

リーブ先生はものすごくいろいろな分野での「神」である

田崎 晴明

「ねえ、クリスティアーネ、知ってますか？ エリオットは、ものすごくいろいろな分野での『神』なんですよ。」

ぼくは正面に座っているクリスティアーネ・フェルバウムさん、あるいはリーブ夫人に話しかける。そのお隣に座った「神」、あるいはリーブ先生*1、あるいはエリオットは、背筋を伸ばして椅子に座り、お馴染みのちょっとキョトンとした表情を浮かべてこちらを見ている。

恵比寿の駅に近いビルのなかの串揚げ屋の小さなテーブルを、リーブ先生ご夫妻、学習院大学数学科の同僚の中野史彦さん（現在は東北大）、私の四人が囲んでいる。2017年9月の加藤敏夫先生の生誕百周年を祝う国際会議の初日の夕食である。この会議での主賓中の主賓と言ってもいいご夫妻を中野さんと私の二人で独占してしまったのは幸運な贅沢だった。

「そう言われても、ちっともピンとこないわ、ハル。かれは私の夫で、普通に一緒に暮らしているのだから。」そういうクリスティアーネさん — いや、フェルバウム先生というべきか — もプリンストン大学

の言語学教授である。おそらくは彼女を含む同僚の多くが分野の「神」として扱われるのが当たり前の世界に生きているのだろう。それでも、そんななかでも、リーブ先生は別格なのだというのを、ぼくは説明する。



リーブ先生と筆者。2022年7月、ハーバード大学の会議場にて。

国際数学連合とドイツ数学会が共催するカール・フリードリヒ・ガウス賞は、数学を越えた領域にまで及ぶ重要な応用のあった数学の業績を顕彰する学術賞である。ご存知のように、2006年の第1回の賞は伊藤清先生が受賞された。5人目の受賞者であるリーブ先生への授賞理由は「量子力学、統計力学、計算化学、量子情報理論の各分野

*『数学セミナー』2023年1月号『国際数学会議2022』所収の記事（執筆は2022年11月）を許可を得て公開。雑誌掲載時のタイトルは『[ガウス賞業績紹介] リーブ』。

**日本語も読み書きされるリーブ先生ご本人の指示により Lieb の日本語表記をリーブとする。

*1 もちろん、普段はリーブ先生のことは“Elliott”と下の名前で行っているわけだが、日本人の精神性に立ち返るとリーブ先生としか呼べなくなるので、ここではその書き方に統一しよう。ちなみに、リーブ先生のポストドクとしてプリンストンに着任した当初、先生のことを“Elliott”呼ぶ心の準備ができず、かと言って“Professor Lieb”などと呼ぶ人は一人もいないので、苦労したことを覚えている。

に本質的な影響を与えた圧倒的に広範に及ぶ深い数学的貢献に対して」だった。リーブ先生が物理学の問題に動機付けられていくつかの新しい数学的な構造を見出したことにも言及し、先生を「ガウスら 18, 19 世紀の巨人たち」になぞらえている [1]。

リーブ先生は、これまでも、統計物理学の最高峰の賞であるボルツマン賞を始めとした物理学と数学の一流の賞を数多く受賞している。とくに、今年の初頭には APS Medal for Exceptional Achievement in Research (比類なき研究成果に対するアメリカ物理学会賞) を受けた。実験分野を含めた物理学の膨大な領域から年に一名だけを顕彰するアメリカ物理学会のもっとも権威ある賞だ。受賞理由は「重要な物理学の問題の厳密解を通じた理論物理学への絶大な貢献」であり、「固体物理学、量子情報理論、統計力学、原子物理学への影響」が言及されている。リーブ先生を純粋に物理学者ととらえ、理論物理学への貢献を評価しているのだ。

数学の分野にも理論物理学の分野にもリーブ先生よりも優れた業績をあげた研究者は (それほど多くはないにしろ) もちろんいる。しかし、数学と物理学の双方で超一流の研究者と目され、さらに、理論化学や量子情報理論のように通常の意味での数理物理学を大きく越えた分野でも基盤となる業績を挙げた人は、少なくとも現代の

科学界にはリーブ先生以外いないだろう。「ものすごくいろいろな分野での『神』」という表現は決して大げさではないのだ*2。

■リーブ先生の業績 (の一部) ぼく自身もリーブ先生のそのような広範な業績を初めから知っていたわけではない。1980 年代の半ばの大学院生時代、物理学科のクラスメートだった原隆さん (現在は九州大数理) とぼくは、Aizenman と Fröhlich の φ^4 場の理論の自明性の証明に衝撃を受け*3、この分野で研究することを目指して、厳密統計力学と構成的場の理論の基本文献を片っ端から読みあさっていた。その中で、Elliott H. Lieb の名前にくり返し会うことになった。

統計力学とは、数多くの (場合によっては無限個の) 単純な物理的要素が集まった系の熱平衡状態でのふるまいを記述する物理学の一般的な枠組みで、とくに (水が 0 度で氷になるような) 相転移現象を記述できる。古典系の統計力学は確率論と、量子系の統計力学は作用素環論と相性がよく、それぞれ数学的な立場からも研究されてきた。リーブ先生は、古典系、量子系、双方の厳密統計力学の分野での重要な論文の定番の著者だった。個人的に印象深かったのは、Simon による強磁性イジング模型の相関関数についての不等式を改良した 1980 年の Lieb の不等式 (通常は Simon-Lieb 不

*2 【2023 年 6 月に追記】リーブ先生は 2023 年の京都賞を受賞されることが決まった。受賞理由は『多体系の物理学をベースにした、物理学・化学・量子情報科学における先駆的な数学的研究』である。

*3 本号所収の原隆さんの記事ではこのテーマの 40 年後の素晴らしい進展が取り上げられている。

等式と呼ばれる) だろうか。一見すると小さな改良なのだが、それによって不等式の応用範囲が一気に広がり、臨界現象や構成的場の理論での本質的な結果がごく簡単に導けるのは圧巻だった。1970年代はプリンストン大学に超一流の数理論物理学者が集結し様々な歴史に残る共同研究を生み出した時期だった。その果実の一つが、構成的場の理論の文脈で生まれた鏡映正值性の手法を古典スピンの相転移の問題に適用した Fröhlich, Simon, Spencer の 1976 年の論文に始まる一連の研究成果である。古典系での相転移を体系的に扱った 1978 年の Fröhlich, Israel, Lieb, Simon の論文、そして応用上はもっとも重要な量子反強磁性ハイゼンベルク模型での相転移の存在を証明した同年の Dyson, Lieb, Simon の論文はこの流れを代表する業績である。また、ぼくは統計物理学の研究室に所属していたため、リーブ先生が可解模型の分野で初期に重要な仕事をしたことも耳学問的に知っていた。アイスモデル(氷の結晶構造にヒントを得た二次元の統計力学モデル)の Lieb による 1967 年の解析が可解模型の初期の金字塔であることは統計力学に触れた者なら誰もが知っている。

ぼくは 1986 年の夏から二年間、プリンストン大学にリーブ先生のグループのポスドクとして滞在することになった*4。リーブ先生らとは主に量子スピンの研究を

した。量子スピン系とは、量子力学に従う無数の(微小な磁石である)スピンの相互作用しあって生み出される性質を対象とした分野で、実験物理、理論物理、計算物理、そして数理物理の立場から活発に研究されている。近年では量子計算を中心とした量子情報理論とも深く関わっている。ぼくにとって量子スピン系は新しい研究分野だったが、知らないことはすぐに教えてもらえるのでほとんど障壁なく研究に参入できた。後から振り返ってみればそれも当然だった。日本に戻って自分で集中講義などをするようになって分野の基礎を学び直して、1961 年の Lieb-Schultz-Mattis 定理、1962 年の Lieb-Mattis 定理など、量子スピン系に線型代数や角運動量の理論(数学的には Lie 環 $\mathfrak{su}(2)$ の表現論)のしかるべき道具を適用して得られる基盤的な結果には必ず Lieb の名前が伴っていることを知った。要するに、量子スピン系を数理物理として研究する道を開いたのが若き日のリーブ先生だったということだ。ちなみに、1961 年の Lieb-Schultz-Mattis (LSM) 定理は可解模型についての長い論文の付録に簡単に述べられている量子スピン鎖の低エネルギー励起状態についての定理だが、近年になって様々な拡張が発見され「LSM 定理」は固体物理学の先端の論文でのキーワードの一つになっている。ぼくがポスドクの間にはリーブ先生らと書いた Affleck,

*4 大学院時代を通して共同研究した原隆さんは Aizenman のポスドクになり、その後 Slade とともに自己回避ランダムウォークについて自明性に相当する結果を証明した。

Kennedy, Lieb, Tasaki の 1987 年の論文では、基底状態が厳密に求められる量子反強磁性体のモデル（今日では AKLT model と呼ばれている）を提唱し、モデルの基本的な性質を証明した。この仕事は、その後大きく発展した行列積状態、テンソルネットワーク状態、そして量子多体系におけるトポロジカル相の研究の先駆けとなり、2016 年のノーベル物理学賞の公式解説では Haldane の受賞に関連して大きく取り上げられた。

固体電子論は固体中の数多くの電子の集団的挙動を量子論に基づいて解明する分野である。超伝導体や今日の文明を支える半導体素子など膨大な応用があり、現代物理学の最重要分野の一つと言っている。固体電子論の基礎方程式は（アボガドロ数ほどの）電子と原子核の多体シュレディンガー方程式のはずだが、この方程式をそのまま厳密に解析するのは現代の人類の数学的能力を大きく超えている。結晶固体中を量子力学的に運動し互いに強く相互作用し合う電子集団を記述するハバード模型 (Hubbard model) は固体電子論の一つの本質を抽出したモデルである。理想化されたモデルだが、設定に応じて、強磁性、反強磁性、金属・絶縁体転移、超伝導など様々な現象を記述しようと信じられている。しかし、未だ理論物理レベルでも決着のつかない未解決問題が多く、まして数学のレベルで厳密な結果は稀有である。もっとも基本的な 1 次元のハバード模型の厳密解を与え、金属・絶縁体転移が存在しないことを示し

た 1968 年の Lieb, Wu の仕事は今日では固体電子論の基礎的な文献の一つになっている。リーブ先生はその後ハバード模型の数理的な研究に興味を持っていたと聞かすが、三十年以上を経て再び分野の流れを変える本質的な貢献をした。1989 年の論文で証明された Lieb の定理は、half-filling という（応用上も最も重要な）条件を満たすハバード模型の基底状態の基本的な性質を決定し、さらにフェリ磁性と呼ばれるある種の磁石が発現する厳密な例を与えた。電子の量子力学的運動と電子間の斥力相互作用だけから磁石が発現することを示すのは固体物理学の歴史的な課題だったが、それを最初に成し遂げたのがリーブ先生なのである。Lieb の定理は「スピン空間での鏡映正值性」と呼ばれる巧妙な方法で証明される。もとの物理の問題を全く普通ではない方法で書き換えて 2 次形式についての初等的な評価を組み合わせていくとあれよあれよという間に物理として望ましく強い結果が証明されてしまう。このような証明がどこから発想できるのか想像さえできない「リーブ先生マジック」の代表例である。

相互作用するボソン系の Lieb, Liniger による 1963 年の厳密解、相互作用するフェルミオン系の Lieb, Mattis による 1965 年の厳密解、そして、統計力学のモデルの厳密解を与えた 1971 年の Temperley, Lieb の仕事とそこから派生した Temperley-Lieb 代数も、後世に大きな影響を与えた重要な業績である。また、有限領域に閉じ込められたボース気体についての一連の研究は近

年の冷却原子系での実験とも直結する重要な研究である。その主だった成果は Lieb, Seiringer, Solovej, Yngvason の 2006 年の著作にまとめられている。

格子上の量子多体系の時間依存の相関関数の基本的な性質を述べた 1972 年の Lieb-Robinson bound は、当初は無限量子系の時間発展の存在を示すための補題という位置付けだったが、今世紀になって量子多体系のさまざまな性質を証明するための基盤になることが明らかになった。応用や拡張が精力的に研究され、Lieb-Robinson bound は今日の量子多体系と量子情報における重要なキーワードになっている。また、1973 年の Lieb の不等式をもとに 1973 年に Lieb, Ruskai が証明した量子エントロピーの強劣加法性は、今日では量子情報理論における最も重要で有用な結果の一つとして全ての量子情報理論の教科書で取り上げられている。これら二つの業績は、リーブ先生も発表した当初は結果の重要性を認識しておらず、ずっと時が経ってから、それぞれに分野の根幹と関わる深い意義が見い出されたのである。

リーブ先生にはなんと熱力学への本質的な貢献もある。熱力学はマクロな系の熱平衡状態とそれらの間の遷移に関する普遍的な理論体系で、日本の大学では理科系の必修科目でもある。熱力学を数学的に定式化する試みは有名な Carathéodory によるものなどがあるが、1999 年の Lieb, Yngvason の論文では「断熱到達可能性」という順序関係を軸にした熱力学の公理体系が提

示された。Lieb-Yngvason の熱力学は単に数学的に厳密というだけでなく、熱力学第二法則の位置付け、エントロピーの定義と意味などについて明快な物理的な描像を与えている。2000 年に出版された佐々真一さんの『熱力学入門』と拙著『熱力学：現代的な視点から』はいずれも Lieb-Yngvason の熱力学に決定的な影響を受けて書かれた学部生向けの教科書だが、幸い二冊とも出版から二十年以上を経ても広く読まれている。日本に限れば、リーブ先生がもっとも広範な影響を及ぼしたのは熱力学教育かもしれぬ。

以上は、理論物理よりの数理物理学を専門とする立場から、ぼく自身の研究とも重なる部分を概観したリーブ先生の業績である。これだけで、「ものすごくいろいろな分野での『神』」というぼくの持論を納得していただけたと思う。しかし、ここで再び今回の授賞理由 [1] を眺めると、実は上に挙げた業績は（厳密解についての仕事を除いて）挙げられていないことに驚く。リーブ先生の業績はそれほど広いのである。

上のリストに抜けている重要な業績の一つは「物質の安定性」を多体系の量子力学に基づいて厳密に証明するという一連の研究である。これはリーブ先生が多くの共同研究者たちと長年に渡って開拓してきた一大分野であり、根幹となる Lieb-Thirring 不等式は当初の問題を超えて様々な局面に応用されている。

授賞理由 [1] では、さらに、計算化学な

どの分野において電子状態の計算のための標準的な手法になっている密度汎関数理論へのリーブ先生の貢献をかなりの分量を割いて取り上げている。また、数学の賞としては当然のことだが、Brascamp-Lieb 不等式に代表される数々の関数不等式の導出も主要な貢献として言及されている。リーブ先生が証明した（あるいは既存の結果を改良した）関数不等式の多くがそれ以上は改善できない「ギリギリの」評価になっていることも有名である。

■リーブ先生の今 今年の7月31日にリーブ先生はちょうど90歳の誕生日を迎えた。この日を含む三日間、先生の卒寿を記念した国際会議 Advances in Mathematical Physics がハーバード大学で開催され、世界各地からリーブ先生と接点のあった数理物理学者たちがボストンに集った。日本からは今年度の日本数学会秋季賞の受賞者の緒方芳子さんとぼくが参加した。今回のフィールズ賞受賞者のユーゴー・デュミニユ=コパンさんの姿もあった。

リーブ先生の圧倒的に広い研究分野を反映して会議での講演のテーマはきわめて多岐に渡った。これらのテーマ全てをしっかりと理解できるのは参加した一流の数理物理学者たちの中でもリーブ先生一人だけだったかもしれない。少なからぬ講演がリーブ先生との最近の共同研究に基づいているのも印象的だった。今でもリーブ先生

は何人かの研究者と密接な共同研究を進めているのだ。

きわめて多くの共同研究を時には平行して進められることはリーブ先生の（数多い）突出した能力の一つだろう。ぼくがプリンストンの先生のグループに所属していた時期にも、共同研究者が先生を訪れて議論している風景を見ることがしばしばあった。前の日にはわれわれと量子スピ系について議論しその場で定理を証明していたリーブ先生が、その日は全く異なる物質の安定性の問題について居室の黒板を前に議論を進めている。ぼくのような凡庸な研究者が研究能力でリーブ先生に全く及ばないのは致し方ないことだが、ぼくには（そして、おそらくほとんどの研究者も）一時期には一つのテーマについてしか集中して研究できないことを思うと、リーブ先生の才能の素晴らしさにただただ感嘆するばかりだ*5。

ハーバード大学での会議で、90歳のリーブ先生は全ての講演に出席し、しっかりと聴き、多くの講演に対して質問やコメントをされていた。頭の回転の速さと膨大な知識に裏打ちされた鋭いコメントは健在だった。会議の合間にも多くの人と元気に話をされていた。ぼくもすでに還暦を超える「いい歳」の研究者なのだが、講演の後のコーヒブレークでリーブ先生に講演をほめていただき励ましていただけたのは、や

*5 リーブ先生の場合は、この圧倒的なまでの幅の広さと並列処理能力が、個々の研究の独自性と深さに直結しているのだろうと推測している。

はり格別の経験だった。

リープ先生のガウス賞を受けてサイモンズ財団が作成したビデオが公開されている[2]。これを見れば、ハーバードやプリンストンに足を運ばずとも、最近のリープ先生のお元気な声と姿に接することができる。5分超のビデオでは先生の膨大で広範に及ぶ研究業績を伝えることはまったくできないが、それでも、これはリープ先生の姿を伝える素晴らしい作品だと思う。ビデオ

の最後に、美しい川辺を歩きながらバッハの無伴奏チェロ組曲を背景にリープ先生が語る言葉を訳出して、この拙文の結びとしよう。

「いま、私は 89 歳で、もうすぐ 90 歳になります。私は今も毎日、研究をしています。そして、また何かいい発想が私に舞い降りてこないだろうかと願っているのです。」

参考文献

- [1] International Mathematical Union, “The Carl Friedrich Gauss Prize 2022”.
https://www.mathunion.org/fileadmin/IMU/Prizes/Gauss/IMU_Gauss22_citation.pdf
- [2] Simons Foundation, “Gauss Prize: Elliott H. Lieb”, YouTube Video.
<https://youtu.be/q53-WA-9WjY>