.1.6}$$

を用いて、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_{\mathrm{x}}(x,y,z)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + E_{\mathrm{y}}(x,y,z)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} + E_{\mathrm{z}}(x,y,z)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \tag{10.1.7}$$

と書くのもいいだろう（このあたりがよくわからない人は、(6.3.64) の近辺を参照)。

(10.1.4) をよく見て、(10.1.5) あるいは (10.1.7) と比較すれば、三つの成分 $E_{\mathrm{x}}(x,y,z)$, $E_{\mathrm{y}}(x,y,z)$, $E_{\mathrm{z}}(x,y,z)$ を具体的に x,y,z の関数として表すことができるはずだ。下の答えを見る前に自分で書いてみよう。これがすらすらとできなければ、ベクトルの成分表示について、あるいは、ベクトル場について、何かつまずいている証拠だ。もう一度、前に戻って読み直そう。

それで、答。(10.1.4) の最右辺で、ベクトルは分子の $\boldsymbol{r}$ だけで、それ以外はスカラーだ。これに注意すると、

各成分が

$$E_{\mathrm{x}}(x,y,z) = \frac{q\,x}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$E_{\mathrm{y}}(x,y,z) = \frac{q\,y}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$
$$E_{\mathrm{z}}(x,y,z) = \frac{q\,z}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \qquad (10.1.8)$$

であることがすぐにわかる。このような表現は、具体的な微分の計算などに有利である。

スカラー場にしてもベクトル場にしても、何通りかの式による表現と、ことばによる表現を、状況に応じて自在に使いこなせるようにしてほしい。以下の問題などは、すらすらとできるようになっておこう。

問 10.1.2.a　点 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ に固定された電荷 q の点電荷がつくる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。(10.1.4), (10.1.8) の両方に相当する書き方をせよ。

問 10.1.2.b　z 軸上に一様な線密度 ρ で分布した電荷のつくる電場を考える（ρ は定数)。この電場のある

点での大きさは $\rho/\{2\pi\varepsilon_0\,(\text{z 軸からその点までの距離})\}$ であり、方向は xy 面と平行な面内にあり、z 軸から外向きを向いている。まず、このような電場の様子を頭に思い描け。次に、この電場を (10.1.5) のように成分表示したときの各成分を (10.1.8) のように書け。なお、この電場については $\boldsymbol{r}$ を使った (10.1.4) のような簡単な表現はないことに注意。

問 10.1.2.c　以下の三つがどのようなベクトル場であるか、各点での大きさと方向を述べよ。また、それぞれのベクトル場の特徴を表した（図 10.1 や図 10.3 のような）模式図も描いてみよう。一つ目のベクトル場は、$\alpha > 0$ を定数として、$\boldsymbol{V}_1(\boldsymbol{r}) = \alpha\,\boldsymbol{r}$。二つ目は、やはり $\beta > 0$ を定数として $\boldsymbol{V}_2(x, y, z) = (-\beta\,y, \beta\,x, 0)$。三つ目は、$a, b$ を定数として、

$$\boldsymbol{V}_3(x, y, z) = \begin{cases} (a, 0, 0) & |x| \leq b \text{ のとき} \\ (0, 0, 0) & |x| > b \text{ のとき} \end{cases} \tag{10.1.9}$$

10.2　ベクトル場の線積分

関数の積分という道具を身につけたことは、様々な局面で圧倒的な力になった。ベクトル場についての積分という新しい道具は、物理で様々なベクトル場とつきあっていく上で不可欠の武器になる。おもしろいことに、ベクトル場については、線積分と面積分（10.5 節）という二つの自然な積分を考えることができる。これらは、どちらも物理において重要な役割を果たす。

この節では、数学的に少しあつかいが楽な線積分をみよう。線積分は、力学で仕事を一般的に求めるところ、電磁気学で電場や磁場の性質を調べるところ、など学部の物理の基礎ですぐに活用される。

10.2.1 節では、力の場のする仕事を例に、線積分をじっくりと定義する。10.2.2 節では、定義を一般化し、基本的な性質をみる。10.2.3 節では、一つの変数だけが変化するような簡単な（まっすぐの）道についての

線積分をみる。10.2.4 節では、単調な道に沿った線積分を通常の積分で表す方法を述べる。10.2.5 節では、一般の場合に使える計算法を述べ、さらに具体的な計算をおこなう。最後に、10.2.6 節で、スカラー場の線積分を簡単に議論する。

10.2.1　線積分の定義 — 力の場のする仕事

ここでは、力学の問題を考え、物理的な動機付けから線積分を定義してみよう。

三次元空間の中の粒子に、粒子の位置 $\boldsymbol{r}$ だけで決まる力 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ がはたらくとしよう。固定された電荷分布のある空間で小さな電荷をいろいろな場所に動かすとき、あるいは、固定された重力源のある空間で小さな質量をいろいろな場所に動かすとき、などがこれにあたる。あるいは、時間的に変化しない空気の流れの中にある粒子が、各々の場所の風向きと風の強さに応じた力を受けるというのも典型的な例だ。抽象的に考えれば、場所 $\boldsymbol{r}$ を決めればベクトル $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が定まるのだ

図 10.5　ベクトル場と、その中の二つの向きのついた道 p と c。左側の道 p には始点と終点がある。右側の c は「閉じた道」であり、終わりも始まりもない「輪っか」になっている。これは、p のような道で、たまたま始点と終点が一致したものと思ってもよい。

から、これはベクトル場の問題だ。$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ を力の場と呼ぼう。

力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ が存在する空間のなかに、向きのついた道 p をとる。向きのついた道というのは、図 10.5 の左側の道 p のように、空間のなかの二つの点を結ぶ勝手な曲線で、どちらの端が始点でどちらが終点かを

はっきりさせたもののことをいう[*5]。今、粒子を道 p に沿って始点から終点まで動かしたとき、力の場が粒子に対してする仕事 W を求めたい。力の向きと大きさが場所ごとに変わっていいし、道はぐにょぐにょとした曲線でもいいとするので、簡単な問題ではない。

まず、道がまっすぐな線分で、力も場所によらず一定という簡単な場合を考える。仕事は「力 × 移動距離」と覚えているかも知れないが、これは力の方向と移動の方向が一致しているとき。一般には「移動の方向の力の成分 × 移動距離」である。これをもう少し使いやすい式でかくため、始点から終点に向かうベクトルを $\boldsymbol{\ell}$ とし、力はどこでも一定のベクトル $\boldsymbol{f}$ に等しいとする[*6]。すると、この場合の仕事はベクトルの内積

---

*5 ここでは、力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ や道 p が数学的にどのような条件を満たすべきかといったことには深入りしない。次の 10.2.2 節でそういった点をはっきりさせよう。

*6 「一定の数」を定数というのと同様に「一定のベクトル」を定ベクトルということがある。

を使って

$$W = \boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{f} \tag{10.2.1}$$

と書ける（これでいいことは、きちんと納得しておこう）。

もちろん、一般の場合には、単純な仕事の表式 (10.2.1) は使えない。ここで、場所ごとに変わる力もごく狭い範囲では（ほぼ）一定とみなせること、ぐにょぐにょと曲がりくねった道もごく短い範囲では（ほぼ）まっすぐとみなせることに注意しよう。そうすると、ごく小さな範囲にかぎれば、(10.2.1) によって仕事を決めることができる。そして、それらをすべて足しあげてやれば、求める全体の仕事 W になるはずだ。

このような考えは別に目新しいものではない。4.1 節で関数の積分を定義したときにも、ぐにょぐにょした曲線でしきられた図形の面積を出すために、図形をたくさんの細い短冊（たんざく）に切り分けた。そして、各々の短冊の面積は（小学生も知っている）長方形の面積の公式で求め、さいごに、それらを足しあげたわけだ。つま

図 10.6　向きのついた道 p を短い線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_1, \Delta\boldsymbol{\ell}_2, \ldots, \Delta\boldsymbol{\ell}_N$ の集まりに分割する。

り、**1) 小さく分割する、2) 分割の各々の部分には、単純な公式を使う、3) その結果をすべて足しあげる**というのが、「積分」という操作に共通する基本的な「思想」だといっていいだろう。

このアイディアを実現するため、図 10.6 のように、道 p を N 個の小さなベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_1, \Delta\boldsymbol{\ell}_2, \cdots, \Delta\boldsymbol{\ell}_N$ に分割する。これらのベクトルの始点と終点はすべて道 p の上にとる。さらに、$\Delta\boldsymbol{\ell}_1$ の始点は道 p の始点と一致するように、$\Delta\boldsymbol{\ell}_N$ の終点は道 p の終点と一致するように、とる。また、$i = 1, \ldots, N-1$ について $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ の終点と $\Delta\boldsymbol{\ell}_{i+1}$ の始点を一致させる。こうして、道 p を、切れ目なくつながったベクトルの集まりで近似するこ

とができた。各々の小さなベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ を**線素ベクトル**と呼ぶことがある。

ここで、線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ の始点（つまり、線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_{i-1}$ の終点でもあるが）を $\boldsymbol{r}_i$ と書くことにしよう。また、いちばん最後の線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_N$ の終点を $\boldsymbol{r}_{N+1}$ と書く。すると、$i = 1, \ldots, N$ について

$$\Delta\boldsymbol{\ell}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i \tag{10.2.2}$$

が成り立つ。

粒子が、$\boldsymbol{r}_i$ から $\boldsymbol{r}_{i+1}$ まで、道 p に沿って動いたときに、力の場が粒子にする仕事を W_i とする。これは、粒子が線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ の上をまっすぐに動くのと、ほぼ等しい。微少な部分では、単純な仕事の表式 (10.2.1) がほぼ正しいので、

$$W_i = \Delta\boldsymbol{\ell}_i \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) + o(|\Delta\boldsymbol{\ell}_i|) \tag{10.2.3}$$

が成り立つ。第二項目は、たとえ小さな範囲とはいえ、「一定の力・まっすぐな道」という理想の場合からのずれがあることを考慮して付け加えた。一変数関数の積

分を導入した 461 ページの (4.1.5) 周辺の考察を参照。ランダウの記号 $o(|\Delta\boldsymbol{\ell}_i|)$ は $|\Delta\boldsymbol{\ell}_i|$ よりも早くゼロに収束する量の総称である（292 ページを見よ)。これをすべての部分について足せば、全仕事は

$$\begin{aligned} W &= \sum_{i=1}^{N} \left\{ \Delta\boldsymbol{\ell}_i \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) + o(N^{-1}) \right\} \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^{N} \Delta\boldsymbol{\ell}_i \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \right\} + N\, o(N^{-1}) \qquad (10.2.4) \end{aligned}$$

となる。ただし、ここで $o(|\Delta\boldsymbol{\ell}_i|) = o(N^{-1})$ であることを用いた[*7]。

$o(N^{-1})$ の定義により、$N \to \infty$ とすると $N\, o(N^{-1}) \to 0$ である。これを見ると (10.2.4) で $N \to \infty$ の極限をとりたくなる。この極限に新しい記

[*7] N 個に分割したのだから、各々の部分の長さは、ほぼ $1/N$ に比例するということ。もう少し正確に言えば、この性質が成り立つような分解を考えろということだ。

号を割り振って、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{\ell}_i\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_i) \quad (10.2.5)$$

と書こう。これが、道 p に沿ってのベクトル場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ の**線積分** (line integral, curve integral) である。ちょっとややこしい記号だが、こう書くことで、何をやっているかを忘れないようになっているのだ。一変数関数の積分と同様、最初の $\int$ は「細かく分けて足すぞ」という宣言だ。続く $\boldsymbol{r}\in p$ という部分は、「$\boldsymbol{r}$ という点が、道 p に沿って、始点から終点まで動いていく」と読む。そして、$d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})$ というのは、線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ のなれの果ての微小線素ベクトルであり、点が動いていくとき $\boldsymbol{r}$ という場所で踏み出す（限りなく小さな）「一歩」を表している。そして、動いていく道すがら、$d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$ という仕事を計算し、その結果を道の全体について足しあげなさいということだ。

線積分を使えば、(10.2.4) で $N \to \infty$ とした結果は、

$$W = \int_{\boldsymbol{r} \in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{10.2.6}$$

というきれいな形に書ける。

10.2.2　一般の線積分の定義と基本の性質

以上の定義を、力学での仕事という設定を離れて一般化しよう（といっても、十分に一般的だったので、単に書き直すだけなのだが)。

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とする。ここで、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ の連続関数だと仮定する[*8]。また p を空間の中の任意の向きのついた道とする。道 p があまりにギザギザしていると線積分もうまく定義できそうにないので、道

[*8] 数学的厳密さを気にする人のための注：250 ページの連続性の定義 2.24 をベクトル場に拡張する必要がある。$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がある $\boldsymbol{r}_0$ において連続とは、任意の実数 $\varepsilon > 0$ に対して実数 $\delta > 0$ が存在し、$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| \leq \delta$ を満たす任意の $\boldsymbol{r}$ について $|\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0)| \leq \varepsilon$ が成立することである。

p としては、以下のように**区分的になめらか** (piecewise smooth) なものを考えることにする（図 10.7)。まず、道がなめらか (smooth) とは、道のどの部分をとっても接線が一つに決まり、また接線の傾きは道に沿って連続に変化することをいう。線分状の道や円周状の道など、なめらかな道の例は多い。また、有限個のなめらかな道を連続につないでつくった道を、区分的になめらかな道という。線分状の道が一カ所でくっきりと折れ曲がったものなどが許される。物理的な例を考える上で、区分的になめらかな道を許しておくと便利である。

図 10.7　なめらかな道（左）では、道の上の任意の点で接線が一通りに決まる。区分的になめらかな道（右）は、有限個のなめらかな道をつないだもので、「つなぎ目」の点では接線は決まらない。

定理 10.1 (線積分の定義)**.** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を連続なベクトル場、p を区分的になめらかで長さが有限の道とする。次式の右辺の極限が存在して道の分割の仕方によらない[*9]。

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{\ell}_i\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) \tag{10.2.7}$$

よって、これによって道 p に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分を定義する。

ただし、$\boldsymbol{\Delta\ell}_i$ や $\boldsymbol{r}_i$ の意味は前節と同じである。一般の設定では、線積分 (10.2.7) は、「ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が、どのくらい、道 p に沿って流れているか」を表す量だと思うことができる。定理の証明は（技術的には少しややこしいが）基本的には定理 4.3（475 ページ）の証明と同じ考えで進めればいいので省略する[*10]。

(10.2.7) 左辺の線積分の記号はいささか煩雑なので、いろいろと略した書き方をすることがある。意味を見失わない範囲でもっとも略した書き方は $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ だろう。$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がベクトル場であるという事実について決して誤解のない状況で、ダミー変数の $\boldsymbol{r}$ を省略したと思えばよい[*11]。ただし、道 p の上での積分であること、微小線素 $d\boldsymbol{\ell}$ はベクトルであり $\boldsymbol{V}$ との内積をとっ

[*9] 定義 4.1（473 ページ）と同じように積分が代表点の選び方に依存しないことも示せるのだが、ここではやや気楽に定式化している。

[*10] ただし、1681 ページの脚注 *15 を見よ。

[*11] ベクトル解析についての記号は、あまり統一されていない。微小線素を $d\boldsymbol{S}$ と書くことも多い。

ていることは、決して省略してはいけない。

空間の中の向きのついた道として、図 10.5 の右側の道 c のように、端のない閉じた道を考えることができる。このような道については、道の途中の適当な点をとって、そこが道の始点かつ終点であると思うことができる。始点と終点がたまたま一致して輪っかになったと考えるわけだ。そうすれば、(10.2.7) と同じようにして、始点から終点まで c に沿って動いた際の $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分が定義できる。さらによく考えれば、始点＝終点をどこに選ぼうとも、けっきょくは、道 c に沿ってぐるりと「流れ」を足しあげるのだから、積分の結果は変わらない。こうして、始点・終点をもたない閉じた道 c に沿った線積分 $\int_{\boldsymbol{r}\in c} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ も定義される。閉じた道に沿った線積分のことを、道 c に沿った**循環** (circulation) と呼ぶことがある。

■線積分の一般的な性質　最後に、線積分の一般的な性質を二つ述べておく。

任意の道 p に対して、それを逆向きにたどった道を

図 10.8　向きのついた道 p と逆向きの道 $\bar{p}$ の分割。

$\bar{p}$ と書く。p と $\bar{p}$ は曲線としては全く同じものだが、始点と終点が入れ替わっている。線積分は、「道に沿ったベクトル場の流れ」であり、向きが逆なら流れは逆になるはずだから、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = -\int_{\boldsymbol{r}\in\bar{p}} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \quad (10.2.8)$$

が成り立つ。

こう言ってしまうと話は当たり前のようだが（そして、実際に当たり前なのだが）念のために証明を書いておこう。曲線 p を前と同じように N 個の線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_1,\ldots,\Delta\boldsymbol{\ell}_N$ に分割する。これに対応して、逆向きの曲線 $\bar{p}$ もやはり N 個に分割する。このとき、図 10.8 のように p を分割したのと同じ位置で

分割をおこなう。そして、始点から順に線素ベクトル $\Delta\bar{\boldsymbol{\ell}}_1, \Delta\bar{\boldsymbol{\ell}}_2, \ldots, \Delta\bar{\boldsymbol{\ell}}_N$ を定義し、前と同じように分割の点に $\bar{\boldsymbol{r}}_1, \bar{\boldsymbol{r}}_2, \ldots, \bar{\boldsymbol{r}}_{N+1}$ と名前をつける。図をよくみればわかるように、$\bar{\boldsymbol{r}}_i = \boldsymbol{r}_{N+2-i}$ $(i = 1, \ldots, N+1)$ と $\Delta\bar{\boldsymbol{\ell}}_i = -\Delta\boldsymbol{\ell}_{N+1-i}$ $(i = 1, \ldots, N)$ が成り立つ。逆向きの道 $\bar{p}$ に沿った $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分を定義 (10.2.7) にしたがって書いて、この関係を使うと、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in\bar{p}} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta\bar{\boldsymbol{\ell}}_i \cdot \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}}_i)$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta\boldsymbol{\ell}_{N+1-i} \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_{N+2-i})$$

$$= -\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \Delta\boldsymbol{\ell}_j \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_{j+1})$$

図 10.9　向きのついた道 p を途中の点で分割して、二つの向きのついた道 p_1 と p_2 に分ける。p_1 と p_2 のあいだに隙間があるのは、もちろん、図を見やすくするためで、本当は二つはぴったりとくっついている。

となる。三行目に移るとき $j = N + 1 - i$ とした。p に沿った積分の定義と一致していそうで、微妙にちがう。そこで、$\Delta\boldsymbol{\ell}_j = O(1/N)$ より $\Delta\boldsymbol{\ell}_j \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_{j+1}) = \Delta\boldsymbol{\ell}_j \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_j + \Delta\boldsymbol{\ell}_j) = \Delta\boldsymbol{\ell}_j \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_j) + o(1/N)$ であることを用いて、さらに変形すると、

$$
\begin{aligned}
&= -\lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} \left\{ \Delta\boldsymbol{\ell}_j \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_j) + o(\frac{1}{N}) \right\} \\
&= -\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \qquad (10.2.9)
\end{aligned}
$$

となり、(10.2.8) が示された。

次に、図 10.9 のように、道 p を途中の勝手な点で

切って、二つの道 p_1 と p_2 に分割することを考える。このような道 p, p_1, p_2 の関係を、式で

$$p = p_1 \cup p_2 \tag{10.2.10}$$

と書くことにしよう。「p_1 の終点と p_2 の始点を一致させて、二つの道をくっつけると、道 p になる」という意味である。すると、これらの道に沿った線積分について

$$\int_{p_1 \cup p_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \int_{p_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{p_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \tag{10.2.11}$$

という和の関係が成り立つ（ところで、ここでは、線積分の省略形を使ってみた。意味がわかっていれば、すっきりしていて、悪くない)。

さすがに (10.2.11) については証明を書くまでもないだろう。道 $p = p_1 \cup p_2$ を線素ベクトルに分割するとき、ちょうど p_1 と p_2 の継ぎ目が分割点の一つになるように工夫すれば、線積分が単純な和になるのは明らかだ。細かいところは読者におまかせする。

10.2.3 一つの変数だけが変化する場合の線積分

線積分の入門編として、一つの変数だけが変化するという、いわば当たり前の状況をみておこう。

その中でも、もっとも当たり前の場合として、p を $(a,0,0)$ と $(b,0,0)$ を結ぶまっすぐな道としよう。a, b の大小関係はどうでもいいのだが、さしあたっては $a<b$ だと思って読み進めるほうがわかりやすい。$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とし、定義 (10.2.7) にしたがって、線積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を書き換えよう。まず道を小さく分割する必要があるが、ここでは素直に全体を N 等分する。道の長さが $b-a$ だから、各々の線素ベクトルの長さは $\Delta x=(b-a)/N$ である。線素ベクトルの向きはいつでも x 軸正の方向だから、すべての $i=1,\ldots,N$ について $\Delta\boldsymbol{\ell}_i=(\Delta x,0,0)$ とすればよ

い[*12]。これと対応する分割の点は、$i = 1, \ldots, N+1$ について $\boldsymbol{r}_i = (a + (i-1)\Delta x, 0, 0)$ である。よって、線素 $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ に沿ったベクトル場の流れは、

$$\Delta\boldsymbol{\ell}_i \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) = (\Delta x, 0, 0) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) = \Delta x\, V_{\mathrm{x}}(a + (i-1)\Delta x, 0, 0) \tag{10.2.12}$$

となる。ただし、$V_{\mathrm{x}}(x, y, z)$ は $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ の x 成分。線積分 (10.2.7) は、これを足しあげたものなので、けっきょく、

$$\begin{aligned} &\int_{\boldsymbol{r} \in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \\ &\quad = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta x\, V_{\mathrm{x}}(a + (i-1)\Delta x, 0, 0) \\ &\quad = \int_a^b dx\, V_{\mathrm{x}}(x, 0, 0) \end{aligned} \tag{10.2.13}$$

となる（最後は積分の定義を使った）。x 軸上での線積

[*12] $a > b$ のときは $\Delta x < 0$ なので線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ は x 軸負の方向を向くことになる。つまり、この場合も全ての式はそのままの形で正しい。

分が x についての通常の積分で表されたのだから、驚くことはない。

道 p がちょうど x 軸上になくても同じことができるのは明らかだろう。p を $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ と $(b_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ を結ぶまっすぐな（x 軸に平行な）道とすれば、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{a_{\mathrm{x}}}^{b_{\mathrm{x}}} dx\, V_{\mathrm{x}}(x, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}}) \quad (10.2.14)$$

となる。

もちろん、道に沿って y だけが変化する場合、z だけが変化する場合も、線積分はそれぞれの変数についての積分になる。導出はまったく同じなので結果だけを書こう。まず、p が $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ と $(a_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ を結ぶまっすぐな（y 軸に平行な）道なら、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{a_{\mathrm{y}}}^{b_{\mathrm{y}}} dy\, V_{\mathrm{y}}(a_{\mathrm{x}}, y, a_{\mathrm{z}}) \quad (10.2.15)$$

であり、p が $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ と $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, b_{\mathrm{z}})$ を結ぶまっすぐ

な（z 軸に平行な）道なら、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{a_{\mathrm{z}}}^{b_{\mathrm{z}}} dz\, V_{\mathrm{z}}(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, z) \quad (10.2.16)$$

である。

■例　抽象的な関係だけではイメージがつかめないだろうから、このあたりで簡単な例で線積分を求めてみよう。例として、定数 $a > 0$ を使って

$$\boldsymbol{V}(x,y,z) = \left(\frac{a\,y}{x^2+y^2}, -\frac{a\,x}{x^2+y^2}, 0\right) \quad (10.2.17)$$

と書けるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ をあつかう。大きさを求めると、$|\boldsymbol{V}(x,y,z)| = a/\sqrt{x^2+y^2}$ だから、z 軸からの距離に反比例する。また、ベクトルの向きは xy 面と平行な面内にあり、z 軸のまわりに時計回りにまわる方向。図 10.10 のようになっている。

$b > 0$ を定数とし、$(-b, b, 0)$ から $(b, b, 0)$ に向かうまっすぐな道 p に沿った線積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を計算しよう。これは x のみが変化する状況だから、(10.2.13) が

図 10.10　xy 面に平行な平面のなかでのベクトル場 (10.2.17) の様子。

そのまま使えて、

$$\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{-b}^{b} dx\, V_{\mathrm{x}}(x,b,0) = \int_{-b}^{b} dx\, \frac{ab}{x^2+b^2} = \frac{a\pi}{2} \tag{10.2.18}$$

と計算できる（積分を計算するには、$x = b\tan\theta$ と置けばいい)。

同じベクトル場を使って、もう少し線積分の練習を

しよう。$(-b, b, 0)$ から $(-b, -b, 0)$ に向かうまっすぐの道を p'_1 とし、$(-b, -b, 0)$ から $(b, -b, 0)$ に向かうまっすぐの道を p'_2 とし、$(b, -b, 0)$ から $(b, b, 0)$ に向かうまっすぐの道を p'_3 とする。また、これらを順番につないだ道を $p' = p'_1 \cup p'_2 \cup p'_3$ とする。p' は $(-b, b, 0)$ から $(b, b, 0)$ まで、遠回りして行くような道になっている（わざわざ図は描かないので、読者が描いてください）。始点と終点は、先ほどの道 p と同じだ。そこで、線積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ と $\int_{p'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ を比較してみたい。

線積分の和の規則 (10.2.11) を二回くりかえして使えば、

$$\int_{p'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \int_{p'_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{p'_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{p'_3} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \tag{10.2.19}$$

となる。右辺の三つの積分は、(10.2.18) とほぼ同じようにして計算できる。たとえば、一つ目の p'_1 に沿った

線積分は、(10.2.15) をそのまま使って

$$\int_{p_1'} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_b^{-b} dy\, V_{\mathrm{y}}(-b,y,0)$$
$$= -\int_{-b}^{b} dy\,\frac{ab}{b^2+y^2} = -\frac{a\pi}{2} \qquad (10.2.20)$$

となる。この場合、最初に書いた式では積分の上限のほうが下限よりも小さいが、もちろんこれで正しい答えが出る。実際、図 10.10 をみれば、この場合は「向かい風」で進むことになるから線積分は負になるのが正しいとわかる。

問 10.2.3.a　上の続きを計算し、線積分 $\int_{p'} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めよ。(10.2.18) で求めた $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ と等しいか？
図 10.10 に積分経路を書き込み、この結論を検討せよ。

問 10.2.3.b　道 c を、$(b,b,0)$, $(b,-b,0)$, $(-b,-b,0)$, $(-b,b,0)$, $(b,b,0)$ をこの順番に線分で結んでつくった正方形状の閉じた道とする。上と同じベクトル場

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ について、線積分 $\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めよ。図 10.10 に積分経路を書き込み、この結果を検討せよ。

10.2.4　単調な道に沿った線積分

道 p が簡単な形をしているとき（大ざっぱに言うと、ぐにょっと戻ってきたりしないとき）には、線積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を、(10.2.26) のように、変数 x, y, z についての通常の積分で表わすことができる。一般の道に沿った線積分は次の 10.2.5 節で述べる方法を用いて計算するほうが見通しがよいが、ここでみる方法も（使える場合には）お手軽なのできちんと解説しておこう。

■xy 面内の単調な道　まず、簡単のため、道が xy 面内にある場合を扱かう。$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とする。$z=0$ とした xy 面内で、点 $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, 0)$ と $(b_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, 0)$ を結ぶ道 p を考える。道 p はまっすぐでなくてもよいが「単調に増えていく」としよう。つまり、図 10.11 のように、道に沿って進んだとき x 座標の値も y 座標の

図 10.11　xy 面の中の単調な道の例。このような道に沿った線積分は、(10.2.25) のように、x と y それぞれについての積分の和で書ける。

値も増加すると仮定するのだ。

線積分のおおもとの定義（10.2.1 節）に戻って、道 p を N 個のベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_1, \Delta\boldsymbol{\ell}_2, \cdots, \Delta\boldsymbol{\ell}_N$ に分割しよう。線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ の始点を $\boldsymbol{r}_i = (x_i, y_i, 0)$ と書く。ここで、$\Delta x_i := x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_i := y_{i+1} - y_i$ としよう。道の単調性の仮定から、$\Delta x_i > 0$, $\Delta y_i > 0$ であ

ることに注意。

(10.2.2) より、$\Delta\boldsymbol{\ell}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i = (\Delta x_i, \Delta y_i, 0)$ である。よって、$\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の流れは、

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\ell}_i \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) &= (\Delta x_i, \Delta y_i, 0) \cdot (V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r}_i), V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r}_i), V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r}_i)) \\ &= \Delta x_i\, V_{\mathrm{x}}(x_i, y_i, 0) + \Delta y_i V_{\mathrm{y}}(x_i, y_i, 0)\end{aligned} \tag{10.2.21}$$

と表される。線積分の定義 (10.2.7) に従ってこれらを足しあげ、分割を細かくする極限をとると、

$$\begin{aligned}\int_p d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = &\lim_{N \nearrow \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i\, V_{\mathrm{x}}(x_i, y_i, 0) \\ &+ \lim_{N \nearrow \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta y_i V_{\mathrm{y}}(x_i, y_i, 0)\end{aligned} \tag{10.2.22}$$

が得られる。これらの和を積分に書き換えることができそうだ。

さて、道 p が単調だと仮定したので、道 p の上では x 座標の値 x を決めれば y 座標の値も一通りに決まる。つまり、y 座標の値は $y(x)$ のように x の関数とみ

ることができる[*13]。当然、$y_i = y(x_i)$ と書けるから、(10.2.22) の右辺の第一項は、

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\nearrow\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\, V_{\mathrm{x}}(x_i, y_i, 0)\\
&\quad=\lim_{N\nearrow\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta x_i\, V_{\mathrm{x}}(x_i, y(x_i), 0)\\
&\quad=\int_{a_{\mathrm{x}}}^{b_{\mathrm{x}}} dx\, V_{\mathrm{x}}(x, y(x), 0) \qquad (10.2.23)
\end{aligned}$$

のように $V_{\mathrm{x}}(x, y(x), 0)$ という x のみの関数の積分になることがわかる（一般の分割についてのリーマン積分の表式を用いた)。

(10.2.22) の右辺の第二項については、x と y の役割を変えて考えればよい。つまり、道 p の上では y を決めれば x 座標の値が一意的に決まるのだから、これを

[*13] ここでは（少し汚い記号法を使って）関数 $y(\cdot)$ と変数 y を同じ文字で表してしまった。混乱しそうな場合は、関数のほうを $\tilde{y}(\cdot)$ といった名前で呼べばよい。

$x(y)$ と書くのである。すると、上とまったく同様に、

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\nearrow\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i\,V_{\mathrm{y}}(x_i,y_i,0)\\
&\quad=\lim_{N\nearrow\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta y_i\,V_{\mathrm{y}}(x(y_i),y_i,0)\\
&\quad=\int_{a_{\mathrm{y}}}^{b_{\mathrm{y}}}dy\,V_{\mathrm{y}}(x(y),y,0)
\end{aligned}\tag{10.2.24}$$

となる。これらをあわせれば、けっきょく

$$\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}=\int_{a_{\mathrm{x}}}^{b_{\mathrm{x}}}dx\,V_{\mathrm{x}}(x,y(x),0)+\int_{a_{\mathrm{y}}}^{b_{\mathrm{y}}}dy\,V_{\mathrm{y}}(x(y),y,0)\tag{10.2.25}$$

となり、通常の積分だけを使って線積分を書くことができる。道 p に沿って x と y がともに変化するから、線積分が二つの積分の和になるのももっともである。

■一般の単調な道　上の考察をより一般の単調な道に拡張できるのは明らかだろう。導出は省略して結果だけをきちんと述べておこう。

p を点 $(a_{\mathrm{x}}, a_{\mathrm{y}}, a_{\mathrm{z}})$ から点 $(b_{\mathrm{x}}, b_{\mathrm{y}}, b_{\mathrm{z}})$ に向かう任意の単調な道とする。ここで、「単調な道」というのは、p に沿って進んだとき、x 座標は増え続けるか減り続けるかのいずれか、y 座標は増え続けるか減り続けるかのいずれか、z 座標は増え続けるか減り続けるかのいずれかだということである。このような性質があれば、道 p の上では、x 座標、y 座標、z 座標のいずれか一つを決めれば残りの二つが決まることになる。そこで x の関数として表した y 座標を $y(x)$ と書き z 座標を $z(x)$ と書いてよい。同様にして、$x(y)$, $z(y)$ および $x(z)$, $y(z)$ という関数を用意する。

このとき、p に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分は、

$$\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{a_{\mathrm{x}}}^{b_{\mathrm{x}}} dx\, V_{\mathrm{x}}(x, y(x), z(x)) + \int_{a_{\mathrm{y}}}^{b_{\mathrm{y}}} dy\, V_{\mathrm{y}}(x(y), y, z(y)) + \int_{a_{\mathrm{z}}}^{b_{\mathrm{z}}} dz\, V_{\mathrm{z}}(x(z), y(z), z) \quad (10.2.26)$$

のように、三つの通常の積分の和で書ける。

(10.2.26) の表式は (特に、線積分に不慣れな人には) 使いやすいようで、愛用する人が多い。ただし、これは道が単調な場合だけに使える関係だということは決して忘れてはいけない。たとえば、円周に沿ってぐるりと一回り線積分するというような場合、(10.2.26) をそのまま使うことはできない。

もちろん、単調でない道をいくつかの単調な道に分解し、その各々に (10.2.26) を使うことはできる。た

だ、そういう計算は煩雑になるし、あまり見通しがよいとは言えない。道の形が複雑になればなるほど、ここに示した表式 (10.2.26) ではなく、次の 10.2.5 節で示すパラメター表示を用いた計算法のほうが有利になる。

■例　再びベクトル場 (10.2.17) (図 10.10) を例にして線積分を計算しよう。単調な道の例として、$(0, b, 0)$ から $(b, 0, 0)$ に向かうまっすぐな道 p を考えよう。p に沿って進むと x は単調に増え、y は単調に減少する。また、p の上では $x+y=b$ が成り立つので、$y(x)=b-x$, $x(y)=b-y$ とわかる。よって、(10.2.26)（あるいは、(10.2.25)）をそのまま使えば、

$$\begin{aligned}
&\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \\
&\quad = \int_0^b dx\,\frac{a\,(b-x)}{x^2+(b-x)^2} + \int_b^0 dy\,\frac{-a\,(b-y)}{(b-y)^2+y^2} \\
&\quad = \frac{a\pi}{2}
\end{aligned} \tag{10.2.27}$$

問 10.2.4.a　道 c' を、$(b, 0, 0)$, $(0, -b, 0)$, $(-b, 0, 0)$,

$(0, b, 0)$, $(b, 0, 0)$ をこの順番に線分で結んでつくった（斜めの）正方形状の閉じた道とする。上と同じベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ について、線積分 $\int_{c'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ を求めよ。

10.2.5　パラメター表示された一般の道についての線積分

10.2.3 節では道がたまたま x 軸や y 軸に平行な直線だった場合を、10.2.4 節では道が単調だった場合を扱い、線積分を通常の一変数の積分に直して計算した。ここでは一般の曲線状の道をパラメター表示することで、線積分を一変数の積分に書き直す関係を求め、簡単な例を計算してみよう。多くの場合、ここでみる方法がもっとも一般的で見通しのよい線積分の計算方法である。

一般の道 p が、一つのパラメター s を使って $\boldsymbol{\ell}(s) = (\ell_{\mathrm{x}}(s), \ell_{\mathrm{y}}(s), \ell_{\mathrm{z}}(s))$ とパラメター表示されるとしよう。ここでパラメター s は $a \leq s \leq b$ の範囲を動く（a, b は $a < b$ を満たす実定数）。もちろん $\boldsymbol{\ell}(a)$ が道 p の始

図 10.12　左は、道 p のパラメター表示のイメージ図。下の線分がパラメター s が動く区間。そこから三次元空間への写像 $\boldsymbol{\ell}(s)$ が道 p を決める。右は、道の分割の方法。パラメター s が動く区間を等間隔に分配すれば、それに応じて、道の分割が自動的に決まる。

点で、$\boldsymbol{\ell}(b)$ が道 p の終点。どんな道だろうと、適当な関数 $\boldsymbol{\ell}(s)$ をとってくれば、このようにパラメター表示できる。

任意の連続なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の p に沿った線積分を、定義 (10.2.7) にしたがって求めよう。以下では道 p はなめらかであると仮定する。道がなめらかなら、$\ell_{\mathrm{x}}(s), \ell_{\mathrm{y}}(s), \ell_{\mathrm{z}}(s)$ が s について微分可能（導関数が存在して連続ということ）になるように $\boldsymbol{\ell}(s)$ をとること

ができる。区分的になめらかな道の上の線積分をあつかうときには、和の関係 (10.2.11) を用いて、なめらかな道の上の線積分を足しあわせればよい。

まず道を N 個の線素ベクトルに分割する。このため、まずパラメター s の動く範囲を N 等分しよう。s は長さ $b-a$ の範囲を動くから、等分した一つの区間の長さは $\Delta s = (b-a)/N$ である。$i = 1, \ldots, N+1$ について、$s_i = a + (i-1)\,\Delta s$ と置き、対応する道 p 上の点を $\boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\ell}(s_i)$ と定める。これで、道 p の分割が決まった（図 10.12）。線素ベクトルは、(10.2.2) より、

$$\Delta\boldsymbol{\ell}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{\ell}(s_{i+1}) - \boldsymbol{\ell}(s_i) = \Delta s\,\frac{d\boldsymbol{\ell}(s_i)}{ds} + o(\Delta s) \tag{10.2.28}$$

となる。最後の式はテイラー展開の一次。言うまでもないと思うが、

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}(s_i)}{ds} = \left.\frac{d\boldsymbol{\ell}(s)}{ds}\right|_{s=s_i} \tag{10.2.29}$$

という軽い略記を用いた。もちろん、ベクトル関数の微分は、各成分を微分して得られるベクトル関数だ。

以上を定義 (10.2.7) に代入すると、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{\ell}_i\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i)$$

$$= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left\{\Delta s\,\frac{d\boldsymbol{\ell}(s_i)}{ds}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(s_i)) + o(\frac{1}{N})\right\}$$

となる。第二項は明らかにゼロになり、第一項は

$$= \int_a^b ds\,\frac{d\boldsymbol{\ell}(s)}{ds}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(s)) \tag{10.2.30}$$

のように一変数 s についての積分で書ける。重要な式なので、まとめて書こう。

$$\boxed{\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_a^b ds\,\frac{d\boldsymbol{\ell}(s)}{ds}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(s)) \qquad (10.2.31)}$$

パラメター表示してある道に沿っての線積分は、パラメターについての一変数の積分を計算すれば求められ

るわけだ。ちなみに、(10.2.31) の右辺で ds を分子と分母で「通分」すればもとの形の $\int d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ となり、この変形がもっともらしいことが（なんとなく）納得できる[*14]。

線積分の表現 (10.2.31) はたいへん便利なので[*15]、（よほど簡単な場合を除いて）この式を使って計算を進めることになる。当然だが、道を一つ決めたとしても、それをパラメターで表わすやり方は無数にある。なるべく間違いが少なく、かつ計算の都合がよい表示をとるように工夫するのがいいだろう。

ちなみに、10.2.3 節でみた、x のみが変化する際の線積分の表式 (10.2.14) は、x そのものをパラメターとみなした場合の (10.2.31) とみることもできる。

[*14] この形になるように道を $\boldsymbol{\ell}(s)$ と書いた。もちろん、道を他の記号（たとえば $\boldsymbol{r}(s)$）で書いても同じ式が成り立つ。

[*15] (10.2.31) の右辺を線積分の定義とすることもある。その場合には、被積分関数 $(d\boldsymbol{\ell}(s)/ds)\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(s))$ が s について連続であれば、一変数関数の積分についての定理 4.3（475 ページ）によって積分可能性が保証される。

■例　線積分の表現 (10.2.31) の応用として、(10.2.17) のベクトル場を、円周に沿って積分してみよう。積分の道 c として、xy 平面内の, 原点を中心にした半径 b の円周をとる。まわる向きは右回り（時計回り）とする。この道は、パラメター θ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ をつかって

$$\boldsymbol{\ell}(\theta) = b\,(\cos\theta, -\sin\theta, 0) \tag{10.2.32}$$

と表される。もちろん他の書き方もあるが、これがもっとも素直だろう。パラメターでの微分は、

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}(\theta)}{d\theta} = -b\,(\sin\theta, \cos\theta, 0) \tag{10.2.33}$$

なので、(10.2.31) の最右辺の被積分関数は、

$$\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{\ell}(\theta)}{d\theta} \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(\theta)) \\
&= -b\,(\sin\theta, \cos\theta, 0) \cdot \left(\frac{-ab\,\sin\theta}{b^2}, \frac{-ab\,\cos\theta}{b^2}, 0\right) \\
&= a
\end{aligned} \tag{10.2.34}$$

となってしまう。これを θ について積分するのだから、計算するまでもなく、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_0^{2\pi} d\theta\, a = 2\pi a \tag{10.2.35}$$

のように線積分が求まる。

問 10.2.5.a　$a > 0$ を定数として、ベクトル場 $\boldsymbol{U}(x,y,z) = (a\,y, -a\,x, 0)$ を考える。まず、大きさと向きを検討し、図 10.10 のような模式図を描け。$\mathrm{A} = (-b,0,0)$, $\mathrm{B} = (0,b,0)$, $\mathrm{C} = (b,0,0)$ とする ($b > 0$ は定数)。p_1 を、A から B にまっすぐ向かい、ついで B から C にまっすぐ向かう道とする。p_2 を A から B を経由して C に向かう半径 b の半円周状の道とする。p_1 と p_2 に沿った $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r})$ の線積分を求めよ[*16]。

問 10.2.5.b　(10.2.17) のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の p_1 と p_2 に沿った線積分を求めよ。

[*16] p_1 に沿った線積分については、x そのものをパラメターにして計算するのが便利だろう。

10.2.6　スカラー場の線積分

ベクトル場の線積分と同じ考えで、スカラー場の線積分を定義することもできる。ここでは、定義を簡単にみて、曲線の長さの計算への応用をみておこう。それほど重要な概念ではないし、電磁気学などへの直接の応用もないので、この節をとばしてもかまわない。

■スカラー場の線積分の定義　$\varphi(\boldsymbol{r})$ を任意のスカラー場とし、p を三次元空間のなかの向きのついた任意の道とする。10.2.1 節と同様に、p を N 個の線素ベクトル $\Delta\boldsymbol{\ell}_1, \ldots, \Delta\boldsymbol{\ell}_N$ に分割する。ベクトル場を積分する際には、これら線素ベクトルとベクトル場の値の内積をとってスカラーを作った。スカラー場の線積分を作る一つの自然な考えは、スカラー場の値と線素ベクトルの大きさ（つまり、線素の長さ）$\Delta\ell_i := |\Delta\boldsymbol{\ell}_i|$ の積をとることだ。

そこで、(10.2.7) と全く同じように、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\ell(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r}) := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N} \Delta\ell_i\,\varphi(\boldsymbol{r}_i) \qquad (10.2.36)$$

と定義しよう。省略するなら $\int_p d\ell\,\varphi$ と書く。

スカラー場の特別な場合として、全ての $\boldsymbol{r}$ について $\varphi(\boldsymbol{r}) = 1$ となる関数を考えることができる。その場合、(10.2.36) の右辺は単に線素の長さ $\Delta\ell_i$ の和だから、これは（ギザギザで近似した）曲線 p の長さに他ならない。つまり、

$$(\text{曲線 } p \text{ の長さ}) = \int_{\boldsymbol{r}\in p} d\ell(\boldsymbol{r}) \qquad (10.2.37)$$

が成り立つ。

■スカラー場の線積分の計算　10.2.5 節で見た、道をパラメター表示して線積分を計算する方法は、そのままスカラー場の線積分にも応用できる。

10.2.5 節と同じ設定を考え、$\boldsymbol{\ell}(s)$ を使って道 p をパラメター表示したとしよう（ここで $a \le s \le b$）。

(10.2.28) より、微小な線素の長さは、

$$\Delta\ell_i = |\Delta\boldsymbol{\ell}_i| = \Delta s \left|\frac{d\boldsymbol{\ell}(s_i)}{ds}\right| + o(\Delta s) \qquad (10.2.38)$$

となる。これを足しあげて $N \to \infty$ の極限をとればいいのだから、10.2.5 節と同様に計算を進めて、最終的には、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\ell(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_a^b ds \left|\frac{d\boldsymbol{\ell}(s)}{ds}\right| \varphi(\boldsymbol{\ell}(s)) \quad (10.2.39)$$

という表現が得られる。また、(10.2.37) にあてはめれば、

$$(\text{曲線 } p \text{ の長さ}) = \int_a^b ds \left|\frac{d\boldsymbol{\ell}(s)}{ds}\right| \qquad (10.2.40)$$

が得られる。

簡単な例題として、$0 \leq \theta \leq 2n\pi$ の範囲を動くパラメター θ を使って $\boldsymbol{\ell}(\theta) = (a\cos\theta, a\sin\theta, b\theta)$ と表される曲線の長さを求めよう。n 重の螺旋(らせん)である。微分を計算すれば、ただちに $|d\boldsymbol{\ell}(\theta)/d\theta| =$

$|(-a\ \sin\theta, a\ \cos\theta, b)| = \sqrt{a^2+b^2}$ だから、螺旋全体の長さは $\int_0^{2n\pi} d\theta\sqrt{a^2+b^2} = 2n\pi\sqrt{a^2+b^2}$ となる。

10.3　スカラー場のグラディエント

スカラー場の自然な微分（グラディエント）をとると、ベクトル場が得られる。この節では、このようにして得られるベクトル場の性質を調べていく。

まず、10.3.1 節でスカラー場の微小変化を議論し、そこから自然にグラディエントの概念が現れることをみる。10.3.2 節では、グラディエントと線積分の関連を調べる。その考察を進めて、10.3.3 節では、与えられたベクトル場がスカラー場のグラディエントで表現できるかという問題を考える。この考察は、力学や電磁気学におけるポテンシャルの概念（がいねん）の基本になる。

10.3.1 スカラー場の微小変化とグラディエント

$\varphi(\boldsymbol{r})$ を勝手なスカラー場とする。スカラー場をみる位置 $\boldsymbol{r}$ をわずかに変えたときの $\varphi(\boldsymbol{r})$ の変化を調べてみよう。言うまでもなく、これは微分の考え方だ。

ただし、一変数関数 $f(x)$ の微分の際には、変数 x の変化は単なる小さな数 Δx でよかったが、場の量である $\varphi(\boldsymbol{r})$ の場合には、位置 $\boldsymbol{r}$ を変化させるとき、どの方向にどれくらい変化させるかということまで考えなくてはならない。言いかえれば、$\boldsymbol{r}$ を $\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}$ に変えるときの微小変化 $\Delta\boldsymbol{r}=(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ は（小さな）ベクトルである。

実際、この問題については、9.1.2 節で多変数関数のテイラー展開を調べたときにすでに考えてある。わず

かにずれた点での $\varphi(\boldsymbol{r})$ の値は

$$\begin{aligned}\varphi(\boldsymbol{r}+\Delta\boldsymbol{r}) &= \varphi(\boldsymbol{r}) + \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y}\,\Delta y \\ &\quad + \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\,\Delta z + O(|\Delta\boldsymbol{r}|^2) \\ &= \varphi(\boldsymbol{r}) + \left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right)\cdot\Delta\boldsymbol{r} \\ &\quad + O(|\Delta\boldsymbol{r}|^2) \qquad (10.3.1)\end{aligned}$$

という関係を満たす。ここで、

$$\boxed{\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right) \quad (10.3.2)}$$

という新しいベクトル場が現れた。これをスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の**グラディエント** (gradient) または**勾配**という。グラディエント grad は、スカラー場を微分することで、ベクトル場をつくりだす働きをする。このように場の量（一般には関数）に作用して別のものを作り出

す「仕掛け」のことを演算子と呼ぶことがある。**ナブラ** (nabla)（または、**デル** (del)）と呼ばれるベクトル演算子を

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \tag{10.3.3}$$

あるいは、(10.1.6) の基底ベクトルを使って、

$$\nabla = \boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})}\,\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{10.3.4}$$

と定義しよう。すると、$\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ のことを $\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$ と書くこともできる。∇ は微分演算子から作ったベクトルであり、$\nabla\varphi(\boldsymbol{r})$ は微分を作用させてベクトル場を作ることを表している。

グラディエントの記号を使えば、三変数関数のテイラー展開 (10.3.1) は、

$$\varphi(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{r}) + \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \cdot \Delta\boldsymbol{r} + O(|\Delta\boldsymbol{r}|^2) \tag{10.3.5}$$

と書ける。ここで、この式はスカラーについての等式だということに注意しよう。位置の微小変化 $\Delta\boldsymbol{r}$ はベ

クトルだから、スカラーの式にうまくフィットしないような気がする。しかし、ここにちょうどうまい具合にやはりベクトル場である $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ が現れ、これらの内積 $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{\Delta r}$ は自然にスカラーになる。そう考えてみると、スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ をすなおに微分した結果がベクトル場 $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ になるのは、必然だったと言っていいだろう。

せっかくなので、前に例にあげた点電荷のつくる電位 (10.1.2) のグラディエントを計算してみよう。こういう計算は、はじめのうちは、楽をしようなどと思わず、地道に偏微分を計算するのが正しいやり方だ。慣れてきたら、能率的な計算を模索すればいいのだ。というわけで、(10.1.2) の最右辺の x, y, z による表現を

使って、ともかく x による偏微分を計算すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi(x,y,z)}{\partial x} \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} \\
&= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x-x_0}{\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\}^{3/2}}
\end{aligned} \tag{10.3.6}$$

となる。y, z による偏微分はほとんど似た結果になるので、これら三つを並べたものが求める $\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ だ。これをそのまま書いてもいいのだが、得られた成分表示をよく見ると、

$$\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{q\,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|^3} \tag{10.3.7}$$

と書けることがわかる。もちろん、これの符号を変えた $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ が対応する静電場である。問題 10.1.2.a を参照。

問 10.3.1.a　ある点 $\boldsymbol{r}_0$ を固定し、$\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0) \neq (0,0,0)$ とする。$\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0)$ の方向をあらわす単位ベ

クトルを $\boldsymbol{n} = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0)/|\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0)|$ とすると、

$$\varphi(\boldsymbol{r}_0 + a\,\boldsymbol{n}) = \varphi(\boldsymbol{r}_0) + |\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0)|\,a + O(a^2) \tag{10.3.8}$$

が成り立つことを示せ。$\boldsymbol{n}$ は「点 $\boldsymbol{r}_0$ において $\varphi(\boldsymbol{r})$ の勾配がもっとも急な方向」と呼ばれる。これが何故か考えよ。

問 10.3.1.b　(x, y) を二次元の座標とし、$h(x, y)$ を各点での標高を表す関数としよう。$h(x, y)$ を知れば、図 10.2 のような立体的な地形図がわかる。二次元のスカラー場である $h(x, y)$ のグラディエントを $\operatorname{grad} h(x, y) = (\partial h(x, y)/\partial x, \partial h(x, y)/\partial y)$ と定義する。三次元の場合と同じだ。$h(x, y)$ を標高と解釈するとき、$\operatorname{grad} h(x, y)$ は何を意味しているか？　その大きさ、方向のもつ意味を述べよ。また、任意の点 (x_0, y_0) でのグラディエント $\operatorname{grad} h(x_0, y_0)$ を実測する方法を考えよ（地球上の、つるつるした材質でできた地形（たとえば、スキー場）で、下向きに一定の重力が働いて

いるとしてよい)。

問 10.3.1.c　上の問 10.3.1.b と同じ設定で、曲面上の点 $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ を通り、この点で曲面と接する平面（これを接平面という）の方程式を求めよ。

問 10.3.1.d　スカラー場 $\varphi_1(x, y, z) = ax + by + cz$, $\varphi_2(x, y, z) = (a/2)\log(x^2 + y^2)$, $\varphi_3(\boldsymbol{r}) = a\,|\boldsymbol{r}|$ について、グラディエントを計算せよ。得られたベクトル場の大きさや方向を検討し、概略を図示せよ（a, b, c は定数)。ただし微分が定義できない点がある場合は、そこを除外せよ。

10.3.2　スカラー場のグラディエントの線積分

三次元空間の勝手な点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ をとり、p を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ から $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ にむかう向きのついた任意の道とする。p に沿った、ベクトル場 $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ の線積分を調べてみよう。

10.2.1 節と同じように道 p を線素ベクトル $\boldsymbol{\Delta\ell}_1, \ldots, \boldsymbol{\Delta\ell}_N$ に分割し、分割の点を $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_{N+1}$ とする。線積分の定義 (10.2.7) にしたがえば、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Delta\ell}_i \cdot \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}_i) \tag{10.3.9}$$

である。ところが、$\boldsymbol{r}_{i+1} = \boldsymbol{r}_i + \boldsymbol{\Delta\ell}_i$ だったので、(10.3.5) より

$$\boldsymbol{\Delta\ell}_i \cdot \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}_i) = \varphi(\boldsymbol{r}_{i+1}) - \varphi(\boldsymbol{r}_i) + O(|\boldsymbol{\Delta\ell}_i|^2) \tag{10.3.10}$$

となる。$O(|\boldsymbol{\Delta\ell}_i|^2) = O(N^{-2})$ に注意して (10.3.9) を

変形すれば、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\{\varphi(\boldsymbol{r}_{i+1})-\varphi(\boldsymbol{r}_i)+O(\frac{1}{N^2})\} \\
&= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\{\varphi(\boldsymbol{r}_{i+1})-\varphi(\boldsymbol{r}_i)\}+\lim_{N\to\infty}N\times O(\frac{1}{N^2}) \\
&= \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})-\varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) \qquad (10.3.11)
\end{aligned}
$$

が得られる。ただし、$\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$, $\boldsymbol{r}_{N+1}=\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ であることを用いた。

重要な結果なので、まとめよう。

定理 10.2 (grad φ についての積分定理)**.** $\varphi(\boldsymbol{r})$ を任意の一回微分可能なスカラー場とし、p を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ から $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ にむかう任意の区分的になめらかな向きのついた道とする。このとき

$$\int_p d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathrm{grad}\,\varphi = \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}) - \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) \qquad (10.3.12)$$

が成り立つ。つまり、線積分は道 p の形に依存せず、道の両端の点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$,$\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ のみで決まる。

線積分というのは、道に沿って、ずっとベクトル場と線素ベクトルの内積を足しあげたものなのだから、途中の道に依存しないというのはきわめて特殊なことだ。実際、一般のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ については、線積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ は決して道の両端の位置だけでは決まらず、道の具体的な形による。これは、すでにいくつかの例でみたとおりだ。もっとも顕著な例を図 10.13 にあげる。

(10.3.12) は、なかなかおもしろい関係だ。左辺は $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ という微分量を積分したもの、そして、右辺はもとの量の両端での差になっている。実は、このような関係にはなじみがある。微分と積分の関係を示す基本の関係

$$\int_a^b dx\, f'(x) = f(b) - f(a) \tag{10.3.13}$$

が、まさに、そういう形をしている。「微分は引き算、積分は足し算」という（正しい）標語を思い出せば、微分したものを積分してもとに戻るのは、半ば当たり前と思うかも知れない。そうはいっても、場の量をあつかうようになったとき、その「当たり前のこと」がどのように実現されるかは決して当たり前でない。これから先、(10.3.12) の「兄弟分」にあたるような微分と積分の関係を二つ（ストークスの定理 10.5 とガウスの定理 10.10）を見ていくことになる。

図 10.13　図の上の方では右向きの風が吹き、下の方では左向きの風が吹いているようなベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$。$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ から $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ にむかう三つの道 p_1, p_2, p_3 を図のようにとる。明らかに、追い風の中を行く p_1 については $\int_{p_1} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} > 0$、無風の中を行く p_2 については $\int_{p_2} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = 0$、そして、あえて向かい風の中を行く p_3 については $\int_{p_3} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} < 0$ である。始点と終点が同じでも、道の取り方によって線積分の値はちがう。この事実から、このベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が、どんなスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ をもってこようと、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ とは書けないことがわかる。

10.3.3　ベクトル場がスカラー場のグラディエントで書けるための条件

ここで、あるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が、適当なスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を使って $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書けるための条

件について考えてみよう。

一般には、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書けるわけではないことを確認しておこう。定理 10.2 にまとめたように、この形に書けるベクトル場には、線積分が道の両端の位置だけで決まってしまう、という特別な性質がある。逆にいえば、線積分が道の形に依存するようなベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は決して $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ とは書けない、ということになる。よって、図 10.13 のベクトル場や、(10.2.17) のベクトル場（図 10.10）は、スカラー場のグラディエントとして書けないことが厳密にわかる。

■必要条件　ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が、適当なスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を使って $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書けると仮定しよう。そして、任意の閉じた道 c に沿った $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分（つまり循環）を求めよう。

閉じた道とは、始点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ と終点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ が一致するような道だ。そこで、(10.3.12) で $\varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) = \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}})$ とすれば、

すぐに、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in c} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=0 \tag{10.3.14}$$

が得られる。どんな閉じた道についても、ぐるっと一周まわって積分すれば、ゼロ。あるいは、循環は必ずゼロ。

■十分条件　次に、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とし、ただし、任意の c について「ぐるっとまわるとゼロ」の条件 (10.3.14) が成り立つと仮定する。

これから、まず、線積分が道の両端の位置だけで決まることがわかる。$\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ から $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ に向かう任意の二つの道 p, p' をとる。$\bar{p'}$ を p' の向きを反転した道とする。p の終点に $\bar{p'}$ の始点をくっつけて得られる新しい道 $p\cup\bar{p'}$ は $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ から出発して $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ に戻ってくるから、閉じた道になる。よって、仮定から

$$\int_{p\cup\bar{p'}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}=0 \tag{10.3.15}$$

となる。他方、線積分の和の規則 (10.2.11) と反転の規

則 (10.2.8) より、

$$\int_{p\cup\bar{p'}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{\bar{p'}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} - \int_{p'} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.3.16}$$

である。(10.3.15), (10.3.16) をあわせれば、

$$\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{p'} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.3.17}$$

となる。どちらの道を通っても、線積分は同じ。しかも、p と p' は任意だったのだから、線積分の結果は、始点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ と終点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ だけで決まり、二点をどのような道で結ぶかには依存しないことがわかった。

この性質を利用して、スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を作ってしまおう。点 $\boldsymbol{r}_0$ を勝手に選んで固定し、基準点と呼ぶ（普通は、$\boldsymbol{r}_0 = (0,0,0)$ とでもするのが自然だろうが、場合によっては原点は不都合かもしれないので $\boldsymbol{r}_0$ と書いた）。これから $\varphi(\boldsymbol{r}_0) = 0$ となるようにスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ を決める。

図 10.14　基準点 $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta r}$ へと向かう道 p' として、いったん $\boldsymbol{r}$ を通過してから、まっすぐに $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta r}$ に向かうものを選ぶ。

$\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ に向かう適当な道 p をとり、

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.3.18}$$

により $\varphi(\boldsymbol{r})$ を定義する。線積分が道の取り方によらないことが保証されているから、これで場所 $\boldsymbol{r}$ のみの関数として $\varphi(\boldsymbol{r})$ が決まる。

こうして作ったスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ について、$\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ を求める。テイラー展開 (10.3.5) に戻って考えるため、微小な $\boldsymbol{\Delta r}$ について、$\varphi(\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta r})$ を調べる。このためには、基準点 $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}+\boldsymbol{\Delta r}$ に向かう道 p' がいる。

(両端さえ言われたとおりにすれば) 道をどう取ってもよかったことを思い出し、$p' = p \cup \Delta p$ のように、とる。ここで、p は先ほど決めた $\boldsymbol{r}_0$ から $\boldsymbol{r}$ への道で、Δp は $\boldsymbol{r}$ から $\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}$ にまっすぐと向かう道である。つまり、図形としては道 Δp とベクトル $\Delta\boldsymbol{r}$ は同じもの。図 10.14 を見よ。線積分の定義に戻ると、

$$\int_{\Delta p} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \Delta\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + o(|\Delta\boldsymbol{r}|) \tag{10.3.19}$$

であることに注意しておく。すると、

$$\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{r} + \Delta\boldsymbol{r}) &= \int_{p'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \\
&= \int_{p \cup \Delta p} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \\
&= \int_{p} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{\Delta p} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \\
&= \varphi(\boldsymbol{r}) + \Delta\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + o(|\Delta\boldsymbol{r}|)
\end{aligned} \tag{10.3.20}$$

が任意の $\boldsymbol{r}$ と $\Delta\boldsymbol{r}$ について成り立つことがわかるが、これをグラディエントを定義したテイラー展開 (10.3.5)

と見比べれば、

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{10.3.21}$$

が成立していることがわかる。よって、このベクトル場はスカラー場のグラディエントとして書けることがわかった[*17]。

■必要十分条件　こうして、必要条件と十分条件がわかったから、これらをいっしょにして、定理としてまとめよう。

[*17] ここで、「$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ と書ける」という性質を証明するため、力ずくで $\varphi(\boldsymbol{r})$ をつくってしまった。このような証明の仕方を構成的証明 (constructive proof) という。「$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ なる $\varphi(\boldsymbol{r})$ の存在を構成的に証明する」などというと、かっこいい。

定理 10.3 (ベクトル場がスカラー場のグラディエントで書ける条件 (1))**.** 連続なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ について、以下の二つの条件は同値である。*i)* スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が存在して、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書ける。*ii)* 任意の閉じた道 c について $\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = 0$ が成り立つ（循環がゼロ）。

しかし、この条件 ii) はいかにも扱いにくい。閉じた道 c といっても、やたらといっぱいあるわけだから、それらのすべてについて「ぐるっとまわるとゼロ」を示すのは大変、というより、普通にやれば不可能だ。実は、上の i), ii) は、さらに三つ目の条件

iii) すべての点 $\boldsymbol{r}$ において $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (0,0,0)$

とも同値なのだ[*18]。そして、この条件は具体的に確か

[*18] ただし、この場合は「$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が微分可能」という、より厳しい条件を付け加える必要がある。

めやすい形をしている。

ここに現れた rot という「微分の操作」については、次の節でじっくりと見よう。iii) が i), ii) と同値であることは、少し先で学ぶストークスの定理（1808 ページの定理 10.5）の帰結である。

10.4　ベクトル場のローテーション

線積分という道具（あるいは、ものの見方）を使うことによって、ベクトル場のローテーション（回転）という量を自然に導入することができる。ローテーションは、ベクトル場についての自然な微分の一つである[*19]。ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ のローテーションをとった $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は新しいベクトル場になる。

ローテーションはベクトル解析のなかでも難関と言われているが、ベクトル場の物理を楽しむためには必須の道具だ。一度学んだあとも、必要に応じて復習す

[*19] もう一つの自然な微分はダイバージェンス。

るなどして、しっかりと身につけてほしい。

まず、10.4.1 節で、基本的なアイディアを述べ、本質的な部分の計算を進める。それをもとに、10.4.2 節でローテーションを定義し、10.4.3 節で基本的な恒等式を述べる。最後に、10.4.4 節で、ローテーションの定義についての微妙な点をきちんと議論する。

10.4.1　基本的な考え方と計算

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を考える。前節では $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書ける特殊なベクトル場ばかりを見てきたが、それは頭から消しておこう。ここでの $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は本当に一般的なベクトル場だ。ただし、これからベクトル場の微分を考えるので、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の各成分は x, y, z について二回以上微分可能だとしておこう[*20]。

c を任意の（区分的になめらかで）閉じた道とす

[*20] 一階の導関数が連続ならば十分だがそこまでこだわることはしない。

る。線積分（c が閉じた道だから、循環とも呼ばれる）$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ は「ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が、どの程度、道 c に沿ってまわっているか」を表す量とみることができる。いろいろな道 c について $\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ の値を知れば、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が「どのようにまわっている」かを知ることができるだろう。

しかし、いちいち閉じた道などをとらず、「ある点 $\boldsymbol{r}$ で、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がどのようにまわっているか」をずばりと指定できれば、ずっと便利なはずだ。そのためには、その点 $\boldsymbol{r}$ のまわりをぐるっとまわるような道 c についての線積分 $\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を考えて、c をどんどんと小さくしていけばいいにちがいない。言うまでもなく、これは微分の思想だ。関数の差 $f(y)-f(x)$ に相当するものを一点で考えたいと思い、$y=x+\Delta x$ として $\Delta x\to 0$ の極限をとったのが微分だった。ただし、$f(x+\Delta x)-f(x)$ そのものは極限でゼロになってしまうから、これを Δx で割ることで巧みに有限の微分係数 $f'(x)$ を抽出した（3.1.1 節を思い出そう）。ここでも、「まわり具合」に

ついて、ほとんど同じことをすることになる。

■小さな円周に沿った流れ　点 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ の周囲でのベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の「まわり具合」を調べよう。閉じた道としては、手始めに、xy 平面に平行な $\boldsymbol{r}_0$ を含む平面（式で書けば $z = z_0$）の中にある、$\boldsymbol{r}_0$ を中心にした半径 ε の円周 $c(\varepsilon)$ をとる。道 $c(\varepsilon)$ の向きは、xy 平面での正の回転の向きにあわせる。

ここで、6.2.1 節でみた「回転の正の向き」の規則を思い出そう（図 10.15）。まず、xy 平面内での正の回転の向きとは、x 軸正方向から y 軸正方向にむかう向きをいう。同じように、yz 平面内での正の回転の向きとは、y 軸正方向から z 軸正方向にむかう向き。残る zx 平面については、アルファベット順で x から z と言いたくなるかも知れないが、図 10.15 の右図のような「三竦(すく)み」の関係を思い出せば、z 軸正方向から x 軸正方向にむかう向きを正とすべきだということがわかるだろう。

10.2.5 節のような道のパラメター表示を用いて計算

図 10.15　「正の回転の向き」の規則。xy 面内での正の向きの回転とは、左図のように、x 軸正の側から y 軸正の側にむかう回転をいう。同様に、yz 面内では、y 軸正から z 軸正が正の回転、zx 面内では、z 軸正から x 軸正が正の回転である。x, y, z の三つの座標の関係は、右図のような「三竦(すく)み（じゃんけんと同じ関係）」になっている（6.2.1 節を参照）。

をおこなうのが便利だ。円周 $c(\varepsilon)$ をすなおにパラメター表示すると、$0 \leq \theta \leq 2\pi$ を使って、

$$\boldsymbol{\ell}(\theta) = \boldsymbol{r}_0 + \varepsilon\,(\cos\theta, \sin\theta, 0) \tag{10.4.1}$$

となる。これを公式 (10.2.31) に代入して線積分を計算すればよいのだが、その前に、被積分関数を少し変

形しておくのがいいだろう。まず、すなおに微分して

$$\frac{d\boldsymbol{\ell}(\theta)}{d\theta} = \varepsilon\,(-\sin\theta, \cos\theta, 0) \tag{10.4.2}$$

であり、また $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(\theta))$ の方は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(\theta)) &= \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0 + \varepsilon\,(\cos\theta, \sin\theta, 0)) \\ &= \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0) + \varepsilon\,\cos\theta\,\frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x} \\ &\quad + \varepsilon\,\sin\theta\,\frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y} + O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{10.4.3}$$

と一次までテイラー展開しておく。ただし、微係数 $\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0)/\partial x$ をまじめに書くと、

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x} = \Bigg(&\left.\frac{\partial V_{\mathrm{x}}(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=\boldsymbol{r}_0}, \\ &\left.\frac{\partial V_{\mathrm{y}}(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=\boldsymbol{r}_0}, \left.\frac{\partial V_{\mathrm{z}}(x,y,z)}{\partial x}\right|_{(x,y,z)=\boldsymbol{r}_0}\Bigg)\end{aligned} \tag{10.4.4}$$

である。これに注意して、(10.4.2) と (10.4.3) の内積

をとると

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\boldsymbol{\ell}(\theta)}{d\theta}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(\theta))\\
&=\varepsilon\{-\sin\theta\,V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r}_0)+\cos\theta\,V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r}_0)\}\\
&\quad+\varepsilon^2\Big\{-\sin\theta\,\cos\theta\,\frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x}-(\sin\theta)^2\,\frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y}\\
&\quad+(\cos\theta)^2\,\frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x}+\cos\theta\,\sin\theta\,\frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y}\Big\}+O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
\tag{10.4.5}
$$

となる。$\boldsymbol{r}_0$ は固定してあるから、これを θ の関数と見て 0 から 2π まで積分すればよい。

$$
\begin{gathered}
\int_0^{2\pi}d\theta\,\sin\theta=\int_0^{2\pi}d\theta\,\cos\theta=0\\
\int_0^{2\pi}d\theta\,(\sin\theta)^2=\int_0^{2\pi}d\theta\,(\cos\theta)^2=\pi,\\
\int_0^{2\pi}d\theta\,\sin\theta\,\cos\theta=0
\end{gathered}
\tag{10.4.6}
$$

を思い出せば、線積分（循環）が

$$\int_{c(\varepsilon)} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_0^{2\pi} d\theta\,\frac{d\boldsymbol{\ell}(\theta)}{d\theta}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(\theta))$$
$$= \pi\varepsilon^2\left\{\frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x} - \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y}\right\} + O(\varepsilon^3) \tag{10.4.7}$$

と評価できる。ここで、$\pi\varepsilon^2$ というのは、ちょうど道 $c(\varepsilon)$ が囲む円の面積になっている。このように意味のある量がでてきたのはよい兆候だ。まさに微分の定義のときのように、道に沿った線積分（循環）をこの面積で割ってから、$\varepsilon\to 0$ の極限をとると、

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\pi\varepsilon^2}\int_{c(\varepsilon)} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x} - \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y} \tag{10.4.8}$$

というきれいな結果がでる。この「面積あたりの循環」が、点 $\boldsymbol{r}_0$ において $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が xy 面と平行な面内で「どの程度まわっているか」を表す量なのである。

しかし、点 $\boldsymbol{r}_0$ で「どの程度まわっているか」を表す量は、明らかに (10.4.8) だけではない。今は、xy 面に

平行な面内の道をとったわけだが、これ以外に、少なくとも、yz 面に平行な面内と zx 面に平行な面内での道を考えることができる。こういった点については、以下の問題で考えたうえ、先の節（最終的には 10.4.4 節）で一般の場合を考察する。

問 10.4.1.a　yz 面に平行な面内と zx 面に平行な面内でのまわり具合についても、同じ考察をして、(10.4.8) に相当する結果を出せ。これは、上の計算を落ち着いて書き換えればできてしまうので、もう一度、自分なりにゼロから作り直す方が楽しめるだろう。

問 10.4.1.b　$\boldsymbol{r}_0 + (\varepsilon, \varepsilon, 0)$, $\boldsymbol{r}_0 + (-\varepsilon, \varepsilon, 0)$, $\boldsymbol{r}_0 + (-\varepsilon, -\varepsilon, 0)$, $\boldsymbol{r}_0 + (\varepsilon, -\varepsilon, 0)$, $\boldsymbol{r}_0 + (\varepsilon, \varepsilon, 0)$ をこの順番で結んで作られる道を $c'(\varepsilon)$ とする。これは、$\boldsymbol{r}_0$ を囲む一辺が 2ε の正方形状の道だ。上のように線積分 $\int_{c'(\varepsilon)} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ を評価し、極限 $\lim_{\varepsilon \to 0} (2\varepsilon)^{-2} \int_{c'(\varepsilon)} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ を求めよ。

10.4.2　ローテーションの定義

前節では、xy 面に平行な平面内の円周に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の循環を計算し、円周の半径が小さくなる極限から (10.4.8) という「まわり具合」を抽出した。しかし、もう指摘したように、「まわり具合」の決め方は単純ではない。ぐるっとまわる道をとるときに、少なくとも xy 面、yz 面、zx 面の三つのいずれかに平行な面内にとることができる。というより、別にこれらの面に平行でなく、斜めにとってもよいわけだ。そのような面の取り方に応じて、ベクトル場の「まわり具合」が決まってくる。

こういう風に話がややこしくなってしまうのは、「(ある点で) ベクトル場がどういう風にまわっているか」は単なる数で表せないからだ。たとえば、三次元空間のなかの流体の速度の場の例として、竜巻(たつまき)がぐるぐると渦巻いている状況を考えよう。竜巻のまわり方を思い描いてみれば、竜巻の中心になる軸（これは、場合

によっては、ぐにょっと曲がっていることもある）があって、そのまわりにぐるぐると風がまわっている。これを定量的に表そうと思えば、軸の向きと、回転の速さの両方を指定する必要がある。つまり、方向と大きさが必要であり、これはベクトル（的な量）であることがわかる。ベクトル場にかぎらず、三次元空間での回転を表すためには一般にベクトル（的な量）が登場する[*21]。たとえば、地球の自転を定量的にあらわすには、自転の軸と自転の速さの両方を指定しなくてはならない。

こういうことをふまえて、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の「ま

[*21] このように回転がベクトルと対応するのは、三次元空間の特殊性である。二次元空間での回転の場合は、軸の向きを指定する必要がなく、回転はただの（符号付きの）数で表現できる。四次元空間では、回転の「軸」に相当するものが二次元的な面になってしまうので、回転を表すのにベクトルでは不十分だ。この事情は、外積がベクトルになるのは三次元のみだったこと（891 ページの脚注 *41 を見よ）と完全に対応している。実際、(10.4.12) のようにローテーションを外積で表すことができるのだから、これはもっともである。

図 10.16　右ネジの規則

わり方」＝ローテーションを一般的に定義しよう。まず位置 $\boldsymbol{r}$ を決めて、固定する[*22]。次に、「まわり方」がベクトルであることを見越して、どの成分をみるかを決める。話を一般的にするため、任意の単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ をとり、この方向を軸とした「まわり具合」を見ることにしよう。固定した点 $\boldsymbol{r}$ を含み、ベクトル $\boldsymbol{n}$ と垂直な平面を考える。そして、この平面内にあり、点 $\boldsymbol{r}$ のまわりをぐるりと一周するような閉じた道 c をとる。

[*22] 本当は、固定する点の名前は $\boldsymbol{r}$ よりも $\boldsymbol{r}_0$ みたいなものの方がよいが、ここでは混乱は生じないだろう。

ただし、まわる向きは、「ネジをまわしたとき、$\boldsymbol{n}$ の方向にネジが進んでいく」ようにという「右ネジの規則」で決める。また、道 c が囲む領域の面積を Δa とする。図 10.16 を見よ。

このような道 c に沿った線積分（循環）$\int_c d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}$ は、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が点 $\boldsymbol{r}$ のまわりで軸 $\boldsymbol{n}$ のまわりをどの程度まわっているか、の情報をもっているにちがいない。さらに (10.4.7) をみれば、この「まわり具合」の主要な項は面積 Δa に比例すると推測できる。

そこで、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の点 $\boldsymbol{r}$ における**ローテーション** (rotation) あるいは**回転**[*23] $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の $\boldsymbol{n}$ 方向の成分を、

[*23] ローテーションではなく、**カール**と呼び $\mathrm{curl}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ と書く流儀もある。アメリカなどではそちらが主流かもしれない。ちなみに curl は略語ではなく、「curl one's hair ＝髪をカールする（死語？）」などと使う普通の英単語。

$$\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) := \lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \qquad (10.4.9)$$

のように定義しよう。ただし、$\Delta a \to 0$ は、道 c を（点 $\boldsymbol{r}$ に向けて）どんどん小さくしていく極限を表している。

実は、これを $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の定義と宣言してしまうためにはもう少しきちんと考えるべきことがあるのだが、その点についてはあとで 10.4.4 節で考えることにして、まずは話をどんどん進める。

前節では、xy 面に平行な平面の中で正の向きにまわる道 $c(\varepsilon)$ をとった。図 10.15, 10.16 を比べればすぐにわかるように、この道に対応する単位ベクトルは $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ である。よって、前節の計算結果 (10.4.8) と定義 (10.4.9) より

$$(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{z}} = \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial x} - \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial y} \qquad (10.4.10)$$

であることがわかる。さらに、問題 10.4.1.a では $\boldsymbol{n} = (1,0,0),(0,1,0)$ に対応する線積分も計算したので、それらもあわせれば、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r})}{\partial y} - \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial z},\right.$$
$$\left.\frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial z} - \frac{\partial V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial x} - \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial y}\right) \tag{10.4.11}$$

のようにローテーションの三つの成分が決まる。明らかに、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ もベクトル場である。つまり、rot は、ベクトル場を微分して、新しいベクトル場をつくるような操作なのだ。

(10.3.3) で導入した微分演算子ナブラ $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ を使うと、(10.4.11) は、コンパクトに、

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \qquad (10.4.12)$$

と書ける。もちろん × はベクトルの外積（あるいは、ベクトル積）を表す。(6.3.73) を見よ。たしかに、∇ も $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ もベクトルだから（といっても、前者は微分演算子のベクトル、後者はベクトル場なのだが）両者のベクトル積はベクトルになる。ローテーションの意味を表しているのは、(10.4.9)（あるいは、すぐ下の (10.4.13)）だが、具体的なベクトル場のローテーションを計算する際には (10.4.11) の形を使う。また、ローテーションの形を暗記しておくには (10.4.12) の形が便利だ。

簡単な例として、問題 10.2.5.a にもでてきたベクトル場 $\boldsymbol{U}(x, y, z) = (a\,y, -a\,x, 0)$ (a は定数) のローテーションをみよう。(10.4.11) に代入して調べてみると、ほとんどの微分がゼロになるのがわかる。生き残るのは z 成分だけで、けっきょく $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}) = (0, 0, -2a)$ と

なる。実際、このベクトル場は xy 平面に平行な面の中を正の向きにぐるぐるまわっているわけだから、この結果はもっともらしい。

さいごに、ローテーションの定義 (10.4.9) を少し別の、おもしろい（そして、あとで役に立つ）形に書き換えておこう。まず道 c に対応する**面素ベクトル**を $\Delta\boldsymbol{a} = \Delta a\,\boldsymbol{n}$ と定義しよう。ことばで言えば、大きさが c が囲む面の面積に等しく、方向が c の回転の向きと右ねじの規則から決まるような、ベクトルである。すると、ローテーションの定義 (10.4.9) は、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \Delta\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + O(|\Delta\boldsymbol{a}|^{3/2}) \tag{10.4.13}$$

とも書ける[*24]。グラディエントについての (10.3.5) と

[*24] なぜ小さな誤差の項が $O(|\Delta\boldsymbol{a}|^2)$ ではないのだろうと思う人は、前の節をよく読んで考えよう。

いう関係、あるいは、一変数関数の導関数についての (3.1.14)、つまり $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta x\, f'(x)+O(\Delta x^2)$ という関係に相当するもので、ローテーションの意味を明快に表している。左辺は道 c に沿った循環だから、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は「単位面積あたりの循環」（ただしベクトル量だけれど）と読むことができる。そういう意味で、ローテーションについて、あとあとまで記憶しておくべきなのは、この (10.4.13) とナブラを使った（覚えやすい）(10.4.12) だろう。

問 10.4.2.a　$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を三次元的な空気の流れの速度のベクトル場であるとしよう。このとき、勝手な点 $\boldsymbol{r}$ での場のローテーション $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を実際に（近似的に）測定する装置を考案せよ。もちろんベクトル量をはかりたいのだから、「このように置いてこう使うと、この成分がはかれる」といったものになるだろう。「空気の流れを乱すことなく空気から力を受ける小さな球」などの仮想的な部品を使うのはかまわないが、ともかく（少なくとも原理的には）作成可能なものを考える

こと。

問 10.4.2.b　ベクトル場 $\boldsymbol{V}_1(x,y,z) = (ax,0,0)$, $\boldsymbol{V}_2(x,y,z) = (0,ax,0)$, $\boldsymbol{V}_3(x,y,z) = (0,0,ax)$（$a > 0$ は定数）はどのようなベクトル場か？　概略を図示せよ。また、これらのローテーションを求めよ。

問 10.4.2.c　ぐるぐるとまわるベクトル場 (10.2.17)（図 10.10）のローテーションを求めよ。微分が定義できないところは除外せよ。やや驚くべき計算結果がでたと思う。なにがおきているか考察せよ。

問 10.4.2.d　点電荷のつくる静電場 (10.1.4) のローテーションを求めよ。計算はいささかめんどうだが、三つの成分に対称性があるから、それを考えれば（少し）楽になる。微分が定義できないところは除外せよ。

10.4.3　ローテーションとグラディエントについての恒等式

この節はとても短いが、内容がたいせつなので、あえて一つの小節をたてる。

$\varphi(\boldsymbol{r})$ を任意の（二階微分可能な）スカラー場とする。グラディエントをとった $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ はベクトル場である。(10.3.14) でみたように、任意の閉じた道 c について

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})=0 \tag{10.4.14}$$

が成り立つ。これは、ローテーションの定義 (10.4.9) の右辺がつねにゼロということだから、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0} \tag{10.4.15}$$

が成り立つことを意味する。

(10.4.15) はスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の選び方にかかわらず成立するのだから、これより、微分演算子としての恒等式

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = \mathbf{0} \tag{10.4.16}$$

が成り立っていることがわかる。これは、もちろん、ほとんど自明な関係式だが、このように二種類の微分演算子を合成したとき恒等的にゼロになるという関係（少し先で $\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$ という類似の関係をみる）は、ベクトル解析の背後にある美しい数学的な構造の反映なのだ。将来、微分形式や一般相対性理論を学ぶ人は、ここで学んだことをなつかしく思い出すことになるだろう。

ところで、恒等式 (10.4.15) は、微分演算子の x, y, z 表示を使っても、ごく簡単に示すことができる。グラディエントの成分表示 (10.3.2) をローテーションの成分表示 (10.4.11) に代入し、たとえば x 成分のみを計算

すると、

$$(\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{x}} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y} = 0 \tag{10.4.17}$$

となる[*25]。もちろん、他の成分についても同様。

あるいは (10.3.3) の ∇ を使った表現 (10.4.12) では、恒等式 (10.4.16) は、単に

$$\nabla \times \nabla = \boldsymbol{0} \tag{10.4.18}$$

となる。ベクトル積の基本的な性質 (6.3.34) からでる $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ と完璧に対応している。

10.4.4　ローテーションの定義をめぐって

10.4.2 節でも軽く触れたように、真面目に考えると、(10.4.9) をローテーションの定義だといってしまうことには少し問題があった。この節では、その点につい

[*25] ここで $\varphi(\boldsymbol{r})$ が二階微分可能と仮定している。

てきちんと考えておこう[*26]。

そもそも、定義というからには、それをどう使っても一貫して同じ答えがでることを保証しておかなくてはならない。しかし、定義 (10.4.9) を書いた段階では、10.4.1 節の円周状の道を使った場合と問題 10.4.1.b の正方形状の道を使った場合についてしか、(10.4.9) の右辺の極限のふるまいを知らなかった。もっと他の形の道を使ったとき、異なった答がでたりはしないのか？

少なくとも、今のところ、変な新しい答がでないという保証はない。

より深刻なのは、(10.4.9) が、ベクトル $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の「つじつまのあった」定義になっているという保証がない、ということだ。たとえば、$\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ に対応する道 c（これは yz 面に平行な面内にある）について (10.4.9) の右辺の極限を求めれば、ローテーションの x 成分 $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{x}}$ が得られる。また、$\boldsymbol{n} =$

[*26] 急いでいる読者は、この節はとばしてもいいだろう。時間ができたら戻ってきてほしい。

$(0,1,0)$ に対応する道 c'（これは zx 面に平行な面内にある）について同じことをすれば、ローテーションの y 成分 $(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{y}}$ が得られる。ここまでは、よい。次に、$\boldsymbol{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ として、(10.4.9) の式を検討してみよう。まず左辺は、$(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0) \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \{(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{x}} + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{y}}\}/\sqrt{2}$ となるから、新たに計算しなくても、上の二つの結果から求めることができる。一方、右辺を評価するためには、$\boldsymbol{n} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$ に垂直な（斜めの）面の中にまったく新しい道 c'' をとって、真面目に循環を計算するしかない。どう考えても、道 c'' は、以前の道 c, c' を何らかの意味で「合成した」ものではない。新しい斜めの道だ。そのような c'' に沿った循環をすなおに計算をしたとき、本当に $\{(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{x}} + (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}))_{\mathrm{y}}\}/\sqrt{2}$ という値がでてくるのだろうか？　それが正しくでてくるのなら、この定義は「つじつまがあっている」ことになるが、それは、まったく当たり前ではない。(10.4.9) がローテーションの定義として意味をもつためには、あ

らゆる単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ をもってきたときに、このような意味で「つじつまがあっている」必要がある[*27]。今の段階では、そんな「うまい話」が成り立つ保証はないわけだ。

ここまで読んだところで、「欲張ってすべての単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ について (10.4.9) の式に意味をもたせようとするから、そんな悩みが出てくるのだ。たとえば、$\boldsymbol{n} = (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ の三つの場合についてのみ (10.4.9) を使うと宣言すればいいではないか。それで $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の三つの成分が決まるのだから、十分だろう」と考える人がいるかもしれない。なかなか賢いが、そうやって臭いものに蓋をしても、本当の解決にはならない。そもそも、そうやって三つの成分だけを計算してつくった $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が、物理的にまともなベク

[*27] このあたりをごまかして（あるいはデリケートさに気付かずに）書いている物理数学や電磁気学の教科書は少なくないようだ。

トルになっているという保証がないし[*28]、同じことだが、ローテーションの意味を明快に示す (10.4.13) の書き方が使えなくなってしまうのも困りものだ。

前置きが長くなったが、以下では、このような点についてしっかりとした答えを与えよう。

■三角形に沿った流れ　はじめに、方向 $\boldsymbol{n}$ を色々に変えたときローテーションの定義 (10.4.9) の「つじつまが合っているか」という問題に集中しよう。そのためには三角形の形をした道を考えれば十分である。

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とする。まず、$\varepsilon_{\mathrm{x}}, \varepsilon_{\mathrm{y}} > 0$ として、図 10.17 のような、$(0,0,0)$, $(\varepsilon_{\mathrm{x}},0,0)$, $(0,\varepsilon_{\mathrm{y}},0)$, $(0,0,0)$ をこの順番に結ぶ三角形の道 c_{xy} をとり、線積分 $\int_{c_{\mathrm{xy}}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ を評価する。閉じた道 c_{xy} を、

[*28] 物理的なベクトルというのは、座標系の取り方（つまり、どちらの方向を x, y, z 軸にとるか）とは無関係に、実体として存在する。だから、座標系を変えればそれに応じて、三つの成分の値がちゃんと変化しなくてはいけない。それを保証しようと思えば、やはり斜めの面内の道についてもきちんと考えないといけないことになる。

図 10.17　原点を含む xy 面内の三角形の道 $c_{\rm xy}$。

図 10.17 のように、三つのまっすぐな道 p_1, p_2, p_3 に分解しよう。それぞれのまっすぐな道に沿った線積分は簡単に一変数の積分に書き直すことができる。p_1 と p_3 の上ではそれぞれ一つの変数だけが変化するから、(10.2.15), (10.2.16) を使えばよく、

$$\int_{p_1} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_0^{\varepsilon_{\rm x}} dx\, V_{\rm x}(x,0,0),$$
$$\int_{p_3} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{\varepsilon_{\rm y}}^{0} dy\, V_{\rm y}(0,y,0) \qquad (10.4.19)$$

と書ける。一方、p_2 は典型的な単調な道だから

(10.2.26)（あるいは (10.2.25)）が使える。p_2 の上では $(x/\varepsilon_{\mathrm{x}})+(y/\varepsilon_{\mathrm{y}})=1$ が成り立つことに注意すれば、

$$\int_{p_2} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}=\int_{\varepsilon_{\mathrm{x}}}^{0} dx\, V_{\mathrm{x}}\Big(x,\varepsilon_{\mathrm{y}}\big(1-\frac{x}{\varepsilon_{\mathrm{x}}}\big),0\Big)+\int_{0}^{\varepsilon_{\mathrm{y}}} dy\, V_{\mathrm{y}}\Big(\varepsilon_{\mathrm{x}}\big(1-\frac{y}{\varepsilon_{\mathrm{y}}}\big),y,0\Big) \tag{10.4.20}$$

が得られる。

これら三つを足し合わせて整理すれば、

$$\begin{aligned}&\int_{c_{\mathrm{xy}}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}\\&=\int_{0}^{\varepsilon_{\mathrm{x}}} dx\Big\{V_{\mathrm{x}}(x,0,0)-V_{\mathrm{x}}\Big(x,\varepsilon_{\mathrm{y}}\big(1-\frac{x}{\varepsilon_{\mathrm{x}}}\big),0\Big)\Big\}\\&\qquad+\int_{0}^{\varepsilon_{\mathrm{y}}} dy\Big\{V_{\mathrm{y}}\Big(\varepsilon_{\mathrm{x}}\big(1-\frac{y}{\varepsilon_{\mathrm{y}}}\big),y,0\Big)-V_{\mathrm{y}}(0,y,0)\Big\}\end{aligned}$$

となる。それぞれの波括弧の中でずれている変数について１次までテイラー展開すると、

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^{\varepsilon_{\mathrm{x}}} dx\, \varepsilon_{\mathrm{y}} \Big(1 - \frac{x}{\varepsilon_{\mathrm{x}}}\Big) \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(x,0,0)}{\partial y} \\
&\quad + \int_0^{\varepsilon_{\mathrm{y}}} dy\, \varepsilon_{\mathrm{x}} \Big(1 - \frac{y}{\varepsilon_{\mathrm{y}}}\Big) \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(0,y,0)}{\partial x} + O(\varepsilon^3)
\end{aligned}
$$

が得られる。この場合も被積分関数の x や y を 0 で置き換えても全体としては ε^3 のオーダーの誤差しか生じない。それに注意して（簡単な）積分を実行すれば、

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon_{\mathrm{x}}\varepsilon_{\mathrm{y}}}{2} \left\{ -\frac{\partial V_{\mathrm{x}}(0,0,0)}{\partial y} + \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(0,0,0)}{\partial x} \right\} + O(\varepsilon^3) \\
&= \varDelta a_{\mathrm{xy}} \left(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{V}(0,0,0)\right)_{\mathrm{z}} + O(\varepsilon^3) \qquad (10.4.21)
\end{aligned}
$$

となる。当然だが、原点でのローテーションの z 成分が得られる。前にかかっている $\varDelta a_{\mathrm{xy}} := \varepsilon_{\mathrm{x}}\varepsilon_{\mathrm{y}}/2$ は確かに c_{xy} が囲む三角形の面積である。

$\varepsilon_{\mathrm{z}} > 0$ をとり、yz 面内の道 c_{yz} を $(0,0,0)$, $(0,\varepsilon_{\mathrm{y}},0)$, $(0,0,\varepsilon_{\mathrm{z}})$, $(0,0,0)$ をこの順番に結ぶ三角形の道とし、zx 面内の道 c_{zx} を $(0,0,0)$, $(0,0,\varepsilon_{\mathrm{z}})$, $(\varepsilon_{\mathrm{x}},0,0)$, $(0,0,0)$ をこの順番に結ぶ三角形の道とする。上とまったく同

様の計算により、

$$\int_{c_{\mathrm{yz}}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \Delta a_{\mathrm{yz}}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(0,0,0))_{\mathrm{x}} + O(\varepsilon^3),$$
$$\int_{c_{\mathrm{zx}}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \Delta a_{\mathrm{zx}}\,(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(0,0,0))_{\mathrm{y}} + O(\varepsilon^3) \tag{10.4.22}$$

が得られる。もちろん、$\Delta a_{\mathrm{yz}} = \varepsilon_{\mathrm{y}}\varepsilon_{\mathrm{z}}/2$, $\Delta a_{\mathrm{zx}} := \varepsilon_{\mathrm{z}}\varepsilon_{\mathrm{x}}/2$ はそれぞれの三角形の面積である。

さて、これまでのところは、それぞれの座標軸に垂直な面だけを考えてきたから、何も目新しいことはない。ようやく「斜めの」面の中の道を考える準備ができた。

図 10.18 の左図のように、$(\varepsilon_{\mathrm{x}},0,0)$, $(0,\varepsilon_{\mathrm{y}},0)$, $(0,0,\varepsilon_{\mathrm{z}})$, $(\varepsilon_{\mathrm{x}},0,0)$ をこの順番に結ぶ三角形の道 c をとろう。少し幾何学的な考察をすると、c が囲む三角形の面積 Δa は

$$(\Delta a)^2 = (\Delta a_{\mathrm{xy}})^2 + (\Delta a_{\mathrm{yz}})^2 + (\Delta a_{\mathrm{zx}})^2 \tag{10.4.23}$$

図 10.18　原点付近での任意の方向を向いた三角形の道（左）を、三つの原点を含む三角形の道を使って表す（右）。

を満たすし、さらに、単位ベクトル

$$\boldsymbol{n} := \left(\frac{\Delta a_{\mathrm{yz}}}{\Delta a}, \frac{\Delta a_{\mathrm{zx}}}{\Delta a}, \frac{\Delta a_{\mathrm{xy}}}{\Delta a}\right) \tag{10.4.24}$$

が、この三角形の単位法線ベクトルであることが示せ

る[*29]。

図 10.18 からわかるように、c_{xy}, c_{yz}, c_{yz} 上の線積分を足し合わせると、座標軸と重なっている部分では二つの道が打ち消しあい、ちょうど c 上での線積分が得られる。よって、

$$\begin{aligned}\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} &= \int_{c_{\mathrm{yz}}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{c_{\mathrm{zx}}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{c_{\mathrm{xy}}} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \\ &= \Delta a_{\mathrm{yz}}\left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(0,0,0)\right)_{\mathrm{x}} + \Delta a_{\mathrm{zx}}\left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(0,0,0)\right)_{\mathrm{y}} \\ &\quad + \Delta a_{\mathrm{xy}}\left(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(0,0,0)\right)_{\mathrm{z}} + O(\varepsilon^3) \\ &= (\Delta a_{\mathrm{yz}}, \Delta a_{\mathrm{zx}}, \Delta a_{\mathrm{xy}})\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(0,0,0) + O(\varepsilon^3)\end{aligned} \tag{10.4.25}$$

が成り立つ。法線ベクトル (10.4.24) を使って書き直

---

*29　c が囲む三角形の単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする（具体的な形は未だ知らない）。c の面積 Δa を xy 面に射影した面積が Δa_{xy} なのだから、$\Delta a_{\mathrm{xy}}/\Delta a = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{z}}$ が成り立つ。他の二つの面についても同様に、$\Delta a_{\mathrm{yz}}/\Delta a = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{x}}$, $\Delta a_{\mathrm{zx}}/\Delta a = \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_{\mathrm{y}}$ がいえる。よって、$\boldsymbol{n}$ が (10.4.24) の形をしていることがわかる。さらに $|\boldsymbol{n}| = 1$ より (10.4.23) の関係もいえる。

せば、

$$\frac{1}{\Delta a}\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(0,0,0) + O(\varepsilon) \quad (10.4.26)$$

となり、まさにローテーションの定義 (10.4.9) が得られた。こうして（少なくとも全ての成分が正であるような $\boldsymbol{n}$ については）ローテーションの定義の「つじつまが合っている」ことが示された。ここでは簡単のため原点のまわりの道だけを考えたが、これが任意の点で成立することは明らかだろう。また、$\varepsilon_{\mathrm{x}}, \varepsilon_{\mathrm{y}}, \varepsilon_{\mathrm{z}}$ の符号を適切にとってやれば、上記以外の方向を向いた $\boldsymbol{n}$ も扱うことができる。

■一般の閉じた道に沿った流れ　方向依存性についての重要な点が解決したので、この節はここで終わりにしてもほとんど問題ないと思う。ただ、今のままでは任意の形をした閉じた道をどう扱うかがはっきりしていない[*30]。この節の残りでは、この点をきちんとみて

[*30] 一般の閉じた道は多くの小さな三角形の集まりで近似することができる。それを利用して任意の道を扱うこともできる。

おこう。ただし、以下の計算はかなり煩雑なので普通の読者はとばしていただいてかまわない。

再び点 $\boldsymbol{r}$ を固定し、そのまわりをまわる閉じた道 $c(\varepsilon)$ を、パラメター s $(0 \leq s \leq 1)$ によって

$$\boldsymbol{\ell}(s) = \boldsymbol{r} + \varepsilon\, \tilde{\boldsymbol{r}}(s) \tag{10.4.27}$$

のようにパラメター付けしよう。ただし $\tilde{\boldsymbol{r}}(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))$ は、原点 $(0,0,0)$ のまわりをまわる適当な閉じた道とする。閉じた道なので、もちろん $\boldsymbol{\ell}(0) = \boldsymbol{\ell}(1)$ つまり $\tilde{\boldsymbol{r}}(0) = \tilde{\boldsymbol{r}}(1)$ が成り立つ。

これから、任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の $c(\varepsilon)$ に沿った線積分（循環）を評価する。そして、中心の点 $\boldsymbol{r}$ と道の形 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ を固定したまま、道の広がり ε を小さくする極限をとる。

$d\boldsymbol{\ell}(s)/ds = \varepsilon\, d\tilde{\boldsymbol{r}}(s)/ds$ であることに注意して、線積分のパラメター表示 (10.2.31) を ε についてテイラー展開して評価すると、

$$\int_{c(\varepsilon)} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \int_0^1 ds\, \frac{d\boldsymbol{\ell}(s)}{ds} \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(s))$$

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon \int_0^1 ds\, \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(s)}{ds} \cdot \Bigg\{ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \\
&\quad + \varepsilon \left(\tilde{x}(s)\, \frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \tilde{y}(s)\, \frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \tilde{z}(s)\, \frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})}{\partial z} \right) \\
&\quad + O(\varepsilon^2) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

となるが、波かっこ $\{\cdots\}$ の中の第一項は s を含まないから、この項の積分は $\int_0^1 ds\, (d\tilde{\boldsymbol{r}}(s)/ds) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \{\int_0^1 ds\, (d\tilde{\boldsymbol{r}}(s)/ds)\} \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \{\tilde{\boldsymbol{r}}(1) - \tilde{\boldsymbol{r}}(0)\} \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ となる。よって、

$$
\begin{aligned}
&= \varepsilon^2 \int_0^1 ds\, \frac{d\tilde{\boldsymbol{r}}(s)}{ds} \cdot \\
&\quad \left\{ \tilde{x}(s)\, \frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \tilde{y}(s)\, \frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})}{\partial y} + \tilde{z}(s)\, \frac{\partial \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})}{\partial z} \right\} \\
&\quad + O(\varepsilon^3) \\
&= \varepsilon^2 \int_0^1 ds\, \Big\{ \tilde{x}'(s)\, \tilde{x}(s) \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \tilde{x}'(s)\, \tilde{y}(s) \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial y} \\
&\qquad + \tilde{x}'(s)\, \tilde{z}(s) \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial z} \\
&\qquad + \tilde{y}'(s)\, \tilde{x}(s) \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \tilde{y}'(s)\, \tilde{y}(s) \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial y}
\end{aligned}
$$

図 10.19　道 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ の xy 面への射影。パラメター s を消去し、二つの関数 $\tilde{y}_+(\tilde{x})$ と $\tilde{y}_-(\tilde{x})$ で表されるとする。

$$
\begin{aligned}
&+ \tilde{y}'(s)\,\tilde{z}(s)\frac{\partial V_{\rm y}(\boldsymbol{r})}{\partial z} \\
&+ \tilde{z}'(s)\,\tilde{x}(s)\frac{\partial V_{\rm z}(\boldsymbol{r})}{\partial x} + \tilde{z}'(s)\,\tilde{y}(s)\frac{\partial V_{\rm z}(\boldsymbol{r})}{\partial y} \\
&+ \tilde{z}'(s)\,\tilde{z}(s)\frac{\partial V_{\rm z}(\boldsymbol{r})}{\partial z}\Bigg\} + O(\varepsilon^3) \qquad (10.4.28)
\end{aligned}
$$

という風に循環の ε^2 までのオーダーが求められる。ただし「$'$」は s による微分を表す。

あとは、s についての積分を評価すればよい。まず、

明らかに、

$$\int_0^1 ds\,\tilde{x}'(s)\,\tilde{x}(s) = \left.\frac{(\tilde{x}(s))^2}{2}\right|_0^1 = 0 \qquad (10.4.29)$$

であり、同様に、$\int_0^1 ds\,\tilde{y}'(s)\,\tilde{y}(s) = \int_0^1 ds\,\tilde{z}'(s)\,\tilde{z}(s) = 0$ となる。よって、異なった変数がからむ積分がキーになる。とくに $\int_0^1 ds\,\tilde{x}'(s)\,\tilde{y}(s)$ をじっくりと評価してみよう。まず $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s), \tilde{z}(s))$ を xy 平面に射影した $(\tilde{x}(s), \tilde{y}(s))$ が平面内の閉じた道を表していることに注意しよう。ここでは、簡単のため、この平面内の道が図 10.19 のように、$\tilde{x}_{\min} < \tilde{x} < \tilde{x}_{\max}$ の範囲で一つの $\tilde{x}$ にちょうど二つの $\tilde{y}$ が対応するような輪になっているとしよう（この条件は本質的ではないが、計算が楽になる）。また道は xy 平面内での正の向きにまわるとしよう。パラメター s を消去すれば、$\tilde{x}_{\min} < \tilde{x} < \tilde{x}_{\max}$ に対して、道の上半分を表す関数 $\tilde{y}_+(\tilde{x})$ と下半分を表す関数 $\tilde{y}_-(\tilde{x})$ が得られる。ただし $\tilde{y}_+(\tilde{x}_{\min}) = \tilde{y}_-(\tilde{x}_{\min})$ および $\tilde{y}_+(\tilde{x}_{\max}) = \tilde{y}_-(\tilde{x}_{\max})$ が成り立つ。さらに、パラメター付けをうまくおこなって、$0 \le s \le s_0$ の範囲

では $\tilde{x}(s)$ は s について非増加（つまり、図での上半分に対応)、$s_0 \leq s \leq 1$ の範囲では $\tilde{x}(s)$ は s について非減少（つまり、図での下半分に対応）としよう。これだけの準備をすれば、積分の変数変換の公式によって、問題の積分を次のように書き換えられる。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 ds\, \tilde{x}'(s)\, \tilde{y}(s) \\
&= \int_0^{s_0} ds\, \tilde{x}'(s)\, \tilde{y}(s) + \int_{s_0}^1 ds\, \tilde{x}'(s)\, \tilde{y}(s) \\
&= \int_{\tilde{x}_{\mathrm{max}}}^{\tilde{x}_{\mathrm{min}}} d\tilde{x}\, \tilde{y}_+(\tilde{x}) + \int_{\tilde{x}_{\mathrm{min}}}^{\tilde{x}_{\mathrm{max}}} d\tilde{x}\, \tilde{y}_-(\tilde{x}) \\
&= -\int_{\tilde{x}_{\mathrm{min}}}^{\tilde{x}_{\mathrm{max}}} d\tilde{x}\, \{\tilde{y}_+(\tilde{x}) - \tilde{y}_-(\tilde{x})\} \\
&= -a_{\mathrm{z}} \qquad (10.4.30)
\end{aligned}
$$

ここで、a_{z} は平面内の道が囲む図形の面積である。ただし、道が正の向きにまわる場合は面積を正に、負の向きにまわる場合は面積を負にとることにする（逆回りの図も描いて考えてみよう)。変数の他の組み合わせ

についても、同じような計算をおこなうことができる。六通りの場合、すべてについての結果を（符号に注意して）まとめると、

$$
\begin{aligned}
-\int_0^1 ds\,\tilde{x}'(s)\,\tilde{y}(s) &= \int_0^1 ds\,\tilde{y}'(s)\,\tilde{x}(s) = a_{\mathrm{z}}, \\
-\int_0^1 ds\,\tilde{y}'(s)\,\tilde{z}(s) &= \int_0^1 ds\,\tilde{z}'(s)\,\tilde{y}(s) = a_{\mathrm{x}}, \\
-\int_0^1 ds\,\tilde{z}'(s)\,\tilde{x}(s) &= \int_0^1 ds\,\tilde{x}'(s)\,\tilde{z}(s) = a_{\mathrm{y}}
\end{aligned}
\tag{10.4.31}
$$

となる。xyz の「三つどもえ」の関係が守られている。ここで、a_{x}, a_{y}, a_{z} は、道 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ を、それぞれ yz 面、zx 面、xy 面に射影した道が囲む図形の面積であり、その符号は射影した道のまわる向きの正負で決める。

ここで、

$$
a = \sqrt{(a_{\mathrm{x}})^2 + (a_{\mathrm{y}})^2 + (a_{\mathrm{z}})^2} \tag{10.4.32}
$$

によって、三次元の中の道 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ が囲む

「面積」を定義し、また

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{a_{\mathrm{x}}}{a}, \frac{a_{\mathrm{y}}}{a}, \frac{a_{\mathrm{z}}}{a}\right) \tag{10.4.33}$$

という単位ベクトルを同じ面の「単位法線ベクトル」だと定義しよう。もちろん、道 $\tilde{\boldsymbol{r}}(s)$ $(0 \leq s \leq 1)$ が一つの平面に含まれているときには、これらは本当の面積と単位法線ベクトルになる（導出は脚注 *29 とまったく同じ）。面積分の表式 (10.4.28) に (10.4.31) を代入し、これらの量を使えば、

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{a\,\varepsilon^2} \int_{c(\varepsilon)} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \\
&= \boldsymbol{n} \cdot \left(\frac{\partial V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r})}{\partial y} - \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial z}, \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial z} - \frac{\partial V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \right. \\
&\qquad \left. \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial x} - \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial y}\right)
\end{aligned} \tag{10.4.34}$$

が得られる。$a\,\varepsilon^2$ は道 $c(\varepsilon)$ が囲む面積と考えられるので、これはまさにローテーションの定義式 (10.4.9) である。こうして、任意の閉じた道を使ってもローテーションが問題なく定義されることがわかった。

10.5　ベクトル場の面積分

ベクトル場についての、もう一つの自然な積分である面積分をあつかう。線積分をしっかりと理解していれば、面積分の考えをつかむのはそれほど難しくないだろう。電磁気学への応用だけでなく、これから先の、ストークスの定理、ガウスの定理、そしてダイバージェンスの概念など、面積分の広がりは大きい。

10.5.1 節では、簡単な例の考察をもとに面積分を定義し、10.5.2 節で面積分の基本的な性質をみる。10.5.3 節では、具体的な面積分の計算例を見る。具体例をきちんと理解するのは重要である。後の二つの節の内容はさほど重要ではない。10.5.4 節では面をパラメター表示した場合の面積分の表式をみて、10.5.5 節ではスカラー場の面積分について簡単に議論する。

10.5.1　面積分の定義

線積分は、「ベクトル場が、どの程度、ある道に沿って流れているか」を表していたわけだが、これに対応して、「ベクトル場が、どの程度、ある面を通過して流れているか」を表すのが面積分だ。以下では、10.2 節での線積分のあつかいを思い出しながら、面積分の定義をつくっていこう。

■予備的な考察　まず、考えをはっきりさせるため、ベクトル場が何らかの（密度一定の）流体の速度を表していると想像しよう。単位時間内に面を通ってどれだけの流体が流れるか、ということに注目する[*31]。ただし、面には向き（あるいは、裏表）があるとし、裏から

[*31] もちろん、面は流体の流れをさえぎらないと考えている。だから流体の中に「帆」を置いてしまうというのは、たとえとしてまずい。流体の中に細い糸でできた網のような面を置いて、この網の帆が受ける力を測る、というのが一つのもっともらしいたとえかもしれない。

図 10.20　なんか情けない図だが、一定の速度 $\boldsymbol{v}$ の流れの中に面積 a の面をとった状況。面に垂直な単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。面が流れを乱さないとすると、単位時間あたりに面を通過する流体の量は $a\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$ になる。

表に向かう流れを正の量、表から裏に向かう流れを負の量であらわすことにする。

10.2.1 節で線積分を定義の出発点になったのは、ベクトル場が一定で道がまっすぐなときの仕事を表す (10.2.1) だった。ここでも同じように進もう。つまり、ベクトル場はつねに一定のベクトル $\boldsymbol{v}$ であり、面も面積 a の平らな面とする。流体が通過する量は、面が流れに垂直におかれているときには、面積と流れの速さの積だが、一般には、面と流れの角度まで考える必要

がある。面の表側に、面と垂直に立てた単位ベクトルを $\boldsymbol{n}$ とする。流れのベクトル $\boldsymbol{v}$ の大きさを v とし、$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{n}$ のなす角を θ とする。すると、単位時間に面を通過する流体の量は $a\,v\,\cos\theta$ に等しいことがすぐにわかるだろう。実際、$\theta = 0$ なら流れは $a\,v$ となり、素朴な考えにあっている。$\theta = \pi/2$ なら流れはゼロになるが、これは流れと面が平行で、流れが面の上を「素通(すどお)り」してしまっていることに対応する。$\theta = \pi$ なら流れは $-a\,v$ となり、面の表から裏に向かう流れは負と数えるという約束にも一致している。ここで内積の性質 (6.3.16) を思い出せば、流れの量は $a\,v\,\cos\theta = a\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}$ と内積で表現できる。

これをさらにコンパクトに書くために、面に対応するベクトル $\boldsymbol{a} = a\,\boldsymbol{n}$ を定義する。大きさが面積に等しく、向きは面の表向きに垂直になるようなベクトルだ (同じ考えが、(10.4.13) にでてきた)。こうすると、流れの量は単に $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$ と書ける（図 10.20)。

流体の流れの場合にかぎらず、一般に、内積 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{v}$

が面を通過するベクトル場の流れと定義することにしよう。

■面積分の定義　以上をふまえて、一般の連続なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分を定義しよう。

S を三次元空間の中の任意の区分的になめらかな[*32]面とする。面 S は、球面のように閉じていて、境界(端(はし))を持たない面でもいいし、紙切れのように境界をもつ面でもいい。また、面 S のどちら側が表(おもて)でどちら側が裏かということをきちんと決めておく。実は、メビウスの帯（図 10.21 (d)）のように、どちらが裏でどちらが表かが決まらないような面もあるのだが、そういったものはここでは考えないことにする。また、境界のない面（閉じた面と呼ぶことにする）の場合は、特にことわらないかぎり、内側を裏、外側を表にすると

*32　「なめらかな面」とは（大ざっぱには)、面の内部のどのような部分も、大きく拡大すれば、平面の一部とみなせるものをいう。「区分的になめらかな面」とはなめらかな面をいくつかくっつけたようなものである。

図 10.21　様々な面。a) は、球面を少しいびつにしたような面のつもり。b) は、ドーナツの表面、あるいは浮き輪みたいな図形で、トーラスと呼ばれる。a), b) は境界のない面の例である。(われわれに見えている）外側を表とよぶ。c) は紙テープの両端を貼り合わせてつくったような輪であり、上下に円周状の境界がある。ここでは、このような境界つきの面も考えている。d) は紙テープを貼り合わせるときに一回ねじってつくったメビウスの帯の図（のつもり)。この場合は、仮に「表」と決めたところから表面をたどっていくと「裏」に達してしまう。このような「向き付け不可能」な面についてはベクトル場の面積分は定義できない。

決めておくと便利だ（図 10.21）。

さて、面積分を定義するときも、すでにお馴染みの「小さな部分に注目して、もっとも単純な場合の表式を用いる」という積分の「基本思想」にしたがって進もう。一般の面は曲がっているから、これを平らな面でうまく表してやる。そこで、面 S を N 枚の小さな平らな面を隙間なく貼り合わせたもので近似する。これらの小さな面を微小面とよぼう。微小面の形はどんなものでもかまわないが、三角形や四角形を使うのが便利だろう[*33]。図 10.22 に、球面を台形の微小面の集まりで近似した様子を示した。

N 枚の微小面に $i = 1, 2, \ldots, N$ と名前をつける。そして、$\boldsymbol{r}_i$ を微小面 i の真ん中の点とする。微小面 i の面積を Δa_i とし、微小面 i の表側に垂直に立った単位ベ

[*33] 「立体のポリゴン（多角形）表示のようなもの」といえば、三次元ゲームの初期を体験した今の若者にはピンとくるだろう。しかしゲーム機の性能は急激に向上するから、少し未来の若者は（たとえゲーマーでも）ポリゴンなどと言われても何のことかわからないに違いない。

図 10.22　球面を小さな台形の集まりで近似したもの。このときの区切りの線は、三次元の極座標 (6.2.5) で r を一定とした上で、φ を一定にしたもの（縦の線）と θ を一定にしたもの（横の線）になっている。

クトルを $\boldsymbol{n}_i$ とする。ここでも、これらをかけたベクトル $\Delta\boldsymbol{a}_i$ を微小面 i の**面素ベクトル**と呼ぶ。ここでは、面全体をほぼ N 等分することにして、各々の微小面の面積は $\Delta a_i = O(1/N)$ であり、また面の特徴的な長さ

図 10.23　微小面 i と、その中心点 $\boldsymbol{r}_i$、面素ベクトル $\Delta \boldsymbol{a}_i$ の様子。この場所でのベクトル場の値 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i)$ と $\Delta \boldsymbol{a}_i$ との内積が、この面をとおる「流れ」にほぼ等しい。

は $O(1/\sqrt{N})$ となるとしよう[*34]。とくに、$N \nearrow \infty$ では全ての微小面について $\Delta a_i \searrow 0$ となる。

ベクトル場が一定のときの予備的な考察によれば、面素ベクトルとベクトル場の値の内積 $\Delta \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i)$ が、微小面 i を通過するベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の流れである。ただし、ベクトル場の値が場所に依存してわずかに変わること、また、元来の面は完全に平らではなかった

[*34] 長さについての仮定は、微小面を極端に細長くとったりはしないことを意味する。

ことまで考慮すれば、

$$\begin{aligned}&(\text{元の面 } S \text{ の微小面 } i \text{ に対応する部分を通る流れ})\\&= \boldsymbol{\Delta a}_i \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + o(N^{-1})\end{aligned} \tag{10.5.1}$$

のように、わずかな「ずれ」が入ってくる。左辺をすべての i について足しあわせれば、

$$\begin{aligned}(\text{面 } S \text{ 全体を通る流れ}) &= \sum_{i=1}^{N}\{\boldsymbol{\Delta a}_i \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + o(N^{-1})\}\\&= \{\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\Delta a}_i \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i)\} + N\,o(N^{-1})\end{aligned} \tag{10.5.2}$$

となる。ここで N を大きくすれば、最後の「ずれ」の項はいくらでも小さくなる。こうして、**面積分** (surface integral) を次のように定義できる[*35]。

[*35] この定理は、一変数関数の積分についての定理 4.3（475 ページ）と同様の考えで証明できるが、技術的にはかなり難しい。この本では証明には踏み込まないことにする。

定理 10.4 (面積分の定義)**.** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を連続なベクトル場とし、S を表と裏の定まった区分的になめらかで有限な面とする。次式の右辺の極限が存在して面の分割の仕方によらない。

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) \tag{10.5.3}$$

これを面 S 上のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分という。

(10.5.3) の左辺の読み方は、線積分 (10.2.5) の場合と同じだ。まず $\boldsymbol{r}\in S$ は、「$\boldsymbol{r}$ という点が、面 S の上をくまなく動きまわる」と読む。そして、$d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ というのは、面素ベクトル $\Delta\boldsymbol{a}_i$ の極限の微小面素ベクトルだ。$\boldsymbol{r}$ のまわりの小さな面に対応する面素ベクトルと思えばよい。そして、動いていく道すがら、$d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ という流量を計算し、その結果を面の全体について足

しあげなさいということだ。

この場合も、略記したいときはダミー変数の $\boldsymbol{r}$ を省いて、$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ と書けばよいだろう。面 S 上の積分であること、そして微小面素ベクトル $d\boldsymbol{a}$ とベクトル場の内積をとっていることは決して忘れないよう明記しておいた。

10.5.2　面積分の基本的な性質

線積分について 10.2.2 節でみたのと同じように、面積分の基本的な性質を整理しておこう。

まず面 S に対して、そっくりと同じ図形だが、裏と表の定義を逆にした面を $\bar{S}$ とする。このとき

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = -\int_{\bar{S}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.5.4}$$

の関係があることはいうまでもないだろう（これが当たり前に思えない人は、もう一度もとに戻って読み直すべきです)。

また、重なりの部分が面積をもたない二つの面 S_1 と

S_2 をくっつけた面を $S_1 \cup S_2$ と書くと、これについても、

$$\int_{S_1 \cup S_2} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \int_{S_1} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{S_2} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} \quad (10.5.5)$$

が成り立つ。これもまた説明の必要はあるまい。

10.5.3　面積分の例

静電場を例にとって、面積分の計算をしてみよう。ここでは面積分の定義 (10.5.3) にもとづいて、すなおに計算を進めていく。

10.5.4 節でみるように、面積分についても、線積分のパラメター表示（10.2.5 節をみよ）に相当するパラメター表示の公式をつくることができる。ただし、パラメター表示は大がかりな割にはそれほど使い勝手のよいものではないので、この節では定義にもとづいた地道な計算を丁寧にみておこう。

■正方形状の面上の静電場の面積分　原点にある電荷 q の点電荷がつくる静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、(10.1.4) にあるように、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) &= \frac{q\,\boldsymbol{r}}{4\pi\varepsilon_0\,|\boldsymbol{r}|^3} \\ &= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \right. \\ &\qquad \left. \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right) \qquad (10.5.6)\end{aligned}$$

である。$a > 0$ を定数とし、面 S を $-a \leq x \leq a$, $-a \leq y \leq a$, $z = a$ で指定される正方形状の面とする。xy 面に平行な面積 $4a^2$ の面だ。z が大きい方から見た側を表、原点から見える側を裏としておく。ベクトル場 (10.5.6) の S 上の面積分 $\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}$ を計算しよう。

まず、面 S を小さな面に分割する。もっとも簡単なやり方は、x の動く範囲 $[-a, a]$ を間隔 Δx の微小な区間に、y の動く範囲 $[-a, a]$ を間隔 Δy の微小な区

間に、分けることだ[*36]。こうすると、面全体は、網の目状に小さな面に分割される。小さな面は、みな面積が $\Delta x\,\Delta y$ で、xy 面に平行である。面に垂直な単位ベクトルは $\boldsymbol{n} = (0, 0, 1)$ だから、面素ベクトルは共通で $\Delta\boldsymbol{a} = (0, 0, \Delta x\,\Delta y)$。そこで、$(x, y, a)$ という位置にある微小な面をとおるベクトル場の流れは、

$$\Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}(x, y, a) = \Delta x\,\Delta y\,\frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} \tag{10.5.7}$$

である。これをすべての微小面について足しあげ、$\Delta x, \Delta y \to 0$ の極限をとったものが、求める面積分である。

ここで二重積分を定義した式

$$\int dx \int dy\, f(x, y) := \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum_{\text{すべての微小面}} \Delta x\,\Delta y\, f(x, y) \tag{10.5.8}$$

[*36] $[a, b]$ というのは a 以上 b 以下の区間を表す。2.2.4 節の最後の方を参照。

を思い出せば[*37]、以上のことから、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E} = \int_{-a}^{a} dx \int_{-a}^{a} dy\, \frac{q\,a}{4\pi\varepsilon_0\,(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$$

のように、面積分を二重積分で表現することができる。ここで、$x = a\,s,\ y = a\,t$ により新しい積分変数 $s,\ t$ を導入すると、

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-1}^{1} ds \int_{-1}^{1} dt\,(s^2+t^2+1)^{-3/2}$$

のように a を含まない形になる。さらに被積分が関数が $s,\ t$ について偶関数であることを使って、

$$= \frac{q}{\pi\varepsilon_0}\int_{0}^{1} ds \int_{0}^{1} dt\,(s^2+t^2+1)^{-3/2} \tag{10.5.9}$$

のように積分区間を四分の一にしておく。この定積分は、下に示すように、$\pi/6$ に等しいので、けっきょく

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{q}{6\,\varepsilon_0} \tag{10.5.10}$$

[*37] まだこの本には多重積分の章がないので、江沢 8.1 節、8.2.1 節などを参照してください。

と面積分が計算できる。

この結果は、もちろん、電磁気学のはじめの方で学ぶガウスの法則（10.7.6 節を見よ）と深くかかわっている。$(\pm a, \pm a, \pm a)$（複号同順ではない）という形に書ける八つの点を頂点にもつ立方体を考え、その表面を S' としよう。前に決めたように、外側を表とする。面 S' は六枚の正方形状の面 $S'_1, \ldots, S'_6$ に分けられる。その内の一枚が、上で考えた面 S になっている。もともとの電場 (10.5.6) は球対称なので、六つの面上の線積分はみな等しく、(10.5.10) で求めたように $q/(6\,\varepsilon_0)$ である。よって、和の規則 (10.5.5) をくり返し使って、

$$\int_{S'} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E} = \sum_{i=1}^{6} \int_{S'_i} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (10.5.11)$$

という、きれいな結果が得られる。S' は閉じた面だから、これはガウスの法則の結果と一致する（ガウスの法則は一般的に正しいのだから、個別の例で計算した結果と食い違うはずはないわけだが)。

さいごに (10.5.9) の定積分の計算。まず s を定数と

みて、t についての積分を実行する。これは、簡単にできて[*38]、

$$\int_0^1 dt\,\{t^2+(s^2+1)\}^{-3/2} = \left.\frac{t}{(s^2+1)\sqrt{t^2+(s^2+1)}}\right|_0^1 = \frac{1}{(s^2+1)\sqrt{s^2+2}} \tag{10.5.12}$$

となる。よって、あとは定積分

$$I = \int_0^1 ds\,\frac{1}{(s^2+1)\sqrt{s^2+2}} \tag{10.5.13}$$

を求めればよい。実は、この場合には不定積分（原始関数）が計算できて、

$$\int ds\,\frac{1}{(s^2+1)\sqrt{s^2+2}} = \tan^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+2}}\right) \tag{10.5.14}$$

となることがわかっている（$\tan^{-1}$ はタンジェントの逆関数)。(10.5.14) をどうやって求めるかは、長くなる

[*38] 不定積分がすぐにでてこないときは、$t=\sinh\zeta$ とおく。

ので、この節のおわりに述べることにする。(10.5.14) を用いれば、定積分は

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 ds\, \frac{1}{(s^2+1)\sqrt{s^2+2}} \\
&= \tan^{-1}\left(\frac{s}{\sqrt{s^2+2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{6}
\end{aligned}
\tag{10.5.15}
$$

と求められる。これで計算がおわった。

■球面上での静電場の面積分　次に、曲がった面の例として、S を原点を中心とした半径 R の球面（やはり、外側が表）として、S 上の電場の面積分を求めてみよう。ただし、(10.5.6) のような原点にある点電荷のつくる電場を考えてしまうと、球面上のどこでも電場の大きさは同じで、かつ電場の向きは面と垂直になってしまう。そうすると、面積分は単に「面積かける電場の大きさ」になってしまって、せっかくの面積分の醍醐味

はない[*39]。ここでは点電荷の位置が原点から距離 a だけずれた状況をあつかおう。

点電荷のつくる電場が球対称であり、S も球面なので、点電荷が z 軸上にあるとしても一般性を失わない。電荷の位置を $\boldsymbol{r}_0 = (0, 0, a)$ すると、考える電場は、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} \tag{10.5.16}$$

である。ただし面上に電荷があると面積分が定義されないので、$a \neq R$ としておこう。

次に球面 S を面素に分割するのだが、これには、6.2.2 節でみた三次元の極座標（あるいは、球座標）を用いる。念のため簡単に復習しておこう。図 10.24 の左図の球面上の黒丸の位置を指定したい。まず、原点

[*39] こういう計算だけやっていると、そのうち、面積分が何だったのかも忘れてしまう。電磁気学の教科書や講義では、つい能率を優先して、このような対称性のよい面積分だけを取り上げるので（私が電磁気を担当したときも、けっきょく、そうなってしまった・・)、面積分の意味がわからずに通過してしまうことが多いのだ。

図 10.24　極座標によって、球面上の点を θ と φ という二つの角度で指定する。

と黒丸を通る直線を引き、この直線と z 軸の正の方向のなす角を θ とする。角は小さい方をとることにすると、$0 \leq \theta \leq \pi$ である。次に、この状況を z 軸の真上から見下ろす。すると z 軸は見えなくなって、右図のように xy 平面上に黒丸がみえる（つまり、xy 面に射影したことになっている）。また、この黒丸と原点を結ぶ直線を引き、それと x 軸正方向のなす角を φ とする。φ が総計で 2π の範囲を動く必要があるから、$0 \leq \varphi < 2\pi$ としよう。

こうすれば、球面上の任意の点に対して角度 θ と φ

が決まる。逆に、角度 θ と φ を決めれば、球面上の点が決まる。この対応は（$\theta = 0, \pi$ という特殊な点を除けば）一対一になっている。こうして指定される球面上の点を直交座標で表すと、(6.2.5) のように、

$$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = (R\,\sin\theta\,\cos\varphi, R\,\sin\theta\,\sin\varphi, R\,\cos\theta) \tag{10.5.17}$$

となる。

図 10.22 の区切りの線は、この表示で、φ を一定にしたもの（縦の線）と θ を一定にしたもの（横の線）になっている。地球上の緯度、経度と対応させることもできるので、それについては読者が考えてほしい。

こうして面上の位置が指定されたから、面の分割も自動的にできる。もっとも素直なやり方は、θ の動く区間 $[0, \pi]$ を一定の間隔 $\Delta\theta$ の部分に分け、φ の動く区間 $[0, 2\pi]$ を一定の間隔 $\Delta\varphi$ の部分に分けることだ。これに対応して、球面も小さな部分に分割される。この様子を示したのが、実は、図 10.22 である。このままでは、分割した小さな面も曲面のままだが、分割を変

えないようにして、すべての小さな面を平らな台形で置きかえられるのは明らかだと思う[*40]。

図 10.22 から明らかなように、こうして分割した面の面積は一定でない。分割が細かくなれば、台形はほぼ長方形で近似することができる。長方形の高さは、どこでも共通で、$\Delta\theta\, R$ だが、底辺の長さは θ に依存し、$\Delta\varphi\, R \sin\theta$ となる。これは図 10.24 で xy 面に射影するところでベクトルの長さが $R \sin\theta$ になることから、わかる。よって角度 θ で指定される位置にある微小な面の面積は $\Delta\theta\, \Delta\varphi\, R^2 \sin\theta$ である。実際、この微小面積をすべての微小な面について足しあげて、分

[*40] 真面目にいうと、次のように、やる。四つの面が接する点を頂点と呼ぶ。今、となり合う頂点は円弧で結ばれているが、これを線分で置きかえる。さらに、曲面を、これら線分を辺にもつ台形で置きかえる。

割を細かくする極限をとると、

$$\lim_{\Delta\theta,\Delta\varphi\to 0}\sum_{\text{すべての微小な面}}\Delta\theta\,\Delta\varphi\,R^2\,\sin\theta$$
$$=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,R^2\,\sin\theta=4\pi R^2 \qquad (10.5.18)$$

となり、確かに半径 R の球の表面積が得られる。ただし、二重積分の定義式 (10.5.8) を、x, y を θ, φ で置きかえて、使った。

次に面に垂直なベクトルだが、これは原点から面上の点にむかうベクトル $\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$ と同じ向きを向いている。よって (10.5.17) を規格化した $\boldsymbol{n}(\theta,\varphi)=(\sin\theta\,\cos\varphi,\sin\theta\,\sin\varphi,\cos\theta)$ が、θ, φ で指定される点での外向きの単位ベクトルである。よって、対応する面素ベクトルは、

$$\Delta\boldsymbol{a}(\theta,\varphi)$$
$$=\Delta\theta\,\Delta\varphi\,R^2\,\sin\theta\,(\sin\theta\,\cos\varphi,\sin\theta\,\sin\varphi,\cos\theta) \qquad (10.5.19)$$

となる。

次に、球面上の点 $\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)$ での電場ベクトルを求めておこう。まず (10.5.17) と $\boldsymbol{r}_0=(0,0,a)$ から、

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{r}_0|^2\\&\quad=|(R\,\sin\theta\,\cos\varphi,R\,\sin\theta\,\sin\varphi,R\,\cos\theta-a)|^2\\&\quad=R^2-2\,a\,R\,\cos\theta+a^2\end{aligned}\tag{10.5.20}$$

である。この結果と (10.5.17) を電場の表式 (10.5.16) に代入すると、

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(\theta,\varphi))\\&=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{(R\,\sin\theta\,\cos\varphi,R\,\sin\theta\,\sin\varphi,R\,\cos\theta-a)}{(R^2-2\,a\,R\,\cos\theta+a^2)^{3/2}}\end{aligned}\tag{10.5.21}$$

となる。

これで、ようやく面積分の計算に入ることができる。面素ベクトルの表式 (10.5.19) と電場ベクトルについ

ての (10.5.21) の内積をとって整理すると、

$$\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{a}(\theta,\varphi)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(\theta,\varphi))\\&=\Delta\theta\,\Delta\varphi\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R^2\,\sin\theta\,(R-a\,\cos\theta)}{(R^2-2\,a\,R\,\cos\theta+a^2)^{3/2}}\end{aligned}\tag{10.5.22}$$

となる。これを足しあげたものが面積分だから、ここでも二重積分の定義式 (10.5.8) を使い、

$$\begin{aligned}&\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{E}\\&=\lim_{\Delta\theta,\Delta\varphi\to0}\sum_{\text{すべての微小な面}}\Delta\boldsymbol{a}(\theta,\varphi)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}(\theta,\varphi))\\&=\lim_{\Delta\theta,\Delta\varphi\to0}\sum_{\text{すべての微小な面}}\Delta\theta\,\Delta\varphi\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\\&\quad\frac{R^2\,\sin\theta\,(R-a\,\cos\theta)}{(R^2-2\,a\,R\,\cos\theta+a^2)^{3/2}}\\&=\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\,\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{R^2\,\sin\theta\,(R-a\,\cos\theta)}{(R^2-2\,a\,R\,\cos\theta+a^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

を得る。ここで φ の積分は空回りして全体に 2π がかかるだけなので、それを実行し、さらに $\nu = a/R$ とすると、

$$= \frac{q}{2\,\varepsilon_0} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin\theta\,(1-\nu\,\cos\theta)}{(1-2\,\nu\,\cos\theta+\nu^2)^{3/2}}$$

となる。ここで $s = \cos\theta$ と変数変換し、あとはすなおに積分を計算すると、

$$\begin{aligned}
&= \frac{q}{2\,\varepsilon_0} \int_{-1}^1 ds\,\frac{1-\nu\,s}{(1-2\,\nu\,s+\nu^2)^{3/2}} \\
&= \frac{q}{2\,\varepsilon_0}\,\left.\frac{s-\nu}{\sqrt{1-2\,\nu\,s+\nu^2}}\right|_{-1}^{1} \\
&= \frac{q}{2\,\varepsilon_0}\left\{\frac{1-\nu}{|1-\nu|}+\frac{1+\nu}{|1+\nu|}\right\} \\
&= \begin{cases} 0, & |\nu|>1 \\ q/\varepsilon_0, & |\nu|<1 \end{cases}
\end{aligned} \tag{10.5.23}$$

となる。やはりガウスの定理のとおり、電荷が球面の内側にあるときは面積分はつねに q/ε_0 であり、電荷が球面の外側にあるときは面積分はゼロになる。

問 10.5.3.a　S を、$x^2+y^2=R^2$, z は任意、で指定さ

れる半径 R の無限円柱面（外側が表）とする（無限円柱面だから側面のみで上面や下面はないことに注意）。S 上での電場 (10.5.6) の面積分を求めよ。もちろん積分の答は q/ε_0 だが、そこに至るために、面をどのように分割するか、対応する面素ベクトルはどうなるか、といったことをすべて検討すること。円柱座標を使うと計算の見通しがよい。さいごの積分計算はかなり簡単。

■不定積分の計算　さいごに不定積分 (10.5.14) の求め方を述べよう。これには無理式の**有理化**というテクニックを用いるのだが、この本でみてきた積分の方法よりも少し高級なので、とくに関心のない読者は (10.5.14) を実際に微分して確かめた上で、この部分をとばして次の節に進んでもいいだろう。

以下では、一般の実定数 $b > a > 0$ について、不定

積分

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}$$
$$= \frac{1}{a\sqrt{b^2-a^2}}\,\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{b^2-a^2}\,x}{a\sqrt{x^2+b^2}}\right) \qquad (10.5.24)$$

を示そう。

この積分がやっかいなのは、もちろん、被積分関数に $\sqrt{x^2+b^2}$ という無理式が含まれていることである。じょうずに変数変換して、ルートのない有理式の積分に変えることができれば、積分は初等的に実行できるはずだ。いい加減に考えると、

$$y = \sqrt{x^2+b^2} \qquad (10.5.25)$$

と置いてやれば、被積分関数は $1/\{(y^2-b^2+a^2)\,y\}$ となるので、y を積分変数にすればうまくいくような気がするかもしれない。しかし、これでは、変数変換のために必要な dy/dx からルートがでてきてしまうから、けっきょくは有理式の積分にはならない（やってみよう）。もう少し賢いことを考える必要がある。

図 10.25　双曲線 (10.5.26) と直線 (10.5.27)。

さいわい、無理式が二次式のルートになっている場合は、一般的な方法で、積分を有理化することができる。まず、(10.5.25) により非負の量 y を定義する。同じことだが、

$$y^2 = x^2 + b^2 \tag{10.5.26}$$

である。(10.5.26) は xy 平面での二次曲線（この場合は、双曲線）を表しているとみることができる。この双曲線は、点 $(0, b)$ を通過する。次に、同じ点 $(0, b)$ をとおる傾き t の直線

$$y = t\,x + b \tag{10.5.27}$$

を考える。傾き t が $0 < t < 1$ の範囲にあるとき、双

曲線 (10.5.26) と直線 (10.5.27) は、$(0, b)$ 以外のもう一つの点で交わる（図 10.25）。この交点での x, y の値は、それぞれ、

$$x = \frac{2bt}{1-t^2}, \quad y = \frac{b\,(1+t^2)}{1-t^2} \tag{10.5.28}$$

となり、どちらも t の有理式になる。ここで、交点を求める際（自分でやってみよう）、b^2 という定数項がキャンセルしたから、有理式が得られたことに注意しよう。双曲線上の一点 $(0, b)$ を通過する直線を考えたことが重要だったのだ[*41]。

そこで、t を新しい積分変数として、積分を書きかえよう。(10.5.26) と (10.5.28) より

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2b\,(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \tag{10.5.29}$$

[*41] (10.5.27) のかわりに、たとえば原点をとおる傾き t の直線 $y = t\,x$ を使ったら、どうなるか？　実際にやってみよう。

および

$$
\begin{aligned}
x^2+a^2 &= x^2+b^2+(a^2-b^2) = y^2+(a^2-b^2) \\
&= \frac{b^2\,(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}+(a^2-b^2) \qquad (10.5.30)
\end{aligned}
$$

なので、求める不定積分は、

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}} \\
&= \int dt\,\left(\left\{\frac{b^2\,(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}+(a^2-b^2)\right\}\,\frac{b\,(1+t^2)}{1-t^2}\right)^{-1} \\
&\quad \frac{2b\,(1+t^2)}{(1-t^2)^2} \\
&= \int dt\,\frac{2(1-t^2)}{b^2(1+t^2)^2+(a^2-b^2)\,(1-t^2)^2} \\
&= \frac{2}{a^2}\int dt\,\frac{(1-t^2)}{t^4+\{4(b/a)^2-2\}\,t^2+1} \qquad (10.5.31)
\end{aligned}
$$

と書きかえられる。これで本質的な作業はおわった。

X についての二次方程式

$$
X^2+\{4(b/a)^2-2\}\,X+1=0 \qquad (10.5.32)
$$

は、$b > a > 0$ のとき二つの実根をもつ。根と係数の関係から、二つの根の積は 1 なので、それらを $-\alpha, -\alpha^{-1}$ と書こう。やはり根と係数の関係

$$\alpha + \alpha^{-1} = 4\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2 > 0 \tag{10.5.33}$$

から、α は正であることがわかるので、$\alpha > 1$ と選ぶ[*42]。

[*42] まるで高校の数学だと思うだろう。こういうことも、実質的に役に立つのだ。

これを用いて、(10.5.31) をさらに書きなおすと、

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}} \\
&= \frac{2}{a^2}\int dt\,\frac{(1-t^2)}{(t^2+\alpha)\,(t^2+\alpha^{-1})} \\
&= \frac{2}{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^{-1}}}\int dt\,\left\{\frac{\sqrt{\alpha^{-1}}}{t^2+\alpha^{-1}}-\frac{\sqrt{\alpha}}{t^2+\alpha}\right\} \\
&= \frac{2}{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^{-1}}}\,\left\{\tan^{-1}(\sqrt{\alpha}\,t)-\tan^{-1}(\sqrt{\alpha^{-1}}\,t)\right\} \\
&= \frac{2}{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^{-1}}}\,\tan^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^{-1}})\,t}{1+t^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{10.5.34}
$$

のように積分できる。ここで、不定積分

$$
\int \frac{dt}{t^2+c} = \frac{1}{\sqrt{c}}\,\tan^{-1}\left(\frac{t}{\sqrt{c}}\right) \tag{10.5.35}
$$

とタンジェントの逆関数についての加法公式

$$
\tan^{-1}(u)+\tan^{-1}(v) = \tan^{-1}\left(\frac{u+v}{1-uv}\right) \tag{10.5.36}
$$

を用いた。再び根と係数の関係 (10.5.33) から、

$$(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^{-1}})^2 = \alpha+\alpha^{-1}-2 = \frac{4(b^2-a^2)}{a^2} \quad (10.5.37)$$

なので、

$$\sqrt{\alpha}-\sqrt{\alpha^{-1}} = \frac{2}{a}\sqrt{b^2-a^2} \quad (10.5.38)$$

である。これを (10.5.34) に代入し、(10.5.28) より $t/(1+t^2) = x/(2y)$ となることに注意すれば、目標の (10.5.24) が得られる。

問 10.5.3.b　加法公式 (10.5.36) を示せ。逆関数の意味がわかってさえいれば、サインとコサインの加法公式 (3.2.105) を使えば、ただちに示すことができる。

10.5.4　面のパラメター表示を用いた計算

線積分の計算の際には、10.2.5 節でみた道のパラメター表示を用いた計算法が便利だった。面積分の場合にも同様のパラメター表示は可能なので、ここで簡単

にみておこう。ただし、ここでの議論は、これから先で特段に用いないし、具体的な計算にさほど役に立つわけではない。興味のある読者以外はとばしてかまわない。

■一般の表式　道（曲線）は一つのパラメターで表されたが、面を表すためには、二つのパラメターが必要である。ここでは、実数値をとるパラメター s, t を使おう。パラメター s, t は、$a \leq s \leq b$, $c \leq t \leq d$（a, b, c, d は定数）のように単純な長方形状の領域を動くこともあるが、場合によっては（円のような）もっとこみ入った図形の上を動くかも知れない。以下では、一般に (s, t) は二次元の連結な領域[*43] $D \subset \mathbb{R}^2$ にあるとしよう。領域 D のようにパラメターが動きまわる抽象的な「空間」なのでパラメター空間と呼ぶことがある。

---

*43 「二次元の連結な領域」を一般的かつ正確に定義するには、この本で用意してきた数学の言葉では不十分だ。言葉の通り、正方形状の領域とか、円盤状の領域とか、ちゃんと二次元的に広がった一つながりの範囲だと思っていただいてかまわない。

パラメターの組 $(s,t) \in D$ を与えると、対応して三次元空間の点 $\boldsymbol{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ が決まるとしよう。(s,t) が D のなかを動きまわれば、$\boldsymbol{r}(s,t)$ は三次元空間のなかを動き、一つの曲面 S を描き出す。これが、面 S のパラメター表示である。

面積分を考えるために、微小な面素ベクトルを求めよう。一つ目のパラメターが s と $s + \Delta s$ の間にあり、二つ目のパラメターが t と $t + \Delta t$ の間にあるようなパラメター空間 D の中の微小な長方形を考える。この長方形を写像 $\boldsymbol{r}(s,t)$ で写した先が、曲面上の微小面素になる。

二変数関数のテイラー展開を用いると、パラメター空間での長方形の頂点が写される先の点について、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(s+\Delta s, t) =& \boldsymbol{r}(s,t) + \Delta s\, \boldsymbol{u}_1(s,t) + O(\Delta^2) \\
\boldsymbol{r}(s, t+\Delta t) =& \boldsymbol{r}(s,t) + \Delta t\, \boldsymbol{u}_2(s,t) + O(\Delta^2) \\
\boldsymbol{r}(s+\Delta s, t+\Delta t) =& \boldsymbol{r}(s,t) + \Delta s\, \boldsymbol{u}_1(s,t) \\
& + \Delta t\, \boldsymbol{u}_2(s,t) + O(\Delta^2)
\end{aligned} \tag{10.5.39}$$

図 10.26　パラメター空間での微小な長方形（左）が写像 $\boldsymbol{r}(s,t)$ によって曲面の一部（右）に写される。右図のようにして、基準となるベクトル $\boldsymbol{u}_1(s,t)$ と $\boldsymbol{u}_2(s,t)$ を定める。

が得られる。ここで $O(\Delta^2)$ の Δ は Δs と Δt の両方を意味する。また、

$$\boldsymbol{u}_1(s,t)=\frac{\partial\boldsymbol{r}(s,t)}{\partial s},\quad \boldsymbol{u}_2(s,t)=\frac{\partial\boldsymbol{r}(s,t)}{\partial t}\qquad(10.5.40)$$

は面素を決める基準となるベクトルである。

(10.5.39) をみれば、Δs, Δt について最低次までの範囲なら、曲面 S 上の面素を $\boldsymbol{r}(s,t)$, $\boldsymbol{r}(s,t)+\Delta s\,\boldsymbol{u}_1(s,t)$, $\boldsymbol{r}(s,t)+\Delta t\,\boldsymbol{u}_2(s,t)$, $\boldsymbol{r}(s,t)+\Delta s\,\boldsymbol{u}_1(s,t)+\Delta t\,\boldsymbol{u}_2(s,t)$, の四点を頂点とする平行四辺形とみなせることがわか

る。この平行四辺形に対応する面素ベクトルは、基準のベクトルを用い、ベクトルの外積 (6.3.3 節) によって、

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{a}(s,t) &= \{\Delta s\,\boldsymbol{u}_1(s,t)\}\times\{\Delta t\,\boldsymbol{u}_2(s,t)\}\\ &= \Delta s\,\Delta t\{\boldsymbol{u}_1(s,t)\times\boldsymbol{u}_2(s,t)\}\end{aligned}\tag{10.5.41}$$

と表される。これまで、わざと面 S の向きに触れなかったのだが、この面素ベクトル $\Delta\boldsymbol{a}(s,t)$ の向きが表と一致するように向きを付けたということにしよう。

ここで任意のベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を考える。上でみた面素を通る $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の流れの総量は、

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))\cdot\Delta\boldsymbol{a}(s,t)\\ &\quad= \Delta s\,\Delta t\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))\cdot\{\boldsymbol{u}_1(s,t)\times\boldsymbol{u}_2(s,t)\}\end{aligned}\tag{10.5.42}$$

である。後は、これを D 上の全ての微小長方形について足しあげればよい。それは、s,t についての二重積分

と同じことで、結局、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{(s,t)\in D} ds\,dt\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(s,t))\cdot\{\boldsymbol{u}_1(s,t)\times\boldsymbol{u}_2(s,t)\} \tag{10.5.43}$$

という表現が得られる。これが、ベクトル場の線積分の場合の (10.2.31) に相当する、ベクトル場の面積分のパラメター表示の公式である。

■球面の例　もっとも基本的な例として球面をみておこう。面 S を原点を中心とする半径 R の球面とし、$0 \le \theta \le \pi$, $0 \le \varphi < 2\pi$ を使って、極座標で $\boldsymbol{r}(\theta,\varphi) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta)$ のようにパラメター表示する。これを (10.5.40) のように

微分すると、

$$\boldsymbol{u}_1(\theta,\varphi)=\frac{\partial\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)}{\partial\theta}=(R\,\cos\theta\,\cos\varphi,R\,\cos\theta\,\sin\varphi,\\ -R\,\sin\theta)$$

$$\boldsymbol{u}_2(\theta,\varphi)=\frac{\partial\boldsymbol{r}(\theta,\varphi)}{\partial\varphi}=(-R\,\sin\theta\,\sin\varphi,R\,\sin\theta\,\cos\varphi,0) \tag{10.5.44}$$

となる。(10.5.41) に従って面素ベクトルを求めると、

$$\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{a}(\theta,\varphi)=\Delta\theta\,\Delta\varphi\,\{\boldsymbol{u}_1(\theta,\varphi)\times\boldsymbol{u}_2(\theta,\varphi)\}\\&=\Delta\theta\,\Delta\varphi\,R^2\,\sin\theta\,(\sin\theta\,\cos\varphi,\sin\theta\,\sin\varphi,\cos\theta)\end{aligned} \tag{10.5.45}$$

となり、(10.5.19) が再現される。

(10.5.19) を導いたときは、球面上の微小面の形を具体的に描いて議論を進めた。ここでは、いっさい絵を描かずに機械的に計算が進んだことに注意しよう。言うまでもないだろうが、イメージを浮かべ正確な絵を描いて正しい計算をするのはきわめて重要なことだ。球面をあつかう程度なら、わざわざ重い一般公式

(10.5.43) を使わず、（以前やったように）各論的な導出をするので十分だろう。より複雑な面を扱うときや、パラメター付けされた面の関わる一般論を展開する際には、一般公式が役に立つはずだ。

■「高さ」を指定する表示　面の特別な場合として、平面上の点 $(x, y) \in D$ における「高さ」$h(x, y)$ を指定して得られる面 S を考えよう。つまり、地形図のような形の面である。

この際には、パラメターとして (x, y) そのものをとるのがよい。(x, y) に対応する面 S 上の点を $\boldsymbol{r}(x, y, z) = (x, y, h(x, y))$ と書こう。(10.5.40) に従って基準となるベクトルは、それぞれ

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1(x, y) &= \frac{\partial \boldsymbol{r}(x, y)}{\partial x} = \left(1, 0, \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}\right), \\
\boldsymbol{u}_2(x, y) &= \frac{\partial \boldsymbol{r}(x, y)}{\partial y} = \left(0, 1, \frac{\partial h(x, y)}{\partial y}\right) \qquad (10.5.46)
\end{aligned}$$

となる。これらの外積は

$$\boldsymbol{u}_1(x,y)\times\boldsymbol{u}_2(x,y)=\left(-\frac{\partial h(x,y)}{\partial x},-\frac{\partial h(x,y)}{\partial y},1\right) \tag{10.5.47}$$

なので、(10.5.43) より

$$\begin{aligned}&\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}\\&=\int_{(x,y)\in D}dx\,dy\left\{-V_{\mathrm{x}}(x,y,h(x,y))\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right.\\&\left.-V_{\mathrm{y}}(x,y,h(x,y))\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}+V_{\mathrm{z}}(x,y,h(x,y))\right\}\end{aligned} \tag{10.5.48}$$

となる。

10.5.5　スカラー場の面積分

10.2.6 節ではスカラー場の線積分を議論した。同様に、ベクトル場の面積分と同じ考えで、スカラー場の面積分が定義できる。ここでは、定義を簡単にみて、曲

面の面積の計算への応用をみておこう。この節はとばしてもかまわない。

■スカラー場の面積分の定義　$\varphi(\boldsymbol{r})$ を任意のスカラー場とし、S を三次元空間のなかの向きのついた任意の面とする。10.5.1 節と同様に、S を N 個の微小な面に分割する。各々の微小面に $i = 1, 2, \ldots, N$ と名前をつけ、i 番目の面の面積を Δa_i とする。ベクトル場の面積分の定義 (10.5.3) と同様に、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} da(\boldsymbol{r})\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta a_i\,\varphi(\boldsymbol{r}_i) \qquad (10.5.49)$$

で面 S 上のスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の面積分を定義する。微小面積とスカラー場の値をかけて足し合わせるという、ごく単純で自然な発想である。省略するときは $\int_S da\,\varphi$ と書けばよい。

スカラー場の特別な場合として、全ての $\boldsymbol{r}$ について $\varphi(\boldsymbol{r}) = 1$ となる関数をとると、(10.5.49) の右辺は微小面の面積 Δa_i の和だから、これは（微小面の集まり

で近似した）曲面 S の面積になる。つまり、

$$(\text{曲面 } S \text{ の面積}) = \int_{\boldsymbol{r}\in S} da(\boldsymbol{r}) \tag{10.5.50}$$

である。

■面のパラメター表示を用いた表式　10.5.4 節でみた面をパラメター付けした場合の面積分の表式も、そのままスカラー場の面積分に適用できる。微小面の面積 Δa_i は面素ベクトル $\Delta \boldsymbol{a}_i$ の大きさだから、(10.5.41) より、

$$\Delta a(s,t) = |\Delta \boldsymbol{a}(s,t)| = \Delta s\, \Delta t\, |\boldsymbol{u}_1(s,t) \times \boldsymbol{u}_2(s,t)| \tag{10.5.51}$$

となり、(10.5.43) に対応して、

$$\int_S da\, \varphi = \int_{(s,t)\in D} ds\, dt\, \varphi(\boldsymbol{r}(s,t))\, |\boldsymbol{u}_1(s,t) \times \boldsymbol{u}_2(s,t)| \tag{10.5.52}$$

という表現が得られる。

あるいは、「地形図」のような面 S を、パラメター $(x,y) \in D$ を用いて $\boldsymbol{r}(x,y) = (x, y, h(x,y))$ と表現す

る場合には、(10.5.47) より

$$\begin{aligned}\Delta a(x,y) &= \Delta x\,\Delta y\,|\boldsymbol{u}_1(x,y)\times\boldsymbol{u}_2(x,y)| \\ &= \Delta x\,\Delta y\sqrt{1+\left(\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right)^2}\end{aligned} \tag{10.5.53}$$

となり、スカラー場の面積分は

$$\begin{aligned}&\int_s da\,\varphi \\ &= \int_{(x,y)\in D} dx\,dy\,\varphi(x,y,h(x,y)) \\ &\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial h(x,y)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial h(x,y)}{\partial y}\right)^2}\end{aligned} \tag{10.5.54}$$

と表現できる。

■曲面の面積　簡単な応用例として、トーラス（図 10.21 (b) の浮き輪の表面のような図形）の表面積を求めてみよう。$a>b>0$ を満たす定数 a,b をとり、

パラメター θ, φ（範囲は $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$）で

$$\boldsymbol{r}(\theta, \varphi) = ((a+b\cos\theta)\cos\varphi, (a+b\cos\theta)\sin\varphi, b\sin\theta) \tag{10.5.55}$$

と指定される面を考える。これがトーラスであることをなっとくするには、まず、$\varphi = 0$ として θ を動かすことで、xz 面内に $(a, 0, 0)$ を中心にした半径 b の円周が描かれることをみる。次に、全体を z 軸正方向から見下ろすつもりになり、φ を動かすことで、この円周が z 軸のまわりをぐるりと一周する様子を思い描けばいい。

基準のベクトル (10.5.40) は、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1(\theta, \varphi) &= (-b\ \sin\theta\ \cos\varphi, -b\ \sin\theta\ \sin\varphi, b\ \cos\theta) \\ \boldsymbol{u}_2(\theta, \varphi) &= (-(a+b\cos\theta)\sin\varphi, (a+b\cos\theta)\cos\varphi, 0) \end{aligned} \tag{10.5.56}$$

であり、さらに計算すれば $|\boldsymbol{u}_1(\theta, \varphi) \times \boldsymbol{u}_2(\theta, \varphi)| =$

$(a+b\cos\theta)b$ となる。(10.5.50) と (10.5.52) から、

$$
\begin{aligned}
(\text{トーラスの表面積}) &= \int_S da \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\,(a+b\cos\theta)b \\
&= 4\pi^2 ab \qquad (10.5.57)
\end{aligned}
$$

となる。

(10.5.57) の結果は $(2\pi a)(2\pi b)$ のように、トーラスを構成する大小の円の円周の長さの積になっている。これはもちろん偶然ではない。簡単に一般論をみておこう。xz 平面内の $x>0$ の領域に周の長さが ℓ の任意の閉じた曲線 c を描き、これを $0\le s\le \ell$ の範囲を動くパラメター s で、$(x(s), z(s))$ と表現する。ただし、ここでパラメターを上手にとって、$\sqrt{(\dot{x}(s))^2+(\dot{z}(s))^2}=1$ が成り立つとしよう（ドットは s 微分の意味)。これは、パラメター s を曲線に沿って測った長さにとったことを意味する。

c を z 軸の周りにぐるりと一周回転させたときの

軌跡によって曲面 S をつくる。S の面積を求めよう。まず、S は上の s と角度 φ $(0 \leq \varphi \leq 2\pi)$ によって $\boldsymbol{r}(s,\varphi) = (x(s)\,\cos\varphi, x(s)\,\sin\varphi, z(s))$ のようにパラメター表示できる。よって基準のベクトルは、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_1(s,\varphi) &= (\dot{x}(s)\,\cos\varphi, \dot{x}(s)\,\sin\varphi, \dot{z}(s)) \\ \boldsymbol{u}_2(s,\varphi) &= (-x(s)\,\sin\varphi, x(s)\,\cos\varphi, 0) \end{aligned} \tag{10.5.58}$$

であり、地道に外積を計算して絶対値をとると、

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u}_1(s,\varphi) \times \boldsymbol{u}_2(s,\varphi)| &= \sqrt{(x(s))^2\{(\dot{x}(s))^2 + (\dot{z}(s))^2\}} \\ &= x(s) \end{aligned} \tag{10.5.59}$$

となる。よって、求める面積は、

$$(S\text{ の面積}) = \int_0^\ell ds \int_0^{2\pi} d\varphi\, x(s) = 2\pi\bar{x}\,\ell \tag{10.5.60}$$

と書ける。ここで、

$$\bar{x} = \frac{1}{\ell}\int_0^\ell ds\, x(s) \tag{10.5.61}$$

は xz 面内の曲線 c 上での x 座標の平均値である[*44]。上のトーラスの例では、ちょうど $\bar{x} = a$ となっていたのである。

10.6　ストークスの定理

この節では、ストークス[*45]の定理を議論しよう。ストークスの定理は、線積分、ローテーション、面積分の考え方が絡み合う、美しい関係である。これは、また定理 10.2（あるいは (10.3.12)）の $\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ についての積分定理につづく、二つ目の積分定理でもある。電磁気学や流体力学では、このような抽象的な数学の定

[*44] この関係も、c 上の短い線素を回転した際の面積を考えて足し合わせるという初等的な論法で完全に理解できる。これほどの大道具を用いて示す必要のある結果ではなかった。

[*45] Sir George Gabriel Stokes (1819–1903) アイルランドに生まれイギリスで活躍した数学者、物理学者。政治家、神学者でもあった。数学におけるストークスの定理（の原型）だけでなく、流体力学に基礎方程式であるナビエ=ストークス方程式、光のストークス散乱など物理の分野にも重要な貢献がある。

理が大いに役立つのだ。そう思うと、大学での物理の学習もかなり本格的なところに入ってきたことが実感できるだろう。

10.6.1 節で簡単な場合にストークスの定理を示し、10.6.2 節で一般的な定理を示す。10.6.3 節では、この定理の簡単な応用を議論する。

10.6.1　ストークスの定理 — 簡単な場合

まず、もっとも簡単な場合にストークスの定理を導こう。ストークスの定理の基本的なアイディアは、ここでの議論に尽きている。

任意の一回微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を考える。$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分と $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分を結びつけるのがストークスの定理だ。

まず、図 10.27 a) のように、xy 面に平行な平面の中に、四角い閉じた向きのついた道 c をとろう。向きは、右ネジをまわしたときに z 軸の正の方向に進むようにとっておく。つまり、図 10.27 では z 軸は紙面上向き

図 10.27　ストークスの定理の基本になるアイディア。a) 閉じた四角形の道 c。b) この道を中央を通る線分で二つに切り分け、左右の（閉じていない）道を c_1', c_2' と呼ぶ。本当は切り離された二つの部分にすき間はないが、図では少しあけておいた。c) 中央の線分に沿って、上向きの道 p_1 と下向きの道 p_2 をつけたす（これらも本当は重なっている）。d) c_1' と p_1 をくっつければ閉じた道 c_1 が、c_2' と p_2 をくっつければ閉じた道 c_2 が得られる（これらも本当は重なっている）。

に読者の方を向いている。

図 10.27 b) のように、四角形の真ん中あたりに線分を引いて四角形を二つに分け、さらに道 c もこの線のところで切り離す。切り離された左右の道を c_1', c_2' とする。つぎに図 10.27 c) のように、真ん中の線にぴっ

たりと重なるように二本の道を新たに付け加える。ただし、一つは上にむかうよう、もう一つは下にむかうように向きをつけておく。これらの道を p_1, p_2 と呼ぶ。さいごに図 10.27 d) のように、c_1' と p_1 をくっつけたものを c_1 とし、c_2' と p_2 をくっつけたものを c_2 とする。c_1 も c_2 も閉じた道になっている。

ここで、閉じた道 c, c_1, c_2 に沿った $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分について、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{c_1} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{c_2} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \qquad (10.6.1)$$

という関係が成り立つ。図 10.27 をよく見れば、この関係はほとんど当たり前にみえるだろう。二つの道 c_1 と c_2 には重なった部分があり、その部分での向きがちょうど逆になっているので、両方の寄与が打ち消し合って、(10.6.1) が成り立つのだ。

ややくどいが、もっとていねいな導出を書いておこう。図 10.27 に登場する五つの道について、明らかに、$c = c_1' \cup c_2'$, $c_1 = c_1' \cup p_1$ と $c_2 = c_2' \cup p_2$ が成り立つ。

$p_1 = \overline{p_2}$ だから、逆向きの線積分についての (10.2.8) より $\int_{p_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = -\int_{p_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ である。よって、線積分についての和の規則 (10.2.11) を使って、

$$\begin{aligned}
\int_c d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} &= \int_{c_1'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{c_2'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \\
&= \int_{c_1'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{c_2'} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \\
&\quad + \int_{p_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{p_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \\
&= \int_{c_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} + \int_{c_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \qquad (10.6.2)
\end{aligned}$$

となり、(10.6.1) が示される。

このような分割をどんどんくり返していこう。図 10.27 d) の c_1 と c_2 を横向きの線で、それぞれ二つの正方形状の道に分割する。四つの正方形の各々に、今までと同じ操作をほどこして、さらに四つの正方形に分割。これで図 10.28 のように十六個の正方形状の道ができる。大きな正方形の部分を除けば、必ず二つの逆向きに向いた道が重なりあっていることに注意し

図 10.28　図 10.27 のような分割をくり返し、c を多数の道 $c_1, \ldots, c_N$ の集まりに分ける。ここでも、重なる部分での道の向きはちょうど逆になっている。

よう。

この操作をどんどんとくり返し、全体が N 個の正方形状の道に分割されたとしよう。これらの道に $c_1, \ldots, c_N$ と名前をつける。次々と分割していく過程で、そのたびに関係 (10.6.1) を使うと、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \tag{10.6.3}$$

という関係が示される。図 10.28 からも明らかなように、二つの逆向きの道が重なっている部分の流れはちょうどキャンセルして打ち消し合い、大きく外側をまわる流れだけが残る、というしかけになっている。

ここで、ローテーションの心を表す (10.4.13) を使うと、

$$\int_{c_i} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \Delta \boldsymbol{a}_i \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + O((\Delta a)^{3/2}) \quad (10.6.4)$$

である。ただし、$\Delta \boldsymbol{a}_i = (0, 0, \Delta a)$ は全ての微小面に共通の面素ベクトル。もちろん Δa は小さな正方形の面積だ。これを (10.6.3) に代入すれば、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N} \Delta \boldsymbol{a}_i \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + O(N^{-1/2}) \quad (10.6.5)$$

となる。右辺に現れたのは面積分の定義 (10.5.3) そのものだ！　輪のなかにたくさんの輪を描くことで、面が浮かび上がってきたのだ。そこで、分割を限りなく

細かくする極限 $N \to \infty$ をとれば、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in c} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \quad (10.6.6)$$

という、きれいな等式が得られる。ただし、S は道 c を境界にもつような正方形状の面である。そして、図で言えば、こちら側から見えている面が表になっている。つまり、もともとの道 c の向きに右ネジをまわしたとき、裏から表にむかってネジが進むように表裏が決まっている。これは図 10.16 の場合と同じだ。

(10.6.6) の左辺はベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分、右辺はそのローテーション $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分。このように線積分と面積分を結びつけるのがストークスの定理だ。

10.6.2　ストークスの定理 — 一般の場合

前節で見たことをガイドにして、一般のストークスの定理を示そう。前節でもベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は十分に一般的だった。ここでは、閉じた道 c の形、そして c を張る面の形を一般化することになる。前節と同じ議

図 10.29　面とその境界。太い線が境界で、細い線は面の一部。いずれも薄い灰色が面の表、濃い灰色が面の裏。(a) トーラス（浮き輪の表面）の一部を切り取った面。境界は一本の閉じた道。(b) 筒のような面。境界は二本の閉じた道。(c) 境界に向きをつけるための規則。境界の側で、右ネジをまわすと面の裏から表に向かうような輪を描いてみる。

論をくり返すのも芸がないし、先ほどとは逆に進む方が一般的な議論ができるので、今度は $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分から出発する。

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意の一回微分可能なベクトル場とし、S を任意の表と裏が区別できる区分的になめらかな面[*46]とする。面 S の境界（端）を ∂S と書く。二次元的な図

[*46] 1751 ページの脚注 *32 を見よ。

形である面 S の境界 ∂S は、一般に、一次元的な道である。とくに S が有限の大きさのとき、境界 ∂S は、かならず、空集合か、いくつかの閉じた道の集まりになる[*47]。境界 ∂S も（空集合でないなら)、区分的になめらかな道だとする[*48]。図 10.29 (a), (b) を見よ。

また、これらの閉じた道に、自然に向きをつけることができる。そのためには、図 10.29 (c) のように、面の境界に近い部分に小さな向きのついた輪を描く。この輪の向きは、そちらに右ネジをまわすと面の裏から表に向かって進むように決めておく。そして、この輪が境界のところで指している方向を、境界の道の向きと定める。これによって、図 10.29 (a), (b) の面の境界にも、図のような向きがつく。確かめてみてほしい。

[*47] 境界 ∂S が始点と端点をもつ道にはなり得ないことは、いくつか絵を描いてみれば納得できるだろう。これは、「境界の境界はゼロ」という幾何学の本質的な性質の一例だ。（ぼくら三次元人にすぐわかる）もう一つの例は、任意の立体の境界（つまり、表面）が、境界をもたない閉じた面になるという事実。

[*48] 1655 ページの図 10.7 を参照。

さて、面積分の定義にしたがって、S 上での $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分を書くと、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{a}_i\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) \quad (10.6.7)$$

である。もちろん、面 S を N 個の小さな面に分割し、i 番目の面の面素ベクトルを $\Delta\boldsymbol{a}_i$ とした。

一方、(10.4.13) によれば、ローテーションの本質は、

$$\Delta\boldsymbol{a}_i\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) = \int_{c_i} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} + O(|\Delta\boldsymbol{a}_i|^{3/2}) \quad (10.6.8)$$

ということだった。ここで c_i は i 番目の微小面の境界の閉じた道である。これを (10.6.7) に代入すれば、

$$\begin{aligned}\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_{c_i} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} + O(N^{-3/2})\right\}\\ &= \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_{c_i} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \qquad (10.6.9)\end{aligned}$$

となる。ただし、$|\Delta\boldsymbol{a}_i| = O(1/N)$ を用いた。

図 10.28 のように、道 $c_1, \ldots, c_N$ を一度に並べてみたとしよう。明らかに、ほとんどの部分で、二つの道が互いに逆を向いて、打ち消しあっている。打ち消しあいがおきないのは、例外的に、S の境界と一致している部分だけだ。よって、ここでも (10.6.1) の関係をくり返し使うことで、

$$\int_{\partial S} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N} \int_{c_i} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \tag{10.6.10}$$

が得られる。これを (10.6.9) に代入すれば、目標だった次の結果が得られる。

定理 10.5 (ストークスの定理)**.** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を一回微分可能な任意のベクトル場とする。S を区分的になめらかで有界な面とし、S の境界 ∂S も（空集合でなければ）区分的になめらかであるとする。このとき、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in\partial S} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \tag{10.6.11}$$

が成り立つ。

つまり、S 上での $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分が、境界 ∂S 上での $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分と一致するということだ。最初に書いたとおり、これは $\int_a^b dx\, f'(x) = f(a) - f(b)$ という一変数関数の微分積分の基本の関係 (10.3.13) や、定理 10.2（あるいは (10.3.12)）の $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ についての積分定理の仲間にあたる。ただ、(10.3.12) では右辺が単にもとのスカラー場の二点での差になっていたのに

対して[*49]、この (10.6.11) の右辺は線積分になっていて、話がややこしい。しかし、この違いは、それぞれの状況を絵に描いてみれば、次のように、ごく自然になっとくできる。

$\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ についての積分定理 (10.3.12) では、左辺は一次元的な道の上の積分だった。右辺にでてくる二点というのは、この道の境界（端）といってよい。一次元の図形の境界だから、次元が一つさがってゼロ次元の図形、つまり点が現れた。一方、ストークスの定理 (10.6.11) では、左辺は二次元的な面の上の積分だ。そして、右辺に出てくるのは、まさに面の境界になっている。このように、幾何学的にみれば、ふたつの積分定理 10.2 と 10.5 は完璧に対応しているのだ。

ストークスの定理 (10.6.11) の特別な場合として、S が境界をもたない閉じた面だとしよう。右辺は明らか

[*49] 一変数関数 (10.3.13) でも同じこと。

にゼロだから、

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} = 0 \tag{10.6.12}$$

となる。任意のベクトル場のローテーションを、閉じた面の上で積分するとゼロ。グラディエントを閉じた道に沿って積分するとゼロという (10.4.14) を思い出そう。

また、面 S の境界 ∂S が（図 10.29 (b) のように）複数の部分（とじた道）$\partial S_1, \ldots, \partial S_n$ からなるときは、ストークスの定理 (10.6.11) は、

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial S_i} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} \tag{10.6.13}$$

となる。

10.6.3　ストークスの定理の簡単な帰結

ストークスの定理の自然な応用として、10.3.3 節で考えた、あるベクトル場がスカラー場のグラディエン

トで書けるための条件について、さらに調べてみよう。

ストークスの定理からすぐにわかるのは、もし $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がつねにゼロなら (10.6.11) の左辺は必ずゼロなので、閉じた道に沿った $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分がゼロになるということだ。定理 10.3 とあわせれば、これは次のことを意味する。

系 10.6 (ベクトル場がスカラー場のグラディエントで書ける条件 (2))**.** 一回微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がすべての点 $\boldsymbol{r}$ で $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たす[*50]とする。このとき、任意のなめらかな閉じた道 c について

$$\int_c d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{10.6.14}$$

が成り立つ。よって、定理 *10.3* の結果により、スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が存在して、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書ける。

力学や電磁気学でポテンシャルがうまく使えるのは、問題にしているベクトル場（力の場や電場）がこのような性質をもつことにもとづいているのだ。

系 10.6 は、いささか限定され過ぎていて使い勝手（がって）があまりよくない。たとえば、点電荷のつくる静電場 (10.1.4) は、電荷の位置以外では $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たすが、電荷の位置ではローテーションはきちんと定義されない。系 10.6 は使えないのだ。もう少しゆるい条件（系 10.8）が簡単に導けるので、それを議論しておこう。なお、はじめてストークスの定理を学ぶ読者は、この先は読み飛ばしてもいいだろう。

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ をベクトル場とし、空間のなかのある領域 A を除いた部分では、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成立するとしよう。つまり、このベクトル場は、領域 A 以外で rotation

---

*50 このとき、「このベクトル場は、“rotation free” だ」というのが専門家風の表現。知っておくとかっこいい。もちろん、この場合の free は「自由な」ではなく「・・・のない」という意味。最近よく耳にする「バリアフリー建築」というのと同じ用法だ。

free だ。

まず、ストークスの定理 10.5 から、次の事実が示される。

系 10.7. c を領域 A の外の区分的になめらかな閉じた道とする。c を境界にもち、領域 A に触れないような向き付け可能な区分的になめらかな面 S が（一つでもいいから）あったとする。このとき、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{10.6.15}$$

が成り立つ[*51]。

証明：ほとんど書くまでもない。ストークスの定理 (10.6.11) により $\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\, \boldsymbol{V} = \int_c d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{V}$ だが、S 上ではつねに $\mathrm{rot}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ なので左辺はゼロ。よって (10.6.15) が成り立つ。∎

[*51] なぜ c が A の外にあるという以外に面 S についてのややこしい条件が設けてあるのだろう？　先に進む前に自分で考えてみるのがいいと思う。

この結果を使えば、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ をスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ によって $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ と書き表すことができるための次のような実用的な十分条件を書くことができる。

系 10.8 (ベクトル場がスカラー場のグラディエントで書ける条件 (3))**.** 一回微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が三次元空間のなかの領域 A 以外では $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たすとする。領域 A はいくつかの (一つでもいいし、場合によっては、無限個でもよい）点と（互いに重ならない）球の集まりとする[*52]。このとき、領域 A に触れないような任意のなめらかな閉じた道 c について

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = 0 \tag{10.6.16}$$

が成り立つ。さらに、A を除く範囲で、スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が存在して $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ と書ける。

[*52] 無視していい注：もっと条件はゆるくできる。領域 A がコンパクトで、$\mathbb{R}^3\backslash A$ が単連結ならばよい。

証明：A が点や球の集まりなら、任意の閉じた道 c について、うまく A を「迂回して」c を境界にもつような面 S をつくることができることは明らかだろう[*53] (逆に、A が無限に長い直線であれば、そうはいかない。ある種の道 c をとると、それが境界になるような S は決してつくれない。どういう道か、考えてみよう)。系 10.7 を使えば (10.6.16) が示される。さいごは、定理 10.3 の証明を少し拡張し、領域 A 以外の部分で、線積分により $\varphi(\boldsymbol{r})$ を構成する。∎

問 10.6.3.a　a, b を定数とし、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (a\,x, b\,y, 0)$ を考える。このベクトル場の概略を図示し、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。このベクトル場は、スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ によって $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書けるか？　書けるなら $\varphi(\boldsymbol{r})$ を具体的に求めよ。

[*53] これが数学の本であれば、こういう当たり前の事実も証明する必要がある。こういうことを、いかにして、一点の曇りもなく数学の言葉だけで証明するか、を考えるのも楽しいことだが、ここでは、そういった深入りはしないでおこう。

系 10.8 の条件は、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がゼロでない場所や定義できていない場所があっても、使えることに注意しよう。そういう「困った場所」が領域 A の中に収まってさえいればいいのだ。

前にも書いたが、問題 10.4.2.d で示したように、点電荷のつくる静電場 (10.1.4) は電荷の位置以外では $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たす。よって、領域 A を電荷の位置そのものにとれば、それ以外の部分では $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書けることが保証される（電磁気学での書き方にあわせて、$\varphi(\boldsymbol{r})$ の定義を変え、マイナスをつけた)。もちろん、これは静電気学で学んだことであり、また、一般論を経由せずに直接の計算からもわかることだが。

もう一つの面白い例は、有限の円状の電流がつくる静磁場である。電流のある部分では、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ はゼロでないが、それ以外ではゼロ。よって、領域 A を電流の流れている部分を覆(おお)い尽くすような球にとれば、系 10.6.16 により、この球の外側では「磁気ポテンシャ

ル」$\varphi(\boldsymbol{r})$ を使って、磁場を $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ のように書き表すことができる。さて、ここで、領域 A を、電流が流れているドーナツ状の領域そのものにとる方がいいのではないか、と思うかもしれない。しかし、このアイディアには致命的な欠陥があり、この領域 A の外でポテンシャルを定めることはできない（問題 10.6.3.b)。「磁気ポテンシャル」というのは、特別な場合だけに有効な概念で、あまり自然なものとはいえないのだ。

さいごに、ストークスの定理 10.5 から簡単にでてくるおもしろい結果をもう一つ紹介しておく。

系 10.9. A を任意の領域とし、A の外では $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成り立つとする。二つの閉じた道 c と c' があり、道 c を、領域 A に触れない範囲で連続的に動かして、道 c' に変形できるとする（図 *10.30* の左図を見よ)。このとき、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{c'} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.6.17}$$

図 10.30　系 10.9 の状況と証明のアイディア。左図の道 c を、領域 A に触れずに、連続的に変形して、道 c' にすることができる。右図では、道 c' の向きを逆転した道 $\bar{c}'$ と道 c を境界にもつような面 S を示した。この面についてストークスの定理を使う。

が成り立つ。

道 c を連続的に動かすというのは、道が、たとえばゴムのような伸縮自在の素材でできていると思って、位置や形や長さを自由に変えることを言う。ただし、とちゅうでちぎったり、くっつけたりしてはいけない。また、今の場合は、変形の途中で A という領域に触れてはいけない。

静磁場についてのアンペールの法則（あるいは、時間変化しうる磁場についてのアンペール・マックスウェルの法則）を知っている読者は、系 10.9 の意味が直感的にわかるのではないだろうか。その場合、領域 A は電流密度がゼロでない領域に相当する。仮に A が無限遠から無限遠にいたる線状の電流 I の流れる領域に対応しているとすると、閉じた道 c に沿った磁場の線積分 $\int_{\boldsymbol{r}\in c} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ は $\mu_0\times$ (c が A のまわりを何周しているか) で与えられる。実は、A のまわりを同じ回数まわっている道どうしは、A に触れずに連続的に変形して移り変わりうるのだ。

系 10.9 の証明：道 c を連続的に c' に変形するときの道の軌跡をたどれば、面が定まる。これを面 S とする（図 10.30 の右図を）。道 c' の向きを逆にした道を $\bar{c}'$ と呼ぶ。面 S に適切な向きを定めてやれば、c と $\bar{c}'$ が S の境界になる。よって、ストークスの定理 (10.6.13)

より、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = \int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{\bar{c}'} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} \qquad (10.6.18)$$

となる。仮定により S は領域 A に触れないので、S 上ではつねに $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ であり、左辺はゼロ。右辺は、逆向きの線積分についての規則 (10.2.8) により、$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} - \int_{c'} d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ に等しい。よって、(10.6.17) が成り立つ。∎

問 10.6.3.b　上に書いた円状の電流のつくる静磁場の問題で、領域 A を電流を覆うようなドーナツ状の領域にとる。すると領域 A の外ではつねに $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成り立つから、系 10.8 の証明をそのままやり直せば、A を除く範囲で $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書けそうな気がする。しかし、これは嘘だ。なぜかを考えよ。ヒントがほしい人はこの文への脚注を見よ[*54]。

[*54] ヒント：系 10.8 の証明をよく考え直せ。とくに最初の方。

10.7　ダイバージェンスとガウスの定理

ベクトル場の二つ目の自然な微分であるダイバージェンスと、それに対応する積分定理であるガウスの定理を扱う。これまでの理論との関連を見失わないように、また、それぞれの概念の幾何学的な意味を直観的に把握するように努力してほしい。

10.7.1 節ではダイバージェンスを定義し、10.7.2 節で重要な恒等式をみる。つづく 10.7.3 節と 10.7.4 節でガウスの定理を証明し、10.7.5 節でダイバージェンスの定義の微妙な点を議論する。10.7.6 節では、応用として、逆二乗のベクトル場についてのガウスの法則を扱う。

10.7.1　ベクトル場のダイバージェンス

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の各成分が x, y, z について二回以上微分可能とする[*55]。S を任意の区分的になめらかな閉じた面（つまり、境界のない面）とする。いつもどおり、外側を表とする。

面積分 $\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}$ は、「閉じた面 S をとおって、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がどの程度わき出しているか」を表していると考えることができる。ローテーションのときと同じように、「空間の一つの点で、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がどの程度わき出しているか」をはかる量をつくってみよう。

空間の中の点 $\boldsymbol{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を固定する。S を、点 $\boldsymbol{r}_0$ を中心にもつ一辺が $2a$ の立方体の表面とする。立方体の辺は直交座標の座標軸のいずれかと平行にとっておく。面積分 $\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}$ を求めたい。S には六つの

[*55] ここでも一階の導関数が連続ならば十分。

面がある。xy 面に平行な面のうち z 軸の正の側にあるものを S_1、もう一方を S_2 とする（こういうのは、読みながら自分で簡単な絵を描こう）。yz 面に平行な面 S_3, S_4、zx 面に平行な面 S_5, S_6 も同じように定める。もちろん

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{6}\int_{S_i} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.7.1}$$

なので、各々の面 S_i について面積分 $\int_{S_i} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めればいい。

面 S_1 を座標で表すと、$x_0-a \le x \le x_0+a$, $y_0-a \le y \le y_0+a$, $z = z_0+a$ となる。面 S_1 上の積分は、10.5.3 節の正方形状の面での積分とまったく同様にして、二重積分になおすことができる。つまり、x, y が動く範囲を、それぞれ Δx, Δy の幅の区間に分割すれば、S_1 は面素ベクトル $\Delta\boldsymbol{a} = (0, 0, \Delta x\,\Delta y)$ をもつ微小面の集まりに分割される。$\Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) = \Delta x\,\Delta y\,V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r}_i)$

の和を積分になおせば、

$$\int_{S_1} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{x_0-a}^{x_0+a} dx \int_{y_0-a}^{y_0+a} dy\, V_{\mathrm{z}}(x,y,z_0+a) \tag{10.7.2}$$

となる。面 S_2 もほぼ同様だが、今度は面の表側が z 軸の負の方を向いているから面素ベクトルは $\Delta\boldsymbol{a} = (0,0,-\Delta x\,\Delta y)$ となる。よって、面積分は、

$$\int_{S_2} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = -\int_{x_0-a}^{x_0+a} dx \int_{y_0-a}^{y_0+a} dy\, V_{\mathrm{z}}(x,y,z_0-a) \tag{10.7.3}$$

と書ける。そこで、S_1 と S_2 を合わせた部分について

の面積分をまず計算すると、

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_1\cup S_2} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \\
&= \int_{x_0-a}^{x_0+a} dx \int_{y_0-a}^{y_0+a} dy\,\{V_{\mathrm{z}}(x,y,z_0+a) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - V_{\mathrm{z}}(x,y,z_0-a)\} \\
&= \int_{x_0-a}^{x_0+a} dx \int_{y_0-a}^{y_0+a} dy\,\{2a\,\frac{\partial V_{\mathrm{z}}(x,y,z_0)}{\partial z} + O(a^2)\} \\
&= \int_{x_0-a}^{x_0+a} dx \int_{y_0-a}^{y_0+a} dy\,\{2a\,\frac{\partial V_{\mathrm{z}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} + O(a^2)\} \\
&= (2a)^3\,\frac{\partial V_{\mathrm{z}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial z} + O(a^4) \qquad (10.7.4)
\end{aligned}
$$

となる。二行目から三行目にうつるとき、x, y について x_0, y_0 のまわりでテイラー展開し、初項だけを残した。三行目から四行目にうつるとき、x, y についての積分を実行したわけだが、被積分関数がすでに定数なので、積分は「空回り」して区間の長さを出してくるだけだ。

面積分 $\int_{S_3\cup S_4} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$, $\int_{S_5\cup S_6} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ も同様に評価

できて、x, y, z を適切に入れ替えた結果がでることは明らかだろう（明らかでなければ、やってみよう）。(10.7.1) を思い出して、これらすべてを足しあげれば、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = (2a)^3\left\{\frac{\partial V_{\mathrm{x}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial x} + \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial y} + \frac{\partial V_{\mathrm{z}}(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\right\} + O(a^4) \tag{10.7.5}$$

という、意味ありげな結果になる。とくに、主要な項の係数 $(2a)^3$ が、S で囲まれる立方体の体積になっていることは、何か自然な量が得られていることを示唆（しさ）している。$\{\cdots\}$ の中身の量は、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}_0$ においてどの程度「わき出して」いるかを表しているとみてよい。

そこで 10.4.2 節のローテーションの一般的な定義を思い出し、この「わき出し」の考え方を一般化しておこう。わき出しを考えたい点 $\boldsymbol{r}$ を固定する。$\boldsymbol{r}$ を内部にもつような閉じた面 S をとり、S が囲む領域の体積を Δv とする。点 $\boldsymbol{r}$ におけるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の**ダイ**

バージェンス (divergence) あるいは**わき出し**を、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} \qquad (10.7.6)$$

と定義する。ただし、極限は、S を、形を保ちながら、$\boldsymbol{r}$ にむかって限りなく縮小することを意味する。さらに (10.7.5) の計算結果から、ダイバージェンスを、具体的に、

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \\ &= \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial V_{\mathrm{z}}(x,y,z)}{\partial z} \\ &= \nabla \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \qquad (10.7.7) \end{aligned}$$

と書き表すことができる。もちろん $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ はナブラ演算子 (10.3.3) で、ベク

トル場を $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (V_{\mathrm{x}}(x,y,z), V_{\mathrm{y}}(x,y,z), V_{\mathrm{z}}(x,y,z))$ と成分表示した。

方向への依存性を考えなくてはいけなかったローテーションとはちがって、ダイバージェンスは、もともと閉じた面からのわき出しという方向と無関係な量だったので、スカラー量になる。とくに、ナブラを使って (10.7.7) のように書けば、まさにベクトル ∇ とベクトル $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の内積によってスカラーがつくられていることがはっきりとわかるだろう。ローテーションは (10.4.12) のように、∇ と $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ のベクトル積の形に書けた。つまり、二つのベクトルの自然な積として、スカラーになる内積とベクトルになる外積があったのに対応して、ベクトル場の自然な微分（つまり、∇ との積）として、ダイバージェンスとローテーションがあるのだ。

さいごに、グラディエントについての (10.3.5) やローテーションについての (10.4.13) に相当する、「ダイバージェンスの心」を一行で表す式を書いておこう。

それは、定義 (10.7.6) をにらみながら、立方体の表面からのわき出しについての (10.7.5) を一般化した

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \Delta v\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + O((\Delta v)^{4/3}) \tag{10.7.8}$$

である。もちろん、S は $\boldsymbol{r}$ を囲む小さな閉じた面で、Δv は S が囲む領域の体積。つまり、ダイバージェンスは単位体積あたりのわき出しと言ってよい。

話をどんどん進めてきたが、今のところダイバージェンスがきちんと定まって (10.7.7) と書けることが確かめられたのは、定義 (10.7.6) や「心」(10.7.8) で S が立方体の表面の場合だけだ。予想されるように、これらの関係は一般の形の閉じた面について成り立つ。この事実は、10.7.5 節で、ガウスの定理の応用として示

すことにしよう[*56]。

問 10.7.1.a　S を点 $\boldsymbol{r}_0$ を中心とした半径 a の球の表面とする。このとき、(10.7.6) 右辺の極限を直接計算し、(10.7.7) が成り立つことを確かめよ。もちろん、10.5.3 節の球面上の面積分のテクニックがそのまま役に立つ。

問 10.7.1.b　点電荷のつくる電場 (10.1.4) について、$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を計算せよ。なお、原点は微分が定義できないので除外する。電場はいかにも「わきでている」のだが、なぜこのような計算結果になるのだろう？

問 10.7.1.c　(10.2.17) の $\boldsymbol{V}(x, y, z)$、問 10.2.5.a の $\boldsymbol{U}(x, y, z)$ について、ダイバージェンスを計算せよ。こ

[*56] よって、議論を厳密に進めたい人は、ダイバージェンスについての (10.7.6) や (10.7.8) は S が立方体の表面の場合に限定されていると思って読んでほしい。その限定された定義だけを用いてガウスの定理を示した後、これらがより一般の S について成り立つことがわかる、という筋書きだ。

の場合も微分可能でない点があれば除く。

10.7.2　$\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0$ という恒等式

10.4.3 節の $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$ と類似した、ベクトル場の微分についての恒等式をみておこう。この節も、やたら短いが、意味は大きい。

ストークスの定理 10.5 の特別な場合として、(10.6.12) で見たように、任意の閉じた面 S について、

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{V} = 0 \tag{10.7.9}$$

が成り立つ。これをダイバージェンスの定義 (10.7.6) に代入すれば、ただちに、

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{10.7.10}$$

となる。これは任意の一回微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ について成り立つのだから、微分演算子としての恒等式

$$\boxed{\mathrm{div}\,\mathrm{rot} = 0 \qquad (10.7.11)}$$

が成立するといっていい。

もちろん、具体的な直交座標系でのダイバージェンスの表現 (10.7.7) とローテーションの表現 (10.4.11) を使っても、恒等式 (10.7.11) は簡単に確かめられる。また、ナブラを使った表現 (10.7.7), (10.4.12) では $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ である。スカラー三重積の公式 (6.3.79) を $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ という形にして用いれば、$\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (\nabla \times \nabla) \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ なので、同じベクトルのベクトル積はゼロという性質 $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v} = 0$ から恒等的に $\nabla \cdot \nabla \times \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ となることが納得できる。

図 10.31　ガウスの定理の証明の出発点。a) 立方体の表面 S を平面で二つに切り分ける。b) 立体は描きづらいので断面図。b1) S を二つの面 S_1', S_2' に分割したところ。b2) 切った断面に沿って二つの面 P_1, P_2 を新しく置く。これらは互いに表の面を向き合わせにしているとする。b3) S_1' と P_1、S_2' と P_2 をくっつけると、それぞれ、S_1 と S_2 という閉じた面になる。なお、本当はくっついている面も、わかりやすいよう、わざと隙間をあけて描いてある。

10.7.3　ガウスの定理 — 簡単な場合

まず、もっとも簡単な場合にガウスの定理を発見的に示そう。ストークスの定理の導出が「腑(ふ)に落ちてい

る」読者には、ここからの展開は完璧に予想可能だろうと思う。

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意の一回微分可能なベクトル場とする。辺の長さが L の立方体をとり、その表面を S とする。いつも通り、外側を S の表としておく。

この立方体を図 10.31 (a) のように yz 面と平行な面で、ちょうど半分に切り分ける。これによって、図 10.31 (b1) のように、面 S は二つの面 S_1', S_2' に分かれる。面 S_1', S_2' はもはや閉じた面ではない。次に、図 10.31 (b2) のように、立方体を切った切り口に沿って、二枚の新しい面 P_1, P_2 をぴったりと重ねておく。このとき、これらの面にも向きをつけ、互いに表面をくっつけて重なっているとしよう。さいごに、図 10.31 (b3) のように、S_1' と P_1、S_2' と P_2 をそれぞれくっつけて、面 S_1, S_2 をつくる。面 S_1, S_2 は、どちらも、境界をもたない閉じた面になる。以上を一言でいうと、閉じた面 S を二つに切り、切り口を修復して二つの閉じた面 S_1, S_2 をつくった。細胞分裂のよう

な感じといってよいか。

ここで、P_1 と P_2 はぴったりと重なっていて、表裏だけが逆になっていることから、$\int_{P_1} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = -\int_{P_2} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ が成り立つ。よって、面積分の和の規則 (10.5.5) から、

$$\begin{aligned}\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} &= \int_{S_1'} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{S_2'} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}\\ &= \int_{S_1'} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{S_2'} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}\\ &\quad + \int_{P_1} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{P_2} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}\\ &= \int_{S_1} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} + \int_{S_2} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \qquad (10.7.12)\end{aligned}$$

がいえる。つまり、S を二つの閉じた面 S_1, S_2 に分けても、わき出しの合計は変わらない。

あとはこの関係をひたすらくり返して使えばよい。

xy 面、zx 面について平行な二つの面で同じように立方体を切り分ければ、一辺が $L/2$ の小立方体が八つ得られる。これら小立方体の表面を $S_1\ldots,S_8$ とすると、$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ は、$\int_{S_i} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ を $i=1,\cdots,8$ について足し

あげたものに等しい。

あとは同じ分割をくり返し、もとの立方体を N 個の小さな小さな立方体の集まりに分割する。これらの表面を $S_1, \ldots, S_N$ とすると、(10.7.12) をそのまま一般化した

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} \tag{10.7.13}$$

が成り立つ。

ここで (10.7.8) を思い出すと、

$$\int_{S_i} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \Delta v \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + O((\Delta v)^{4/3}) \tag{10.7.14}$$

がダイバージェンスの「心」だった。Δv は小さな立方体の体積、$\boldsymbol{r}_i$ は面 S_i で囲まれる立方体の中心の位置である。(10.7.14) を (10.7.13) に代入し、$\Delta v = O(1/N)$ に注意すれば、

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N} \{\Delta v \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + O(N^{-4/3})\} \tag{10.7.15}$$

が成り立つことがわかる。ここで、右辺の和は、いかにも積分に移行しそうな顔をしている。小立方体の体積 Δv とその小立方体の位置でのスカラー場 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の値をかけたものを、すべての小立方体について足しあげている。これは線積分でも面積分でもなく、大きな立方体の内部の領域 D における体積積分になっている。そこで、これまでと同じような記号を使い、体積積分を

$$\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\,\varphi(\boldsymbol{r}) := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta v\ \varphi(\boldsymbol{r}_i) \quad (10.7.16)$$

と定義しよう（より詳しくは次の節を見よ）。この書き方を使えば、(10.7.15) で $N \nearrow \infty$ としたものを、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\ \operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \quad (10.7.17)$$

と書くことができる。つまり、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分と、$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の体積積分が等しいのだ。これがガウスの定理の特別な場合である。

ところで、体積積分は座標変数による三重積分としても書けることに注意しておこう。簡単のため、もとの立方体が $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq L$, $0 \leq z \leq L$ と表されるとしよう。立方体の分割に対応して、座標変数 x, y, z が動く範囲 $[0, L]$ を幅 ε の微小区間に分割する。すると、(10.7.15) 右辺の和は、

$$\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta v \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\mathrm{x}} \sum_{\mathrm{y}} \sum_{\mathrm{z}} \varepsilon^3 \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V}(x, y, z) \\
&= \int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V}(x, y, z) \qquad (10.7.18)
\end{aligned}$$

と書き換えられる。ただし、一行目右辺の和は、x, y, z それぞれについて分割した小区間の代表点についてとる。

10.7.4　ガウスの定理 — 一般の場合

一般のガウスの定理を示す前に、前節に（自然に）顔を出したスカラー場の体積積分を一般的に定義しておく。

$\varphi(\boldsymbol{r})$ を任意のスカラー場とし、D を三次元空間のなかの任意の有限の領域とする。領域 D を切り分けて、小さな領域 $d_1, \ldots, d_N$ の集まりとして表す。ただし、各々の小領域は半径 ε の球の内側に入るようにとる。小領域 d_i の体積を Δv_i、中心の位置を $\boldsymbol{r}_i$ とする。このとき、領域 D の内部でのスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の**体積積分** (volume integral) を

$$\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N} \Delta v_i\,\varphi(\boldsymbol{r}_i) \qquad (10.7.19)$$

と定義する。言うまでもないだろうが、左辺の形は、「$\boldsymbol{r}$ という点が領域 D の中を動きまわるとき、各点において、その点のまわりの微小体積 $dv(\boldsymbol{r})$ とその点で

の場の値 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の積をとり、それをすべての点について足しあげよ」という風に読む。例によって、省略して $\int_D dv\,\varphi$ とも書こう。

なお、このような一般の場合にも、体積積分を座標変数の三重積分で、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\int\int_{(x,y,z)\in D} dx\,dy\,dz\,\varphi(x,y,z) \tag{10.7.20}$$

と書くことができる。ただし、一般には、積分範囲は x, y, z の三つが微妙にからみあう条件で表されるので、積分のあつかいは簡単ではない。

ガウスの定理を示すため、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とし、D を任意の有限な領域とする。話を簡単にするため、D は内部に穴のないひとかたまりの領域だとしよう[*57]。D の表面を S とする。S はかならず一つの閉じた（もちろん向き付け可能な）面になる。いつも

[*57] この仮定を除いて D の内部に穴を許すのも簡単だが、そのような拡張をしても、応用上とくに便利にはならない。

図 10.32　三次元空間の中の領域 D（左）。空間を間隔 ε の格子状に分割し、領域 D を微小立方体の集まりに分ける。

通り、外側を S の表と定めておこう。

いま、三次元空間を表す直交座標 x, y, z のそれぞれが動く範囲を ε ずつの小区間に分割し、それに応じて、三次元空間を体積 ε^3 の微小立方体の集まりに分割する。これら微小立方体のうち、領域 D に完全に含まれるものを $d_1, \ldots, d_N$、部分的に D に含まれるもの（つまり、D の境界にひっかかっているもの）を $\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_M$ とする。また、d_i の表面を s_i、$\tilde{d}_i$ の表面を $\tilde{s}_i$ と呼ぶ。

立体 D が $d_1, \ldots, d_N, \tilde{d}_1, \tilde{d}_M$ に過不足なく切り分けられたので、(10.7.13) とまったく同様に、わき出しの和についての関係

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N} \int_{s_i} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} + \sum_{i=1}^{M} \int_{\tilde{s}_i} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} \quad (10.7.21)$$

が成り立つ。

(10.7.21) の右辺の第二項は、領域 D の表面近辺のみに関係する量なので、小さいのではないかと期待される。実際、この節の最後で示すように、

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sum_{i=1}^{M} \int_{\tilde{s}_i} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = 0 \qquad (10.7.22)$$

であり、この第二項は無視してしまってよい。第一項のあつかいは、前節の簡単な場合とまったく同じ。つまり、ダイバージェンスの「心」(10.7.8)（あるいは、

(10.7.14)）を代入して、

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{s_i} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N}\{\varepsilon^3\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + O(\varepsilon^4)\} \tag{10.7.23}$$

だから、$\varepsilon^3 = \Delta v$ に注意して、$\varepsilon \to 0$ の極限をとれば、これは体積積分 $\int_D dv\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ になる。よって、(10.7.21) から目標だった一般の**ガウスの定理** (Gauss' theorem) あるいは**ガウスの発散定理** (divergence theorem of Gauss) が得られる。

定理 10.10 (ガウスの定理)**.** $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意の一回微分可能なベクトル場とする。D を有限な領域とし、その境界 S は区分的になめらかとする。このとき、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \tag{10.7.24}$$

が成り立つ。

これが、われわれにとって三つ目の、場についての積分定理になる。ストークスの定理（定理 10.5, p.1808）のあとの注意をもう一度読んでほしい。このガウスの定理では、左辺は三次元的な領域の中での積分、右辺はその領域の境界である二次元的な面の上での積分になっている。これまで二つの積分定理とみごとに対応している。

■簡単な応用　ガウスの定理から簡単に得られる結果を二つ示しておこう。まず、次の結果はあまりに自明なので、証明は必要ないだろう。

系 10.11. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ があり、ある閉じた面 S の内側の任意の点で $\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成り立つとする。このとき、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = 0 \tag{10.7.25}$$

が成り立つ。

次の結果もほぼ当たり前だが、意外と使いものになる。

系 10.12. ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がある。閉じた面 S_1, S_2 があり、S_1 は完全に S_2 の内側に入っているとしよう。そして、S_1 と S_2 のあいだの領域では $\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成り立つとする。このとき、

$$\int_{S_1} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{S_2} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.7.26}$$

が成り立つ。

証明：S_1 に囲まれる領域を D_1、S_2 に囲まれる領域を D_2 とする。S_1 と S_2 のあいだの領域を $D_2 \backslash D_1$ と書く。ガウスの定理 (10.7.24) より、

$$\begin{aligned}
&\int_{S_2} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} - \int_{S_1} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} \\
&\quad = \int_{D_2} dv \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V} - \int_{D_1} dv \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V} \\
&\quad = \int_{D_2 \backslash D_1} dv \ \mathrm{div}\, \boldsymbol{V} = 0 \qquad (10.7.27)
\end{aligned}$$

である。▮

■証明の仕上げ　さいごに、(10.7.22) のように D の境界にひっかかる部分の寄与が消えることを示しておく必要がある。これは、いささか技術的になるから、とくに気にならない人はこの節の残りを読み飛ばしてよい。

表面直下の微小立体 $\tilde{d}_i$ を一つとって、これを単に $\tilde{d}$ と呼ぼう。D の表面が区分的になめらかなので、$\tilde{d}$ の表面は多面体であるとしてよい[*58]。多面体の各面の面素ベクトルを $\Delta\boldsymbol{a}_1, \ldots, \Delta\boldsymbol{a}_n$ とする。$\tilde{d}$ の表面が閉じた多面体であることから、$\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i = 0$ が成り立つ[*59]。$\tilde{d}$ の表面 $\tilde{s}$ での面積分は、

$$\int_{\tilde{s}} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}}_i) + O(\varepsilon^2)$$

---

*58 まじめに言えば、多面体に置き換えた場合の誤差が小さいということ。

*59 証明（ちょっといい加減だけど）：閉じた面であるということは、任意の方向から（射影して）見たとき、表側の面積と裏側の面積が等しいということ。今、$\boldsymbol{n}$ 方向から見たときの、面 i の（符号付きの）面積は $\Delta\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{n}$ だから、$\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{n} = 0$。これが任意の $\boldsymbol{n}$ について成り立つので、$\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i = 0$。

と評価できる。ただし、$\bar{\boldsymbol{r}}_i$ は面 i の中心の点。さらに、微小立体 $\tilde{d}$ の中心点を $\bar{\boldsymbol{r}}$ として、先ほどの $\sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i = 0$ という関係を用いると、

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}}) + \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i \cdot \{\boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}}_i) - \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}})\} \\
&\quad + O(\varepsilon^2) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Delta\boldsymbol{a}_i \cdot \{\boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}}_i) - \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}})\} + O(\varepsilon^2) \qquad (10.7.28)
\end{aligned}
$$

となる。ここで、$|\Delta\boldsymbol{a}_i| = O(\varepsilon^2)$, $|\boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}}_i) - \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{r}})| = O(\varepsilon)$ だから、$\int_{\tilde{s}} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = O(\varepsilon^3)$ である。表面の微小立体の個数 M は $O(1/\varepsilon^2)$ だから、

$$
\sum_{i=1}^{M} \int_{\tilde{s}_i} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = O(\varepsilon) \qquad (10.7.29)
$$

となり、(10.7.22) がいえる。

問　10.7.4.a　a, b, c を定数とし、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (ax, by, cz)$ を考える。また $R > 0$ を定数とし、$\sqrt{x^2 + y^2} \leq R$, $z = 0$ および $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$

で定まる（底にフタのある）半球面を S とする。面積分 $\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$ を求めよ。

10.7.5　再び、ダイバージェンスの定義について

10.7.1 節でダイバージェンスを導入したとき、もっとも簡単な設定で、微小立方体の表面からのわき出しだけを考えた。このため、今のところ（真面目に考えれば）ダイバージェンスの定義 (10.7.6) やダイバージェンスの「心」(10.7.8) は、S が立方体の表面の場合にしか正しくない。この点を補って、これらの関係が一般の面 S について成り立つことを示そう[*60]。

ローテーションの場合は、類似の問題に 10.4.4 節をまるまる使わなくてはならなかったが、ここでは、話はずっと簡単だ（というより、下を見ればわかるように、一瞬でおわる）。実は、唯一のめんどうな議論は、

[*60] 初学者はこの節はとばしてもよいだろう。

ガウスの定理を証明した 10.7.4 節の最後にすませてあるのだ。

$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ は連続関数とする。点 $\boldsymbol{r}$ を固定し、$\boldsymbol{r}$ を囲む任意の閉じた面 S をとる。S で囲まれる領域を D とすると、ガウスの定理 (10.7.24) より、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \int_D dv\ \operatorname{div}\boldsymbol{V} \tag{10.7.30}$$

である。ここで、S がどんどん $\boldsymbol{r}$ にむかって小さくなっていくと、領域 D が $\boldsymbol{r}$ に向かって縮むので、$\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の連続性から、

$$\int_D dv\ \operatorname{div}\boldsymbol{V} = \Delta v\ \operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + O(\varepsilon^4) \tag{10.7.31}$$

がいえる。もちろん Δv は領域 D の体積であり、ε は S や D の差し渡しの長さ[*61]である。

(10.7.31) は、ダイバージェンスの「心」(10.7.8) そのものである。ダイバージェンスの定義 (10.7.6) も両辺を Δv で割れば示される。

[*61] D を含むような球の直径の最小値が ε と定義すればよい。

10.7.6　逆二乗のベクトル場についてのガウスの法則

ガウスの定理の応用として、静電気学で学ぶガウスの法則と、その基本的な利用法をみておこう[*62]。

■場の源が一点の場合　今までの一般のベクトル場についての考察とはうってかわって、

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \Psi_0 \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} \tag{10.7.32}$$

という具体的なベクトル場を考えよう。Ψ_0 は場の「源」の大きさを表す定数、$\boldsymbol{r}_0$ は定まった位置（ベクトル）

[*62] 先を急ぐ読者はこの節はとばしてもよいだろう。これは電磁気学でかならず学ぶ話題である。ただし、以下の内容を、ダイバージェンスやガウスの定理を知る前に、面積分の知識だけで議論するのが電磁気学での標準の教え方だ。ここでは、もっと高級な数学の道具を知ってから、同じ内容を見直すという趣向にしてみた。そういう意味で、すでに電磁気でのガウスの法則を知っている読者にとっても、同じ内容を「逆から」みるのは面白いだろうと思う。

だ。これは（この章の最初の方の 10.1.2 節にもでてきたが)、点 $\boldsymbol{r}_0$ を中心にした、外向きの、$\boldsymbol{r}_0$ からの距離の逆二乗に比例する大きさをもつベクトル場である。点電荷のつくる静電場はこの形をしているし、空間に固定された質点がつくりだす重力場も同じ形だ。場の「源」の大きさ Ψ_0 は、前者では $q\,(4\pi\varepsilon_0)^{-1}$、後者では Gm である。

まず、ダイバージェンスの座標表示 (10.7.7) を使ってまじめに計算すると、$\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{r}_0$ なら $\operatorname{div} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ であることが示される（これは、基本的には問 10.7.1.b の計算)。よって系 10.11 から、もし閉じた面 S の内部に $\boldsymbol{r}_0$ が入っていなければ、

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = 0 \tag{10.7.33}$$

となる。

次に、$\boldsymbol{r}_0$ が閉じた面 S の内部にあるとしよう。$\tilde{S}$ を $\boldsymbol{r}_0$ を中心とした球面とする。半径を十分に小さくとって、$\tilde{S}$ が S の内部に入るようにしよう。すると、$\tilde{S}$ と

S の間の領域では $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ が成り立つ。よって系 10.12 から

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{\tilde{S}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \tag{10.7.34}$$

がいえる。ところで、球面での面積分については、きわめて簡単な計算から

$$\int_{\tilde{S}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = 4\pi\,\Psi_0 \tag{10.7.35}$$

がいえる[*63]。

そこで、(10.7.33) と (10.7.34) をあわせて、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}_0 \text{ が } S \text{ の外にあるとき} \\ 4\pi\,\Psi_0 & \boldsymbol{r}_0 \text{ が } S \text{ の内部にあるとき} \end{cases} \tag{10.7.36}$$

[*63] これは、10.5.3 節の静電場 (10.5.16) の例で、$a = 0$ とした場合に相当する。すべての微小面において面素ベクトル $\Delta\boldsymbol{a}_i$ とその場でのベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i)$ が平行になるので、面積分の計算は極端に簡単になる。まだ理解していなかった読者は、自分で計算してみてほしい。

が示された。任意の形の面 S の上での面積分の値が、$\boldsymbol{r}_0$ が内部にあるか外にあるかだけで、ぴたりと決まってしまう、という驚くべき、そして、美しい結果だ。もちろん、逆二乗型のベクトル場だけで成立する。これが、場の源が一点の場合のガウスの法則である。10.5.3 節の具体的な（そして、相当に面倒な！）計算は、この法則の（部分的な）検証だったといえる。

■場の源が複数の点の場合　次に、(10.7.32) のようなベクトル場をたくさん重ね合わせた（足し合わせた）ベクトル場

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{V}_i(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \Psi_i \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \qquad (10.7.37)$$

を考えよう。各々の $i = 1, \ldots, N$ について、Ψ_i は定数、$\boldsymbol{r}_i$ は定まった位置である。

S を任意の閉じた面とする。ただし、点 $\boldsymbol{r}_1, \ldots, \boldsymbol{r}_N$ は S の表面上に乗っていないとする。

このとき、各々の $\boldsymbol{V}_i(\boldsymbol{r})$ については、(10.7.36) がそ

のまま使えて、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}_i = \begin{cases} 0 & \boldsymbol{r}_i \text{ が } S \text{ の外にあるとき} \\ 4\pi\,\Psi_i & \boldsymbol{r}_i \text{ が } S \text{ の内部にあるとき} \end{cases} \tag{10.7.38}$$

がいえる。明らかに

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \sum_{i=1}^{N}\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}_i \tag{10.7.39}$$

なので、(10.7.38) を足しあげると、次のきれいな結果が得られる。

系 10.13 (ガウスの法則 (1))**.** ベクトル場 (10.7.37) と閉じた面 S について、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 4\pi \sum_{i\,:\,\boldsymbol{r}_i \text{ が } S \text{ の内部}} \Psi_i \tag{10.7.40}$$

が成り立つ。

もちろん (10.7.40) の右辺の和は条件を満たす i についてとる。面積分は、面の内部の「源」の総量だけで決まるということだ。

■場の源が連続に分布している場合　これまでは、逆二乗のベクトル場をつくる「源」が点に集中している場合をあつかってきたが、さいごに、「源」が空間に連続的に分布している場合をみておこう。静電気学でいえば、連続的な電荷分布を考えること、重力でいえば、連続な質量の分布を考えることに相当する。すべての物質は分子や原子からできているとはいえ、マクロな系をマクロなスケールから見るかぎりは、このような連続的な記述が十分に正確で役に立つ。

逆二乗ベクトル場をつくる源（上の例では、電荷密度や質量密度に比例する量）の密度を $\Psi(\boldsymbol{r})$ と書く。$\Psi(\boldsymbol{r})$ はスカラー場である。

まず、場の源の密度 $\Psi(\boldsymbol{r})$ がどのようなベクトル場をつくるかを調べよう。これには、場の源が点の場合の知識と、次のような**連続極限** (continuum limit) と

いう手続きを用いるとよい。

簡単のため、ある有限の領域 $\bar{D}$ の外では $\Psi(\boldsymbol{r}) = 0$ と仮定する。まず小さな $\varepsilon > 0$ をとり、座標 x, y, z を幅 ε の区間に分割することで、三次元の空間を体積 ε^3 の微小立方体の集まりに分ける。これら微小立方体のうち、領域 $\bar{D}$ に含まれるものと、領域 $\bar{D}$ と少しでも交わっているものを拾い出し、それらに $i = 1, \ldots, N$ と名前をつける。微小立方体 i の中心の位置を $\boldsymbol{r}_i$ と書く。

そして、場の源が連続に分布している問題のかわりに、各々の $i = 1, \ldots, N$ について、点 $\boldsymbol{r}_i$ に $\Psi_i = \varepsilon^3\,\Psi(\boldsymbol{r}_i)$ という点状の源がある、という問題を考える。この場合につくられるベクトル場は (10.7.37) だから、今の記号で書き直すと、

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon^3\,\Psi(\boldsymbol{r}_i)\,\frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \tag{10.7.41}$$

である。また、この場合のガウスの法則 (10.7.40) も書

き直しておくと、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = 4\pi \sum_{i\,:\,\boldsymbol{r}_i \text{ が } S \text{ の内部}} \varepsilon^3\,\Psi(\boldsymbol{r}_i) \qquad (10.7.42)$$

となる。

ここで、(10.7.41) と (10.7.42) をよく見ると、いかにも体積積分に移行してくれといわんばかりの姿をしている。そこで、$\varepsilon \to 0$ の極限をる。これによって、いったんはバラバラの点の集まりで近似した場の源が再び連続な分布になる。これが連続極限だ。

体積積分の定義を思い出すと、$\varepsilon \to 0$ ではベクトル場を決める (10.7.41) は、

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}'\in\mathbb{R}^3} dv(\boldsymbol{r}')\,\Psi(\boldsymbol{r}')\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} \qquad (10.7.43)$$

という形になる。これはベクトル場の体積積分だが、その意味は明らかだと思う[*64]。ここで $\boldsymbol{r}$ は場の値をは

[*64] 体積積分の場合、積分される量に微小体積 Δv をかけたものを足しあわせる。微小体積 Δv はスカラーだから、スカラーにもベクトルにも自然にかけることができる。

かる点として左辺で引数になっているので、積分変数を $\boldsymbol{r}'$ にした。積分範囲はすなおには $\bar{D}$ の内部にとるべきだが、$\bar{D}$ の外では被積分変数がゼロなのだから、積分範囲を全空間 $\mathbb{R}^3$ に拡張した。

ガウスの法則 (10.7.42) についても同様の連続極限をとれば、以下のような、場の源が連続に分布している場合のガウスの法則が得られる。

系 10.14 (ガウスの法則 (2))**.** 任意の閉じた面 S の上でのベクトル場 (10.7.43) の面積分について

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 4\pi\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\,\Psi(\boldsymbol{r}) \tag{10.7.44}$$

が成り立つ。ただし D は S の内部の領域。

(10.7.44) の右辺は、静電気学の場合には領域 D 内部の全電荷を ε_0 で割ったものであり、重力の問題では領域 D 内の全質量に $4\pi G$ をかけたものになる。

■球対称な分布のつくるベクトル場　ガウスの法則（系 10.14）をつかって、場の源が球対称に分布している場合のベクトル場を決定しよう。抽象的なベクトル解析の威力が発揮される応用例だ。

ベクトル場 (10.7.43) の元になっている密度 $\Psi(\boldsymbol{r})$ が、ある固定された点 $\boldsymbol{r}_0$ のまわりに球対称に分布しているとしよう。つまり、$\Psi(\boldsymbol{r})$ の値は $\boldsymbol{r}$ と点 $\boldsymbol{r}_0$ との距離だけによって決まる。これを式で表現すると、ある一変数関数 $\psi(r)$ があって、$\Psi(\boldsymbol{r}) = \psi(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|)$ と書けるということだ。よって、(10.7.43) にこの形を代入すれば、考えるベクトル場は、

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}'} dv(\boldsymbol{r}')\, \psi(|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}_0|)\, \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \qquad (10.7.45)$$

となる。いくら球対称性を仮定したとはいえ、(10.7.45) は複雑なベクトル場の三次元的な積分であり、そう簡単に計算できる気はしない。実際、ニュートン[*65]は、

[*65] 278 ページの脚注 *1 を見よ。

球対称な質量分布（たとえば、地球）のつくる重力を求めるため (10.7.45) の積分を計算する必要にせまられた。これは、積分の定式化すらなかったニュートンの時代には圧倒的な難問で、ニュートンは密度が一定の場合にかぎった上でも何年もかけて非常に困難な和の計算をおこなったという[*66]。これから見るように、抽象的な定式化によってガウスの法則を得たことにより、このニュートンを悩ませた問題は実に簡単に解決できるようになった。

ベクトル場 (10.7.45) は、明らかに、点 $\boldsymbol{r}_0$ を中心にした任意の回転について不変である。これだけでベクトル場の形がかなり決まってしまう。ベクトル場の大きさは点 $\boldsymbol{r}_0$ からの距離だけによるはずだ。また、ベクトル場の向きは点 $\boldsymbol{r}_0$ から放射状に外に向かうか内に向かうかしかあり得ない。これらの条件が成り立たない場合は、適当な回転で、ベクトル場の形が変わって

[*66] うろ覚えなので完全には信じないでください。いずれきちんと文献を調べます（ご存知の人がいたら教えてください）。

しまうからだ。これを式で表現すれば、ベクトル場の（符号を含めた）大きさを表す一変数関数 $\varphi(r)$ があり、

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \varphi(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|)\,\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} \tag{10.7.46}$$

となる。関数 $\varphi(r)$ がわかれば、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が完全にわかる。

ここでガウスの法則を使う。領域 D を、点 $\boldsymbol{r}_0$ を中心にした半径 r の球体とし、S をその表面とする。まずガウスの法則 (10.7.44) 左辺の面積分から考える。ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の球対称性についての考察から、球面 S 上では $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ はつねに面と垂直で、大きさはつねに $\varphi(r)$ に等しい。よって、面積分は、単に大きさと表面積のかけ算になり、

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = 4\pi\, r^2\,\varphi(r) \tag{10.7.47}$$

と計算できる。(10.7.44) 右辺の体積積分は、球対称性

を利用して球座標にうつることで、

$$4\pi \int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\,\Psi(\boldsymbol{r}) = (4\pi)^2 \int_0^r ds\, s^2\, \psi(s) \tag{10.7.48}$$

となる。(10.7.47), (10.7.48) が等しいのだから、

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r^2} \int_0^r ds\, s^2\, \psi(s) \tag{10.7.49}$$

のように求めるベクトル場の大きさがわかる。

特に、$\boldsymbol{r}_0$ から有限の距離 R の内側にのみ場の「源」の分布がしている場合（つまり、$r > R$ なら $\psi(r) = 0$）、この結果はさらにきれいになる。場の源の総量を

$$\Psi_{\mathrm{tot}} = 4\pi \int_0^R ds\, s^2\, \psi(s) = \int dv(\boldsymbol{r})\,\Psi(\boldsymbol{r}) \tag{10.7.50}$$

と定義しよう。$r \geq R$ なら (10.7.49) より $\varphi(r) = \Psi_{\mathrm{tot}}/r^2$ となる。よって、$|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| > R$ を満たす任意の $\boldsymbol{r}$ において、

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \Psi_{\mathrm{tot}}\, \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|^3} \tag{10.7.51}$$

が成り立つ。これは、最初の (10.7.32) とまったく同じ形をしており、場の「源」のすべてが一点 $\boldsymbol{r}_0$ に集中しているときと同じベクトル場がつくられることがわかる。地球の生み出す重力は地球の中心に全質量が集中した場合の重力と等しい[*67]という（ニュートンが示そうとした）事実はこの一例である。

問 10.7.6.a　二つの球対称な星（質量分布）がある。それぞれの密度関数を $\rho_1(\boldsymbol{r})$, $\rho_2(\boldsymbol{r})$ とする。$\rho_1(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}_1$ のまわりに球対称に分布しており、$\rho_2(\boldsymbol{r})$ は点 $\boldsymbol{r}_2$ のまわりに球対称に分布している。どちらも有限の半径の中に分布しているので、質量のある部分は交わらないとしよう。それぞれの星の全質量を

$$m_1 = \int dv(\boldsymbol{r})\,\rho_1(\boldsymbol{r}), \quad m_2 = \int dv(\boldsymbol{r})\,\rho_2(\boldsymbol{r}) \tag{10.7.52}$$

[*67] ただし、地球の質量分布が球対称だと仮定している。もちろん、本当は、この仮定は正しくないので、わずかなずれがある。

とする。星 1 が星 2 から受ける力は、万有引力の法則により、

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} = \int dv(\boldsymbol{r}) \int dv(\boldsymbol{r}') G\, \rho_1(\boldsymbol{r})\, \rho_2(\boldsymbol{r}')\, \frac{\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}|^3} \tag{10.7.53}$$

である。この積分を計算すると、

$$\boldsymbol{F}_{1\leftarrow 2} = G\, m_1 m_2\, \frac{\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^3} \tag{10.7.54}$$

となることを示せ。

10.8　ラプラシアンとポテンシャル

これまでは、場の量の一階微分ばかりを扱ってきたが、ここでは二階微分であるラプラシアンを議論する。さらに、電磁気学や力学への応用では本質的に重要なポテンシャルの概念についても詳しくみておこう。

10.8.1 節で、スカラー場の自然な二階微分であるラプラシアンを定義する。10.8.2 節では応用の多いラプラス方程式を議論し、10.8.3 節ではラプラス方程式の

解の一意性を示す。10.8.4 節では、ベクトル場についてのラプラシアンを定義する。10.8.5 節では、少し進んだ内容になるが、ベクトルポテンシャルの概念について詳しく議論する。

10.8.1　スカラー場のラプラシアン

$\varphi(\boldsymbol{r})$ を任意の二回微分可能なスカラー場とする。スカラー場の自然な二階微分は何か考えたい。

10.3 節でみたように、スカラー場の自然な一階微分はグラディエントだった。グラディエントをとって作られたベクトル場 $\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ をさらに微分してみよう。ベクトル場の自然な一階微分には、ローテーション（10.4 節）とダイバージェンス（10.7 節）の二つがあった。ところが、10.4.3 節でみたように、$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad} = 0$ だったので、$\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ のローテーションをとってもゼロになってしまう。

つまり、ゼロにならない $\varphi(\boldsymbol{r})$ の自然な二階微分は一通りしかなく、$\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ のダイバージェンスをとった

ものだ。この二階微分に新しい記号 $\triangle$ を与えて[*68]、

$$\triangle\ \varphi(\boldsymbol{r}) := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \qquad (10.8.1)$$

と書き、二階微分の演算子 $\triangle$ を**ラプラシアン** (Laplacian) と呼ぶ。ラプラシアンはスカラー場を二階微分して別のスカラー場をつくるので、スカラー的な演算子である。

直交座標で、グラディエントを (10.3.2)、ダイバージェンスを (10.7.7) のように表せば、ラプラシアンは、

[*68] この本では、ラプラシアン $\triangle$ と微少量をあらわす Δ とに微妙にちがう記号を用いて区別している。ただし、これは統一された流儀というわけではない。

$$\triangle\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,\varphi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\,\varphi(x,y,z) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,\varphi(x,y,z) \qquad (10.8.2)$$

となる。あるいは、(10.3.3) のナブラ演算子 $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial y)$ を使って、

$$\triangle\ \varphi(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\nabla\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \nabla^2\varphi(\boldsymbol{r}) \qquad (10.8.3)$$

と書くこともある[*69]。

■ラプラシアンの積分表示　スカラー場のラプラシアン $\triangle\,\varphi(\boldsymbol{r})$ を積分で書き表すことを考えておこう。

$S(\varepsilon)$ を $\boldsymbol{r}$ を中心にした半径 ε の球面とする。

[*69] 日本やヨーロッパでは、ラプラシアンを $\triangle$ と書くことが多いが、アメリカではラプラシアンはもっぱら ∇^2 である。

(10.8.1) とダイバージェンスの定義 (10.7.6) から、

$$\begin{aligned}\triangle\ \varphi(\boldsymbol{r}) &= \operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{4\pi\varepsilon^3}\int_{\boldsymbol{r}'\in S(\varepsilon)} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}')\cdot\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}') \quad (10.8.4)\end{aligned}$$

となる。ここで、球面 $S(\varepsilon)$ 上の点 $\boldsymbol{r}'$ を含む面素ベクトル $\boldsymbol{\Delta a}$ について[*70]

$$\boldsymbol{\Delta a} = \Delta a\,\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|} = \Delta a\,\frac{\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}}{\varepsilon} \qquad (10.8.5)$$

であることに注意しておく。ただし、$\Delta a = |\boldsymbol{\Delta a}|$ は面素の面積。また、グラディエントの心を表す (10.3.5) から、

$$\varphi(\boldsymbol{r}') - \varphi(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})\cdot\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}') + O(\varepsilon^2) \quad (10.8.6)$$

[*70] もちろん、ここでの Δ は今までも使ってきた微小量を表すためのシンボルで、ラプラシアン $\triangle$ ではない。記号の微妙なちがいよりも、式の意味を考えて内容を判断する方がよいだろう。

だから、

$$\Delta \boldsymbol{a} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi(\boldsymbol{r}') = \frac{\Delta a}{\varepsilon}\{\varphi(\boldsymbol{r}') - \varphi(\boldsymbol{r})\} + O(\varepsilon^2) \tag{10.8.7}$$

と書くことができる。(10.8.7) を (10.8.4) に代入すれば、

$$\triangle\ \varphi(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{3}{4\pi\varepsilon^3} \int_{\boldsymbol{r}' \in S(\varepsilon)} da(\boldsymbol{r}')\, \frac{\varphi(\boldsymbol{r}') - \varphi(\boldsymbol{r})}{\varepsilon} \tag{10.8.8}$$

のようにラプラシアンを積分で表すことができる。ここで右辺にスカラー場の面積分が登場したが、これは (10.5.49) で定義した。

10.8.2　ラプラス方程式と調和関数

物理のいろいろな場面で、スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が、空間のある範囲で

$$\triangle\ \varphi(\boldsymbol{r}) = 0 \qquad (10.8.9)$$

という関係を満たす、という状況が現れる。静電気学では、電荷のない領域で電位 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が (10.8.9) を満たす。熱伝導の問題では、時間変化のない定常状態での温度分布が (10.8.9) を満たす。

(10.8.9) は偏微分を含んだ方程式だから、偏微分方程式だ。とくに名前がついていて、**ラプラス方程式** (Laplace equation) と呼ばれる。また、ラプラス方程式の解 $\varphi(\boldsymbol{r})$ のことを**調和関数** (harmonic function) と呼ぶ[*71]。

ラプラス方程式は線形の斉次の方程式なので、常微分方程式の場合（8.2.1 節をみよ）と同じように重ね合

[*71] これは、どちらかというと、数学者の使う言葉だが知っておいた方がいいだろう。数学の本には「関数 $\varphi(\boldsymbol{r})$ は領域 Ω で調和」という書き方もでてくるが、これはもちろん、$\varphi(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r} \in \Omega$ について (10.8.9) を満たすということだ。

わせの原理がなりたつ。つまり、もし $\varphi(\boldsymbol{r})$ と $\psi(\boldsymbol{r})$ がともに (10.8.9) の解なら、任意の定数 a, b について、線形結合 $a\,\varphi(\boldsymbol{r}) + b\,\psi(\boldsymbol{r})$ も (10.8.9) の解になる。

■調和関数の例　いくつか調和関数の例をみておこう。

まず、a, b, c, d を定数とすると、一次式

$$\varphi(x, y, z) = a\,x + b\,y + c\,z + d \tag{10.8.10}$$

が全空間で (10.8.9) を満たすことは明らかだろう。二次式については、そう単純ではなく、たとえば

$$\varphi(x, y, z) = a\,x^2 + b\,y^2 + c\,z^2 \tag{10.8.11}$$

は $a + b + c = 0$ のときにかぎり全空間で (10.8.9) を満たす。

a を定数、$\boldsymbol{r}_0$ を一定のベクトル（定ベクトル）とするとき、

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{a}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} \tag{10.8.12}$$

は、点 $\boldsymbol{r}_0$ を除く全空間で (10.8.9) を満たす。これは、点電荷のつくる電位 (10.1.2) そのものである。

また、a を定数とすると、

$$\varphi(x, y, z) = a \log \sqrt{x^2 + y^2} \tag{10.8.13}$$

は $x = y = 0$ という直線を除く全空間で (10.8.9) を満たす。ここで $\sqrt{x^2 + y^2}$ は z 軸から点 (x, y, z) までの距離である。これは、z 軸上の一様な電荷分布がつくりだす電位に対応している。

問 10.8.2.a　(10.8.12) と (10.8.13) がラプラス方程式 (10.8.9) を（それぞれの範囲で）満たすことを確かめよ。

10.8.3　ラプラス方程式の解の一意性

調和関数にはさまざまな美しい性質があり数学の立場からもいろいろなことが研究されている。ここでは、平均値の定理というとても面白い性質を利用して、物理にとってもっとも大切な、解の一意性を示すことにしよう。

とくに静電気学に関わるのは、以下のように境界での場の値 (つまり電位) を与えたラプラス方程式の問題である。数学のことばでは、このような境界条件を与える問題を**ディリクレ問題** (Dirichlet problem) と呼んでいる。さらに、問題をどのような領域であつかうかに応じて、次のような、**内部ディリクレ問題** (interior Dirichlet problem) と**外部ディリクレ問題** (exterior Dirichlet problem) の二つが考えられる[*72]。

i) 内部ディリクレ問題（図 10.33 (a)）：Ω を三次元空間の中の有界な領域とし、Ω の境界面を $\partial\Omega$ と書く。境界条件としてすべての $\boldsymbol{r} \in \partial\Omega$ において $\varphi(\boldsymbol{r})$ のとる値 $\varphi_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{r})$ があらかじめ指定されているとする。このとき、Ω の内部のすべての $\boldsymbol{r}$ においてラプラス方程式 (10.8.9) を満たす $\varphi(\boldsymbol{r})$ を求めたい。

ii) 外部ディリクレ問題（図 10.33 (b)）：C を三次元空間の有界な領域とし、C の境界面を ∂C と書く。境

[*72] 電磁気では、無限に広い平面状の金属板のつくる電位など、これら二つの範囲に収まらない例題も考える。

図 10.33　a) 内部ディリクレ問題。白抜きの部分が領域 Ω で、ここにラプラス方程式を満たす場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が住んでいる。b) 外部ディリクレ問題。灰色の部分が C で、その外側の白い領域にラプラス方程式を満たす場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ が住んでいる。無限遠では $\varphi(\boldsymbol{r}) \to 0$ を要請する。

界条件として、すべての $\boldsymbol{r} \in \partial C$ において $\varphi(\boldsymbol{r})$ のとる値 $\varphi_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{r})$ があらかじめ指定されているとする。また $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ では $\varphi(\boldsymbol{r}) \to 0$ とする。このとき、C の外部のすべての $\boldsymbol{r}$ においてラプラス方程式 (10.8.9) を満たす $\varphi(\boldsymbol{r})$ を求めたい。

静電気学では、内部問題は金属でシールドされた装置の内部での電位を求める問題、外部問題はいくつかの電極の置かれた広い空間での電位を求める問題に相

当する。

この節では次の定理を証明する。

定理 10.15 (ラプラス方程式の解の一意性)**.** 内部ディリクレ問題、外部ディリクレ問題の解 $\varphi(\boldsymbol{r})$ は、（存在するなら）ただ一つである。

解がただ一つであるという結果は、単なる抽象数学ではない。仮に、方程式の答が不必要にたくさんでてきてしまうなら、それは何か物理的な内容を取りこぼしている証拠だろう。答が一つしかないということは、ラプラス方程式が、考えたい物理的な状況を十分に書き表しているという事実を保証してくれるのだ。一意性の情報は物理を進めていく上で本質的なのである。

一意性には実用的な意味もある。解がたった一つしかないとわかっていれば、与えられた境界条件を満たすようなラプラス方程式の解を（ヤマカンや当てずっぽうでもよいから）一つみつければ、それで問題が完

全に解けたことになる。これは具体的な問題を解く際には圧倒的に役に立つ戦略だ。下の問題 10.8.3.a を見よ。

一意性についての定理があるなら、解の存在を保証する定理だってあるべきだと読者は思うだろう。実際、解の存在も数学的に証明されているのだが、その結果を述べるためには、どういう範囲の関数をあつかうかといった微妙な数学的な議論に入り込まなくてはならない。ここでは、そこまで数学に踏み込むのはやめておこうと思う。

解の存在の問題については、ごく物理的に考えることにしたい。電源をつかって境界での電位を固定したとすると、とうぜん空間には何らかの電位の場ができるはずだ。何も生じないなんてことはあり得ない。そうすると、それがラプラス方程式の解のはずだ。つまり、解の存在は物理的に考えれば、ほぼ当たり前なの

だ[*73]！

この節の残りで、一意性定理 10.15 を証明する。数学の証明ではあるが、ストーリー性があってなかなか楽しいので、余裕のある人はつきあってもらいたい (余裕のない人は、一意性が証明されることで物理がどれほど楽になるかを噛みしめつつ、この節の終わりの問題に進んでほしい)。

一意性の本質は次の補題に尽きている。

補題 10.16. 内部ディリクレ問題あるいは外部ディリクレ問題で、境界上の場の値をすべて $\varphi_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{r}) = 0$ とし

[*73] 同じような（強引な）論法で、一意性も当たり前だと言ってしまえるような気がする。「物理的に考えれば、電位は一通りに決まるから、ラプラス方程式の解も一意に決まっている」と。しかし、これは軽はずみだ。電位が一通りに決まるというのは物理的な事実であり、また、物理的な電位がラプラス方程式を満たすことも（静電気学の考察から）わかっている。しかし、ラプラス方程式の解が一意かどうかは、物理を離れた数学的な問題なのだ。何らかの物理が方程式に取り込まれていなければ、物理的な解以外のニセの解がたくさんでてきてもおかしくはない。

た問題の解は、$\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$ ただ一つである。

これを認めれば、定理の証明は簡単だ。

補題 10.16 を認めた上での定理 10.15 の証明：外部ディリクレ問題を考え、$\varphi_1(\boldsymbol{r})$ と $\varphi_2(\boldsymbol{r})$ を任意の二つの解とする。つまり、C の外の $\boldsymbol{r}$ では $\triangle\varphi_1(\boldsymbol{r}) = 0$, $\triangle\varphi_2(\boldsymbol{r}) = 0$ が成り立ち、∂C 上の $\boldsymbol{r}$ では $\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \varphi_2(\boldsymbol{r}) = \varphi_{\mathrm{b}}(\boldsymbol{r})$ が成り立ち、$|\boldsymbol{r}| \to \infty$ では $\varphi_1(\boldsymbol{r}) \to 0$, $\varphi_2(\boldsymbol{r}) \to 0$ が成り立つ。ここで、$\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi_1(\boldsymbol{r}) - \varphi_2(\boldsymbol{r})$ とすると、上の式の差をとって、C の外の $\boldsymbol{r}$ では $\triangle\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$、$\partial C$ 上の $\boldsymbol{r}$ では $\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$、$|\boldsymbol{r}| \to \infty$ では $\varphi(\boldsymbol{r}) \to 0$ となることがわかる。補題 10.16 によれば、このような $\varphi(\boldsymbol{r})$ は恒等的にゼロ。よって $\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \varphi_2(\boldsymbol{r})$。任意に選んだ二つの解が等しいのだから、解はただ一つである。内部問題の証明もまったく同じにできる。∎

補題 10.16 を示すため、まず、次の平均値の定理を示そう。補題の証明に登場するのだから「定理」と名

付けるのは適切でないかもしれないが、内容がこれだけでも十分におもしろいので、格上げして「定理」と呼ぶ。

定理 10.17 (平均値の定理)**.** $\varphi(\boldsymbol{r})$ が三次元空間のある（有界でも、そうでなくてもよい）領域 Ω でラプラス方程式 (10.8.9) を満たすとする。点 $\boldsymbol{r}_0$ を Ω の内部にとり、$\boldsymbol{r}_0$ を中心にした半径 ℓ の球 $B(\ell)$ が Ω に完全に含まれているとする。球の表面を $S(\ell)$ と書くと、

$$\frac{1}{4\pi\ell^2}\int_{\boldsymbol{r}\in S(\ell)} da(\boldsymbol{r})\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{r}_0) \tag{10.8.14}$$

が成り立つ（スカラー場の面積分の定義は (10.5.49) を見よ）。

(10.8.14) の左辺は、球の表面での $\varphi(\boldsymbol{r})$ の平均である。球面での平均が、中心での値とちょうど等しいということになる。これは調和関数のもつきわめて独特の性質である。

<u>定理 10.17 の証明</u>：(10.8.14) の左辺を $I(\ell)$ と書く。右

辺は $I(0)$ だから、$0 \leq \nu \leq \ell$ について $I'(\nu) = 0$ が成り立つことをいう。そのために、$I(\nu + \Delta\nu) - I(\nu)$ を評価する。このため、球面 $S(\nu + \Delta\nu)$ と $S(\nu)$ 上での面積分を考えるのだが、ここで二つの積分をうまく「連動」させるのがミソだ。まず球面 $S(\nu)$ を N 枚の微小面に分割する。i 番目の面素の位置を $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}_i$ とし、面積を Δa_i とする。球面 $S(\nu + \Delta\nu)$ の方も N 枚の面に分割するのだが、この際、$S(\nu)$ の分割の様子を球の中心 $\boldsymbol{r}_0$ に置いた点光源で外側の $S(\nu + \Delta\nu)$ に投影し、その影にしたがって分割をおこなう。i 番目の面素の位置を $\boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{r}'_i$ とし、面積を $\Delta a'_i$ とすると、$\boldsymbol{r}'_i = \{(\nu + \Delta\nu)/\nu\}\,\boldsymbol{r}_i$ と $\Delta a'_i = \{(\nu + \Delta\nu)/\nu\}^2\,\Delta a_i$

が成り立つ。よって面積分の定義 (10.5.49) に戻ると

$$
\begin{aligned}
&I(\nu+\Delta\nu)-I(\nu)\\
&=\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{1}{4\pi(\nu+\Delta\nu)^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta a_i'\,\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i')\right.\\
&\qquad\left.-\frac{1}{4\pi\nu^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta a_i\,\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i)\right\}\\
&=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{4\pi\nu^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta a_i\left\{\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i')-\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i)\right\}
\end{aligned}
$$

となるが、ここで $\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i')-\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i)=(\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_i)\cdot\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i)+O((\Delta\nu)^2)$ および $\boldsymbol{r}_i'-\boldsymbol{r}_i=(\Delta\nu/\nu)\boldsymbol{r}_i=\Delta\nu\,(\boldsymbol{r}_i/|\boldsymbol{r}_i|)$ より $\Delta a_i\left\{\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i')-\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i)\right\}=\Delta\nu\,\Delta\boldsymbol{a}_i\cdot\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i)+O((\Delta\nu)^2)$ となることに注意すると、

$$
\begin{aligned}
&=\lim_{N\to\infty}\frac{\Delta\nu}{4\pi\nu^2}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{a}_i\cdot\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{r}_i)+O((\Delta\nu)^2)\\
&=\frac{\Delta\nu}{4\pi\nu^2}\int_{S(\nu)}d\boldsymbol{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi+O((\Delta\nu)^2)
\end{aligned}
\tag{10.8.15}
$$

となる。これより、

$$I'(\nu) = \frac{1}{4\pi\nu^2} \int_{\boldsymbol{r}\in S(\nu)} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r})$$

となるが、ここでガウスの定理 (10.7.24) を使えば、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4\pi\nu^2} \int_{\boldsymbol{r}\in B(\nu)} dv(\boldsymbol{r})\ \operatorname{div}\operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{10.8.16}$$

となり、求める結果が得られる。もちろん、$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = \triangle\,\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$ を用いた。∎

<u>補題 10.16 の証明</u>：恒等的に $\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$ となる以外の解が存在すると仮定する。境界と無限遠では $\varphi(\boldsymbol{r})$ はゼロになるので、ある内部の点 $\boldsymbol{r}_0$ において $\varphi(\boldsymbol{r})$ は最大

値あるいは最小値 $\varphi(\boldsymbol{r}_0)$ をとる[*74]。ところが、平均値の定理 (10.8.14) により、$\boldsymbol{r}_0$ を中心にした球の表面での $\varphi(\boldsymbol{r})$ の平均は $\varphi(\boldsymbol{r}_0)$ に等しい。これは、$\varphi(\boldsymbol{r}_0)$ が最大値あるいは最小値であることと矛盾する[*75]。 ∎

問 10.8.3.a　a, b を $0 < a < b$ を満たす定数とし、$a < \sqrt{x^2+y^2+z^2} < b$ で指定される領域を

[*74] 厳密にいうと、最大値あるいは最小値の存在は自明ではない。気になる読者のために、存在証明の方針を書いておこう。内部ディリクレ問題の場合、領域 Ω を完全に囲むような立方体の領域 $\Lambda = [-L, L]^3$ をとる。Ω 以外では $\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$ とすると、$\varphi(\boldsymbol{r})$ は Λ 上の連続関数なので、271 ページの定理 2.31 により、Λ 上で最大値と最小値をとる。これら両方が Ω の外（あるいは境界）にあるなら、最大値と最小値がともにゼロということになり、いたるところで $\varphi(\boldsymbol{r}) = 0$ である。よって、ゼロでない解が存在するという仮定から、$\varphi(\boldsymbol{r})$ は Ω の内部で最大値あるいは最小値をとる。外部ディリクレ問題の場合は、L を十分に大きくとりつつ、（やや面倒だが）同様の議論を行なえばよい。

[*75] $\boldsymbol{r}_0$ のまわりで、ベターっと $\varphi(\boldsymbol{r})$ が一定値 $\varphi(\boldsymbol{r}_0)$ をとったらどうなるだろう？

Ω とする。境界条件としては、$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=a$ ならば $\varphi(x,y,z)=\varphi_1$、$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=b$ ならば $\varphi(x,y,z)=\varphi_2$ とする（φ_1, φ_2 は任意の定数)。このような内部ディリクレ問題の解 $\varphi(x,y,z)$ を求めよ。(ヒント：一意性定理から、解を一つ作ってしまえばよい。(10.8.12) と $\varphi(\boldsymbol{r})=$ (定数) がともに調和関数であることと、重ね合わせの原理を利用して解をさがせ。)

10.8.4　ベクトル場のラプラシアン

スカラー場についての、ただ一つの自然な二階微分であるラプラシアンは、(10.8.8) で見たように、球の表面と球の中心での場の値の差を平均した量だった。この「差の平均」という考えはとても自然な上に、スカラー場にかぎらず、ベクトル場にもあてはめることができる。そこで (10.8.8) をそのままベクトル場に拡

張し、

$$\triangle\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{4\pi\varepsilon^4}\int_{\boldsymbol{r}'\in S(\varepsilon)} da(\boldsymbol{r}')\,\{\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}')-\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})\} \tag{10.8.17}$$

によってベクトル場のラプラシアンを定義しよう。ここでの面積分は、(10.5.49) のスカラー的な面積分だから、積分した結果の $\triangle\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ も当然ベクトル場である。スカラー場と同じ式で定義したから当たり前だが、座標表示すれば、

$$\triangle\ \boldsymbol{V}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{V}(x,y,z) \tag{10.8.18}$$

と表される（もちろん、微分は各成分に別々にかかる）。

ところで、10.8.1 節では、スカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の自然な二階微分は $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})$ しかないということから、スカラー場のラプラシアンを導入した。ベクトル場についても、同じように話を進めてラプラシアンにもっていけないのだろうか？　実は、ベクトル場になると、話はそれほど簡単にはいかないのだ。

$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場として、その「自然な二階微分」が何かを考えよう。まず、一階微分については、ダイバージェンスをとったスカラー場 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ と、ローテーションをとったベクトル場 $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の二つが考えられる。これらを、もう一回、微分したいわけだ。まず、スカラー場 $\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の微分は一通りで、$\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ というベクトル場になる。一方、ベクトル場 $\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ については、ダイバージェンスをとるか、ローテーションをとるかの二通りの道がある。ただし、前者については (10.7.11) より $\operatorname{div}\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=0$ なので考える必要はない。残ったのは、$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ というベクトル場だ。

まとめると、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の自然な二階微分には $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ と $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ という二つのベクトル場がありうる、ということだ。残念ながら、ラプラシアンが一発で出てくるということにはならなかったが、面白いことに、上で定義したラプラシアンはこれら二つの「自然な二階微分」を使って、

$$\triangle\ \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \tag{10.8.19}$$

と書けるのだ。この関係を確かめるには、成分表示で微分を直接に計算するのが、もっとも能率的なようだ[*76]。

10.8.5　ベクトルポテンシャル

今までの話題からは少し離れて、電磁気学での磁場のあつかいで重要な役割を果たす**ベクトルポテンシャル** (vector potential) という道具について見ていこう。

[*76] 積分表示を用いてエレガントに示せないものかと考えたのだが、どうも、きれいに（というか、自然に）導くことができなかった。いいアイディアがあったら教えてください。

■スカラーポテンシャルについての軽い復習　新しくでるベクトルポテンシャルと区別するため、今まで単にポテンシャルと呼んでいたものをスカラーポテンシャルと呼ぶ。ベクトルポテンシャルをつくるヒントを得るべく、スカラーポテンシャルがどういうときに使えるか、系 10.6 にまとめたことを復習する。

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ がすべての $\boldsymbol{r}$ において $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たすとする。するとストークスの定理（定理 10.5）によって、任意の端のある道 p に沿った $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ は道の始点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ と終点 $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ のみから決まることがわかる。そこで、

$$\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}) - \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) \tag{10.8.20}$$

という関係を満たすようにスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ をつくると、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ が成り立つのだ。図 10.34 (a) を見よ。

話の肝心なところは、**ふつうは道の形に依存するはずの線積分 $\int_p d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V}$ が、たまたま道の両端だけで決**

図 10.34　a) スカラーポテンシャルの基本のアイディア。ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積分が両端にしかよらないので、それをスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の両端での差として表す。b) ベクトルポテンシャルの基本のアイディア。ベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の面積分が境界にしかよらないので、それをベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の境界での線積分として表す。

まってしまったというところにある。

■ベクトルポテンシャルの導入　あるベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ がすべての $\boldsymbol{r}$ において $\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たすとする。磁場は（静磁場であろうと時間変動する磁場であろうと）必ずこの性質をもっているので、ここでは $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ という記号を使った。

c を、任意の、向きのついた閉じた道とする。c を境

界にもつような二つの面 S と S' をとる。面の表裏は 10.6.2 節で説明した規則にしたがって c の向きからきめる（図 10.29 を見よ）。面 S' の表裏を逆にしたものを $\bar{S}'$ とすると、二つの面 S と $\bar{S}'$ を境界で貼り合わせた $S \cup \bar{S}'$ は閉じた面になる。この閉じた面の内部では、もちろん、$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ なので、ガウスの定理の素直な帰結である (10.7.25) により、$\int_{S \cup \bar{S}'} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} = 0$ である。もちろん $\int_{S \cup \bar{S}'} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} = \int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} - \int_{S'} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}$ だから、けっきょく、

$$\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} = \int_{S'} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B} \tag{10.8.21}$$

という関係が得られる。面の境界が一致してさえいれば、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の面積分の値は等しいのだ。言いかえれば、**ふつうは面の形に依存するはずの面積分 $\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{B}$ が、たまたま面の境界だけで決まってしまった**のである。スカラーポテンシャルが定義できる状況と、次元が一つあがっているが、完全に対応している。

上では、両端にしか依存しない線積分を (10.8.20) の

ように、露骨に、両端での $\varphi(\boldsymbol{r})$ の差として書き表した。同じように、境界にしか依存しない面積分 $\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B}$ を、露骨に、境界 c のみに関わるような形で書き表せないだろうか？　しかし、この場合には、単に差をとるといった簡単な形にはできない。境界自身が閉じた道 c なのだから、もっとも自然な考えは、ある量を c に沿って線積分することだろう。線積分されるべき量は、やはり、ベクトル場だ。

　というわけで、あるベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ があって、面積分を

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B} = \int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{A} \tag{10.8.22}$$

のように表すことができるのではないかと期待される。これが、ちょうどスカラーポテンシャルの (10.8.20) に対応する関係だ。そして、右辺に現れた $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ がベクトルポテンシャルである。図 10.34 (b) を見よ。

　もちろん (10.8.22) を満たすようなベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が存在することは当たり前ではない。それについては、

この先で考えることにして、まず、そのような $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ があることを仮に認めて、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の関係をみてみよう。そのために、c を点 $\boldsymbol{r}$ を囲む小さな閉じた道とし、S を c を境界にもつような平らな小さな面とする。また S の面素ベクトルを $\Delta\boldsymbol{a}$ と書こう。すると、面積分の定義から $\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B} = \Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) + O(|\Delta\boldsymbol{a}|^{3/2})$ だから、(10.8.22) は

$$\Delta\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) + O(|\Delta\boldsymbol{a}|^{3/2}) = \int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{A} \qquad (10.8.23)$$

となる。これは、まさにローテーションの「心」の式 (10.4.13) そのものだ。つまり、もとのベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ とベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \qquad (10.8.24)$$

という関係で結ばれることがわかる。ポテンシャルを微分するともとの場になるという点は $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ の関係と同じだが、ポテンシャルの方がベクトル場になったためにローテーションが登場したと思

えばよい。その点でも、スカラーポテンシャルの話と完全に対応している。

もし (10.8.24) が成り立てば、ストークスの定理 (10.6.11) により、積分の等式 (10.8.22) が成り立つこともすぐにわかる。

■ベクトルポテンシャルが存在すること　(10.8.22) の関係を満たすベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が存在するかという問題について考えよう。ここでもスカラーポテンシャルの場合と同じように話が進むと楽なのだが、実は、ここで本質的な差が出てくる。スカラーポテンシャルのときは、もとになるベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ が与えられれば、(10.8.20) によって、任意の二点のあいだのポテンシャルの差が決まった。すると、10.3.3 節の十分条件のところでやったように、適当な基準点 $\boldsymbol{r}_0$ での $\varphi(\boldsymbol{r})$ の値を決めてやれば、全空間での $\varphi(\boldsymbol{r})$ が自然に決まる。ところが、ベクトルポテンシャルの場合、もとになる場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が与えられると、任意の閉じた道に沿ったベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の線積分が決まる。線積分の値

を知って $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を決めるのは一筋縄で行く話ではない。これは本質的な点で、ベクトルポテンシャルのむずかしさ、また、次に述べるゲージ変換の自由度とも関連しているのだ。

$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たす $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ が与えられたとしよう。さらに、話を簡単にするため、適当な z_0（負の非常に大きな値をとると思ってよい）があり、$z \leq z_0$ では $\boldsymbol{B}(x, y, z) = 0$ が成り立つと仮定する。これから (10.8.22) を満たす $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を力づくで作る。つまり、ベクトルポテンシャルが存在することを構成的に証明する。

まず、任意の $\boldsymbol{r}$ について $A_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r}) = 0$ となることを要請する。そんな無茶なことをしていいのかと思うかも知れないが、ともかく条件を満たす $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が構成できれば、それでいいのだから少し見ていてほしい。

まず、$z \leq z_0$ では $\boldsymbol{A}(x, y, z) = 0$ とする。もちろん、これで、(10.8.22) も (10.8.24) も成立する。

次に、x, y を任意に、z を $z > z_0$ の範囲で任意

図 10.35　$\Delta x > 0,\ \Delta y = 0$ のときの閉じた道 c。一番上の、右に向かう道の上以外では積分はゼロになり、上の道での A_{x} の値がでてくるしかけである。

にとり、$A_{\mathrm{x}}(x, y, z),\ A_{\mathrm{y}}(x, y, z)$ を決めよう。そのために、任意の小さな $\Delta x,\ \Delta y$ について、点 (x, y, z), $(x + \Delta x, y + \Delta y, z)$, $(x + \Delta x, y + \Delta y, z_0)$, (x, y, z_0), (x, y, z) をこの順番にまっすぐな線で結んで作られる道 c を考える（図 10.35）。$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ についての仮定から、道が z 軸に平行なときの線積分はゼロ。また z 座標が z_0 のときも線積分はゼロだ。よって、道に沿った積分

には一つ目の線分だけが寄与して、

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{A} = \Delta x\, A_{\mathrm{x}}(x,y,z) + \Delta y\, A_{\mathrm{y}}(x,y,z) + O((\Delta x)^2) + O((\Delta y)^2) \quad (10.8.25)$$

となる。次に c を境界にもつ平らな長方形状の面を S とする。S 上の z 座標が z' と $z'+\Delta z$ のあいだの範囲の微小面を考える。面積は $\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\,\Delta z$ で、法線ベクトルは
$(-\Delta y, \Delta x, 0)/\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$。よって面素ベクトルは $\Delta\boldsymbol{a} = (-\Delta y\,\Delta z, \Delta x\,\Delta z, 0)$ となる。よって S 上の $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ の積分は

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{B} = -\Delta y\int_{z_0}^{z} dz'\, B_{\mathrm{x}}(x,y,z') + \Delta x\int_{z_0}^{z} dz'\, B_{\mathrm{y}}(x,y,z') + O((\Delta x)^2) + O((\Delta y)^2) \quad (10.8.26)$$

となる。線積分 (10.8.25) と面積分 (10.8.26) を比較

し、(10.8.22) のように両者が等しいことを要請すれば、

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{x}}(x,y,z) &= \int_{z_0}^{z} dz'\, B_{\mathrm{y}}(x,y,z') \\
A_{\mathrm{y}}(x,y,z) &= -\int_{z_0}^{z} dz'\, B_{\mathrm{x}}(x,y,z') \\
A_{\mathrm{z}}(x,y,z) &= 0
\end{aligned}
\tag{10.8.27}
$$

のように $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の具体的な表現が得られる。

(10.8.27) が求めるベクトルポテンシャルであることを確かめるには、ローテーションを計算して (10.8.24) が成立していることを確認するのがもっとも楽だろう。これは問題にしておく（問題 10.8.5.a)。こうして、ベクトルポテンシャルが存在することが示された。

■ゲージ変換　ベクトルポテンシャル (10.8.27) が求められたわけだが、z 軸だけが特別あつかいされた形になっていて、いかにも美しくない。こんなものがただ一つの答のはずがない。

実際、（$x \le x_0$ で $\boldsymbol{B}(x,y,z) = 0$ を要請して）z 軸の

役割を x 軸におしつければ、

$$
\begin{aligned}
A_{\mathrm{x}}(x,y,z) &= 0 \\
A_{\mathrm{y}}(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x} dx'\, B_{\mathrm{z}}(x',y,z) \\
A_{\mathrm{z}}(x,y,z) &= -\int_{x_0}^{x} dx'\, B_{\mathrm{y}}(x',y,z)
\end{aligned}
\tag{10.8.28}
$$

という表現が得られる。もちろん、これも、(10.8.24) を満たすので、立派なベクトルポテンシャルだ。

あるいは、少し面白いところでは、

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \left\{ \int_0^1 ds\, s\, \boldsymbol{B}(s\,\boldsymbol{r}) \right\} \times \boldsymbol{r} \tag{10.8.29}
$$

としたものも、ベクトルポテンシャルになる（問題 10.8.5.b)。こうして求めた $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{r} = 0$ という条件を満たす。

さらに、物理でよく使われる形は

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi} \int dv(\boldsymbol{r}')\, \frac{\mathrm{rot}\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \tag{10.8.30}
$$

である[*77]。これは、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$ という条件を満たす。

このように、与えられたベクトル場 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対応するベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ は、たくさんある。(10.8.27), (10.8.28), (10.8.29), (10.8.30) という似ても似つかない $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ のローテーションをとれば、みな同じ $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ になるのだ。スカラーポテンシャルは（定数の足し算を除けば）一通りに定まったことを思い出すと、ずいぶん、話がちがう。

ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の選択にどの程度の自由度があるのかを一般的にみておこう。$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を $\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ を満たす任意のベクトル場とし、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ がともに対応するベクトルポテンシャルだとする。つまり、$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ と $\mathrm{rot}\,\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ がすべての $\boldsymbol{r}$ において成り立つ。これら二式の差をと

[*77] (10.8.30) が (10.8.24) を満たすことを示すのは少々やっかいな問題で、今の段階での数学的技巧だけでは、（いろいろと工夫しないかぎりは）ちょっと手に負えない。

れば、

$$\mathrm{rot}\{\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\} = 0 \tag{10.8.31}$$

となる。すると、系 10.6（p. 1811）により、あるスカラー場 $\psi(\boldsymbol{r})$ が存在して、$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r})$、あるいは、

$$\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}) \tag{10.8.32}$$

と書けることがわかる。逆に、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対応するベクトルポテンシャルであれば、任意の $\psi(\boldsymbol{r})$ について、(10.8.32) で決まる $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ も $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ に対応するベクトルポテンシャルになる。もちろん、(10.4.16) によって $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}) = 0$ だからである。

(10.8.32) によってあるベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ から新しいベクトルポテンシャル $\tilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ をつくる手続きを、**ゲージ変換** (gauge transformation) と呼ぶ。また（$A_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r}) = 0$ とか $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0$ といった）補助条件を課してベクトルポテンシャルをひとつに決めることを、「ゲージを固定する」とか「ゲージを選ぶ」とい

う[*78]。ベクトルポテンシャルが一つに決まらないことを、「ゲージ変換の自由度がある」とか「ゲージの選び方の自由度がある」などと表現する。

■静磁場のベクトルポテンシャルの物理的意味　さいごに、電磁気学の設定で、ベクトルポテンシャルの意味を考えてみたい。

考えをはっきりさせるため、電場と静電ポテンシャルの復習から入る。

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を静電場とする。$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$ なので、静電ポテンシャル $\varphi(\boldsymbol{r})$ を使って、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\,\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r})$ と書ける。この場の中にある電荷 q の点電荷には $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の力が働く。点 $\boldsymbol{r}_1$ から点 $\boldsymbol{r}_2$ まで、任意の道を通って、点電荷を動かしたとき、電場が電荷にする仕

[*78] gauge は「計量ざお」を原義にもつ英単語で、尺度、標準寸法、規格、基準などの意味がある。ここでは、基準や標準という意味が近いだろう。

事は

$$
\begin{aligned}
W &= \int_p d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{F} = -q \int_p d\boldsymbol{\ell} \cdot \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}) \\
&= q\,\varphi(\boldsymbol{r}_1) - q\,\varphi(\boldsymbol{r}_2) \qquad (10.8.33)
\end{aligned}
$$

である。もちろん、p は $\boldsymbol{r}_1$ から $\boldsymbol{r}_2$ に向かう道であり、定理 10.2（p. 1697）を使った。

仕事は $q\,\varphi(\boldsymbol{r})$ の差に等しい。つまり、電荷にポテンシャルをかけたものが点電荷のポテンシャルエネルギーになっている。

次に、静磁場とベクトルポテンシャルについて考える。

$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を静磁場とする。$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = 0$ なので、ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ を使って、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ と書ける。この場の中に、向きのついた閉じた道 c_1 と c_2 をとる。c_1 と c_2 はまったく離れていてもいいし、部分的に重なっていてもよい。まず、c_1 に沿って、一定の電流 I が流れているとしよう。ここで、電流 I を一定に保ったまま、電流の流れる道を変形していき、最後は

c_2 に沿って電流が流れるようにする[*79]。電流は磁場から力を受けているので、この変形の際に磁場は仕事をおこなう。ここでは導出は省略するが (問題 10.8.5.c)、仕事の総量 W は、ベクトルポテンシャルを使って、

$$W = I \int_{c_1} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{A} - I \int_{c_2} d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{A} \tag{10.8.34}$$

というきれいな形に書くことができる。(10.8.33) とよく似た関係である[*80]。

ここでも、仕事は $I \int_c d\boldsymbol{\ell} \cdot \boldsymbol{A}$ の差に等しい。つまり、電流に沿ってベクトルポテンシャルを積分したもの、

[*79] 電流 I を一定に保つためには、回路に電源をつけるなどの工夫がいる。そういう意味では、c_1 の一部だけを変形して c_2 にする（そして、電源は変形しない部分につけておく）方が現実的だろう。超伝導の導線で回路をつくれば大丈夫だろうと思うかも知れないが、超伝導のループを変形すると、電流は一般には変わってしまう。

[*80] この式は $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ の線積分だけを含んでいるので、ゲージの取り方にはまったく依存しない。このように物理的に意味のある式はゲージの選択に依存しないのだ。「計量ざお」をかえても現実の世界はかわらない！

もっと比喩的にいえば、「電流にベクトルポテンシャルをかけたもの」が回路のポテンシャルエネルギーになっているのだ。

単に $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ という式をみても $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が「ポテンシャル」だという実感はなかなかわかないだろう。だが、このように仕事（エネルギー）と直結するならば、確かにポテンシャルだと納得できる。さらに、電流は大きさと方向をもつ量なのだから、それと対になるポテンシャルは必然的にベクトル量でなくてはならない。磁場に関係するポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ がベクトルになるのは、磁場からの力が（電荷ではなく）電流に働くことの必然的な結果なのである。

問　10.8.5.a　(10.8.27) のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が (10.8.24) を満たすことを示せ。ただ計算するだけだが、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ についての条件を使うことを忘れないように。

問　10.8.5.b　(10.8.29) のベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ が

(10.8.24) を満たすことを示せ（これは、やればできる）。さらに、興味のある人は、(10.8.27) を導いたのと同じように、何らかの閉じた道 c について (10.8.22) を要請することで、(10.8.29) を導くことを考えよ。ヒントがほしければ、この文への脚注を見よ[*81]。

問 10.8.5.c　(10.8.34) を示せ。これは、他の問題よりはかなり難しく、何段階かに分けてじっくりと考える必要がある。もちろん、電流が磁場から受ける力の知識は必要。途中で、三つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ についてのスカラー三重積の公式 (6.3.79) を使う。

10.9　極座標表示

なんらかの回転対称性のある物理の問題を扱うときには、極座標による表示（6.2.2 節）が便利だ。ある程

[*81] ヒント：条件 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{r}=0$ は最初から仮定する。原点が特殊であることを考えて積分路 c を扇形（あるいは、二等辺三角形）に選ぶとよい。

度進んだ物理を学ぶためには、極座標を使いこなすのは必須の技術だといっていいだろう。

この節では、場の量の微分が極座標でどのように表現されるかをみる[*82]。特に、ラプラシアンの極座標表示 (10.9.36) は、球対称なポテンシャル中での波動方程式を扱うためには不可欠だが、その形の複雑さ、導出の煩雑さで、悪名高い。この表式を能率的に導くための工夫も色々とあるのだが、ここでは、特に技巧に走ることなく、グラディエントとダイバージェンスの表式を素直に求めて、そこからラプラシアンの表式を導く。

10.9.1 節では設定を確認し、極座標に付随する正規直交基底を導入する。10.9.2 節ではグラディエントの極座標表示を求め、10.9.3 節ではダイバージェンスの極座標表示を求める。これらは基本的には変数変換の問題に過ぎないが、ここでは機械的に変数変換を計算するのではなく、グラディエントやダイバージェ

[*82] この節の内容はやや高級なので、量子力学などを学ぶ中で必要になってきてから学習すれば十分だろう。

ンスの幾何学的な意味にもとづいて表示を求めていく。10.9.4 節では、それまでの結果の応用として、ラプラシアンと角運動量演算子の極座標表示を求める。10.9.5 節では、ラプラシアンと角運動量の二乗を扱う、また別の方法を紹介する。最後に、10.9.6 節で円筒座標での対応する結果をまとめておく。

10.9.1　極座標と対応する正規直交基底

デカルト座標を使って $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ と表される三次元空間の点を、三つの変数 r, θ, φ によって、

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\theta\,\sin\varphi, \quad z = r\,\cos\theta \tag{10.9.1}$$

のように表すのが、**極座標**（あるいは、球座標）による表示である。やや乱暴だが、極座標で表される点を (r, θ, φ) とも書くことにする。極座標については、すでに 6.2.2 節で詳しく議論したので、必要ならそちらをみて復習してほしい。

極座標で (r, θ, φ) と書ける三次元空間の点（の座標、

あるいは、位置ベクトル）を表す関数

$$\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi) := (r\ \sin\theta\ \cos\varphi, r\ \sin\theta\ \sin\varphi, r\ \cos\theta) \tag{10.9.2}$$

を定義しておくと、これからの議論が便利になる。また、極座標を使った議論では、ベクトルを表す基底として通常の $\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})},\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})},\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\}$ ではなく、位置に応じて向きがかわる正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\}$ を用いるのが便利で自然である[*83]。ここでは各々の (r,θ,φ) に対して、一つの正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\}$ が定まると考えていることに注意。

まず、これらの基底ベクトルを定義しよう（これは、960 ページの問 6.4.1.b で考察した問題である）。

デカルト座標で変数 x を変化させると、点 $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ は x-軸方向、つまり単位ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} =$

[*83] ここでも、829 ページの脚注 *4 で述べた方針に従って、座標の名前には立体の文字を用い、斜体の変数名と区別した。

$(1,0,0)$ の方向に動く。同じように変数 y,z を変化させると、点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ は、それぞれ、$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})}$ と $\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}$ の方向に動く。これにならって、三つの変数 r,θ,φ を微小に変化させた際に点 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ がどのように動くかをみて新しい基底ベクトルを定めるのが自然だろう。

まず、変数 r を変化させたときの $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ の動きをみることで、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi) &:= \frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial r} \\ &= (\sin\theta\,\cos\varphi, \sin\theta\,\sin\varphi, \cos\theta)\end{aligned} \tag{10.9.3}$$

と定義する。これが単位ベクトルであることは簡単に確かめられる。

変数 θ の変化に対応する基底ベクトルを定義するために、まず $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を θ で微分すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta} = (r\,\cos\theta\,\cos\varphi, r\,\cos\theta\,\sin\varphi, -r\,\sin\theta) \tag{10.9.4}$$

となる。$|d\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)/d\theta| = r$ だから、このままでは単

位ベクトルではない。大きさで割って、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi) &:= \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta} \\ &= (\cos\theta\,\cos\varphi, \cos\theta\,\sin\varphi, -\sin\theta) \qquad (10.9.5)\end{aligned}$$

として単位ベクトルを定義する。

変数 φ の変化についても同じ考えで、微分して得られるベクトルを規格化し、

$$\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi) := \frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} = (-\sin\varphi, \cos\varphi, 0) \qquad (10.9.6)$$

と定義する。

内積を計算すればすぐにわかるように、$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi), \boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi), \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)$ の三つは互いに直交する。よって、これら三つの単位ベクトルを合わせたものは、正規直交基底をなす。さらに、ベク

トル積を計算すると、

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)\times\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)=\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)$$
$$\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\times\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)=\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)$$
$$\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\times\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)=\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\quad(10.9.7)$$

となり[*84]、正規直交基底
$\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\}$ が右手系であることもわかる。

10.9.2　グラディエントの極座標表示

$\psi(\boldsymbol{r})=\psi(x,y,z)$ を任意のスカラー場とする。ここで $\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を代入した $\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ は、同じスカラー量を (r,θ,φ) の関数として表現したものとみる

[*84] 実は、この関係を三つとも確かめる必要はない。三つのベクトルが正規直交系をなすことがわかっていれば、一つ目の式を確かめれば、自動的に残りの二つが成り立つことはわかる。理由を考えてみよう。

ことができる。これに新しい名前をつけて、

$$\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi) := \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) \tag{10.9.8}$$

と書こう。

$\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ は $\psi(\boldsymbol{r})$ を極座標で表した量に過ぎない。そこで、とりたてて新しい名前をつけず、単に $\psi(r,\theta,\varphi)$ と書いてしまうことも少なくない（というより、物理ではそれが普通)。しかし、数学的な関数としてみたときには、もとの $\psi(x,y,z)$ と $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ は、まったく別物なので、慎重を期して、記号レベルで区別しておこう。

さて、微分可能なスカラー場 $\psi(\boldsymbol{r})$ が与えられれば、10.3 節で見たように、そのグラディエントをとってベクトル場 $\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r})$ を定義することができる。ここで $\boldsymbol{r}$ に (10.9.2) の $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を代入したものを $\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ と書く。しつこいようだが（こういう出発点で混乱する人がとても多いのでくり返しておくが)、ここでやっているのは、まず（今まで通りのやり方で）ベクトル場 $\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r})$ を求めておいて、その後で、$\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を代入しただけのことである。

よって $\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ は、グラディエントを極座標で表したものといえる。この量を、もとのスカラー場の極座標表示 $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ を使って表すのが、**グラディエントの極座標表示**である。先に結果を書いてしまうと、

$$\boxed{\begin{aligned}&\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = \\ &\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi) + \frac{1}{r}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi) \\ &+ \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi) \qquad (10.9.9)\end{aligned}}$$

となる。

デカルト座標でのグラディエントの表式 (10.3.2) を同じ形式で書けば、

$$\begin{aligned}\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}) =& \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial x}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{x})} + \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial y}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{y})} \\ &+ \frac{\partial\psi(x,y,z)}{\partial z}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \qquad (10.9.10)\end{aligned}$$

だから、たしかに極座標表示 (10.9.9) はややこしい。とはいえ、各々の基底ベクトルの成分が対応する変数での微分になっているところはデカルト座標と同じだ。$1/r$ など余分な係数がかかっているが、これは、基底ベクトルを定義するとき (10.9.5) のように余分な規格化が必要だったことの現れに過ぎない。各々の方向での「縮尺」が異なっていることの補正だと言ってもいいだろう。そう分かれば、(10.9.9) は全く奇怪な式ではない。実際、これから見るように、(10.9.9) の導出はきわめて簡単だ。

(10.9.9) の導出：もとのスカラー場の極座標表示 $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ の r による偏微分を、定義から出発して変形

していくと、

$$\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$$
$$= \lim_{\Delta r\searrow 0}\frac{1}{\Delta r}\left\{\psi(\boldsymbol{r}(r+\Delta r,\theta,\varphi)) - \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))\right\}$$
$$= \lim_{\Delta r\searrow 0}\frac{1}{\Delta r}\left\{\psi\left(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi) + \Delta r\,\frac{\partial\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial r} + O((\Delta r)^2)\right)\right.$$
$$\left. - \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))\right\}$$

となるが、この中括弧の中は、グラディエントの基本の関係 (10.3.5) が使える形になっている。よって、

$$= \lim_{\Delta r\searrow 0}\frac{1}{\Delta r}\left\{\Delta r\,\frac{\partial\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\cdot\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))\right.$$
$$\left. + O((\Delta r)^2)\right\}$$

だが、ここまで来れば $\Delta r \searrow 0$ の極限は簡単にとれて、

$$= \frac{\partial\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\cdot\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) \tag{10.9.11}$$

を得る。基底ベクトルの定義 (10.9.3) を思い出すと、

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)\cdot\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))=\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial r} \tag{10.9.12}$$

が言えた。

同様の計算をくり返せば、θ と φ についての偏微分に関しても、(10.9.11) と同じ

$$\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}=\frac{\partial\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\cdot\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) \tag{10.9.13}$$

$$\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}=\frac{\partial\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\cdot\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) \tag{10.9.14}$$

という関係が得られる。ここで、基底ベクトルの定義

(10.9.5), (10.9.6) を使い、規格化の係数に注意すれば、

$$\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\cdot\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))=\frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta} \tag{10.9.15}$$

$$\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\cdot\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))=\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} \tag{10.9.16}$$

が成り立つことがわかる。

ここで、(r,θ,φ) を一つに固定したと考えよう。$\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi),\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\}$ は正規直交基底だから、(10.9.12), (10.9.15), (10.9.16) は、ベクトル $\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ をこの基底で (6.3.47) のように展開したときの展開係数を求める式 (6.3.49) とみなすことができる。こうして得られる展開は、求める (10.9.9) に他ならない。∎

10.9.3　ダイバージェンスの極座標表示

任意の微分可能なベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = (V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r}), V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r}), V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r}))$ が与えられたとする。ここで、$\boldsymbol{r}$ に (10.9.2) の $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を代入して得られる $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ は、このベクトル場を極座標の関数として表したものである。さらに、(r,θ,φ) を固定し、ベクトル $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ を正規直交基底 $\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi), \boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi), \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\}$ によって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) &= V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi) \\ &\quad + V_{\theta}(r,\theta,\varphi)\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi) + V_{\varphi}(r,\theta,\varphi)\,\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{10.9.17}$$

のように展開しよう。ここに登場した展開係数 $(V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi), V_{\theta}(r,\theta,\varphi), V_{\varphi}(r,\theta,\varphi))$ は、極座標でベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を表現する際の自然な成分である。グラディエントの表現 (10.9.9) も、(10.9.17) の書き方になっていたことに注意しよう。

さて、10.7 節で詳しくみたように、ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ のダイバージェンスをとりスカラー場 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を定義することができる。このスカラー場の極座標での表示は、もちろん、($\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の $\boldsymbol{r}$ に $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を代入した）$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ である。

ダイバージェンスの極座標表示 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ は、もとのベクトル場の極座標表示での成分 $(V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi), V_{\theta}(r,\theta,\varphi), V_{\varphi}(r,\theta,\varphi))$ を使って表すことができるはずだ。それが、**ダイバージェンスの極座標表示**である。これも、まず答えを書くと、

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) =& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\,V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi)\right\}\\ &+\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\;V_{\theta}(r,\theta,\varphi)\right\}\\ &+\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial V_{\varphi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{10.9.18}$$

である。

デカルト座標でのきれいなダイバージェンスの表式 (10.7.7) に比べると、かなり込み入っていると言わざるを得ない。特に、右辺第一項と第二項の微分のところで、わざわざ r^2 や $\sin\theta$ をかけてから微分し、また同じ量で割っているところなどは複雑でイヤな感じがする。素直に $\partial V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi)/\partial r$ や $\partial V_{\theta}(r,\theta,\varphi)/\partial\theta$ にならないものだろうかと思ってしまうだろう。しかし、落ち着いて導出をみれば、(10.9.18) は自然な形であり、デカルト座標の (10.7.7) がむしろきれい過ぎだということがわかるはずだ。

■導出の方針　ダイバージェンスを評価したいのだから、おおもとの定義 (10.7.6) に戻って、閉じた面からのわき出しを計算する。デカルト座標のときには三つの座標軸に沿った立方体状の領域の表面からのわき出しを調べるのがもっとも便利だったが、ここでは極座標にマッチした領域を取る方がよい。

極座標で (r,θ,φ) と表される点を任意に選び、固定

図 10.36　立体図形 D の様子。上の図は、大まかな立体図（正確には、いくつかの辺は曲線だが、そこまで描けないのですべて直線で描いた）。これで頂点の名前を確認してほしい。左下の図は、面 dcgh の真横から見た様子。縦軸は z-軸だが、横軸は x,y-平面の中の適切な直線に対応する。右下の図は、z-軸正方向から見下ろした（射影した）様子。

する。極座標の三つの変数を、それぞれ、$r - \Delta r/2$ から $r + \Delta r/2$ まで、$\theta - \Delta\theta/2$ から $\theta + \Delta\theta/2$ まで、$\varphi - \Delta\varphi/2$ から $\varphi + \Delta\varphi/2$ まで動かすことで指定される三次元的な領域を D と呼ぶ。先ほど固定した点は D のほぼ中心付近にある。もちろん、$\Delta r, \Delta\theta, \Delta\varphi$ は小さな幅である。領域 D は単純な直方体などではなく、バウムクーヘンを（妙に）切り分けたような形をしている。図 10.36 に D の様子を示したので、よく見てイメージを作ってほしい。今後、立体 D の面は、この図にもとづいて、面 abcd のように呼ぶことにする。

念のため定義を思い出しておくと、S を D の表面、Δv を D の体積とするとき、点 $\boldsymbol{r}(r, \theta, \varphi)$ における $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ のダイバージェンスは、

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r, \theta, \varphi)) = \lim_{\Delta r, \Delta\theta, \Delta\varphi \searrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} \tag{10.9.19}$$

で与えられる。

図 10.37　Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ が小さいときの、立体図形 D の各辺の長さ。ただし、$r_1 = r - \Delta r/2$, $r_2 = r + \Delta r/2$, $\theta_1 = \theta - \Delta\theta/2$, $\theta_2 = \theta + \Delta\theta/2$ と書いた。図に記入していない「奥行き」の四本の線の長さはいずれも Δr である。このように形が「いびつ」であるため、互いに向き合っている、面 adhe と面 bcgf、また、面 abcd と面 efgh の面積が等しくならない（面 abfe と面 dcgh の面積は等しい）。これが、ダイバージェンスの表式 (10.9.18) が複雑な理由である。

■大ざっぱな評価　本格的な解析に入る前に、大ざっぱな評価をして、ダイバージェンスの表式 (10.9.18) の心をつかんでおこう。

まず、領域 D の「寸法」を大ざっぱにみよう。Δr, $\Delta\theta$, $\Delta\varphi$ が小さいときには、D は六つの台形の面をもつ立体図形と見ることができる。その際の各辺の長さを図 10.37 に示した。辺の微妙な長さの違いを無視し (つまり、$r \simeq r_1 \simeq r_2, \theta \simeq \theta_1 \simeq \theta_2$ として)、D を直方体と思って体積を計算すると $\Delta v \simeq \Delta r\, r\, \Delta\theta\, r \sin\theta\, \Delta\varphi = r^2 \sin\theta\, \Delta r\, \Delta\theta\, \Delta\varphi$ となる。

ここで、互いに向かい合う面 adhe と面 bcgf とに注目しよう。面を台形とみなして大ざっぱに面積を計算すると、adhe の面積はほぼ $(r - \Delta r/2)^2 \sin\theta\, \Delta\theta\, \Delta\varphi$ であり、bcgf の面積は $(r + \Delta r/2)^2 \sin\theta\, \Delta\theta\, \Delta\varphi$ である (ここでも、$\theta \simeq \theta_1 \simeq \theta_2$ とした)。両者は $(r \pm \Delta r/2)^2$ の部分が微妙に異なっている。

これらの面からのわき出しを考えたいのだが、面を通過する $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の成分は、ちょうど $V_{\mathrm{r}}(r, \theta, \varphi)$ である。どちらが外向きになるかを考えれば、面 bcgf からのわき出しは、ほぼ $(r + \Delta r/2)^2 \sin\theta\, \Delta\theta\, \Delta\varphi\, V_{\mathrm{r}}(r + \Delta r/2, \theta, \varphi)$、面 adhe からのわき出しは、ほぼ

$-(r-\Delta r/2)^2\,\sin\theta\,\Delta\theta\,\Delta\varphi\,V_{\rm r}(r-\Delta r/2,\theta,\varphi)$ とわかる。これらを足して体積 Δv で割ると、

$$
\begin{aligned}
&\frac{(\text{面 bcgf と面 adhe からのわき出し})}{\Delta v}\\
&\simeq \frac{\sin\theta\,\Delta\theta\,\Delta\varphi}{r^2\,\sin\theta\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi}\times\\
&\quad\times\left\{(r+\frac{\Delta r}{2})^2\,V_{\rm r}(r+\frac{\Delta r}{2},\theta,\varphi)\right.\\
&\qquad\left.-(r-\frac{\Delta r}{2})^2\,V_{\rm r}(r-\frac{\Delta r}{2},\theta,\varphi)\right\}\\
&=\frac{1}{r^2\,\Delta r}\left\{(r+\frac{\Delta r}{2})^2\,V_{\rm r}(r+\frac{\Delta r}{2},\theta,\varphi)\right.\\
&\qquad\left.-(r-\Delta r/2)^2\,V_{\rm r}(r-\frac{\Delta r}{2},\theta,\varphi)\right\}\\
&\to\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\{r^2\,V_{\rm r}(r,\theta,\varphi)\}
\end{aligned}
\tag{10.9.20}
$$

となり、ダイバージェンスの表式 (10.9.18) の右辺第一項が導かれる（もちろん、最後は $\Delta r\searrow 0$ とした）。つまり、向かい合う面の面積が等しくなかったために、

この項は単に $\partial V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi)/\partial r$ にならず、r^2 が微分の前後に現れたのである。

残る四つの面からのわき出しについても同じような評価をすれば、ダイバージェンスの表式 (10.9.18) が得られる。注意すべきなのは、面 abcd と面 efgh の面積も異なっており、これが (10.9.18) の右辺第二項の θ 微分の部分に反映していることだ。一方、面 abfe と面 dcgh の面積は等しいので、それを反映して (10.9.18) の右辺第三項の φ 微分は素直な形をしている。

問 10.9.3.a　上の評価を完成させてダイバージェンスの表式 (10.9.18) を導け。

■詳しい導出　上に示した大ざっぱな考察では、微小量の扱いなどがいささかご都合主義的だったので、以下ではより注意深い導出をおこなう[*85]。

まず、極座標の変数についての準備をする。今、r,θ,φ

[*85] 上の評価でなっとくした人は、ここを読まなくてもいいだろう。

を固定してしまっているので、変化する極座標の変数を新たに r', θ', φ' とする。これらの変数が（D の内側で）微小に変化することを考えよう。r' の微小変化 $\Delta r'$ は、もちろん、そのまま空間での $\Delta r'$ の長さの変化に対応する。θ' の微小変化 $\Delta\theta'$ は、実際の空間では長さ $r'\,\Delta\theta'$ の変化に対応する。そして、φ' の微小変化 $\Delta\varphi'$ は、実際の空間では長さ $r'\,\sin\theta'\,\Delta\varphi'$ の変化に対応する。また、これら三つの微小変化による空間内での変化の方向は（まさに、$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r', \theta', \varphi')$, $\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r', \theta', \varphi')$, $\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r', \theta', \varphi')$ であり）互いに直交している。

以上の準備をすれば、D の体積が正確に求められる。まず、三つの微小な長さをかけあわせれば、基本的な微小体積要素 $\Delta r'\,r'\,\Delta\theta'\,r'\,\sin\theta'\,\Delta\varphi' = (r')^2\,\sin\theta'\,\Delta r'\,\Delta\theta'\,\Delta\varphi'$ が得られる。これを、D の内

側で積分すれば、D の体積を

$$
\begin{aligned}
&\Delta v = \\
&= \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} dr' \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} d\theta' \int_{\varphi-\Delta\varphi/2}^{\varphi+\Delta\varphi/2} d\varphi' \, (r')^2 \, \sin\theta' \\
&= \frac{1}{3}\{(r+\frac{\Delta r}{2})^3 - (r-\frac{\Delta r}{2})^3\} \\
&\quad \{\cos(\theta-\frac{\Delta\theta}{2}) - \cos(\theta+\frac{\Delta\theta}{2})\}\,\Delta\varphi \\
&= r^2 \, \sin\theta \, \Delta r \, \Delta\theta \, \Delta\varphi + o(\Delta v) \qquad (10.9.21)
\end{aligned}
$$

のように評価できる。$o(\Delta v)$ は、$\lim_{\Delta v \searrow 0} o(\Delta v)/\Delta v = 0$ となる量の総称である。結局、先ほどの大ざっぱな体積の評価が正確だったことがわかる。

領域 D の表面 S からのベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ のわき出し $\int_S d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V}$ を評価しよう。この作業に王道はなく、地道にやるしかない。表面 S は、図 10.36 に従って、bcgf, adhe, efgh, abcd, abfe, dcgh の六つの面に分けられる。六つの面からのわき出しを足しあげて、(10.9.19) によってダイバージェンスを求めることになる。

まず面 bcgf からのわき出しをみよう。bcgf は原点

からの距離が $r' = r + \Delta r/2$ という一定値をとる面である[*86]。ここでは、θ' と φ' の二つの変数が変化する。両者が $\Delta\theta'$, $\Delta\varphi'$ だけ微小変化したとき、対応する三次元空間での微小面積は $(r + \Delta r/2)\,\Delta\theta'\,(r + \Delta r/2)\,\sin\theta'\,\Delta\varphi' = (r + \Delta r/2)^2\,\sin\theta'\,\Delta\theta'\,\Delta\varphi'$ である。また、面の外を向いた単位ベクトルは明らかに $\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r + \Delta r/2, \theta', \varphi')$ である。よって、微小面の面素ベクトルは、

$$\begin{aligned}&\Delta\boldsymbol{a}(\theta', \varphi')\\&\quad = (r + \frac{\Delta r}{2})^2\,\sin\theta'\,\Delta\theta'\,\Delta\varphi'\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r + \frac{\Delta r}{2}, \theta', \varphi')\end{aligned} \tag{10.9.22}$$

となる。展開 (10.9.17) により、$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r + \Delta r/2, \theta', \varphi') \cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r + \Delta r/2, \theta', \varphi')) = V_{\mathrm{r}}(r + \Delta r/2, \theta', \varphi')$ だから、

[*86] これは球面の一部だから、本質的には 1766 ページで見た静電場の面積分の例と同じ計算である。

面 bcgf からのわき出しは、これを積分して、

$$\int_{\mathrm{bcgf}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} d\theta' \int_{\varphi-\Delta\varphi/2}^{\varphi+\Delta\varphi/2} d\varphi' \\ (r+\frac{\Delta r}{2})^2\,\sin\theta'\,V_{\mathrm{r}}(r+\frac{\Delta r}{2},\theta',\varphi') \tag{10.9.23}$$

となる。

次に、向かい合う面 adhe からのわき出しをみよう。計算はほとんど同じだが、原点からの距離が $r-\Delta r/2$ になること、外向きの定義がちょうど逆転することを考えて、面素ベクトルは、

$$\Delta\boldsymbol{a}(\theta',\varphi') \\ = -(r-\frac{\Delta r}{2})^2\,\sin\theta'\,\Delta\theta'\,\Delta\varphi'\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r-\frac{\Delta r}{2},\theta',\varphi') \tag{10.9.24}$$

となり、わき出しは

$$\int_{\mathrm{adhe}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V}$$
$$= -\int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} d\theta' \int_{\varphi-\Delta\varphi/2}^{\varphi+\Delta\varphi/2} d\varphi' \,(r-\frac{\Delta r}{2})^2\,\sin\theta'$$
$$V_{\mathrm{r}}(r-\frac{\Delta r}{2},\theta',\varphi') \qquad (10.9.25)$$

となる。

これら二つの面からのわき出しの和をとれば、積分

の共通部分がまとめられ、

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathrm{bcgf}\cup\mathrm{adhe}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \\
&= \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} d\theta' \int_{\varphi-\Delta\varphi/2}^{\varphi+\Delta\varphi/2} d\varphi'\ \sin\theta' \times \\
&\times \left\{ (r+\frac{\Delta r}{2})^2\, V_{\mathrm{r}}(r+\frac{\Delta r}{2},\theta',\varphi') \right. \\
&\quad \left. -(r-\frac{\Delta r}{2})^2\, V_{\mathrm{r}}(r-\frac{\Delta r}{2},\theta',\varphi') \right\} \\
&= \sin\theta\, \frac{\partial}{\partial r}\{r^2\, V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi)\}\, \Delta r\, \Delta\theta\, \Delta\varphi + o(\Delta v)
\end{aligned}
\tag{10.9.26}
$$

となることがわかる。

領域 D の体積 Δv が (10.9.21) で与えられることを思い出せば、

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi\searrow 0} \frac{1}{\Delta v} \int_{\mathrm{bcgf}\cup\mathrm{adhe}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \\
&\quad = \frac{1}{r^2}\, \frac{\partial}{\partial r}\{r^2\, V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi)\}
\end{aligned}
\tag{10.9.27}
$$

となり、ダイバージェンスの表式 (10.9.18) の右辺第一項が得られた。

次に面 efgh からのわき出しを調べる。基本的な計算方針は同じなので、少し省略しながら進もう。efgh は z-軸となす角度が一定値 $\theta' = \theta + \Delta\theta/2$ を取る面である。今度は、変数 r' と φ' が変化する。二つの量の変化による微小面積は $\Delta r'\, r'\, \sin(\theta + \Delta\theta/2)\, \Delta\varphi'$ であり、面に垂直な単位ベクトルは $\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r', \theta + \Delta\theta/2, \varphi')$ だから、面素ベクトルは

$$\Delta\boldsymbol{a}(r', \varphi') = \Delta r'\, r'\, \sin(\theta + \frac{\Delta\theta}{2})\, \Delta\varphi'\, \boldsymbol{e}^{(\theta)}(r', \theta + \frac{\Delta\theta}{2}, \varphi') \tag{10.9.28}$$

である。よって、求めるわき出しは、

$$\int_{\mathrm{efgh}} d\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{V} = \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} dr' \int_{\varphi-\Delta\varphi/2}^{\varphi+\Delta\varphi/2} d\varphi' \\ r'\, \sin(\theta + \frac{\Delta\theta}{2})\, V_\theta(r', \theta + \frac{\Delta\theta}{2}, \varphi') \tag{10.9.29}$$

となる。向かい合う面 abcd については、z-軸となす角

と外向きの定義に注意し、

$$\int_{\mathrm{abcd}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = -\int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} dr' \int_{\varphi-\Delta\varphi/2}^{\varphi+\Delta\varphi/2} d\varphi' \\ r'\,\sin(\theta-\frac{\Delta\theta}{2})\,V_\theta(r',\theta-\frac{\Delta\theta}{2},\varphi') \tag{10.9.30}$$

となる。よって両者の和は、

$$\int_{\mathrm{efgh}\cup\mathrm{abcd}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \\ = r\,\frac{\partial}{\partial\theta}\{\sin\theta\,V_\theta(r,\theta,\varphi)\}\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi + o(\Delta v) \tag{10.9.31}$$

であり、体積 Δv で割って極限をとれば、

$$\lim_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi\searrow 0}\frac{1}{\Delta v}\int_{\mathrm{efgh}\cup\mathrm{abcd}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} \\ = \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\{\sin\theta\,V_\theta(r,\theta,\varphi)\} \tag{10.9.32}$$

となる。ダイバージェンスの表式 (10.9.18) の右辺第二項が得られた。

最後に残った面 abfe と面 dcgh は、もっとも簡単なので、さらっと終わらせよう。面 abfe 上の面素ベクトルは、$\Delta\boldsymbol{a}(r,\theta') = \Delta r'\, r'\, \Delta\theta'\, \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r',\theta',\varphi+\Delta\varphi/2)$ であり、よってわき出しは、

$$\int_{\mathrm{abfe}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \int_{r-\Delta r/2}^{r+\Delta r/2} dr' \int_{\theta-\Delta\theta/2}^{\theta+\Delta\theta/2} d\theta'\, V_{\varphi}(r',\theta',\varphi+\frac{\Delta\varphi}{2}) \tag{10.9.33}$$

という素直な形になる。dcgh からのわき出しも同じように評価できて、けっきょく、

$$\lim_{\Delta r,\Delta\theta,\Delta\varphi\searrow 0} \frac{1}{\Delta v}\int_{\mathrm{abfe}\cup\mathrm{dcgh}} d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial V_{\varphi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} \tag{10.9.34}$$

が得られる。これが、ダイバージェンスの表式 (10.9.18) の右辺第三項である。

10.9.4　ラプラシアンと角運動量

グラディエントとダイバージェンスの極座標表示の応用として、ラプラシアンと（量子力学の）角運動量演算子の極座標表示をみておこう。ここで導く関係は、量子力学を学ぶ際にはきわめて重要な役割を果たす。

■ラプラシアンの極座標表示　$\psi(\boldsymbol{r})$ を二回微分可能なスカラー場とする。10.8.1 節で詳しくみたように、ラプラシアンを作用させて得られる $\triangle\psi(\boldsymbol{r})$ もスカラー場になる。ここで、$\boldsymbol{r}$ に (10.9.2) の $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を代入した $\triangle\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ は、このスカラー場の極座標での表示である。ラプラシアンをとったスカラー場の極座標表示 $\triangle\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ は、もとのスカラー場の極座標表示 $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ で表すことができるはずだ。これが、**ラプラシアンの極座標表示**である。

ラプラシアンは (10.8.1) のように $\triangle\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r})$ と定義されていたので、これまでみたグ

ラディエントとダイバージェンスの表式からラプラシアンの極座標表示が求められる。

まず、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r})$ とし、(10.9.17) によって成分 $(V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi), V_{\theta}(r,\theta,\varphi), V_{\varphi}(r,\theta,\varphi))$ を定義する。グラディエントの表式 (10.9.9) より、$V_{\mathrm{r}}(r,\theta,\varphi) = \partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)/\partial r$, $V_{\theta}(r,\theta,\varphi) = r^{-1}\,\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)/\partial\theta$, $V_{\varphi}(r,\theta,\varphi) = (r\,\sin\theta)^{-1}\,\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)/\partial\varphi$ となる。$\triangle\,\psi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ だから、これら成分をダイバージェンスの表式 (10.9.18) に代入すれば、

$$\begin{aligned}\triangle\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) =& \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right\}\\ &+\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{\sin\theta}{r}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right\}\\ &+\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right\}\end{aligned} \tag{10.9.35}$$

が得られる。微分に関係のない部分を微分の外に出して整理した形を、最終的な公式として書き出してお

こう。

$$\begin{aligned}\triangle\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) =& \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right\}\\ &+\frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right\}\\ &+\frac{1}{(r\,\sin\theta)^2}\,\frac{\partial^2\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\end{aligned} \tag{10.9.36}$$

ラプラシアンのデカルト座標での表示 (10.8.2) しか知らなければ、このややこしい形を見せられるとぎょっとするだろう。しかし、これはグラディエントの表式 (10.9.9) とダイバージェンスの表式 (10.9.18) の自然な帰結なのである。(10.9.36) でも、特に奇妙に見えるのは、第一項と第二項が単なる r と θ それぞれについての二階微分ではなく、あいだに r^2 と $\sin\theta$ という「余計な物」がはさまっていることだろう。これは、ダイ

バージェンスの表式の特徴がそのまま現れたもので、もとをたどれば、領域 D が図 10.37 のような「いびつ」な形をしていることの結果なのである。

■角運動量演算子の極座標表示　(10.3.3) のように、ナブラ演算子を $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ とする。量子力学における（軌道）**角運動量演算子**を、

$$\hat{\boldsymbol{L}} := -i\,\boldsymbol{r} \times \nabla \tag{10.9.37}$$

と定義する[*87]。量子力学における波動関数 $\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(x, y, z)$ は、この章の言葉でいえば、複素数値をとるスカラー場である。角運動量演算子を波動関数に作用させれば、

$$\hat{\boldsymbol{L}}\,\psi(\boldsymbol{r}) = -i\,\boldsymbol{r} \times \operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}) \tag{10.9.38}$$

というベクトル場が得られる。

[*87] 角運動量演算子についてまだ学んでいない場合は、ここを読む必要はない。なお、プランク定数を含めて $\hat{\boldsymbol{L}} = -i\hbar\,\boldsymbol{r} \times \nabla$ と定義することも多い。

今まで同様、ここで、$\boldsymbol{r}$ に (10.9.2) の $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)$ を代入した $\hat{\boldsymbol{L}}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))$ について調べよう。極座標表示 $\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)=r\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)$ に注意し、グラディエントの表式 (10.9.9) を用いて変形すると、

$$
\begin{aligned}
&\hat{\boldsymbol{L}}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = -i\,\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)\times\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi))\\
&=-\,i\,r\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)\times\Big\{\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)\\
&\quad+\frac{1}{r}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\\
&\qquad+\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\Big\}\\
&=i\Big\{\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\\
&\qquad-\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\Big\}
\end{aligned}
\tag{10.9.39}
$$

のように、比較的、簡単な表式が得られる。最後は基底ベクトルのベクトル積についての (10.9.7) を用いた。

(10.9.39) は角運動量演算子の素直な極座標表示だが、量子力学への応用では、$\hat{\boldsymbol{L}}=(\hat{L}_{\mathrm{x}},\hat{L}_{\mathrm{y}},\hat{L}_{\mathrm{z}})$ のよう

に角運動量演算子をデカルト座標での成分に分解し、各々の成分がどのように作用するかを知る必要がある。これを求めるには、たとえば、$\hat{L}_{\mathrm{z}} = \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \cdot \hat{\boldsymbol{L}}$ に注意して、(10.9.39) を用い、

$$
\begin{aligned}
&\hat{L}_{\mathrm{z}}\, \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \cdot \hat{\boldsymbol{L}}\, \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) \\
&= i \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial \tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi}\, \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \cdot \boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi) \right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial \tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial \theta}\, \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \cdot \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi) \right\} \\
&= -i \frac{\partial \tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial \varphi} \qquad (10.9.40)
\end{aligned}
$$

とすればよい。ただし、基底ベクトルの成分表示 (10.9.5), (10.9.6) を用いて内積を具体的に求めた。

同様に計算すれば、

$$\hat{L}_{\mathrm{x}}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = i\left\{\frac{\cos\varphi}{\tan\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} + \sin\varphi\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right\} \tag{10.9.41}$$

$$\hat{L}_{\mathrm{y}}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = i\left\{\frac{\sin\varphi}{\tan\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi} - \cos\varphi\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right\} \tag{10.9.42}$$

を示すことができる。これらの結果を使うと、昇降演算子

$$\hat{L}^{\pm} := \hat{L}_{\mathrm{x}} \pm i\,\hat{L}_{\mathrm{y}} \tag{10.9.43}$$

の作用について、

$$\hat{L}^{\pm}\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = e^{\pm i\,\varphi}\left\{\pm\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta} + \frac{i}{\tan\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right\} \tag{10.9.44}$$

が得られる。

最後に、角運動量の理論で重要になる、角運動量の二乗の演算子

$$\hat{\boldsymbol{L}}^2 := (\hat{L}_{\mathrm{x}})^2 + (\hat{L}_{\mathrm{y}})^2 + (\hat{L}_{\mathrm{z}})^2 = \frac{\hat{L}^+\,\hat{L}^- + \hat{L}^-\,\hat{L}^+}{2} + (\hat{L}_{\mathrm{z}})^2 \tag{10.9.45}$$

の作用を求めておこう[*88]。もちろん、演算子の積は、二つの演算子を次々と作用させることを意味している。たとえば、$(\hat{L}_{\mathrm{z}})^2$ の作用を考えるときには、まず (10.9.40) に従って一つ目の $\hat{L}_{\mathrm{z}}$ を作用させると、

$$(\hat{L}_{\mathrm{z}})^2\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = \hat{L}_{\mathrm{z}}\left\{-i\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi}\right\}$$

なので、波括弧の中身を新たに $\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)$ のように思って、もう一度 (10.9.40) を使い、

$$= -\frac{\partial^2\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2} \tag{10.9.46}$$

[*88] ただし、この計算は、次の 10.9.5 節で述べる方法を使った方が圧倒的に簡単にできる。

とすればよい。少しややこしいが、(10.9.44) より、同様にして、

$$
\begin{aligned}
\hat{L}^{\pm}\,\hat{L}^{\mp}\,\psi &= \hat{L}^{\pm}\left(e^{\mp i\varphi}\left\{\mp\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}\right\}\right)\\
&= e^{\pm i\varphi}\left[\pm\frac{\partial}{\partial\theta}\left(e^{\mp i\varphi}\left\{\mp\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}\right\}\right)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{i}{\tan\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(e^{\mp i\varphi}\left\{\mp\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}+\frac{i}{\tan\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}\right\}\right)\right]\\
&= -\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\theta^2}-\frac{1}{\tan\theta}\,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\theta}-\frac{1}{(\tan\theta)^2}\,\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\varphi^2}\\
&\quad\pm\frac{i}{(\tan\theta)^2}\,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}\mp\frac{i}{(\sin\theta)^2}\,\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\varphi}
\end{aligned}
\tag{10.9.47}
$$

となる（もちろん、複号同順。式が煩雑になるので、$\psi(r,\theta,\varphi)$ の引数を省略した）。

角運動量の二乗の演算子は (10.9.45) だったので、

(10.9.46), (10.9.47) を足し合わして整理すれば、

$$(\hat{\boldsymbol{L}})^2\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = -\left[\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\sin\theta\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\theta}\right\} + \frac{1}{(\sin\theta)^2}\,\frac{\partial^2\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial\varphi^2}\right] \tag{10.9.48}$$

が得られる。ラプラシアンの極座標表示 (10.9.36) と比較すると、角度部分は（定数倍を除いて）同じ形をしており、

$$\triangle\ \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left\{r^2\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,\varphi)}{\partial r}\right\} - \frac{1}{r^2}\,(\hat{\boldsymbol{L}})^2\,\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,\varphi)) \tag{10.9.49}$$

が成り立つことがわかる。この関係は、回転対称なポテンシャル中での一粒子のシュレディンガー方程式を調べるときに本質的に重要になる。

10.9.5　基底ベクトルを微分する方法

ここで、ラプラシアン、角運動量の極座標表示を求めるための、また別の自然な方法を紹介しておこう。これまでの幾何的な直感を重んじた導出とは異なった、より機械的な導出方法なので、比較してみると興味深いと思う[*89]。ラプラシアンに関する計算の手間はさほど変わらないと思うが、角運動量の二乗を扱う際にはここでの方法が圧倒的に能率的だ。

出発点となるのは、グラディエントの極座標表示 (10.9.9) である。グラディエントは (10.3.3), (10.3.4) の ∇ を使って $\mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}) = \nabla\psi(\boldsymbol{r})$ と書けるので、極座標では ∇ を

$$\begin{aligned}\nabla = \boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)\,\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta} \\ + \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{10.9.50}$$

[*89] もちろん、先を急ぐ読者はここを読む必要はない。

と表現できることがわかる。 実際、(10.9.50) を任意のスカラー場に作用させた結果が (10.9.9) と等しいことから、(10.9.50) は演算子（のベクトル）としての ∇ の完全な表現だといえる。前節までの計算法では、まず場を用意しそれを微分した結果を議論していたわけだが、ここでは、(10.9.50) のように演算子そのものを扱っていく。

■基底ベクトルの微分　さて、(10.8.3) で見たように、ラプラシアンは $\triangle = \nabla \cdot \nabla$ と書けるから、(10.9.50) を二乗して、$\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}, \boldsymbol{e}^{(\theta)}, \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\}$ が正規直交基底をなすことを使えば、

$$
\begin{aligned}
\triangle &= \left(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}\,\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&\qquad \cdot \left(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}\,\frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial \theta} + \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{(r\,\sin\theta)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
&\qquad \leftarrow \textbf{これは間違い！！}
\end{aligned}
\tag{10.9.51}
$$

のようにラプラシアンの表現を求められそうな気がする。しかし、「正解」の (10.9.36) と比較すれば、これは正しくない[*90]。

間違った結果がでてきてしまった理由は簡単だ。基底ベクトル $\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)$, $\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)$, $\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)$ は r,θ,φ の関数なので、左側の ∇ の中の微分は、右側の ∇ の中の基底ベクトルにも作用するのだ。上の計算では、これを見落としている。∇ の表現 (10.9.50) で、普通の書き方と違って基底ベクトルを左に書いたのも、こういう点に配慮してのことだった。$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi)\,\partial/\partial r$ のように、まず基底ベクトルを書いた後ろに微分を書くことで、この微分が（左の基底ベクトルには作用せず）これより右にあるものだけに作用するということを示

*90 「$\triangle = \nabla\cdot\nabla$ と表現できるのはデカルト座標の特殊性で、極座標などでは成り立たない」という注意が書いてある教科書もある。このような主張は、∇ どうしの内積を (10.9.51) の二行目のように解釈することを前提にしている。以下でみるように、$\nabla\cdot\nabla$ を演算子の積と解釈すれば、$\triangle = \nabla\cdot\nabla$ は問題なく成立する。

していたのだ。

先に進むには、三つの基底ベクトルの各々の変数についての微分を求めておく必要がある。そのためには、(10.9.3), (10.9.5), (10.9.6) の定義に戻って微分を地道に計算するのが（少々、面倒だが）手っ取り早いし間違いがない。たとえば、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\theta}\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi) &= (\cos\theta\,\cos\varphi, \cos\theta\,\sin\varphi, -\sin\theta)\\ &= \boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{10.9.52}$$

といった具合だ。もう少しややこしいところでは、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi) &= (-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)\\ &= -\sin\theta\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,\varphi) - \cos\theta\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{10.9.53}$$

などというのもある。こういう計算を全ての組み合わせについて実行した結果をまとめれば（基底ベクトル

の引数を省略して書くが)、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} = 0,\ \frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} = \boldsymbol{e}^{(\theta)},\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} = \sin\theta\,\boldsymbol{e}^{(\varphi)} \\
&\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}^{(\theta)} = 0,\ \frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}^{(\theta)} = -\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})},\ \frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}^{(\theta)} = \cos\theta\,\boldsymbol{e}^{(\varphi)} \\
&\frac{\partial}{\partial r}\boldsymbol{e}^{(\varphi)} = 0,\ \frac{\partial}{\partial \theta}\boldsymbol{e}^{(\varphi)} = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}^{(\varphi)} = -\sin\theta\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} - \cos\theta\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}
\end{aligned}
\tag{10.9.54}
$$

となる。いったんこの表を作っておけば、後の計算は比較的スムーズに進む。

ところで、(10.9.54) のような関係をみたら、三つの基底ベクトルを図に描いて、なぜこのような結果になるかを図形的に理解してみるのは有益だ[*91]。基底ベクトルの微分が 0 でないのは、要は、極座標が「いびつ」になっていることの現れである。

[*91] 前野昌弘さんの「極座標のラプラシアンの出し方いろいろ」(`http://homepage3.nifty.com/iromono/PhysTips/Lap.html`) というページに、そのような図と解説がある。

■ラプラシアンの表現　(10.9.51) の一行目のラプラシアンの表式はもちろん正しいので、ここから出発して正しいラプラシアンの極座標表示を求めよう。一度に計算するのは大変なので、左側の ∇ を三つの項の和に分けて、それぞれと右側の ∇ との内積を評価する。

まず、一項目について、ウォーミングアップを兼ねて、地道に定義を書くと、

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}\,\frac{\partial}{\partial r})\cdot\nabla \\
&=\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}\,\frac{\partial}{\partial r}+\boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}+\boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

である。ここで r 微分を括弧の中に作用させるのだが、(10.9.54) を見ると、どの基底ベクトルの微分も 0 になる。よって、結果は単純に、

$$
\begin{aligned}
&=\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}\cdot\left(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right.\\
&\qquad\left.+\boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{\partial}{\partial r}\,\frac{1}{r\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)
\end{aligned}
$$

となる。内積を計算すると、$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} \cdot \boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} = 1$ のところだけ生き残って、けっきょく

$$= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \tag{10.9.55}$$

と単純な結果が得られる。これでは、(10.9.51) の間違った計算のままだが、話が変わってくるのはこの先だ。

二項目についても、(10.9.54) の表を参照して同じように計算すると、

$$\begin{aligned}
&(\boldsymbol{e}^{(\theta)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}) \cdot \nabla \\
&= \frac{1}{r} \boldsymbol{e}^{(\theta)} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \Big(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}^{(\theta)} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
&\quad + \boldsymbol{e}^{(\varphi)} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \Big) \\
&= \frac{1}{r} \boldsymbol{e}^{(\theta)} \cdot \Big(\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \boldsymbol{e}^{(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\
&\qquad + \boldsymbol{e}^{(\varphi)} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \boldsymbol{e}^{(\theta)} \frac{\partial}{\partial r} - \boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Big)
\end{aligned} \tag{10.9.56}$$

のように、$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}$ と $\boldsymbol{e}^{(\theta)}$ を微分した項が生き残る。内積をとれば、

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \tag{10.9.57}$$

となり、意外なところから r の微分が顔を出すことがわかる。座標系の「いびつさ」の現れだ。

三項目の計算がもっとも面白いので読者にまかせよう。上と同様に計算すれば、二つの「意外な」項が出てきて

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{e}^{(\varphi)}\frac{1}{r\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\cdot\nabla\\&\quad= \frac{1}{(r\,\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r^2\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{10.9.58}$$

という形になる。

(10.9.55), (10.9.57), (10.9.58) を足し合わせれば、

$$
\begin{aligned}
\triangle &= \nabla \cdot \nabla \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&\quad + \frac{1}{(r\,\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \\
&= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\,r^2\,\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial \theta} \\
&\quad + \frac{1}{(r\,\sin\theta)^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \qquad (10.9.59)
\end{aligned}
$$

となり、めでたく (10.9.36) と同じ表式が得られる。

問 10.9.5.a　ここでの方法を用いて、ダイバージェンスの極座標表示 (10.9.18) を求めよ。

■角運動量の二乗の表現　次に角運動量の二乗 $(\hat{\boldsymbol{L}})^2$ の極座標表示を調べよう。既に述べたように、この計算については、本節の方法が有効だ。

出発点になるのは、角運動量演算子 $\hat{\boldsymbol{L}}$ の表示

$$\hat{\boldsymbol{L}} = i\left(\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,\varphi)\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \boldsymbol{e}^{(\varphi)}(r,\theta,\varphi)\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{10.9.60}$$

である。これは、(10.9.39) の表式から直ちにわかるし、もちろん、角運動量演算子の定義 (10.9.37) に ∇ の表式 (10.9.50) を代入しても得られる。

この量の二乗を知りたいわけだが、ラプラシアンの計算と同様、(10.9.54) の表を参照し、微分の順番に注

意して計算すると、

$$
\begin{aligned}
(\hat{\boldsymbol{L}})^2 &= -\left(\boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\quad \cdot \left(\boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{\sin\theta}\boldsymbol{e}^{(\theta)}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} - \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{\sin\theta}\boldsymbol{e}^{(\theta)}\cdot\left(\boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\varphi} + \boldsymbol{e}^{(\theta)}\,\cos\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \\
&\quad + \boldsymbol{e}^{(\varphi)}\cdot\left(-\boldsymbol{e}^{(\varphi)}\,\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right) \\
&= -\frac{1}{(\sin\theta)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\
&= -\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\,\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{(\sin\theta)^2}\,\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}
\end{aligned}
\tag{10.9.61}
$$

となり、(10.9.48) と同じ表式が得られる（慣れてきただろうから、三行目では内積をとって 0 になる項を最初から書かなかった)。10.9.4 節の計算と違って、デカ

ルト座標を経由せず直接 $(\hat{\boldsymbol{L}})^2$ を求めているので、計算が能率的になったのだ。

10.9.6　円筒座標の場合

最後に、**円筒座標** (cylindrical coordinate) についても、場の微分の極座標表示をみておこう。導出は、極座標の場合に比べると、はるかに易しいので省略する。

円筒座標は、二次元の極座標を三次元の座標の一部に適用したものである。三次元空間の点 (x, y, z) を変数の組 (r, θ, z) で、

$$x = r\,\cos\theta, \quad y = r\,\sin\theta, \quad z = z \tag{10.9.62}$$

のように表す（三つ目の式はマヌケだが、言いたいことは分かると思う）。ここでも、(r, θ, z) に三次元空間の点を対応させる

$$\boldsymbol{r}(r, \theta, z) := (r\,\cos\theta, r\,\sin\theta, z) \tag{10.9.63}$$

を定義しておくと便利だ。極座標の (10.9.2) と同じ $\boldsymbol{r}$ という文字を使うけれど、混乱の心配はないだろう。

円筒座標系で基本となる基底ベクトルは、

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,z) := \frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta,z)}{\partial r} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \tag{10.9.64}$$

$$\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,z) := \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta,z)}{\partial \theta} = (-\sin\theta, \cos\theta, 0) \tag{10.9.65}$$

$$\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} := \frac{\partial \boldsymbol{r}(r,\theta,z)}{\partial z} = (0,0,1) \tag{10.9.66}$$

の三つで、これらを合わせた $\{\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,z), \boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,z), \boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\}$ も右手系の正規直交系をなす。

$\psi(\boldsymbol{r}) = \psi(x,y,z)$ を任意のスカラー場とし、$\tilde{\psi}(r,\theta,z) := \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,z))$ をその極座標表示とする。スカラー場のグラディエントの円筒座標での表示は

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,z)) &= \frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,z)}{\partial r}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,z) \\ &\quad + \frac{1}{r}\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,z)}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,z) + \frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,z)}{\partial z}\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})}\end{aligned} \tag{10.9.67}$$

である。

ベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の成分表示
$(V_{\mathrm{r}}(r,\theta,z), V_{\theta}(r,\theta,z), V_{\mathrm{z}}(r,\theta,z))$ を展開

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,z)) = V_{\mathrm{r}}(r,\theta,z)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{r})}(r,\theta,z) + V_{\theta}(r,\theta,z)\,\boldsymbol{e}^{(\theta)}(r,\theta,z) + V_{\mathrm{z}}(r,\theta,z)\,\boldsymbol{e}^{(\mathrm{z})} \tag{10.9.68}$$

によって定義する。ダイバージェンスの円筒座標表示は、

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}(r,\theta,z)) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r\,V_{\mathrm{r}}(r,\theta,z)\} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_{\theta}(r,\theta,z)}{\partial\theta} + \frac{\partial V_{\mathrm{z}}(r,\theta,z)}{\partial z} \tag{10.9.69}$$

である。最後に、ラプラシアンの円筒座標表示は、

$$\triangle\ \psi(\boldsymbol{r}(r,\theta,z)) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\,\frac{\partial\tilde{\psi}(r,\theta,z)}{\partial r}\right\} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\tilde{\psi}(r,\theta,z)}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\tilde{\psi}(r,\theta,z)}{\partial z^2} \tag{10.9.70}$$

となる。

問 10.9.6.a 以上の結果を導け。

10.10　まとめといくつかの便利な公式

場の微分と積分についてずっと見てきたが、ずいぶんと長い章になってしまった。だいじな話がいろいろなところに散らばっているので、きわめて重要なことがらだけを簡単にまとめておこう。

10.10.1 節では場の積分を、10.10.2 節では場の微分を、10.10.3 節では積分定理を、まとめる。10.10.4 節では、今後の応用で便利な微分についての公式を列挙する。

10.10.1　場の積分のまとめ

場の積分の定義をまとめておこう。

向きのついた道 p に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の線積

分は、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{\ell}_i\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) \quad (10.2.7)$$

と定義する。$\Delta\boldsymbol{\ell}_i$ は、道 p を N 本のベクトルに分割した内の、一つの線素ベクトルであり、$\boldsymbol{r}_i$ はその位置。道がパラメター s $(a \leq s \leq b)$ で $\boldsymbol{\ell}(s)$ とパラメター表示されているとき、線積分を

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_a^b ds\,\frac{d\boldsymbol{\ell}(s)}{ds}\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{\ell}(s)) \quad (10.2.31)$$

のように一変数の積分で書くことができる。

表裏の区別のある面 S 上でのベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分は、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) := \lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\Delta\boldsymbol{a}_i\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) \quad (10.5.3)$$

と定義する。$\Delta\boldsymbol{a}_i$ は、面 S を N 個の微小な面に分割した内の、一つの面素ベクトルであり、$\boldsymbol{r}_i$ はその位置。

面素ベクトルの大きさは微小面の面積に等しく、方向は微小面から垂直で裏から表へ向かう向き。

三次元的な領域 D 内でのスカラー場 $\varphi(\boldsymbol{r})$ の体積積分は、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\,\varphi(\boldsymbol{r}) := \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{N} \Delta v_i\,\varphi(\boldsymbol{r}_i) \qquad (10.7.19)$$

と定義する。Δv_i は、領域 D を大きさが ε 以下の微小領域に分割した内の、一つの微小領域の体積であり、$\boldsymbol{r}_i$ はその位置。体積積分は座標表示して、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\,\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\int\int_{(x,y,z)\in D} dx\,dy\,dz\,\varphi(x,y,z) \qquad (10.7.20)$$

と表すこともできる。

10.10.2　場の微分のまとめ

場の微分についてもまとめておこう。

まず、ナブラ演算子は、

$$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \tag{10.3.3}$$

であったことを思い出しておこう。

グラディエントは、スカラー場を微分してベクトル場をつくる微分演算子だ。グラディエントの本質を表すのは、座標を微小に $\boldsymbol{\Delta r}$ だけずらした際のスカラー場の変化についての

$$\varphi(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{\Delta r}) - \varphi(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{\Delta r} + O(|\boldsymbol{\Delta r}|^2) \tag{10.3.5}$$

という関係である。グラディエントの座標表示は、

$$\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) = (\frac{\partial \varphi(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial \varphi(\boldsymbol{r})}{\partial z}) = \nabla \varphi(\boldsymbol{r}) \tag{10.3.2}$$

となる。

ローテーションは、ベクトル場を微分してベクトル場をつくる微分演算子だ。ローテーションの本質を表すのは、小さな閉じた道 c に沿ったベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$

の線積分（循環）についての

$$\int_c d\boldsymbol{\ell}\cdot\boldsymbol{V} = \Delta\boldsymbol{a}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + O(|\Delta\boldsymbol{a}|^{3/2}) \quad (10.4.13)$$

という関係である。ここで、$\Delta\boldsymbol{a}$ は道 c を境界にもつ微小面の面素ベクトル。ローテーションの座標表示は、

$$\begin{aligned}\mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \Bigg(&\frac{\partial V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r})}{\partial y} - \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial z}, \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial z} - \frac{\partial V_{\mathrm{z}}(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \\ &\frac{\partial V_{\mathrm{y}}(\boldsymbol{r})}{\partial x} - \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(\boldsymbol{r})}{\partial y}\Bigg) \qquad (10.4.11)\\ = \nabla\times\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) &\qquad (10.4.12)\end{aligned}$$

である。

ダイバージェンスは、ベクトル場を微分してスカラー場をつくる微分演算子だ。ダイバージェンスの本質を表すのは、小さな閉じた面 S 上でのベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ の面積分についての

$$\int_S d\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{V} = \Delta v\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) + O((\Delta v)^{4/3}) \quad (10.7.8)$$

という関係である。ここで、Δv は S で囲まれる領域の体積。ダイバージェンスの座標表示は、

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) &= \frac{\partial V_{\mathrm{x}}(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial V_{\mathrm{y}}(x,y,z)}{\partial z} \\ &= \nabla\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \qquad (10.7.7)\end{aligned}$$

である。

10.10.3　積分定理

ベクトル解析の強力な結果である、三つの積分定理をまとめておこう。すでに強調したように、これら積分定理では、左辺は、ある場の量の微分をある図形上で積分したものであり、右辺は、その場の量を図形の境界で積分したものになっている。

グラディエントの積分定理（定理 10.2）。p を $\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}$ から $\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}$ に向かう任意の道、$\varphi(\boldsymbol{r})$ を任意のスカラー場とすると、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in p} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{B}}) - \varphi(\boldsymbol{r}_{\mathrm{A}}) \quad (10.3.12)$$

が成り立つ。

ストークスの定理（定理 10.5）。S を任意の表裏の区別のある面、∂S を S の境界の道（の集まり）、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とすると、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in\partial S} d\boldsymbol{\ell}(\boldsymbol{r})\cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \tag{10.6.11}$$

が成り立つ。

ガウスの定理（定理 10.10）。D を三次元空間の任意の領域、S をその表面、$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とすると、

$$\int_{\boldsymbol{r}\in D} dv(\boldsymbol{r})\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) = \int_{\boldsymbol{r}\in S} d\boldsymbol{a}\cdot \boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}) \tag{10.7.24}$$

が成り立つ。

10.10.4　場の微分についての公式

さいごに、場の微分について、応用の際に便利な公式を列挙しておこう。今まで、これらの公式は特に示

さなかったが、すべて、座標表示して根性で計算すれば確かめられるものばかりだ。計算技術の修練も兼ねて、ぜひ、すべて導出しておくことをおすすめする。

これらの公式についても、積分表示をつかった（座標に依存しない）エレガントな導出ができればうれしいと思ったのだが、どうも、自然なものができなかった。読んで楽しいような導出法があれば、紹介したいので、ぜひ教えて下さい。

以下では、$\varphi(\boldsymbol{r})$, $\psi(\boldsymbol{r})$ を任意のスカラー場、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ を任意のベクトル場とする。

■場の積の一階微分についての公式　一変数関数の積の微分については、$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ という便利な公式がある。場の微分について、これに相当する積の微分公式を列挙する。

グラディエントを含む公式から。グラディエントはスカラー場に作用することを思い出そう。まず二つの

スカラー場の積については、

$$\mathrm{grad}(\varphi(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r})) = \varphi(\boldsymbol{r})\ \mathrm{grad}\,\psi(\boldsymbol{r}) + \psi(\boldsymbol{r})\ \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{10.10.1}$$

が成り立つ。これは、単なる積の微分の公式だから目新しくはない。二つのベクトル場の内積 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ はスカラー場なので、そのグラディエントをとることができる。すると、

$$\begin{aligned}&\mathrm{grad}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))\\&=(\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})+(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{grad})\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\\&+\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{10.10.2}$$

が成り立つ。これは、ややこしい。ここで、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{grad}$ は、座標表示すれば

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{grad}=&A_{\mathrm{x}}(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial x}+A_{\mathrm{y}}(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial y}\\&+A_{\mathrm{z}}(x,y,z)\,\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned} \tag{10.10.3}$$

となるスカラー的な微分演算子である。

次にローテーション。ベクトル場に作用することを思い出す。スカラー場とベクトル場の積については、

$$\mathrm{rot}(\varphi(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = \varphi(\boldsymbol{r})\ \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \times \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{10.10.4}$$

となる。すなおな積の微分になっている。第二項はスカラー場の微分だから自然にグラディエントがでてきている。二つのベクトル場のベクトル積のローテーションは、ややこしく、

$$\begin{aligned}&\mathrm{rot}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))\\&= (\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{grad})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - (\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{grad})\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\\&+ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{10.10.5}$$

となる。(10.10.2) と見比べよう。

さいごに、ダイバージェンス。これもベクトル場に作用するから、ローテーションと同じ二種類を考える。スカラー場とベクトル場の積については、

$$\mathrm{div}(\varphi(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})) = \varphi(\boldsymbol{r})\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \cdot \mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{10.10.6}$$

であり、(10.10.4) と比べるとおもしろい。次に、二つのベクトル場のベクトル積のダイバージェンスをとると、

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \tag{10.10.7}$$

となる。ローテーションが登場するところが面白い。これらの公式は二つともきれいだ。

■二階微分についての公式　二階微分についても、いくつかの公式を書いておこう。

まず、

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}=0 \tag{10.4.16}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}=0 \tag{10.7.11}$$

の二つは、本文中で議論した重要な関係だ。

また、

$$\triangle\,\varphi(\boldsymbol{r})=\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{10.8.1}$$

$$\triangle\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})-\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{10.8.19}$$

は、どちらもラプラシアンの定義といってよい。ラプラシアンの座標表示は、スカラー場に作用する場合もベクトル場に作用する場合も、

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{10.8.2}$$

という二階微分の和だ。

ラプラシアンについての積の微分の公式として、きれいで有用なのは、

$$\begin{aligned}\triangle\,(\varphi(\boldsymbol{r})\,\psi(\boldsymbol{r})) =& \varphi(\boldsymbol{r})\ \triangle\ \psi(\boldsymbol{r}) + \psi(\boldsymbol{r})\ \triangle\ \varphi(\boldsymbol{r}) \\ &+ 2(\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r}) \cdot \operatorname{grad}\psi(\boldsymbol{r}))\end{aligned} \tag{10.10.8}$$

である。

また、$f(x)$ を任意の一変数関数とするとき、合成関数の微分則

$$\triangle\, f(\varphi(\boldsymbol{r})) = f'(\varphi(\boldsymbol{r}))\,\triangle\,\varphi(\boldsymbol{r}) + f''(\varphi(\boldsymbol{r}))\,|\operatorname{grad}\varphi(\boldsymbol{r})|^2 \tag{10.10.9}$$

がある。

問 10.10.4.a　以上の公式で本文中で証明していない

ものを証明せよ。

索引

Bernoulli, 801

Cauchy, 178

de Morgan, 64
Duffing, 698

Einstein, 10
Euclid, 80
Euler, 340

Feynman, 379
Fibonacci, 1275
Frobenius, 1344

Galilei, 5
Gauss, 201

Kepler, 579
Kirchhoff, 712
Kolmogorov, 1459
Kronecker, 28

Lagrange, 432
Landau, 292
Lebesgue, 490
Lie, 1450

Maclaurin, 421
Markov, 1377
Maxwell, 736

Napier, 340
Newton, 278

Perron, 1344
Pythagoras, 156

Riemann, 12
Rolle, 449

Schrödinger, 579
Schur, 1254
Schwarz, 888
Sommerfeld, 10
Stokes, 1796

Taylor, 428

Wigner, 8
WolframAlpha, 36, 219
Wronski, 1562

Zermelo, 115

アークコサイン, 387
アークサイン, 387
アークタンジェント, 387
位相, 409
一次独立
　幾何ベクトルが—, 898
位置ベクトル, 873
一様収束, 358
一様連続
　一変数関数が—, 266
一般解, 594, 746
インピーダンス, 728
上三角行列, 1037, 1171, 1255
運動学, 456, 950
n 回微分可能, 417
n 乗根, 188
エネルギー, 709, 781, 819
エルミート行列, 1066
エルミート共役
　行列の, 1041
　ベクトルの, 982
エルミート行列
　行列の指数関数と—, 1436
　—の固有値、固有ベクトル, 1283
　—のスペクトル分解, 1287
　—の対角化, 1281
演算子, 1690
円周率, 377
円筒座標, 1958
円筒座標表示
　グラディエントの—, 1959
　ダイバージェンスの—, 1960
　ラプラシアンの—, 1960
オイラーの公式, 402
オイラー角, 1063
オームの法則, 718
オセロ, 116
解, 581, 745
　微分方程式の—, 576
開区間, 192
階乗, 219, 334

回転, 1719
回転行列
　三次元の—, 1060
　二次元の—, 1056
カオス, 703
下界, 193
可換
　行列が—, 1033
角運動量演算子, 1940, 1958
角速度, 962
角速度ベクトル, 963
確率, 1381
確率過程, 1377
確率行列, 1380
確率分布, 1381, 1457
過減衰, 661
重ね合わせの原理, 1532
可積分, 473
加速度, 954
カノニカル分布, 1405
加法定理, 403
関数, 232, 235
完全性, 1007
完全反対称記号, 1146
簡単のため, 456
カール, 1719
外積, 890, 924
外部ディリクレ問題, 1874
ガウスの定理, 1843
ガウスの発散定理, 1843
含意, 68
ガンマ関数, 542
規格化条件
　確率行列の—, 1379
　確率の—, 1382
幾何ベクトル, 972
奇置換, 1137
基底, 905
　代数ベクトルの—, 994
基本解, 1536
基本行列, 1550
既約性, 1346, 1388
球座標, 850
Q 値, 724
共通部分, 145
鏡映変換, 1072
共振, 675
強制振動, 667
共鳴, 675
共役
　行列の, 1041
　ベクトルの, 982
極形式, 409
極限, 162, 241
極座標, 1908
　三次元空間の—, 850
　二次元の—, 832
極座標表示
　角運動量演算子の—,
　　1941, 1958

グラディエントの—, 1914
ダイバージェンスの—, 1920
ナブラの—, 1948
ラプラシアンの—, 1937, 1955
曲線の長さ, 1685
極分解 , 1336
曲面の面積, 1791
虚数単位, 198
虚部, 207
キルヒホッフの法則, 712
偽, 48
逆関数, 311, 316
三角関数の—, 386, 407
—の微分, 322, 407
—の連続性, 320
ハイパボリック・タンジェントの—, 414
逆行列, 1212
行列の指数関数と—, 1444
二次の正方行列の—, 1091
逆格子, 914
逆写像, 234
逆命題, 74
行ベクトル, 977
行列, 1015
—の積, 1022
行列式, 1084
ギリシャ文字, 38
空集合, 140
区分的になめらか, 1654
クロネッカー積
ベクトルの, 1051
クロネッカーのデルタ, 28
—の使い方, 1029
偶奇性, 1136
偶置換, 1137
グラディエント, 1689
—の円筒座標表示, 1959
—の極座標表示, 1914
グラフ, 1399
グラム行列, 1201
グラム・シュミットの直交化, 1011
グーグル, 1407
グーグル行列, 1421
系, 17
結合則
幾何ベクトルの和の—, 879
ケプラーの法則, 585
ゲーム, 109
ゲームの木, 123
ゲーム理論, 111
元, 136
原始関数, 499

原始性, 1370
減少関数, 239
減衰振動, 659
減衰の微分方程式, 586
原点, 828
ゲージ変換, 1901
コイン, 781
交換子, 1032
交換する
　行列が—, 1033
交換則
　幾何ベクトルの和の—, 878
広義積分, 507
恒等写像, 1131
勾配, 1689
公理, 16
コーシー=シュワルツ不等式
　幾何ベクトルの—, 888
　代数ベクトルの—, 1002
弧度法, 377
固有値, 1245
固有値方程式, 1245
固有ベクトル, 1245
固有方程式, 1247
コルモゴロフの先進方程式, 1459
コーシー列, 179
合成写像, 234
互換, 1132
最小値, 195
最大値, 195
三角関数, 375
　—の逆関数, 386, 407
三角不等式
　幾何ベクトルの—, 878
　実数の—, 197
　代数ベクトルの—, 1001
　複素数の—, 212
三段論法, 72, 108
座標, 829
座標系, 828
座標変換, 838, 841
指数関数, 222, 333
　行列の—, 1433
下三角行列, 1037, 1171
射影
　幾何ベクトルのある方向への, 886
射影行列, 1051, 1076, 1254
斜乗, 1093, 1123
写像, 231
周期, 649
集合, 136
収束, 162
縮退, 1247
主成分分析, 1305
シュワルツ不等式
　幾何ベクトルの—, 888
　代数ベクトルの—, 1002

シューア分解, 1255
消去法, 1224
詳細つり合いの条件, 1403, 1465
証明, 18
初期条件, 594
初期値, 594
真, 48
真偽表, 57
真部分集合, 144
次元
　物理量の—, 32
実行列, 1015
実対称行列, 1065
　—の固有値、固有ベクトル, 1291
　—のスペクトル分解, 1292
　—の対角化, 1292
実部, 207
実ベクトル, 976
重心座標, 682
十分条件, 105
述語, 82, 83
寿命, 597
循環, 1657
純虚数, 207
上界, 193
常微分方程式, 743
剰余項, 434
　せきぶんけいの
　　積分形の—, 518
推移確率, 1379
推移率, 1456
数式処理, 36
数値計算, 36
数列, 160
数列の発散, 168
スカラー場, 1627
スカラー, 871
スカラー三重積, 929
スカラー積, 881
ストークスの定理
　一般の—, 1808
　簡単な場合の—, 1803
スペクトル分解
　エルミート行列の—, 1287
　実対称行列の—, 1292
　直交行列の—, 1316
　ユニタリー行列の—, 1316
正規行列
　—の対角化, 1315
正規直交基底
　幾何ベクトルの—, 909
　代数ベクトルの—, 1005
斉次方程式, 1239
正則, 1212
正の半定符号行列, 1326

正方行列, 1015
関孝和, 1085
積の記号, 31
積分, 463, 474
積分可能, 473
積分の変数変換, 510, 758
遷移確率, 1379
遷移率, 1456
線形, 744
線形結合, 984
　微分方程式の解の—, 786
線形写像, 1047
線形従属
　幾何ベクトルが—, 899
　代数ベクトルが—, 989
線形独立
　幾何ベクトルが—, 898
　—性の判定法, 1201
　代数ベクトルが—, 988
　微分方程式の解が—, 1534
線形変換, 1047
先進方程式, 1459
線積分
　スカラー場の—, 1684
　ベクトル場の—, 1652
線素ベクトル, 1650
ゼータ関数, 223
絶対収束, 216
絶対値
　幾何ベクトルの—, 874, 920
　代数ベクトルの—, 1000
　複素数の—, 211
ゼロ行列, 1018
ゼロベクトル, 872, 983
全射, 233
全単射, 234
全微分, 301
双曲線関数, 410
相対座標, 683
双対基底, 911
速度, 953
束縛変数, 23
素数, 80
増加関数, 239
対角化, 1262
　エルミート行列の—, 1281
　実対称行列の—, 1292
　正規行列の—, 1315
　直交行列の—, 1316
　同時—, 1317
　ユニタリー行列の—, 1315
対角行列, **1019**, 1037
対偶命題, 74, 108
対数関数, 366
体積積分, 1839
多重和, 26

たすきがけ, 1093, 1123
縦ベクトル, 976
単位, 31
単位行列, 1018
単位ベクトル, 876
　代数的な, 1001
単射, 234
単調減少関数, 239
単調増加関数, 239
単調非減少関数, 240
単調非増加関数, 240
代数学の基本定理, 201
代数ベクトル, 972
ダイバージェンス, 1827
　—の円筒座標表示, 1960
　—の極座標表示, 1920
ダガー, 982
ダッシュ, 287
ダフィング方程式, 698
ダミー変数, 23
値域, 232
置換, 1130
置換積分, 510, 758
中間値の定理, 255
調和関数, 1871
調和振動子, 645
直積, 146
直交
　幾何ベクトルが—, 876
　代数ベクトルの—, 999
直交化, 1011
直交行列, 1069
　—の固有値、固有ベクトル, 1316
　—のスペクトル分解, 1316
　—の対角化, 1316
直交射影行列, 1051, 1078
強い連結性
　行列の—, 1370
定義, 17
定義域, 233
定常分布, 1388, 1390, 1462
定数, 22
定数変化法, 791
定積分, 463, 474
定ベクトル, 1647
テイラー級数, 429
テイラー展開, 429
テイラーの定理, 431, 517
定理, 17
転置
　行列の—, 1039
　ベクトルの—, 981
転置行列, 1039
ディターミナント, 1093
ディリクレ問題, 1874
デカルト座標, 830
デル, 1690
デルタ, 28

電圧降下についてのキルヒホッフの法則, 713, 735
電位, 1627
電流についてのキルヒホッフの法則, 712
特異値分解 , 1337
特殊関数, 542
特性方程式, 1247
特解, 615, 746, 1547
トレース, 1080
トロッター公式, 1450
導関数, 296
—は「分数」か？, 299, 306, 326, 763
同時対角化可能, 1317
同次方程式, 1239
同値
述語が—, 84, 107
命題が—, 58
ド・モルガンの法則
述語についての—, 87
命題についての—, 64
量化子についての—, 95, 109, 128
内積
幾何ベクトルの—, 881, 922
代数ベクトルの—, 996
内部ディリクレ問題, 1874
ナブラ, 1690
—の極座標表示, 1948
二階の導関数, 417
二項係数, 329
二項定理, 329
二次形式, 1300
二重和, 26
任意定数, 593
年代測定, 602
排中律, 48
ハイパボリック, 412
背理法, 77
—の本質的な例, 182
掃き出し法, 1224
発散
数列の—, 168
半減期, 595
場, 1627
パウリ行列, 1035, 1288
パリティー, 1136
引数, 231
非周期的, 1391
非線形, 744
非線形微分方程式, 699
左極限, 241
必要十分条件, 84, 108
必要条件, 105
非負行列, 1326
微係数, 286
微分, 286, 296
—の基本的なルール, 302

—は「分数」か？, 299, 306, 326, 763
微分可能
ある点で—, 286
ある範囲で—, 296
微分形式, 301, 464
微分積分学の基本定理, 497
微分方程式, 575
ピタゴラスの定理, 384, 831
フィボナッチ数列, 1275
複素インピーダンス, 728
複素共役, 209
複素行列, 1015
複素数, 199
複素平面, 207
複素ベクトル, 977
二人零和有限確定完全情報ゲーム, 111
不連続, 248
部分集合, 144
部分積分, 508
分配則
幾何ベクトルの和の—, 880
プライム, 287
閉区間, 192
平行
ベクトルが—, 876
平行四辺形の面積, 894, 932, 1104
平行六面体の体積, 932
平方根, 188
2 の —, 48
非負行列の —, 1328
ヘッセ行列, 1602
偏角, 409
変換, 232
変数, 21
関数における—, 235
変数分離, 754
変数変換
積分の—, 510, 758
偏導関数, 1612
偏微分, 1612
偏微分係数, 1611
偏微分方程式, 743
変分原理, 1323
べき級数, 220
べき乗, 187, 219, 370
べき乗法, 1430
ベクトル, 871
ベクトル三重積, 935
ベクトル積, 890
ベクトル場, 1627
ベクトルポテンシャル, 1888
ベルヌーイの微分方程式, 801
ペロン・フロベニウスの定理, 1344
ページランク, 1407
補題, 17

マクローリン級数, 421, 436, 526
マクローリン展開, 421
マスター方程式, 1459
マルコフ過程, 1455
マルコフ連鎖
　離散時間の—, 1377
　連続時間の—, 1454
右極限, 241
右手系, 847
右ネジの規則, 847
ミニマックス原理, 1329
無限級数, 214
無限集合, 138
無限大に発散, 167
無理数, 176
命題, 47
面積分
　スカラー場の—, 1790
　ベクトル場の—, 1756
面素ベクトル, 1723, 1754
モンテカルロ法, 1407
モード, 1590
有限集合, 138
有理化
　無理式の積分における—, 1774
有理数, 152
ユニタリー行列, 1075
　行列の指数関数と—, 1437
　—の固有値、固有ベクトル, 1312
　—のスペクトル分解, 1316
　—の対角化, 1315
ユークリッド空間, 860
余因子, 1188
余因子行列, 1213
要素, 136
横ベクトル, 977
ラグランジュの剰余項, 434
ラプラシアン, 1867
　—の円筒座標表示, 1960
　—の極座標表示, 1937, 1955
ラプラス方程式, 1871
ランダウの記号, 292
ランダムウォーク, 1401
力学, 950
量化子, 89
量子統計力学, 1452
量子力学, 1045, 1066, 1074, 1279, 1288, 1316, 1324, 1330, 1367, 1450
臨界減衰, 665
リーの積公式, 1450
リーマン積分, 489
ルベーグ積分, 490

レヴィ・チビタの記号, 942
　一般次元での—, 1146
　三次元の—, 1125
　二次元の—, 1109
列ベクトル, 976
連結性
　行列の—, 1346
連鎖律, 305
連成振動, 1591
連続
　一変数関数が—, 248, 250
　多変数関数が—, 271
連続関数, 248
連続極限, 1856
ロンスキアン, 1562
ロンスキー行列式, 1562
論理同値, 58
ローテーション, 1719
わき出し, 1827
和集合, 144
和の記号, 21