

くりこみ群とはなにか

田崎晴明²

くりこみ群の方法は、現代の物理学が生み出した最も普遍的で、力強く、そして美しい理論的方法である。しかし、くりこみ群の解説といえば、ほとんどが場の理論や臨界現象を素材にしていて、高度の知識を持った人にしか手が出せなかった。ここでは、初歩的なニュートン力学の問題を素材に取り、くりこみ群による取り扱いをていねいに解説する。くりこみ群の基本的な哲学と、方法論としての強力を味わってもらいたい。

1 はじめに

ウィルソン (K. G. Wilson) は、素粒子物理学における場の量子論の研究の中で芽生えたくりこみ群の理論を、統計物理学でカダノフ (L. P. Kadanoff) らが発展させてきたスケーリング理論や粗視化のアイデアと融合させて、現代的なくりこみ群の枠組みを完成させた³。現代の物理学が生み出した理論的方法の中でも、くりこみ群ほど普遍的で、力強く、そして美しいものは他にはないだろう。くりこみ群の方法は、場の量子論やスピン系のみならず、(非相対論的) 多体問題、力学系、偏微分方程式、確率過程などの多様な問題に適用されている。さらに、これらの問題で数学的に厳密な結果を証明する際にも、くりこみ群の方法が本質的な役割を演じている。

しかし、この解説の目的は、これらの華々しいトピックスを説明することではない。それよりは、くりこみ群の基礎的な哲学と方法論を、じっくりと腰を据えて説き明かしてみたい。従来のくりこみ群の解説といえば、決まってスピン系の臨界現象や場の量子論のモデルが例にとられていて、特殊な知識を持った人以外には近寄り難いものだった。しかも、ほとんどの場合には「摂動計算の詳細は原論文や教科書を参照のこと」といった殺し文句がすぐに現れて、結局は本気で勉強する人以外にはくりこみ群は理解できないという風潮が作られていた。パーコレーションなどの例で「くりこみ群」がわかりやすく解説されることは、しばしばあった。しかし、一口に「くりこみ群」と呼ばれるものも千差万別で、これらの「わかりやすいくりこみ群」は、ちょっと利口で面白いけれど、結局は不正確で御都合主義の近似理論でしかない。こういう「くりこみ群を」学んだ人には、何故くりこみ群が強力で美しい方法と呼ばれるのかは理解できないだろう。

くりこみ群の精密さと威力を損なわず、しかも専門的知識のない読者にこの方法の本質を伝えるために、この解説では初歩的なニュートン力学の問題を扱うことにした。筆者の知る限りでは、このような問題をくりこみ群によって論じた解説は今までになかった。これは、見栄えの良い流行の用語の飛び

¹バリティ 1996 年 6 月号、p. 11-20.

²<http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/>

³いまから思うと、この歴史の要約はあまりに一面的であった。(2000 年 8 月付記)

交う解説ではない。できれば鉛筆と紙を用意して、一緒に絵を描き、計算をしながら読んでいただきたい。まだるっこしい道を辿っているように感じるかもしれないが、最後には従来の問題の解法とは全く異なったりくりこみ群のアイデアを知ることができるに違いない。

さらに欲を言えば、臨界現象や場の量子論のくりこみ群の理論を勉強している人々、あるいは既に勉強を終えてくりこみ群を理解した(と思っている)人々にも、この解説を読んでほしい。複雑な計算や、技術的な詳細に追われて見失っていたくりこみ群の本質的な構造を把握し直す一つのきっかけになるかもしれない。

2 どのような問題を考えるか？

我々がくりこみ群の方法を用いて解析するのは、簡単なニュートン力学の問題である。しかも、くりこみ群などを持ち出さなくても、エネルギーと角運動量の保存則を使えば解けてしまう問題である。

それでも、この例をくりこみ群によって調べることには、少なくとも二つの意味がある。

- 誰にでもわかる問題で、くりこみ群のアイデアを明解に説明することができる。特に、保存則を使った普通の解法と比べることで、くりこみ群の発想の本質を味わうことができる。
- 角運動量やエネルギーの保存しないような問題についても、くりこみ群を用いた方法は、そのまま適用できる。さらに、くりこみ群の方法では、モデルの詳細に依存しない普遍的な指数((2.6) に現れる θ) を直接求めることができる。

そしてもう一つ、次のような意味もあるかもしれない。

- ニュートン力学にしる、一般相対論にしる、多くの粒子が万有引力を及ぼし合っている系をきちんと解析するのは恐ろしく難しい問題である。これらの問題を取り扱うことのできるくりこみ群が開発されれば素晴らしい。ここで扱う練習問題が、将来の発展のきっかけになるかもしれない。

3次元空間の中を運動する粒子(質点)がある。粒子には、原点 $(0, 0, 0)$ に向かって、原点からの距離の2乗の逆数に比例する大きさの力が働いている。たとえば、力の源が地球であると考えると、原点は地球の中心に対応し、粒子は人工衛星など地球に比べて小さな物体である。

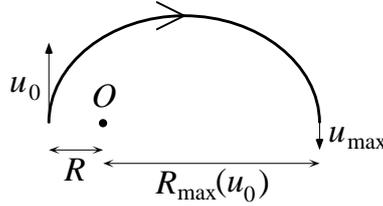


図 1: 原点 O に向かう逆二乗力の働く場で、原点から距離 R の位置から水平方向に速さ u_0 で粒子を打ち出す。粒子が原点からもっとも離れたときの距離を $R_{\max}(u_0)$ とする。 u_0 が脱出速度 u_e に近づくとき、 $R_{\max}(u_0)$ は $R_{\max}(u_0) \approx (u_e - u_0)^{-\theta}$ のように発散する。ここでの「臨界指数」 θ (実は $\theta = 1$) を、くりこみ群の方法を使って求めるのが、この解説の目標である。

時刻 t における粒子の位置を $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ とすると、その時間変化を決定するニュートン方程式は、

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = -K \frac{\mathbf{r}(t)}{|\mathbf{r}(t)|^3} \quad (2.1)$$

である。 K は比例定数で、たとえば上の例では、万有引力定数 G と地球の質量 M を用いて、 $K = GM$ と書かれる。

ここで考えたい問題は次のとおり (図 1)。原点から距離 R 離れた点で、粒子を水平方向に速さ u_0 で打ち出す。ただし水平方向というのは、粒子の位置と原点を結んだ線に垂直な方向という意味である。以下水平という言葉はこの意味で用い、鉛直という言葉も対応する意味に用いる⁴。さらに、ある点での速度の水平成分が u 、鉛直成分が v であれば、速度を (u, v) と表現する。直交座標系での速度の表示ではないので注意してほしい⁵。

初速 u_0 がある程度小さければ、粒子ははじめ原点から遠ざかるように運動し、その後再び原点に近づき始める。粒子が原点から最も遠ざかったときの原点からの距離を $R_{\max}(u_0)$ と書こう。初速 u_0 を決めれば、この最大到達距離は一意的に決まるので、 $R_{\max}(u_0)$ は u_0 の関数である。初速 u_0 を増すと、 $R_{\max}(u_0)$ は単調に増加し、 u_0 が脱出速度 u_e を越えると無限大になる。最大到達距離 $R_{\max}(u_0)$ のふるまい、特に u_0 が u_e に近づくとき $R_{\max}(u_0)$ がどのように発散していくかを知るのが我々の目標である。

まず保存則を用いた通常の方法で、この問題を解いておこう。粒子が原点から最も離れたときの速さを u_{\max} とする。力学的エネルギーの保存則により、粒子を打ち出したときと、粒子が原点から最も離れたときのエネルギー⁶を等しいとおくと、

$$\frac{1}{2}(u_0)^2 - \frac{K}{R} = \frac{1}{2}(u_{\max})^2 - \frac{K}{R_{\max}(u_0)} \quad (2.2)$$

⁴これが、水平・鉛直の本来の意味である！

⁵たとえば、図 2 を参照。

⁶正確に言えば、エネルギーを粒子の質量 m で割ったもの。

という関係が得られる。ここでニュートン方程式 (2.1) の力に対応するポテンシャルが $U(r) = -K/|r|$ であることを用いた。系が原点の回りに回転対称なので、粒子の角運動量も保存する。これによって

$$R u_0 = R_{\max}(u_0) u_{\max} \quad (2.3)$$

という関係も得られる。ここで、粒子が原点から最も離れたときには、速度の鉛直方向は 0 であることを用いた。

(2.2) と (2.3) の 2 つの関係から u_{\max} を消去すれば、 $R_{\max}(u_0)$ を決定する 2 次方程式が得られる。2 次方程式は簡単に解けて、

$$R_{\max}(u_0) = \frac{K + \sqrt{K^2 + 2u_0^2 R^2 E(u_0)}}{-2E(u_0)} \quad (2.4)$$

となる。ここで $E(u_0) = \{(u_0)^2/2\} - (K/R)$ は粒子の全エネルギーで、我々の興味を持っている状況では $E(u_0) < 0$ である。明らかに $E(u_0)$ が 0 に近づくとき $R_{\max}(u_0)$ は発散する。よって、脱出速度 u_e は $E(u_e) = 0$ の解で、

$$u_e = \sqrt{\frac{2K}{R}} \quad (2.5)$$

で与えられることがわかる。特に u_0 が下から u_e に近づいたときの $R_{\max}(u_0)$ の発散の仕方を定数 C, θ を用いて

$$R_{\max}(u_0) \simeq \frac{C}{(u_e - u_0)^\theta} \quad (2.6)$$

のように書いてみよう。(2.4), (2.5) から、 $C = \sqrt{8KR}$ および $\theta = 1$ が得られる。ここで定数 $\theta = 1$ は $R_{\max}(u_0)$ の発散の仕方を最も直接的に特徴づける量で、臨界現象における臨界指数⁷によく似た役割を果たす。この解説の第一の目標は、この問題に適したくりこみ群を開発し、指数 θ を求め直すことである。もちろん、 $\theta = 1$ という正しい答えがでてくるはずなのだが。

3 スケール変換とスケール不変性

角運動量の理論では、回転という変換についての系の不変性が重要な役割を演じた。一般にくりこみ群の方法では、何らかのスケール変換についての不変性が理論の出発点になる。

前節で導入したニュートン力学の問題のスケール不変性を調べよう。新しい空間座標 $\mathbf{r}' = (x', y', z')$ と時間 t' (ダッシュは微分ではない!) を

$$\mathbf{r}' = \alpha \mathbf{r}, \quad t' = \alpha^{3/2} t \quad (3.1)$$

⁷臨界現象をご存知でない読者は、気にされないで構わない。なぜ「臨界指数」をそれほどありがたがるかという点については、「今月のキーワード」の欄を参照。

によって定義しよう。 α はスケール変換の度合いを決める定数 (スケール因子) で、ここでは 1 より小さいとする。すると、 \mathbf{r}' という新しい座標では、 \mathbf{r} よりも大きいスケールで物事を見ていることになる。たとえば \mathbf{r} がセンチメートルで測ったときの位置の読みを示すとき、 $\alpha = 1/100$ とすると、 \mathbf{r}' がメートルで測った位置ということになる。同様に新しい時刻 t' は、もとの時刻 t よりも「ゆっくりと」進む。

三次元空間の中を運動する粒子を考え、もとの座標系で観測した時刻 t における粒子の位置を $\mathbf{r}(t)$ とする。同じ粒子を新しい座標系で観察したときの、時刻 t' における粒子の位置を $\mathbf{r}'(t')$ とする。変換 (3.1) から明らかなように、両者は

$$\mathbf{r}'(t') = \alpha \mathbf{r}(t) = \alpha \mathbf{r}(\alpha^{-3/2}t') \quad (3.2)$$

で結ばれている。変換則 (3.2) を用いれば、新しい座標系での速度が

$$\frac{d}{dt'} \mathbf{r}'(t') = \frac{d}{d(\alpha^{3/2}t)} (\alpha \mathbf{r}(t)) = \alpha^{-1/2} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) \quad (3.3)$$

のように、前の座標系での速度と関係していることがわかる。同様にして、加速度の関係も次のように求められる。

$$\frac{d^2}{dt'^2} \mathbf{r}'(t') = \alpha^{-2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}(t) \quad (3.4)$$

変換則 (3.2) と (3.4) をニュートン方程式 (2.1) に代入すれば、 $\mathbf{r}'(t')$ の満たす方程式が得られる。明らかにスケール因子 α を含んだ項は全てキャンセルして、

$$\frac{d}{dt'} \mathbf{r}'(t') = -K \frac{\mathbf{r}'(t')}{|\mathbf{r}'(t')|^3} \quad (3.5)$$

のように (2.1) と全く同じ形の微分方程式が得られる。つまりニュートン方程式 (2.1) は、座標と時間のスケール変換 (3.1) に対して不変であると言える。

スケール不変性の簡単だが重要な一つの応用を述べよう。これまでは、粒子の軌道 $\mathbf{r}(t)$ を異なった座標系で眺めたものが $\mathbf{r}'(t')$ だという見方をしてきた。しかし、 $\mathbf{r}(t)$ と $\mathbf{r}'(t')$ が同じ方程式 (2.1) = (3.5) を満たすのだから、方程式の一つの解 $\mathbf{r}(t)$ をもとにして、同じ方程式の異なった解 $\mathbf{r}'(t')$ が作られたという見方をすることもできる。たとえば $\mathbf{r}(t)$ が原点の回りの楕円軌道を表しているとき、 $\mathbf{r}'(t')$ は軌道の径と公転周期の異なった別の楕円軌道を表している。スケール変換 (3.1) からわかるように、長さのスケールに関連する軌道の径が α 倍になると、時間のスケールに関わる公転周期の方は $\alpha^{3/2}$ 倍になる。これは、まさしくケプラーの第三法則に他ならない。

このようにスケール変換についての不変性から、解の性質をエレガントに議論する事ができる。しかし、これはまだくりこみ群ではない。くりこみ群の方法は、スケール不変性の議論と一見似てはいるけれど、より力強く物理の本質を引き出してくれる。

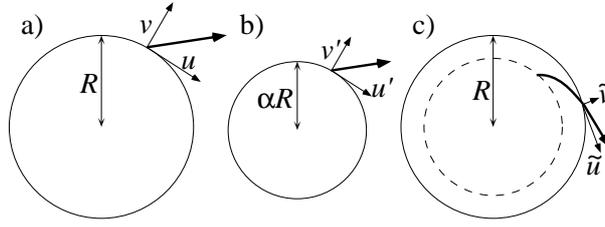


図 2: a) 原点から距離 R の点から、速度 (u, v) で粒子を打ち出すという初期条件を考える。b) α 倍のスケール変換によって、これは、原点から距離 αR の点から粒子を打ち出す初期条件にうつされる。c) さらに、時間発展させてやることによって、再び原点から R の点から粒子を打ち出す初期条件が得られる。新しく得られた初期条件での、初速度を (\tilde{u}, \tilde{v}) とする。初速度 (u, v) を (\tilde{u}, \tilde{v}) にうつす変換 (写像) を、くりこみ変換と呼び、 \mathcal{R}_τ と表す。

4 くりこみ変換

ここでは、くりこみ群による解析の出発点として、くりこみ変換を定義する。2 節と同じ系を考える。やはり原点から距離 R だけ離れた点から、水平方向に $u \geq 0$ 、鉛直方向 (原点から遠ざかる向き) に $v \geq 0$ の初速で粒子を打ち出す (図 2 a)。ここで、 $(u, v) = (u_0, 0)$ とすれば、2 節の初期条件と同じになる。

この状況にスケール変換 (3.1) を施してみよう。 $\tau > 0$ を用いて、スケール因子を

$$\alpha = e^{-\tau} \quad (4.1)$$

と表しておく。当面は、前節の最後に述べたように、変換 (3.1) によって (同じ座標系で表した) 別の運動が作られると考えると便利である。スケール変換 (3.1), (3.3) によって、上の初期条件は、原点から距離 αR だけ離れた点から初速度

$$(u', v') = (\alpha^{-1/2}u, \alpha^{-1/2}v) \quad (4.2)$$

で粒子を打ち出すという新しい初期条件にうつされる (図 2 b)。この新しい初期条件から出発して、ニュートン方程式 (2.1) = (3.5) に従って粒子を少し運動させてみよう。速度が十分に大きければ、粒子は原点から遠ざかり、しばらくすると原点からちょうど距離 R だけ離れた点を通るだろう。このときの粒子の速度の水平成分を \tilde{u} 、鉛直成分を \tilde{v} とかく (図 2 c)。

このように、スケール変換と時間発展を組み合わせることによって、原点から距離 R の点での初速度 (u, v) に対して、同じく原点から距離 R の点での速度 (\tilde{u}, \tilde{v}) が得られた。粒子はいつでも原点から距離 R の点から出発するという問題設定を取ることにすれば、この手続きによって、一つの初期条件 (u, v) から異なった初期条件 (\tilde{u}, \tilde{v}) が得られたことになる。ここでは、 (u, v) から (\tilde{u}, \tilde{v}) が得る手続きを、くりこみ変換と呼ぶことにする。くりこみ変換

を、二つの数の組を二つの数の組に写す写像 \mathcal{R}_τ を用いて、

$$\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\tau \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

のように表す。添字の τ は、スケール因子が $\alpha = e^{-\tau}$ であることを表している。また $\alpha = 1$ ならば、何の変換も行われないので、

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{R}_0 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

が成り立つ。つまり、 \mathcal{R}_0 は恒等写像である。

初速度 (u, v) にスケール因子 $\alpha = e^{-\tau}$ のくりこみ変換を施した後、さらにスケール因子 $\alpha' = e^{-\tau'}$ のくりこみ変換を施すことを考える。定義にもどってみれば明らかのように、これは (u, v) にスケール因子 $\alpha\alpha' = e^{-(\tau+\tau')}$ のくりこみ変換を一回だけ施すことに等しい。これを式で書けば、

$$\mathcal{R}_{\tau'} \left[\mathcal{R}_\tau \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] = \mathcal{R}_{\tau'+\tau} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

あるいは写像の合成を \circ で表せば、

$$\mathcal{R}_{\tau'} \circ \mathcal{R}_\tau = \mathcal{R}_{\tau'+\tau} \quad (4.6)$$

ということになる。数学の言葉では、(4.5), (4.6) の性質を持った写像(の集まり) \mathcal{R}_τ は1パラメターの半群を成すという。「くりこみ群」という呼び名(よって正確には「くりこみ半群」)は、ここからきている。

くりこみ変換 (4.3) が単なるスケール変換ではないことを強調しておこう。もとの初期条件に対する単なるスケール変換で得られるのは、原点から αR だけ離れた点から出発する初期条件である。たとえば R が地球の半径と解釈すれば、原点から αR 離れた点は地面の底になってしまう。くりこみ変換では、系を少し時間的に発展させることで、やはり地表から出発する初期条件を作ったのである。くりこみ変換とは、スケール変換の物理的影響を、(中心から距離 R の点での)初速度の変換として表現したものと見える。

言うまでもなく、場の量子論や統計物理学で用いられるくりこみ変換は、ここで定義したものと全く異なっている。(そもそも問題が全然違う。)しかし、スケール変換の効果を何らかの物理的なプロセスを介して表現したものがくりこみ変換だという点は、いずれの場合にも共通である⁸。

5 無限小のくりこみ変換の解析

スケール因子 $\alpha = e^{-\tau}$ が 1 に近いとき、つまり τ が小さいときのくりこみ変換 (4.3) の性質を調べる。その結果を用いて、次節でくりこみ群の方程

⁸たとえばスピン系や(cutoff一定の)場の量子論でのくりこみ変換では、まずスケール変換を行って短い格子間隔の(あるいは cutoff エネルギーの高い)理論を得る。その後で一部の自由度を積分して、はじめと同じ格子間隔(あるいは cutoff)の理論を作る。これらのプロセスは、我々のニュートン力学におけるくりこみ変換と完全に対応している。

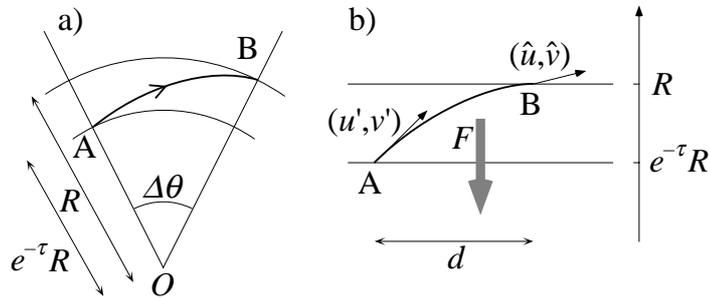


図 3: a) くりこみ変換を求めるには、半径 R と $e^{-\tau}R$ の球面の間の球殻状の領域の中での、点 A から点 B までの粒子の運動を調べる必要がある。b) しかし、 τ の一次のオーダーまでの情報を得るには、球面の曲率を無視して、下向きに一定の力の働く場合を調べればよい。これは、高校生にも楽々と解ける問題である！

式を導く。驚くべきことに、ここでの解析に用いるのは、直線運動についての初歩的な知識だけである。

粒子は、原点から $e^{-\tau}R$ だけ離れた点 A を初速度 $(u', v') = (e^{\tau/2}u, e^{\tau/2}v)$ で出発する。粒子が原点から R だけ離れた点 B に到達したときの速度 (\hat{u}, \hat{v}) を求めたい(図 3 a)。これも、保存則を使えば簡単に求めることができるが、(後の一般化などを意識して)あえてそういう「飛び道具」は使わないことにする。ここでは、 τ が小さいという仮定を取り入れて、 \hat{u}, \hat{v} を τ について 1 次の精度で求めよう⁹。

粒子が運動するのは、原点からの距離が $e^{-\tau}R$ と R の間にある薄い球殻状の領域である(図 3 a)。この間、粒子と原点の距離はほぼ τR だけ変化する。また OA と OB のなす角 $\Delta\theta$ も(後で (5.8) で示すが) τ に比例する。 τ が小さければ小さいほど、図 3 a の粒子の運動領域は小さくなり、その結果、球面の曲率の効果も小さくなる。そこで、まずは球面の曲率を忘れて、図 3 b のように、高さ $e^{-\tau}R$ の(真っ直ぐな)水平面と高さ R の(真っ直ぐな)水平面にはさまれた領域の運動を考えよう。

粒子には、原点の方向を向いた大きさ $K/(\text{原点と粒子の距離})^2$ の力が働く。力の大きさと方向は時事刻々と変化するものの、粒子の運動領域がとても小さいことを思い出すと話は簡単になる。粒子が、A から B に向かう間に粒子に働く力は、

$$\mathbf{F} = \left(O(\tau), -\frac{K}{R^2} + O(\tau) \right) \quad (5.1)$$

で与えられる。(5.1) が誤差を含んでいるのが気になるかもしれないが、我々

⁹以下、 $O(\tau^n)$ という記号を頻繁に用いるが、これは τ の n 次以上の項を全てまとめて略記したもので、「オーダー τ^n 」などと読む。たとえば、 $(1 + \tau)^8 = 1 + 8\tau + O(\tau^2)$ 、 $\cos \tau = 1 - \tau^2/2 + O(\tau^4)$ といった風に使う。なお、 $O(\tau^n)$ と書いたときには、 τ^n の項が有限であるということを主張しているわけではなく、誤差があるとしたら高々 τ^n のオーダーだと言っているのである。だから、実際は $\cos \tau = 1 + O(\tau^2)$ だが、 $\cos \tau = 1 + O(\tau)$ と書いても間違いではない。

の目的のためにはこれで十分なのである。

まず鉛直方向の運動を調べよう。鉛直方向の初速は v' であり、粒子の移動距離は $O(\tau)$ 、粒子に働く力は有限 (1 のオーダー) なので、

$$(AB \text{ 間での鉛直方向の速さ}) = v' + O(\tau) \quad (5.2)$$

と言える。よって、粒子が A から B に達する間に費やす時間 Δt は、

$$\Delta t = \frac{R - e^{-\tau} R}{v' + O(\tau)} = \frac{\tau R}{v'} + O(\tau^2) = \frac{\tau R}{v} + O(\tau^2) \quad (5.3)$$

と評価できる。最後の等式には $v' = e^{\tau/2} v = v + O(\tau)$ を用いた。力 (5.1) と時間 (5.3) がわかれば、ニュートンの第二法則と加速度の定義から、点 B における鉛直方向の速さ \hat{v} は、

$$\begin{aligned} \hat{v} &= v' + \left(-\frac{K}{R^2} + O(\tau) \right) \Delta t \\ &= v' - \frac{K}{R^2} \frac{\tau R}{v} + O(\tau^2) \\ &= \left(1 + \frac{\tau}{2} \right) v - \frac{K\tau}{Rv} + O(\tau^2) \end{aligned} \quad (5.4)$$

と評価できる。

水平方向には、(5.1) のように $O(\tau)$ の力しか働かないので、

$$(AB \text{ 間での水平方向の速さ}) = u' + O(\tau^2) \quad (5.5)$$

と言える。よって、水平方向の移動距離 d (図 3 a) は、経過時間 (5.3) を用いて、

$$d = (u' + O(\tau^2)) \Delta t = u \frac{\tau R}{v} + O(\tau^2) \quad (5.6)$$

となる。ここで、 $u' = e^{\tau/2} u = u + O(\tau)$ を用いた。また (5.5) の特別な場合として、点 B での水平方向の速さ \hat{u} は、

$$\hat{u} = u' + O(\tau^2) = \left(1 + \frac{\tau}{2} \right) u + O(\tau^2) \quad (5.7)$$

と評価できる。

こうして、鉛直方向の速さ \hat{v} (5.4) と水平方向の速さ \hat{u} (5.7) が求められたので、これらを合わせた (\hat{u}, \hat{v}) が目標の点 B での速度だと結論したくなる。しかし、もう一つだけ考えなくてはいけないことがある。これまでの議論では、点 A での鉛直方向・水平方向をそのまま平行移動した鉛直方向・水平方向の定義を用いて速度を記述してきた。実際には、点 B での鉛直方向・水平方向は点 A とはわずかに異なっている。これを補正するために、OA と OB のなす角 $\Delta\theta$ だけ速度を回転させなくてはいけない。角度 $\Delta\theta$ は、 $d = 2R \sin(\Delta\theta/2)$ の関係から、

$$\Delta\theta = \frac{d}{R} + O(\tau^2) = \frac{\tau u}{v} + O(\tau^2) \quad (5.8)$$

となる。角度 $\Delta\theta$ の回転を表す行列を用いて、求めていた B における速度 (\tilde{u}, \tilde{v}) は、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{v} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \Delta\theta & -\sin \Delta\theta \\ \sin \Delta\theta & \cos \Delta\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{u} - \hat{v} \Delta\theta + O(\tau^2) \\ \hat{u} \Delta\theta + \hat{v} + O(\tau^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1 - \frac{\tau}{2})u + O(\tau^2) \\ (1 + \frac{\tau}{2})v - \frac{K}{Rv}\tau + \frac{u^2}{v}\tau + O(\tau^2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.9)$$

と評価される。

最終的に、くりこみ変換 \mathcal{R}_τ の定義 (4.3) と見比べれば、

$$\mathcal{R}_\tau \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}v - \frac{K}{Rv} + \frac{u^2}{v} \end{pmatrix} \tau + O(\tau^2) \quad (5.10)$$

が得られたことになる。

6 くりこみ群の方程式

任意の二つの数 $u(0) > 0$ 、 $v(0) \geq 0$ をとる。これらは、「くりこみ群の流れの初期値」と呼ばれることになるが、その意味はこれから説明していく。 $\tau \geq 0$ について、 $u(\tau)$ 、 $v(\tau)$ を、

$$\begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\tau \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

によって定義する。ここで、パラメータ $\tau = -\log \alpha$ を便宜的に「時間」のように考えると、 $(u(\tau), v(\tau))$ は、 $\tau = 0$ で $(u(0), v(0))$ という位置にあった「点」が「時間」 τ とともに「運動」して描いた「軌跡」とみなすことができる。 $u > 0, v \geq 0$ の平面全体で、様々な「点」が「時間」 τ とともに「運動」していく様子を、くりこみ群の流れと呼ぶ¹⁰。

定義 (6.1) とくりこみ変換の半群としての性質 (4.5) を用いれば、任意の $\Delta\tau > 0$ について、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(\tau + \Delta\tau) \\ v(\tau + \Delta\tau) \end{pmatrix} &= \mathcal{R}_{\tau + \Delta\tau} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{R}_{\Delta\tau} \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u(\tau) \\ v(\tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u(\tau) \\ \frac{1}{2}v(\tau) - \frac{K}{Rv(\tau)} + \frac{u(\tau)^2}{v(\tau)} \end{pmatrix} \Delta\tau + O(\Delta\tau^2) \end{aligned}$$

¹⁰ここでの「点」、「時間」、「運動」と言った概念は、本来の点、時間、運動とは全く異なったものなので、それを強調するために、いつでも括弧でくくることにする。

が得られる。ここで (5.10) のくりこみ変換の表式で τ を $\Delta\tau$ と書き直したものをを用いた。(6.2) を変形すれば、

$$\frac{1}{\Delta\tau} \begin{pmatrix} u(\tau + \Delta\tau) - u(\tau) \\ v(\tau + \Delta\tau) - v(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}u(\tau) \\ \frac{1}{2}v(\tau) - \frac{K}{Rv(\tau)} + \frac{u(\tau)^2}{v(\tau)} \end{pmatrix} + O(\Delta\tau) \quad (6.3)$$

となる。ここで、 $\Delta\tau \rightarrow 0$ とすれば、 $(u(\tau), v(\tau))$ のみならず「運動方程式」

$$\frac{d}{d\tau} u(\tau) = -\frac{u(\tau)}{2} \quad (6.4)$$

$$\frac{d}{d\tau} v(\tau) = \frac{v(\tau)}{2} - \frac{K}{Rv(\tau)} + \frac{u(\tau)^2}{v(\tau)} \quad (6.5)$$

が得られる。(6.4), (6.5) がこの問題におけるくりこみ群の方程式である。前節の結果は $O(\tau)$ といった誤差の残ったものだったが、最終的に得られたくりこみ群方程式は完全に正確であることに注意したい。

くりこみ群の方程式 (6.4), (6.5) は、元来のニュートン方程式 (2.1) = (3.5) とは全く異質のものであることを忘れてはならない。仮に「時間」と読んでいる τ は、単にスケール因子 $\alpha = e^{-\tau}$ を表すパラメータに過ぎないのである。

7 くりこみ群の流れ

くりこみ群の方程式 (6.4), (6.5) は少し変数変換を施すと、簡単に解けて、くりこみ群の流れを正確に求めることができる¹¹。しかし、くりこみ群の方法では、一般にはくりこみ群の正確な流れを求める必要はない。流れの大局的な性質と、固定点と呼ばれる特別な点近傍での流れの様子がわかりさえすれば、問題の本質的な部分は解けてしまうのである。このように、モデルの特殊性に依存しないのが、くりこみ群の方法の利点の一つである。ここでも、(6.4), (6.5) をあからさまに解くことはせず、一般の場合にも通用する解析を行うことにする。

固定点とは、その名の通り、くりこみ変換を施しても変化しない「点」である。 (u^*, v^*) が固定点であるということは、全ての $\tau \geq 0$ について、

$$\begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\tau \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

が成り立つことである。もし (7.1) の関係が小さな τ について成り立つなら、半群の性質 (4.5) を繰り返し用いることで、(7.1) は大きな τ についても成り立つことが示される。つまり、無限小の τ について (7.1) を確かめさえすれば、一般の τ について確かめたことになる。そこで (5.9) で $O(\tau^2)$ を無視した式と、(7.1) を組み合わせて、

$$\begin{aligned} u^* &= \left(1 - \frac{\tau}{2}\right)u^* \\ v^* &= \left(1 + \frac{\tau}{2}\right)v^* - \frac{K}{Rv^*}\tau + \frac{(u^*)^2}{v^*}\tau \end{aligned} \quad (7.2)$$

¹¹ $x = u^2, y = u^2 + v^2 - 2K/R$ おいて、 x, y の満たす方程式を求めてみよ。

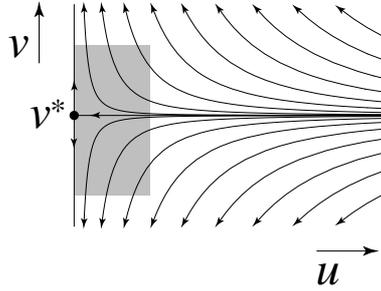


図 4: 固定点 $(0, v^*)$ の近傍でのくりこみ群の流れ。図には現れないが、固定点に近づくほど流れは「ゆっくり」と進む。ただし、「ゆっくり」というのは、 τ の変化に対して $(u(\tau), v(\tau))$ があまり変化しないという意味で、本来の粒子の速さとは無関係である。影をつけた領域が S_ε である。固定点のごく近傍でのくりこみ群の流れから、臨界指数を求めることができる。

という条件が得られる。(7.2) の解はすぐに求められ、

$$(u^*, v^*) = \left(0, \sqrt{\frac{2K}{R}} \right) \quad (7.3)$$

が唯一の固定点であることがわかる¹²。

固定点近傍でのくりこみ群の流れは、くりこみ群の方程式を線型化することで調べることができる。変数 $v(\tau)$ のかわりに、固定点からのずれを表す変数

$$w(\tau) = v(\tau) - v^* \quad (7.4)$$

を導入する。新しい変数を使ってくりこみ群の方程式 (6.5) を書き直すと、

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} w(\tau) &= \frac{v^* + w(\tau)}{2} - \frac{K}{R(v^* + w(\tau))} + \frac{u(\tau)^2}{(v^* + w(\tau))^2} \\ &= w(\tau) + O(w(\tau)^2) + O(u(\tau)^2) \end{aligned} \quad (7.5)$$

という簡単な形になる。特に固定点のごく近傍で $O(w(\tau)^2)$, $O(u(\tau)^2)$ が無視できるところでは (6.4), (7.5) は簡単に解けて、

$$u(\tau) = \bar{u} e^{-\tau/2}, \quad w(\tau) \simeq \bar{w} e^\tau \quad (7.6)$$

が得られる。ここで \bar{u} , \bar{w} は初期条件で定まる定数である。(7.6) で $\bar{w} = 0$ としたときだけ、 $(u(\tau), w(\tau))$ は $\tau \rightarrow \infty$ で固定点 $(0, 0)$ に吸い込まれる。それ以外の \bar{w} については、解 (7.6) は固定点から離れていく。図 4 に、こうして得られた固定点近傍でのくりこみ群の流れを示す。

解 (7.6) を見ると、固定点の近傍ではくりこみ群の流れは「ゆっくり」と進むことがわかる。これを定量的に調べるために、小さな $\varepsilon > 0$ を取り、 S_ε を

¹² τ は (無限小だが) 0 ではないから、(7.2) の解は唯一つに決まる。

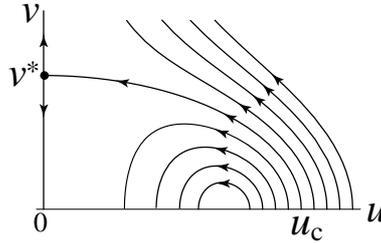


図 5: くりこみ群の流れの全体的な様子。 $(u_c, 0)$ という点から出発した流れが、固定点 $(0, v^*)$ へ向かう。それ以外の流れは、最終的には固定点から遠ざかり、 u 軸に向かうか、 $v \rightarrow \infty$ に遠ざかっていく。

固定点の近傍の $0 \leq u \leq \varepsilon, |w| \leq \varepsilon$ (あるいは $0 \leq u \leq \varepsilon, v^* - \varepsilon \leq v \leq v^* + \varepsilon$) で表される領域としよう。図 4 に領域 S_ε を網掛けで示した。くりこみ群の流れによって運動する「点」が、 S_ε に入ってから、 S_ε から出るまでの間に費やす「時間」を調べてみよう。 ε が十分に小さいとすると、 S_ε に入るくりこみ群の流れは、まず、 S_ε の右辺を通過する。このときの w の値を Δw 、また、 τ の値を τ_0 とする。すると (7.6) より、 S_ε に入った後の $(u(\tau), v(\tau))$ の時間変化は

$$u(\tau) = \varepsilon e^{-(\tau-\tau_0)/2}, \quad w(\tau) \simeq \Delta w e^{\tau-\tau_0} \quad (7.7)$$

で与えられる。「点」 $(u(\tau), v(\tau))$ が S_ε の外に出るのは $|w(\tau)| = \varepsilon$ のときである。よって、「運動する点」が S_ε の中で費やす「時間」 τ_1 は $|\Delta w e^{\tau_1}| = \varepsilon$ で与えられる。これを解いて

$$\tau_1 \simeq \log \frac{\varepsilon}{|\Delta w|} \quad (7.8)$$

となる。経過「時間」 τ_1 は $|\Delta w|$ が小さくなれば、限りなく大きくなることがわかる。

固定点 (7.3) 以外では (6.4), (6.5) で定まる「点」 $(u(\tau), v(\tau))$ の動く「速度」は有限である。各点での「速度」の向きを調べれば、くりこみ群の流れの大まかな様子を知ることができる。その結果を図 5 にまとめた。固定点に吸い込まれる一本の流れを逆にたどっていき、 v が減少する方向にずれていき、ある点で u 軸にぶつかる。この点を $(u_c, 0)$ とする。 u 軸上で $(u_c, 0)$ よりも右の点から出発した流れは、固定点の右上を通り過ぎ、そのまま v 軸に沿って限りなく上がっていく。他方、 u 軸上で $(u_c, 0)$ よりも左の点から出発した流れは、固定点の右下を通り、再び u 軸にぶつかる。いずれの場合にも $(u_c, 0)$ の近くから出発した流れは、上で見たように固定点の近傍で「ゆっくり」と運動し、長い「時間」を費やす。

8 いよいよ問題を解く

いよいよ、くりこみ群の流れについての知識をもとにして、本来のニュートン力学の問題を解析しよう。我々の目標は、最大到達距離 $R_{\max}(u_0)$ の発散 (2.6) における指数 θ を求めることであった。

ここで、 $(u(\tau), v(\tau))$ の初期条件を

$$(u(0), v(0)) = (u_0, 0) \quad (8.1)$$

のように取ることにしよう。これは、原点から距離 R 離れた点から水平方向に速さ u_0 で粒子を打ち出すという 2 節の問題設定に対応している。くりこみ変換の定義 (4 節) に戻って考えると、 $(u(\tau), v(\tau))$ はスケール因子 $\alpha = e^{-\tau}$ のスケール変換を行った後の系での原点から距離 R の位置での粒子の速度を表している。スケール変換 (3.1), (3.3) を逆に辿って、この結果をスケール変換以前の言葉に焼き直すと、我々のくりこみ群の物理的な意味を示す次の重要な事実が得られる。

くりこみ群の物理的な意味：2 節の問題設定を考える。粒子が、原点から距離 $\alpha^{-1}R = e^\tau R$ だけ離れた点にきたときの速度は、 $(\alpha^{1/2}u(\tau), \alpha^{1/2}v(\tau)) = (e^{-\tau/2}u(\tau), e^{-\tau/2}v(\tau))$ で与えられる。

こうして、くりこみ群という抽象的で、意味の捉えにくかった枠組みを通して得られる $(u(\tau), v(\tau))$ という量が、物理的な意味を持ったものであることがわかった。これまでに仮に「時間」と呼んできた τ は、もちろん本当の時間とは全く無関係であり、むしろ距離と対応する量であることもわかった。 τ を大きくしていくということは、より遠距離での粒子の振る舞いを知ることに対応しているのである。

こう考えると、図 5 のくりこみ群の流れは、はっきりとした物理的な意味を持っていることがわかる。初期速度 u_0 が u_c 以上なら、 τ がいくら増えても $v(\tau)$ は有限である。これは、もとの問題では、粒子が無限に遠くまで飛んでいくことに対応している。他方 u_0 が u_c より小さいときには、有限の τ の値で $v(\tau)$ は再び 0 になる。これは、もとの問題では、粒子が有限の高さに達して、そこから引き返し始めることに対応している。つまりくりこみ群の流れが定性的に変わる値 u_c は、脱出速度 u_e に他ならなかったのである。

$u_0 \geq u_c = u_e$ として、 $\tau = 0$ に $(u_0, 0)$ を出発する「点」 $(u(\tau), v(\tau))$ を考える。 $\bar{\tau}(u_0)$ を $(u(\tau), v(\tau))$ が $(u_0, 0)$ という u 軸上の点を出発してから再び u 軸に戻ってくるまでの「時間」としよう。つまり $v(\tau) = 0$ を満たす 0 でない τ を $\bar{\tau}(u_0)$ と呼ぶのである。「くりこみ群の物理的な意味」を思い出せば、原点からの距離が $e^{\bar{\tau}(u_0)}R$ のときに鉛直方向の速さが 0 になることがわかり、結局

$$R_{\max}(u_0) = e^{\bar{\tau}(u_0)}R \quad (8.2)$$

が得られる。これは我々の欲しい物理量 $R_{\max}(u_0)$ と、くりこみ群の流れから決まる量 $\bar{\tau}(u_0)$ を結びつける極めて重要な関係である。

図 5 から明らかなように u_0 が u_c に近ければ、くりこみ群の軌跡は固定点 $(0, v^*)$ のすぐ近くを通過する。固定点の近傍では、 $(u(\tau), v(\tau))$ が「ゆっくり」進むことから、 u_0 が u_c に下から近付けば $\bar{\tau}(u_0)$ は発散するはずである。(8.2) を用いれば、 $R_{\max}(u_0)$ もやはり発散することがわかる。

初速度 u_0 が $u_c = u_e$ にとても近いときに $\bar{\tau}(u_0)$ を評価しよう。そのために十分小さい ε に対して 7 節で用いた領域 S_ε (図 4 を参照) を考え、 $\bar{\tau}(u_0)$ を

$$\bar{\tau}(u_0) = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 \quad (8.3)$$

のように三つの「時間」の和に分ける。ここで、 τ_0 は $(u_0, 0)$ を出発した「点」 $(u(\tau), v(\tau))$ が領域 S_ε に入るまでの「時間」、 τ_1 は 7 節と同様に「点」が S_ε を通過する間の「時間」、そして τ_2 は「点」が S_ε を出てから u 軸に達するまでの「時間」である。固定点以外ではくりこみ群の流れの「速度」は有限で特異性を持たないので、 u_0 が $u_c = u_e$ に近ければ、 τ_0 と τ_2 は有限でほとんど u_0 には依存しない。他方、 τ_1 は固定点の近傍での流れの影響を直接受けるので、(7.8) に見られるように、いくらでも大きくなり得る。

また、 S_ε の外でのくりこみ群の流れが特異性を持たないことから、 $v(\tau_0)$ は初期値 u_0 の解析的な関数であるといえる。そこで、7 節で導入した $\Delta w \simeq v^* - v(\tau_0)$ は、

$$\Delta w = A(u_c - u_0) + O((u_c - u_0)^2) \quad (8.4)$$

のようにテーラー展開できる。ただし A は定数であり、その値を知る必要はない。ここで展開が一次の項から始まるのは、 $u_0 = u_c$ ならばくりこみ群の流れは固定点に向かう(つまり $\Delta w = 0$) からである。

最終的な結論を得るための役者は出揃った。求める $R_{\max}(u_0)$ の表現 (8.2) に、「経過時間」 $\bar{\tau}(u_0)$ の分解 (8.3) を代入し、さらに τ_1 の具体的表式 (7.8) と、 Δw についての (8.4) を代入する。全てを整理すると、

$$\begin{aligned} R_{\max}(u_0) &= Re^{\tau_0 + \tau_2} e^{\tau_1} \\ &= Re^{\tau_0 + \tau_2} \frac{\varepsilon}{|\Delta w|} \\ &= (Re^{\tau_0 + \tau_2} \varepsilon A) \frac{1}{u_c - u_0} + O((u_c - u_0)^0) \\ &\simeq \frac{C}{u_c - u_0} \end{aligned} \quad (8.5)$$

という我々の最終的な結論が得られる。(2.6) と比較して、 $\theta = 1$ となる。くりこみ群の方法を用いて、正しい答えが導かれた！

定数 C や臨界速度 u_c の値は全く評価していないにも関わらず、指数 θ の値は厳密に求められたことに注目したい。常識的には、まず臨界速度が求められ、その後で指数が定まるように思える。しかし、くりこみ群による解析

では、指数の値 $\theta = 1$ は固定点のごく近傍でのくりこみ群の流れの性質だけから決定されたのである。このように、発散を支配する指数だけを直接計算できるというのが、くりこみ群の最も優れた特徴の一つである。

9 質量が分布を持つ場合への拡張

最後に、これまで考えてきた問題と似てはいるが、保存則を使えないような問題について考察しておこう。この節では定義や計算の詳細にまでは立ち入らずに、基本的なアイデアだけを述べる。

単純な逆二乗力のニュートン方程式 (2.1) の代わりに

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}(t) = -K \int d^3\mathbf{s} \rho(\mathbf{s}, t) \frac{\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}}{|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}|^3} \quad (9.1)$$

という方程式を考えよう。ただし、 $\rho(\mathbf{s}, t) \geq 0$ は $\int d^3\mathbf{s} \rho(\mathbf{s}, t) = 1$ を満たし、また適当な定数 R_0 に対して、 $|\mathbf{s}| \geq R_0$ ならば $\rho(\mathbf{s}, t) = 0$ という性質を満たすものとする。(9.1) は原点付近に時間とともに変動する質量分布がある状況を表していると考えてよい。この場合にも 2 節と同様に、原点から距離 $R (> R_0)$ の点から速さ u_0 で粒子を水平に打ち出したときの最大到達距離 $R_{\max}(u_0)$ を考え、その発散を調べたい。この問題では、エネルギーも角運動量も保存しないので、2 節の方法で問題が解けないのは明らかである。

3 節と全く同じスケール変換を考える。もはやニュートン方程式 (9.1) はスケール変換 (3.1), (3.4) に対して不変ではなく、

$$\frac{d^2}{dt'^2}\mathbf{r}'(t') = -K \int d^3\mathbf{s}' \rho_\alpha(\mathbf{s}', t') \frac{\mathbf{r}'(t') - \mathbf{s}'}{|\mathbf{r}'(t') - \mathbf{s}'|^3} \quad (9.2)$$

と形を変える。ただし、 $\rho_\alpha(\mathbf{s}', t') = \alpha^{-3} \rho(\mathbf{s}'/\alpha, t')$ である。ここで $\alpha \rightarrow 0$ ($\alpha = e^{-\tau}$ と書けば、 $\tau \rightarrow \infty$) の極限をとれば $\rho_\alpha(\mathbf{s}', t') \rightarrow \delta(\mathbf{s}')$ (ディラックのデルタ関数) となり、ニュートン方程式 (9.2) は (2.1) = (3.5) の点状の重力源の場合の方程式に一致する。どのような質量の分布でも、非常に遠くからは一点に集中しているように見えるということである。別の言い方をすれば、スケール不変ではない方程式 (9.1) も、スケール変換を繰り返した極限では、スケール不変な方程式 (2.1) = (3.5) に「収束」するのである。このような場合には、くりこみ群の方法が極めて有効である。

この問題についても 4 節と全く同様にくりこみ変換を定義することができる。問題が複雑になったために、

- (9.2) が示すように、 τ とともに方程式も形を変える。
- 粒子の状態を指定するためには二つのパラメーター u, v では不十分で、半径 R の球面状での位置 (立体角) 及び水平面内での速度の方向 (角度) の情報も取り入れなくてはならない。

という違いが生じる。これで、くりこみ群の解析が致命的に難しくなってしまうように思われるだろうが、実はそうではない。

確かに、 τ が小さいときにくりこみ群の流れを調べるのは極めて複雑な問題で、一般に解くことは不可能である。しかし、有限の τ の間のくりこみ群による「時間」発展は、あくまでも初期速度 u_0 について解析的である。以下で見るように、くりこみ群の方法で臨界指数を知るにはこれだけの情報があれば十分である。

τ が大きくなっていくと、くりこみ群のもとになるニュートン方程式 (9.2) は、単純な点状の質量分布の場合のニュートン方程式 (2.1) = (3.5) に近付いていく。その結果、くりこみ群の方程式も単純な (6.4), (6.5) にどんどん近付いていく。実際、正確なくりこみ群の方程式と (6.4), (6.5) のずれは、高々 $(R/R_0)e^{-\tau}$ のオーダーであることが示される。特に無限の「時間」をかけて固定点に吸い込まれる流れや、そのごく近傍の流れ (図 4、図 5 を参照) に関しては、(6.4), (6.5) からのずれは限りなく小さくなり、7 節の結果がそのまま正確に成立することがわかる。

8 節で最高到達距離 $R_{\max}(u_0)$ の発散 (2.6) の様子を解析した際には、固定点のごく近傍でのくりこみ群の流れのふるまいのみが重要な役割を演じた。ここで考えている問題でも、固定点の回りのくりこみ群の流れは全く変わらないので、完全に同じ解析をくり返すことできる。その結果 $R_{\max}(u_0)$ の発散 (2.6) を特徴づける指数は、 $\theta = 1$ であることが示される。以上の説明は、かなり大雑把だったが、この方針を精密化すれば、 $\theta = 1$ を数学的に厳密に証明することもできる。

$R_{\max}(u_0)$ の発散の式 (2.6) に現れる係数 C は、質量分布 $\rho(s, t)$ の具体的な形や粒子を打ち出す位置に応じて微妙に値が変わる。上のくりこみ群を用いた解析では、 C の値は全くわからない。他の方法を用いるにしても、一般に C を厳密に計算するのは不可能だろう。これに対して指数 θ は、質量分布 $\rho(s, t)$ の形には全く依存せずに、つねに $\theta = 1$ という値をとる。臨界現象の用語を借りて言えば、 θ はモデルの詳細には依存しない「普遍的な」量である。「普遍的な」指数を直接、かつ正確に計算することができるのがくりこみ群の方法のずば抜けた長所である。さらに、(この節で行ったように) モデルの一部を変更しても、基本的には同じ解析によって問題を解くことができるというのもこの方法の強力な点である。くりこみ群の方法自身が「普遍的な」解析方法だということができよう。

10 再び、くりこみ群とはなにか？

最後にもう一度、くりこみ群とはなにかを考えてみよう。くりこみ群の解析での一つの重要なステップは、5 節で無限小のくりこみ変換を扱い、6 節でくりこみ群の方程式 (6.4) (6.5) を導いたところである。ここで行ったのは、

ニュートン方程式をごく短い時間と距離の範囲で解き、その結果を独特の方法で表現することだった。7 節以降では、くりこみ群の流れを解析し、最終目標である最大到達距離についての情報を得た。よく考えてみれば、これは先程ごく短い範囲で解いたニュートン方程式の解を、長い距離にわたって「つなぎ合わせた」ことに相当する。結果として、ニュートン方程式を直接解いたのと同じ情報が得られたわけである。

ある意味では、くりこみ群の方法とは、ニュートン方程式を細かく分割して解き、それらの結果を巧みにつなぎ合わせることに過ぎないと言える。一見、ニュートン方程式を直接解くのと変わらないように思われるかもしれない。しかし、くりこみ群の流れに基づいた描像は、本来のニュートン方程式からは得られない新しい視点を与えてくれる。9 節での質量が分布を持つ系の解析からも推測できるように、くりこみ群の視点に立つことによって、ある種の問題は非常に簡単に扱えるようになる。

スピン系における臨界現象や、連続時空での場の量子論に関わる問題では、非常に大きなスケールにわたっての系の自由度の相互作用が本質的な役割を果たしている。そのような問題は、異なったスケールを別個に扱う従来の解析法（たとえばフーリエ解析やそれに基づいた摂動論）では、取り扱うことができず、理論物理学におけるもっとも難しい問題に分類されている。くりこみ群の方法は、これらの問題をまず異なったスケールに分割して解き、それらの結果をくりこみ群の方程式によって「つなぎ合わせる」というものである。基本的な方法論は、我々のニュートン力学の問題と全くかわらない。しかし、一つ決定的に違うのは、臨界現象や場の量子論の場合には、くりこみ群を使わなくては問題を解くことができないという点である¹³。

くりこみ群というのは、理論物理学における新しいものの見方を与える抽象的な方法論である。ウィルソンが現代的なくりこみ群を提唱した当初は、理論物理学の難問が次々とくりこみ群によって解決されていくであろうという楽観的な希望もあったようである。実際、スピン系における臨界現象、場の量子論の連続極限の問題、非可換ゲージ理論における漸近的自由性、固体物理学における近藤問題、1 次元の非相対論的フェルミ粒子系における朝永・ラッティンジャー液体の問題、1 次元の準周期的ポテンシャル中のシュレディンガー方程式など、いくつかの極めて重要で困難な問題が、くりこみ群を用いることで（少なくとも部分的には）解決された。しかし、これらの少数の華々しい例を除くと、くりこみ群を用いて本質的に重要でかつ信頼できる結果が得られた例はそれほど多いとは言えない。

くりこみ群というものは、当初人々が思っていたよりもはるかに難しかった

¹³たくさんのスケールに分けて解いたものを「つなぐ」ことができるのなら、何故はじめてから一息に問題全部を解いてしまえないのかという疑問が当然あると思う。正直なところ、その答えは誰も知らないと思う。もしかしたら、多スケールにわたる物理を理解するためのもっと強力な方法が発見されれば、スケールを分割するくりこみ群の手法は必要でなくなるのかもしれない。とにかく、現時点での人類の数学・理論物理学の力では、たとえば 4 次元の非可換ゲージ理論の紫外発散を厳密に制御するためには、どうしてもくりこみ群的な方法が必要なのである。

たのだと筆者は解釈している。くりこみ群の美しい方法論と哲学が持っている可能性は、未だに完全には理解されていないと考えたい。くりこみ群についてのより深い理解が得られたときには、理論物理学は自然の秘めていた新しいストーリーをいくつも読み解くことができるようになるに違いない。

参考文献

[1] 決して読みやすくはないが、臨界現象と場の量子論におけるくりこみ群の方法をいねいに解説したものとして、次の本がある。江沢洋、渡辺敬二、鈴木増雄、田崎晴明、「くりこみ群の方法」、岩波講座・現代の物理学 13 (岩波書店、1995)

キーワード

臨界指数 強磁性体(磁石になり得る物質)の温度 T を転移温度 T_c に上から近づけていくと、帯磁率 $\chi(T)$ (磁石になり易さの度合い)は $\chi(T) \simeq C(T - T_c)^{-\gamma}$ のように発散する。このときの指数 γ が臨界指数の一例である。係数 C や転移温度 T_c は物質に応じてまちまちの値を取るが、臨界指数 γ は「普遍的」であり、物質にはよらずほぼ $\gamma \simeq 1.3$ という値を取る。系の詳細には依存しない臨界指数を調べることで、臨界現象の本質がつかめると考えられている。