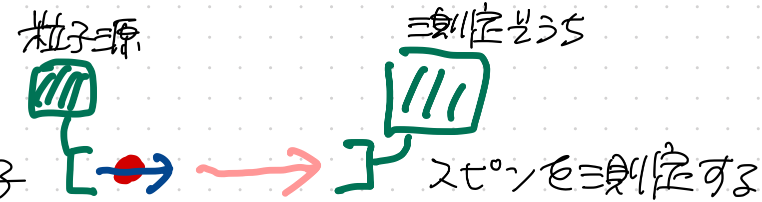
〈量子力学と「局所実在性」〉

§スピン1つの系での実験



スピン状態 $|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$ の粒子

- $\hat{S}_x$ を測定 → 結果はかならず →
- $\hat{S}_z$ を測定 → 結果は確率的　確率 $\frac{1}{2}$ で ↑ or ↓

- 測定結果 (↑ or ↓) は測定するまで決まらない
- ここでの確率は (我々の無知を表わすのでなく) 本質的な確率

これは普通の考え方ではない!!

普通の考え方

- 物理量の値 (たとえば ↑ or ↓) は我々が測定しなくても決まっている → 物理量の「実在性」
- 我々は測定前は物理量の値を知らず, 測定して知る.

(日常的なできごと (裏返したトランプ, …) はすべてそう.
古典物理学 (Newton 力学, 電磁気, 相対論, …) でもこの考えが通用する.)

もし「普通の考え」が正しいなら $|\rightarrow\rangle$ という記述は不完全 → 「隠れた変数」があるはず

(Eistein, Padolsky, Rosen 1935)

- $\hat{S}_x$を測定 → 結果はかならず →
- $\hat{S}_z$を測定 → 結果は確率的　確率$\frac{1}{2}$で ↑ or ↓

この実験結果を「普通の考え方」(隠れた変数)で再現できるか? → Yes.

「隠れた変数のモデル (ただの例)

- 粒子には (σ_x, σ_z) という変数が「書かれて」いる.　$\sigma_x =$ →, ←, $\sigma_z =$ ↑, ↓
- $\hat{S}_x$を測定すると σ_x が得られ, $\hat{S}_z$を測定すると σ_z が得られる.
- 粒子が粒子源をでるとき (→, ↑) か (→, ↓) が確率$\frac{1}{2}$で書きこまれる.

(→, ↑) → $\lambda = 1$　(→, ↓) → $\lambda = 2$

λ	(σ_x, σ_z)
1	(→, ↑)
2	(→, ↓)

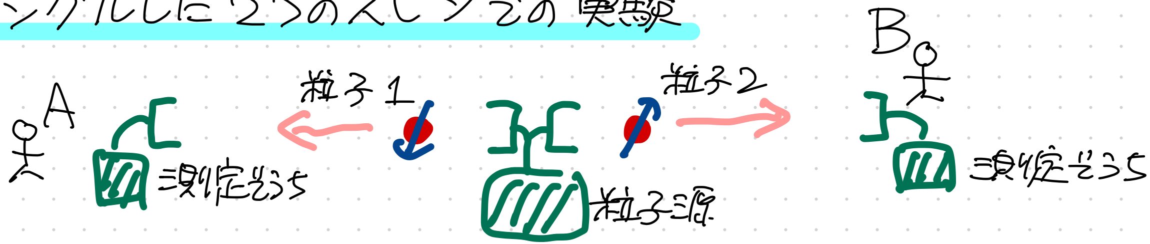
(測定結果は測る前からちゃんと決まっている)

たしかに 上の実験結果を再現

↓

もっとややこしい状況を考えたらどうだろう?

§ エンタングルした2つのスピンでの実験



粒子源から2つの粒子を反対方向にうち出し、それぞれについてスピンを測定

スピンの状態 (1) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right\}$

$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\rightarrow\rangle_1|\leftarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_1|\rightarrow\rangle_2\right\}$

▷ AとBがどちらも $\hat{S}_z$ を測定

A	B	確率
↑	↓	1/2
↓	↑	1/2

▷ AとBがどちらも $\hat{S}_x$ を測定

A	B	確率
→	←	1/2
←	→	1/2

▷ Aが$\hat{S}_z$，Bが$\hat{S}_x$を測定

まずAが測定し ↑ → 測定後の状態 $|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle_1 \{ |\rightarrow\rangle_2 - |\leftarrow\rangle_2 \}$

ここでBが$\hat{S}_x$を測定すれば確率 1/2 で → or ←

よって

A	B	確率
↑	→	1/4
↑	←	1/4
↓	→	1/4
↓	←	1/4

（Bが先に測定すると考えても全く同じ結果）

▷ Aが$\hat{S}_x$，Bが$\hat{S}_z$を測定

A	B	確率
→	↑	1/4
→	↓	1/4
←	↑	1/4
←	↓	1/4

A, Bともに $\hat{S}_z$

A	B	確率
↑	↓	1/2
↓	↑	1/2

A, Bともに $\hat{S}_x$

A	B	確率
→	←	1/2
←	→	1/2

Aが $\hat{S}_z$, Bが $\hat{S}_x$

A	B	確率
↑	→	1/4
↑	←	1/4
↓	→	1/4
↓	←	1/4

Aが $\hat{S}_x$, Bが $\hat{S}_z$

A	B	確率
→	↑	1/4
→	↓	1/4
←	↑	1/4
←	↓	1/4

この実験結果を「隠れた変数」のモデルで再現できるか？ → **Yes!**

λ	粒子1 (σ_x, σ_z)	粒子2 (σ_x, σ_z)
1	(→, ↑)	(←, ↓)
2	(→, ↓)	(←, ↑)
3	(←, ↓)	(→, ↑)
4	(←, ↑)	(→, ↓)

粒子のペアがうち出されるときに
$\lambda = 1, 2, 3, 4$ のいずれかが
確率 1/4 で「書きこまれる」

注意 このモデルが正しいと言っているのではない!
このモデルでこの実験の結果は
再現できるというだけ.

ⅲ ここからどう進むか？

- 様々な 複雑な「実験」を考え、その結果を再現する 隠れた変数のモデルをつくる。

(自然な)「隠れた変数」では説明できない例をみつける

量子力学と完全に同じ結論を与える「隠れた変数の理論」をつくる。 ？

- John Bell 1964 逆の発想

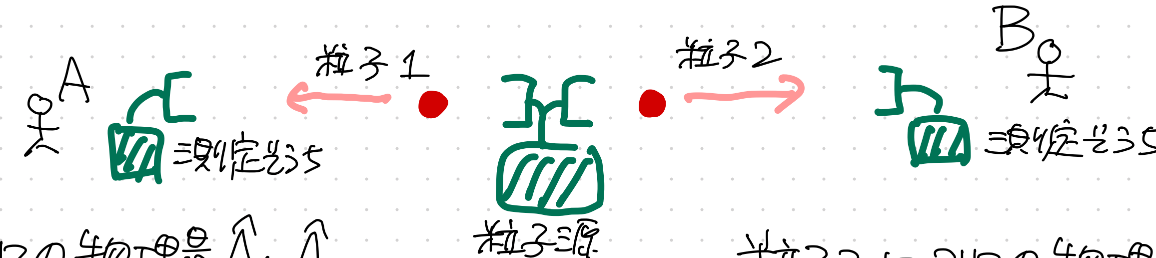
まともな「隠れた変数」のモデルではかならず成り立つ関係をみつける。

局所性
(情報が一瞬で遠くまで伝わらない)

それが現実で成り立つかどうかを調べる

§ベルの不等式と局所実在性

1 設定



粒子1についての物理量 $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ のどちらかを測定（結果は±1）

粒子2についての物理量 $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ のどちらかを測定（結果は±1）

どちらを測るかは，粒子をうける直前にランダムに決める．
（物理量の選択が粒子の状態，もう1人の測定結果に影響を与えない）

▶ 測定結果(何度もくり返す)

A_1	$+1$			-1	-1	$+1$		$\cdots$
A_2		-1	$+1$				$+1$	$\cdots$
B_1				-1			-1	$\cdots$
B_2	-1	$+1$	-1		$+1$	$+1$		$\cdots$

▶ A_1, B_2 を測った回のみ抽出

	1	2	3	4	5 $\cdots$
A_1	$+1$	-1	$+1$	-1	-1 $\cdots$
B_2	-1	$+1$	$+1$	$+1$	-1 $\cdots$

相関関数

(1) $$\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle = \frac{1}{N_{12}} \sum_{n=1}^{N_{12}} A_1^{(n)} B_2^{(n)}$$

▶ 同様にしてすべての i, j の組について $\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle$ を求める

(2) $$C = \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle$$

という量に注目 → C について2つの理論を比較

「隠れた変数」の理論 と 量子力学

2 「隠れた変数のモデルで成り立つ一般的な不等式」（Bellの不等式）

- 粒子対が発生する際に「隠れた変数」 $\lambda = 1, 2, \cdots, 16$ が「書き込まれる」
- λ によって $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ の測定結果は完全に決まる

λ	$A_1(\lambda)$	$A_2(\lambda)$	$B_1(\lambda)$	$B_2(\lambda)$
1	+1	+1	+1	+1
2	+1	+1	+1	−1
3	+1	+1	−1	+1
4	+1	+1	−1	−1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

Bが $\hat{B}_1, \hat{B}_2$ のどちらを測るかの選択は $A_1(\lambda), A_2(\lambda)$ に影響しない！
Aが $\hat{A}_1, \hat{A}_2$ のどちらを測るかの選択は $B_1(\lambda)\,B_2(\lambda)$ に影響しない！

⇒ 局所性（情報は一瞬では伝わらない）

- λ はどのようなルールで決まってもよい

N 回の実験のうち λ が出た回数 $N(\lambda)$　λ の出現頻度 $r(\lambda) = \dfrac{N(\lambda)}{N}$

ものすごく一般的なモデル!! → なんでも説明できそう

（注意　「隠れた変数」はもっと複雑でもよい。$\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ の値だけが問題なので，それによって16個のグループに分けて，グループに λ と名付けた）

相関関数の表式

Aが$\hat{A}_1$, Bが$\hat{B}_2$を測った回だけを抽出

$$\left(r(\lambda)=\frac{N(\lambda)}{N}\right.$$
はλの出現頻度)

(1) $$\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle = \frac{1}{N_{12}} \sum_{n=1}^{N_{12}} A_1(\lambda_n) B_2(\lambda_n)$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{16} A_1(\lambda) B_2(\lambda) \boxed{\frac{N_{12}(\lambda)}{N_{12}}} \xrightarrow{N\text{が大きい}} \sum_{\lambda=1}^{16} A_1(\lambda) B_2(\lambda) \boxed{r(\lambda)}$$

AとBが$\hat{A}_1, \hat{A}_2$あるいは$\hat{B}_1, \hat{B}_2$のどちらを測定するかは
λには依存せずランダムに決められる.

Nが十分に大きければ すべての $i, j = 1, 2$ について

(2) $$\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = \sum_{\lambda} A_i(\lambda) B_j(\lambda) r(\lambda)$$

不等式の導出

三角不等式 (1) $|x-y| \leq |x|+|y| \quad {}^{\forall}x, y \in R$

任意の λ について

(2) $|\{A_1(\lambda)+A_2(\lambda)\}B_1(\lambda) - \{A_1(\lambda)-A_2(\lambda)\}B_2(\lambda)|$

$\leq |\{A_1(\lambda)+A_2(\lambda)\}B_1(\lambda)| + |\{A_1(\lambda)-A_2(\lambda)\}B_2(\lambda)|$

$= |A_1(\lambda)+A_2(\lambda)| + |A_1(\lambda)-A_2(\lambda)| = 2$

A_1	A_2	A_1+A_2	A_1-A_2
+1	+1	2	0
+1	−1	0	2
−1	+1	0	−2
−1	−1	−2	0

よって (3) $-2 \leq A_1(\lambda)B_1(\lambda) + A_2(\lambda)B_1(\lambda) - A_1(\lambda)B_2(\lambda) + A_2(\lambda)B_2(\lambda) \leq 2$

(4) $\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = \sum_{\lambda} A_i(\lambda)B_j(\lambda)\,r(\lambda)$ より

(5) $-2 \leq \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle \leq 2$

Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) 不等式 (Bellの不等式の改良版)

CHSH不等式の意味

(1) $C = \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle$ を使えば

(2) $-2 \leq C \leq 2$

局所性（情報は一瞬では伝わらない）を仮定した「隠れた変数」の理論では
かならず成り立つ あたりまえの不等式

$\Downarrow$

物理量の「実在性」

局所性＋実在性を認めれば CHSH不等式は必ず成立。

実際にあたりまえ。

AとBの測定結果がいつも完全に一致しているとき、

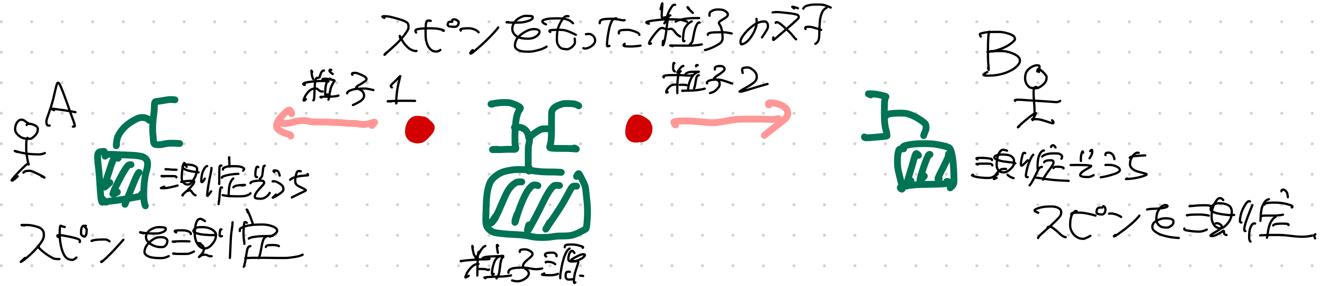
$\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = 1$ 　よって　$C = 1+1-1+1 = 2$

AとBの測定結果がいつも正反対のとき

$\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = -1$ 　よって　$C = -1-1-(-1)-1 = -2$

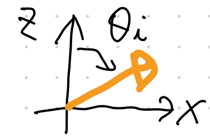
etc.

3 量子力学における具体例の解析

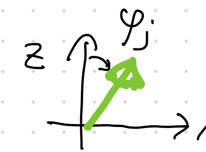


粒子対のスピン状態 (1) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\right\}$

(2) $\hat{A}_i = \frac{2}{\hbar}\left\{\cos\theta_i\,\hat{S}_z^{(1)} + \sin\theta_i\,\hat{S}_x^{(1)}\right\}$ $(i=1,2)$



(3) $\hat{B}_j = \frac{2}{\hbar}\left\{\cos\varphi_j\,\hat{S}_z^{(2)} + \sin\varphi_j\,\hat{S}_x^{(2)}\right\}$ $(j=1,2)$



$\hat{A}_i\hat{B}_j$ の測定をくり返したときの期待値

(4) $\langle\hat{A}_i\hat{B}_j\rangle = \langle\Phi_0|\hat{A}_i\hat{B}_j|\Phi_0\rangle$

期待値の計算

(1) $|\Phi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

(2) $\langle\Phi_0| = \frac{1}{\sqrt{2}}\{{}_2\langle\downarrow|\,{}_1\langle\uparrow| - {}_2\langle\uparrow|\,{}_1\langle\downarrow|\}$

(3) $\langle\Phi_0|\hat{A}_i\hat{B}_j|\Phi_0\rangle = \frac{1}{2}\{{}_2\langle\downarrow|\,{}_1\langle\uparrow| - {}_2\langle\uparrow|\,{}_1\langle\downarrow|\}\hat{A}_i\hat{B}_j\{|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2\}$

$= \frac{1}{2}\{\langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle$

$- \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle\}$

行列表示

(4) $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ $\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

(5) $\hat{A}_i = \begin{pmatrix}\cos\theta_i & \sin\theta_i\\ \sin\theta_i & -\cos\theta_i\end{pmatrix}$

よって

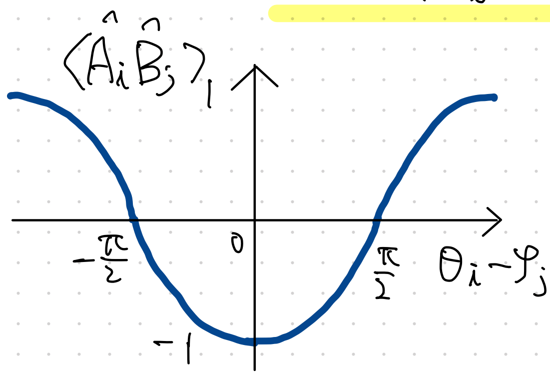
(6) $$\begin{cases}\langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \cos\theta_i\\ \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = -\cos\theta_i\\ \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \sin\theta_i\end{cases}$$

$\hat{B}_j$についても同じ

(1) $\begin{cases} \langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \cos\theta_i & \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = -\cos\theta_i \\ \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle = \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle = \sin\theta_i \end{cases}$

$\hat{B}_j$についても同じ

(2)
$$\langle\hat{A}_i\hat{B}_j\rangle = \langle\Phi_0|\hat{A}_i\hat{B}_j|\Phi_0\rangle$$
$$= \frac{1}{2}\{\langle\uparrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle - \langle\uparrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\downarrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle$$
$$- \langle\downarrow|\hat{A}_i|\uparrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\downarrow\rangle + \langle\downarrow|\hat{A}_i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|\hat{B}_j|\uparrow\rangle\}$$
$$= \frac{1}{2}\{-\cos\theta_i\cos\varphi_j - \sin\theta_i\sin\varphi_j - \sin\theta_i\sin\varphi_j - \cos\theta_i\cos\varphi_j\}$$
$$= -\cos(\theta_i - \varphi_j)$$



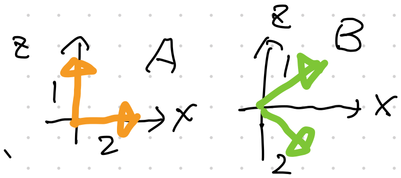
$\theta_i - \varphi_j = \pm\frac{\pi}{2}$ なら

$$\langle\hat{A}_i\hat{B}_j\rangle = 0$$

Aが$\hat{S}_z$, Bが$\hat{S}_x$

A	B	確率
↑	→	1/4
↑	←	1/4
↓	→	1/4
↓	←	1/4

(1) $\langle \hat{A}_i \hat{B}_j \rangle = -\cos(\theta_i - \varphi_j)$



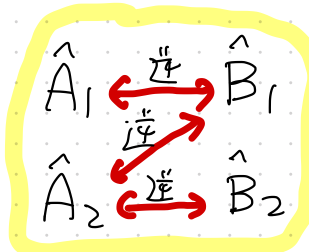
(2) $\theta_1 = 0 \quad \theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \varphi_2 = \frac{3}{4}\pi$ と選ぶ

(3) $\langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) $\langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) $\langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ 「普通」なら $\hat{A}_1$ と $\hat{B}_2$ も逆

$\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle < 0$

(CHSHから示せる)

(6) $\langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle = -\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$

よって

(7) $C = \langle \hat{A}_1 \hat{B}_1 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_1 \rangle - \langle \hat{A}_1 \hat{B}_2 \rangle + \langle \hat{A}_2 \hat{B}_2 \rangle = -\frac{4}{\sqrt{2}} = \boxed{-2\sqrt{2}} \sim -2.8$

CHSH不等式は $|C| \leq 2$!

補足（期待値の表式）　p13-(4)を使ってよい理由

$\hat{A}$：$\hat{A}_1, \hat{A}_2$のいずれか　　$\hat{B}$：$\hat{B}_1, \hat{B}_2$のいずれか

(1) $\hat{A}|\varphi_a\rangle_1 = a|\varphi_a\rangle_1 \quad (a=\pm1)$　　$\hat{B}|\psi_b\rangle_2 = b|\psi_b\rangle_2 \quad (b=\pm1)$

全状態を (2) $|\Phi_0\rangle = \sum_{a,b=\pm1} C_{ab}|\varphi_a\rangle_1|\psi_b\rangle_2$ と展開

- まず$\hat{A}$を測定　確率 $P_a = \sum_{b=\pm1}|C_{ab}|^2$ で $a=\pm1$が得られる。

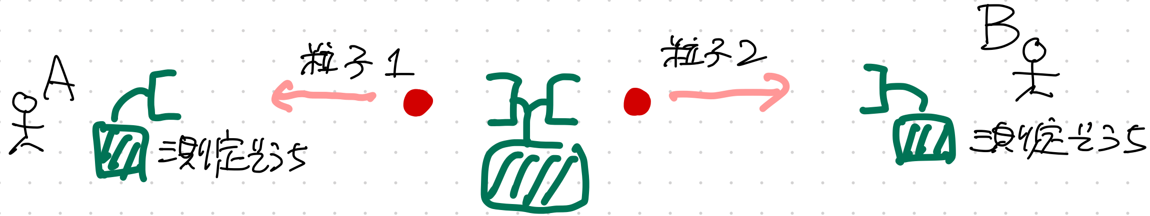
測定後の状態 (3) $|\Phi_a\rangle = \left(\sum_{b=\pm1}|C_{ab}|^2\right)^{-1/2}\sum_{b=\pm1} C_{ab}|\varphi_a\rangle_1|\psi_b\rangle_2$

- 次に$\hat{B}$を測定　確率 $\left(\sum_{b'=\pm1}|C_{ab'}|^2\right)^{-1}|C_{ab}|^2$ で $b=\pm1$が得られる。
- よって測定結果 a, bが得られる確率は $|C_{ab}|^2$

期待値は (4) $\langle\hat{A}\hat{B}\rangle = \sum_{a,b=\pm1} ab|C_{ab}|^2 = \langle\Phi_0|\hat{A}\hat{B}|\Phi_0\rangle$

- $\hat{A}$と$\hat{B}$を測定する順番をかえても同じ。

4 まとめと実験結果，そして「Bell不等式の破れ」の意味



spin-singlet $|\Psi_0\rangle$を用いた具体例

- 量子力学の結論　　$C = -2\sqrt{2} \simeq -2.8$
- 局所性をもつ「隠れた変数」の理論の結論　　$|C| \leq 2$

事実1　この具体例についての量子力学の結論はどんなに複雑な局所性をもつ「隠れた変数」の理論を使っても再現できない

（量子力学と整合する「隠れた変数」の理論をつくりたければ局所性はあきらめるしかない）

CHSH不等式の破れを検証する実験

- Aspect 他 1982 光子を用いた実験 $|C|>2$ を報告.
  ⋮
- Hensen 他 2015 "Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometers"
  エンタングルした電子スピンの状態を用いて $|C| \simeq 2.42 \pm 0.20$ を得た!

われわれの世界では CHSH不等式は成立しない.

事実2 どんなに複雑な 局所性をもつ「隠れた変数の理論」を使っても われわれの世界を記述することはできない.

- この世界は 局所実在性をもった理論では決して記述できない
  - 実在性 → 物理量の値は測定しなくても定まっている ⇐ 「普通の考え」
  - 局所 → 情報が一瞬で遠くに伝わることはない