

# 有限時間スケールにおける時間周期系<sup>1</sup> の一般理論

桑原知剛(東北大学WPI-AIMR)

共同研究者：森貴司(東京大学) 齊藤圭司(慶応大学)

2016年3月8日

統計力学懇談会



T. Kuwahara, T. Mori, and K. Saito, Annals of Physics 367 96 – 124

T. Mori, T. Kuwahara, and K. Saito, to appear in PRL

# イントロダクション

時間周期系はなぜ重要？

時間スケールを考える意義は何？

本研究では何を明らかにするのか？

# 時間周期系とは？

- ハミルトニアンが時間に依存する場合のシュレーディンガー方程式

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -iH(t)|\psi(t)\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \underbrace{\mathcal{T}[e^{-i\int_0^t H(t)dt}]}_{\text{時間発展演算子}}|\psi(0)\rangle$$

- 時間周期系 :  $H(t) = H(t + T)$
- ポイント : 各時刻の $H(t)$ がシンプルでも、非自明な現象を示しうる

# Floquet engineering

- 実験的に用意できるハミルトニアン  $H(t)$

➡ 有効ハミルトニアン  $H_F$

$$e^{-iH_F T} := \mathcal{T}\left[e^{-i \int_0^T H(t) dt}\right]$$

- ➡ 全く **非自明な定常状態**が実現
- 新しい物質相の制御手法へ

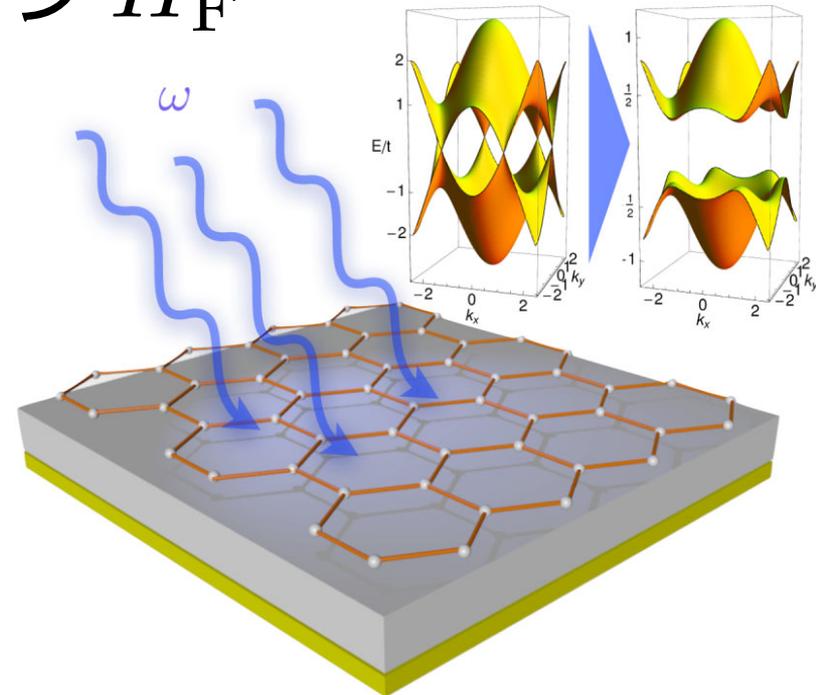
M.S. Rudner, et al., PRX 3 (2013) 031005  
N. Goldman, J. Dalibard, PRX 4 (2014) 031027.

# 例：Floquet topological insulator

- グラフエンに周期外場
- 各時刻の $H(t)$ ：普通の伝導体 (自明なトポロジカル相)
- 一周期での有効ハミルトニアン  $H_F$

⇒ **トポロジカル絶縁体！**

N. Lindner, et al., Nat. Phys. 7, 490 (2011),  
 G. Grushin, et al., PRL 112, 156801 (2014),  
 L. D'Alessio and M. Rigol, Nat. Commun 6 (2015)



その他の応用:

Majorana fermionやHiggs 粒子の検出など

R. Matsunaga, et al., Science 345, 1145–1149 (2014).  
 A. Kundu, et al., PRL 111, 136402 (2013).

# 時間周期系の解析

- フロッケ理論

➡ 時間周期系の解析を時間非依存の問題へ

時間周期系の有効ハミルトニアン：フロッケハミルトニアン

$$e^{-iH_{\text{F}}T} := U_{\text{F}} = \mathcal{T}\left[e^{-i\int_0^T H(t)dt}\right]$$

- しかしながら...

2準位系ですら  $H_{\text{F}}$  の一般的な解析は非自明

# 時間周期系の解析

- 現在の理論のほとんどは理想的な系を仮定

- Free fermion 系
- 可積分多体系
- 高周波極限

- 実験的には近似的にしか成り立たない

➡ まあ、問題ないでしょ ( ' ▽ ' )b

➡ **実は大問題！**

# ヒートアップ問題

- どんな弱い非可積分性も無限時間スケールでシステムに深刻な影響
- 時間周期系：エネルギーは保存されない
  - ➡ 外場からのエネルギーを吸収→加熱

M. Rigol, et al., Nature 452, 854–858 (2008), L. D'Alessio and M. Rigol, PRX 4, 041048 (2014)

	Non-driven	<i>Periodically driven</i>
(保存量)	エネルギー	なし
(終状態: $t \rightarrow \infty$ )	初期エネルギーのミクロカノニカル分布	温度無限大の状態 (完全にランダムな状態)

# ヒートアップ問題

- 理想的な系から少しでも外れるとシステムは加熱

→ Floquet engineeringは実現不可能？

- そんなわけない、実験の実現例がある

T. Kitagawa, et al., Nature communications 3 882 (2012).

G. Jotzu et al., Nature 515 237 (2014).



どう解釈すればいいか？

# 時間スケール

- 実験の時間スケール  $\neq$  無限時間スケール
- 見る時間スケールによって物理は大きく異なる
  - ➡ Floquet engineeringは実験的な時間スケールで観測されうる

時間スケール	有効ハミルトニアン
(実験的な時間スケール)	非自明(かもしれない) →トポロジカル絶縁体やMajorana粒子などの性質
(無限のスケール: $t \rightarrow \infty$ )	完全にランダム (温度無限大に加熱)

# 本研究の目的

(2つのクエスチョン)

- 有限の時間スケールにおける系の動的構造をどう特徴づければいいのか？
  
- 系の特徴的な時間スケールはどのように与えられるのか？

現在まで未解決問題であった！！

# 本研究の目的

(2つのクエスチョン)

- 有限の時間スケールにおける系の動的構造をどう特徴づければいいのか？

→ Floquet-Magnus展開の打ち切りによって得る

- 系の特徴的な時間スケールはどのように与えられるのか？

→ 周期  $T$  に対して  $\exp(1/T)$  で定義できる。

# Flouquet-Magnus展開

Floquet-Magnus理論の概要

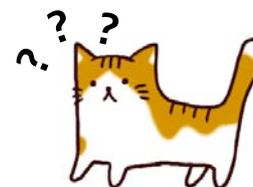
その本質的な問題点：発散問題

発散問題はどのようにして解決されるか？

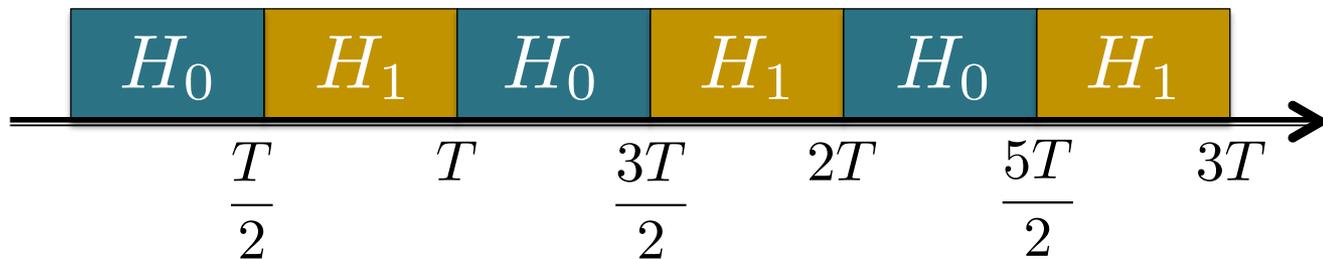
# Floquet-Magnus 理論

- フロッケハミルトニアンの計算

$$e^{-iH_F T} := \mathcal{T}\left[e^{-i \int_0^T H(t) dt}\right]$$



- 簡単な場合



$$e^{-iH_F T} = e^{-i \frac{T}{2} H_0} e^{-i \frac{T}{2} H_1}$$



ベーカー・キャンベル・ハウスドルフの公式

$$H_F = \frac{H_0 + H_1}{2} + \frac{T}{8i} [H_0, H_1] - \frac{T^2}{96} ([H_0, [H_0, H_1]] + [H_1, [H_1, H_0]]) + \dots$$

# Floquet-Magnus 理論：一般化

- より一般的な場合に拡張  $e^{-iH_F T} = \mathcal{T}[e^{-i \int_0^T H(t) dt}]$

$$H_F = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \Omega_n(T),$$

W. Magnus, Comm. Pure Appl. Math. 7 (4) (1954) 649–673.  
B. Sergio, et al., Physics Reports, 470 (2009): 151-238.

$$\Omega_0(T) = \frac{1}{T} \int_0^T H(t_1) dt_1$$

$$\Omega_1(T) = \frac{1}{2iT^2} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 [H(t_1), H(t_2)]$$

$$\Omega_2(T) = \frac{-1}{6T^3} \int_0^T dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \int_0^{t_2} dt_3 ([H(t_1), [H(t_2), H(t_3)]] + [H(t_3), [H(t_2), H(t_1)]])$$

**周期ゼロ(周波数無限)の極限**では非常にうまくいく！

→時間非依存の系へ帰着

# マグナス展開の発散問題

- 有限の周期  $T \neq 0$   $\longrightarrow$  マグナス展開は収束しない

[収束条件]

$$\int_0^T \|H(t)\| dt \leq \pi$$

$(T \lesssim 1/N)$



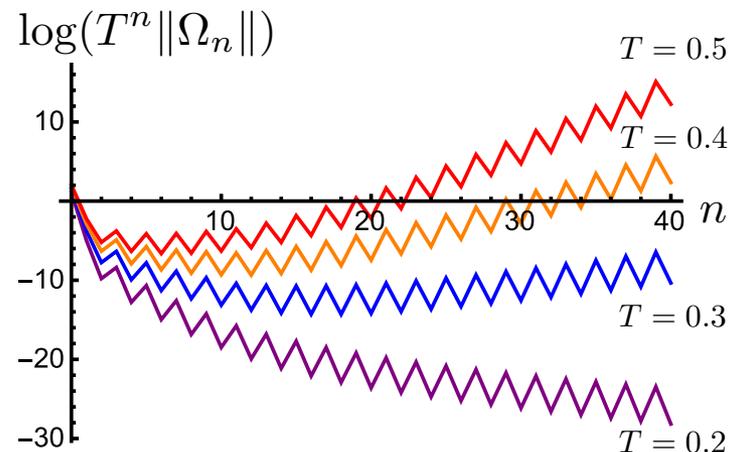
熱力学極限で常に破綻  
( $T$ の収束半径がゼロに)

- 少数スピン系での数値計算

$$H(t) = \sum_{i=1}^8 \left( \frac{3}{2} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{1}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + t \sigma_i^z \right),$$

$$H(t) = H(t + T)$$

$T \gtrsim 0.3$  で発散



# 発散問題の回避法

- 有限次で打ち切ってみたらどうだろうか？

$$H_F = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \Omega_n(T), \quad \longrightarrow \quad H_F^{(n_0)} = \sum_{n=0}^{n_0} T^n \Omega_n(T),$$

- 実は、 $e^{-iH_F T} \stackrel{?}{\simeq} e^{-iH_F^{(n_0)} T}$  だったりしない？

 経験論的には、Yes!

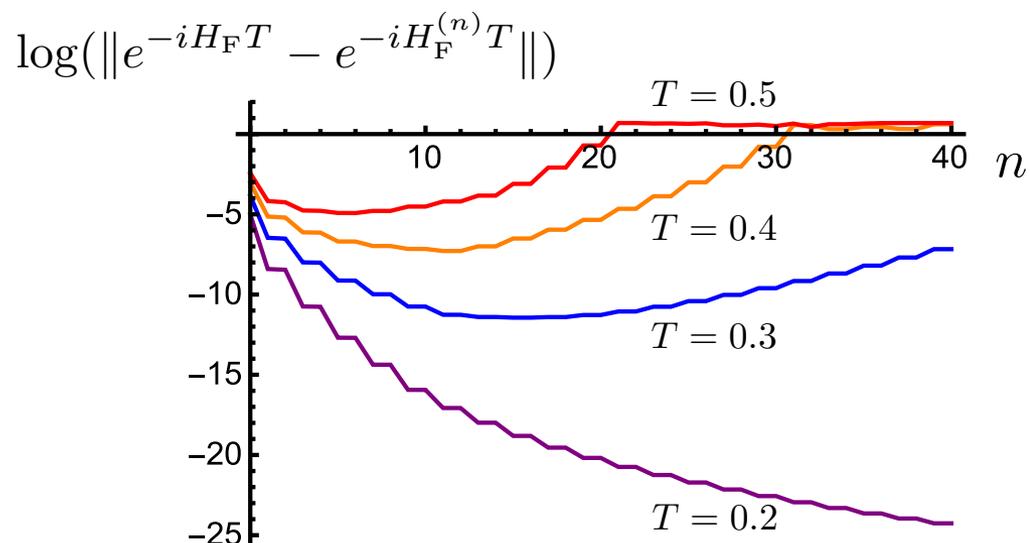
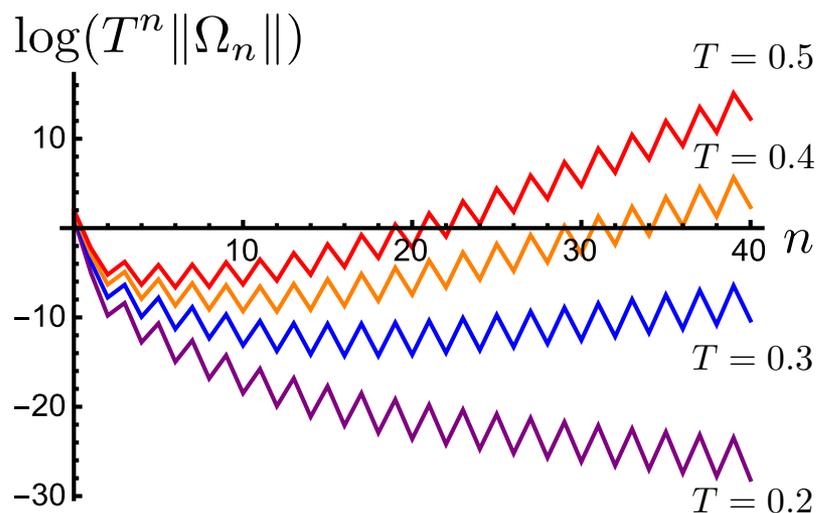
M.M. Maricq, Phys. Rev. B **25** (1982) 6622–6632.

M. Bukov, L. D'Alessio, A. Polkovnikov, Advances in Physics, **64**, 139 (2015)

# 実際に調べてみた...

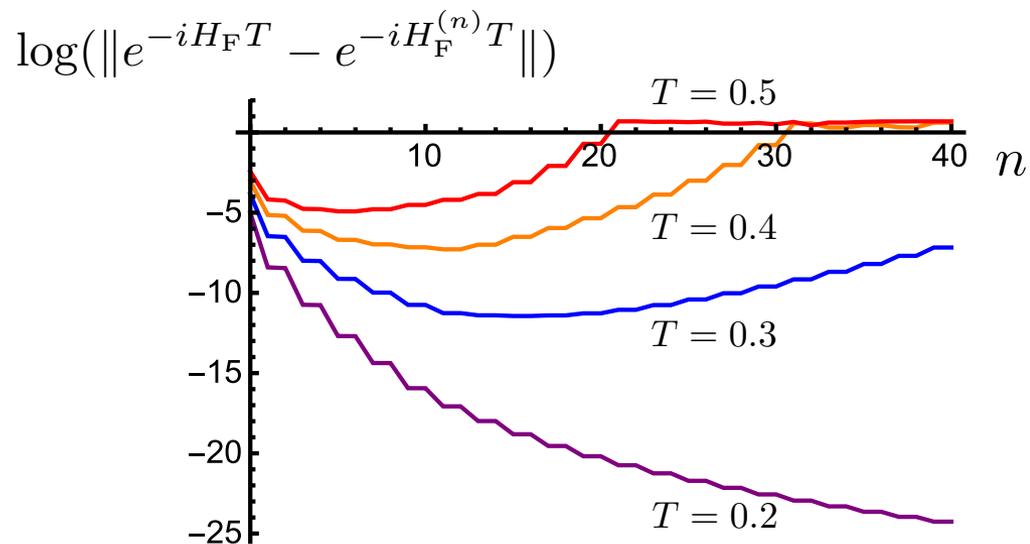
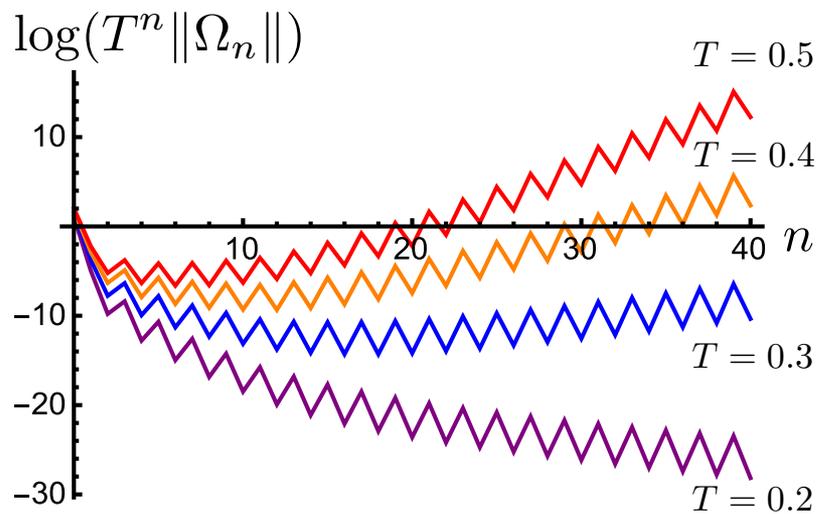
$$H(t) = \sum_{i=1}^8 \left( \frac{3}{2} \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + \frac{1}{2} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + t \sigma_i^z \right),$$

$$H(t) = H(t + T)$$



展開を途中で打ち切ると、 $e^{-iH_F T}$  が良い近似で得られている!!!

# 観測できる振る舞い



- 展開は最初収束し徐々に発散する
- 最も収束が良い次数で打ち切るのがベスト

# 本研究のメイン結果

ある時間スケールの範囲内でのダイナミクスの記述

マグナスの打ち切りの理論的正当化

# 物理系：一般の多体ハミルトニアン

- 孤立量子系： $N$ スピンの時間周期系

$$H(t) = H_0 + V(t), \quad V(t) = V(t + T)$$

- Hamiltonian  $H_0$ ,  $V(t)$  :  $k$ -local

➡ 相互作用は  $k$  体のカップリング

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_i h_i s_i + \sum_{i_1, i_2} J_{i_1, i_2} s_{i_1} s_{i_2} + \sum_{i_1, i_2, i_3} J_{i_1, i_2, i_3} s_{i_1} s_{i_2} s_{i_3} \\
 & + \cdots + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k} J_{i_1, i_2, \dots, i_k} s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k},
 \end{aligned}$$

- 一粒子(スピン)当たりのエネルギー：  $J$

# 時間スケールの見積もり

- (1) システムのパラメータ  $J, k, T$  を決定
- (2) マグナス展開の打ち切り次数  $n_0$  を決定
- (3) 上記の条件下でユニタリー変換の誤差

$$\|e^{-iH_{\text{F}}T} - e^{-iH_{\text{F}}^{(n_0)}T}\|$$

を見積もる。



マグナス展開が有効な時間スケール

$$t \sim T(\|e^{-iH_{\text{F}}T} - e^{-iH_{\text{F}}^{(n_0)}T}\|)^{-1}$$

# マグナス展開項のノルムの上界

- まず、マグナス展開項に関して以下の上界が成立

$$T^n \|\Omega_n\| \leq \frac{2V_0(\lambda T)^n}{(n+1)^2} n! =: T^n \bar{\Omega}_n,$$

$$H_F = \sum_{n=0}^{\infty} T^n \Omega_n(T),$$

$V_0$  : 周期駆動の強さ

$J$  : 一粒子当たりのエネルギー

$$\lambda = 2Jk$$

➡  $n!$ のために、 $n \approx (\lambda T)^{-1}$  くらいから発散が始まる

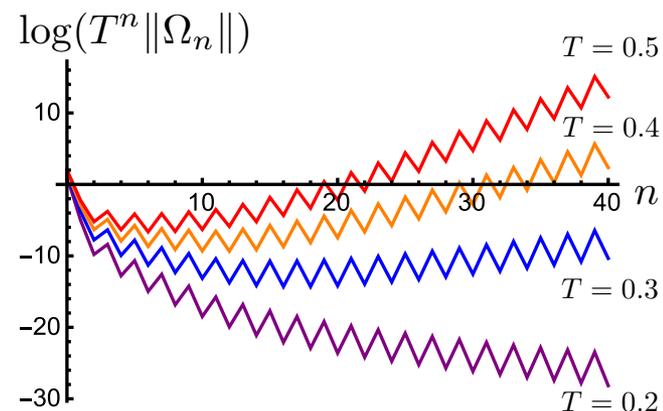
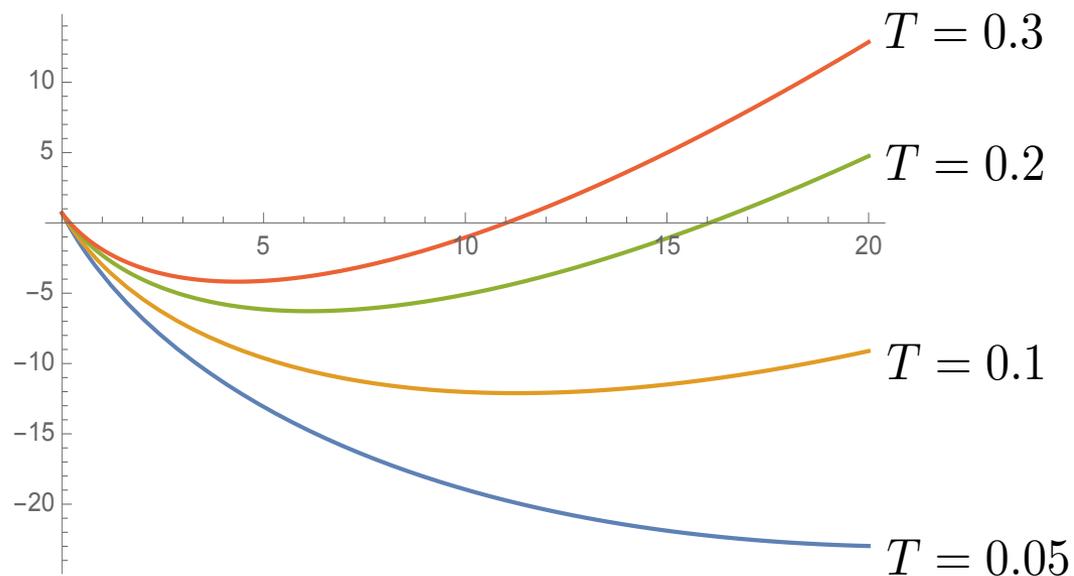
(これくらいで打ち切るのが良さそう)

# 数値プロット

- $V_0 = 1, \lambda = 1$  として  $T^n \bar{\Omega}_n$  をプロット

$$T^n \bar{\Omega}_n := \frac{2V_0(\lambda T)^n}{(n+1)^2} n!$$

$\log(T^n \bar{\Omega}_n)$



# メイン定理: 打ち切りの正当性

- 一周期のユニタリー変換の誤差

$$\|e^{-iH_F T} - e^{-iH_F^{(n_0)} T}\| \leq 6V_0 T 2^{-n_0},$$

( $\sim V_0 T e^{-\mathcal{O}(1/T)}$ )

$$n_0 = \lfloor 1/(16\lambda T) \rfloor = \mathcal{O}(1/T)$$

$$V_0 := \sup_{0 \leq t < T} \sum_{|X| \leq k} \|v_X(t)\|, \quad \text{where } V(t) := \sum_X v_X(t)$$

マグナス展開が有効な時間スケール

$$t \sim T (\|e^{-iH_F T} - e^{-iH_F^{(n_0)} T}\|)^{-1} \approx e^{\mathcal{O}(1/T)}$$

# 実験系での適用

- 時間周期系の制御パラメータ  $\hbar/(JT)$   
( $\hbar$ : プランク定数、 $J$ : 1サイトのエネルギー、 $T$ : 周期)

- マグナス展開が有効な時間スケール

$$t \lesssim T \exp\left(\frac{\log 2}{32k} \cdot \frac{\hbar}{JT}\right)$$

- ➡ 相互作用が2体 ( $k=2$ ) とすると  $\hbar/(JT) \sim 10^3$  程度にとると実験で観測できる時間スケールに。

# 時間周期系の二段緩和 (Floquet Prethermalization)

- 長い時間スケール

→ 温度無限

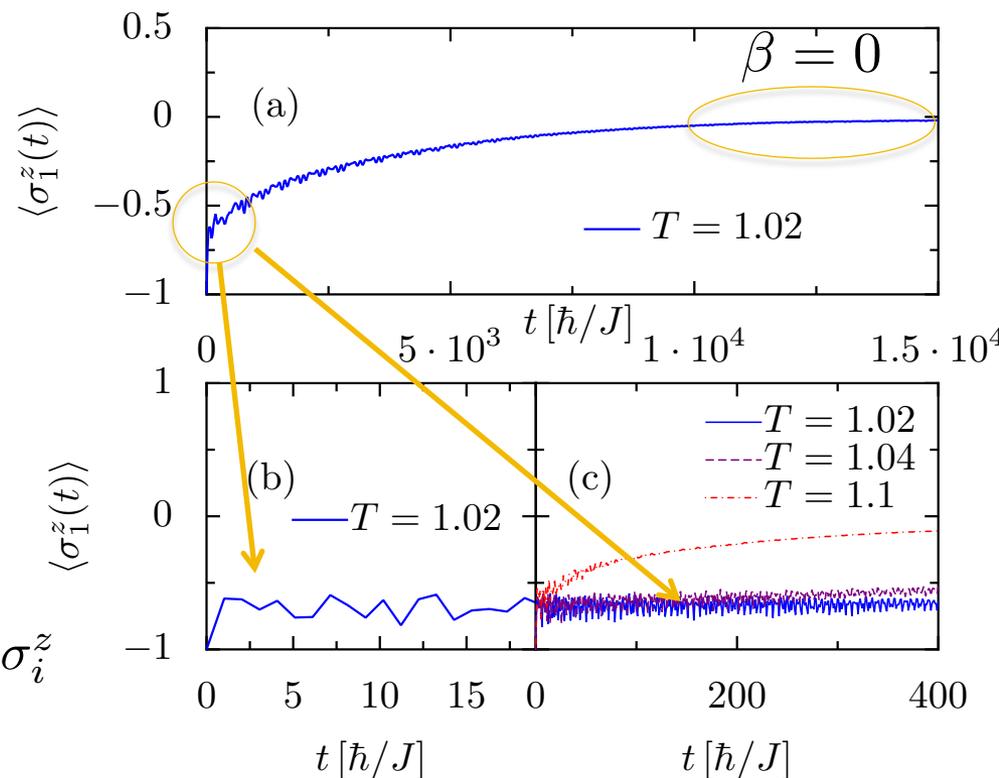
- 短い時間スケール

→  $H_F^{(n_0)}$  に関する  
ミクロカノニカル分布

- Toy model ( $N=24$ )

$$H(t) = \begin{cases} -\sum_{i=1}^N \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z + h_z \sum_{i=1}^N \sigma_i^z & (0 \leq t < T/2) \\ h_x \sum_{i=1}^N \sigma_i^x & (T/2 \leq t < T) \end{cases}$$

$$h_z = 0.8090, h_x = 0.9045$$



T. Mori, T. Kuwahara, and K. Saito,  
to appear in PRL

# まとめ

## 「モチベーション」

- 現実の時間周期系：理想的な系からのずれ
- 時間無限極限で、無限温度へとヒートアップ
- 実験を正しく理解するなら、時間スケールの理解が重要

## 「メイン結果」

- 有限時間スケールのダイナミクスはマグナス展開で記述
- 本研究はその有効性を記述する枠組みを与えた

時間スケール	有効ハミルトニアン
(実験的な時間スケール)	マグナス展開の有限の打ち切りで定義 $H_F^{(n_0)} = \sum_{n=0}^{n_0} T^n \Omega_n(T), \quad n_0 = \mathcal{O}(1/T)$
(無限のスケール: $t \rightarrow \infty$ )	完全にランダム (温度無限大に加熱)