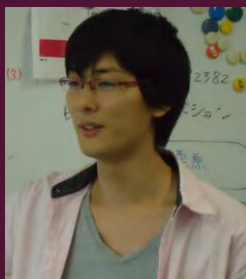


2017年3月7日
統計物理学懇談会

金融市場のブラウン運動のミクロ導出の試み： 分子運動論の数理の応用

東工大，金澤輝代士

共著者



末重 拓己
東工大

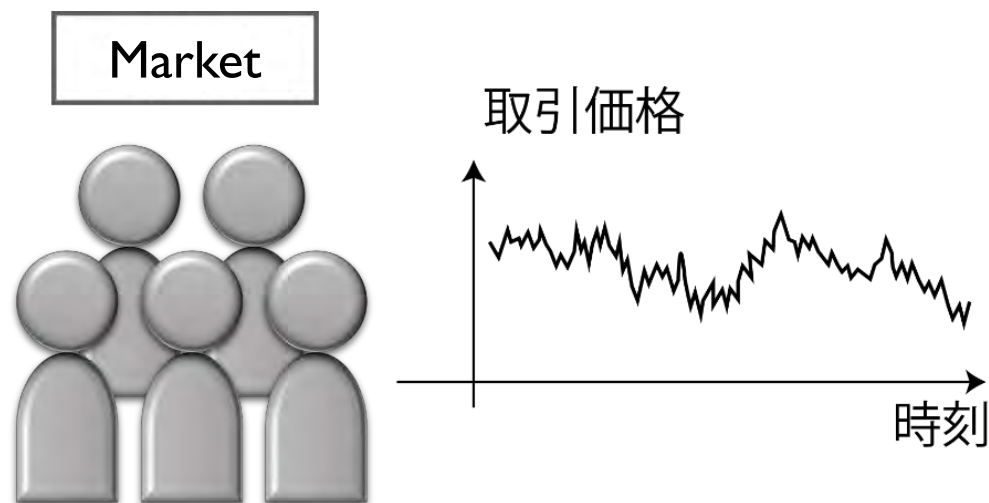


高安 秀樹
Sony CSL, 東工大



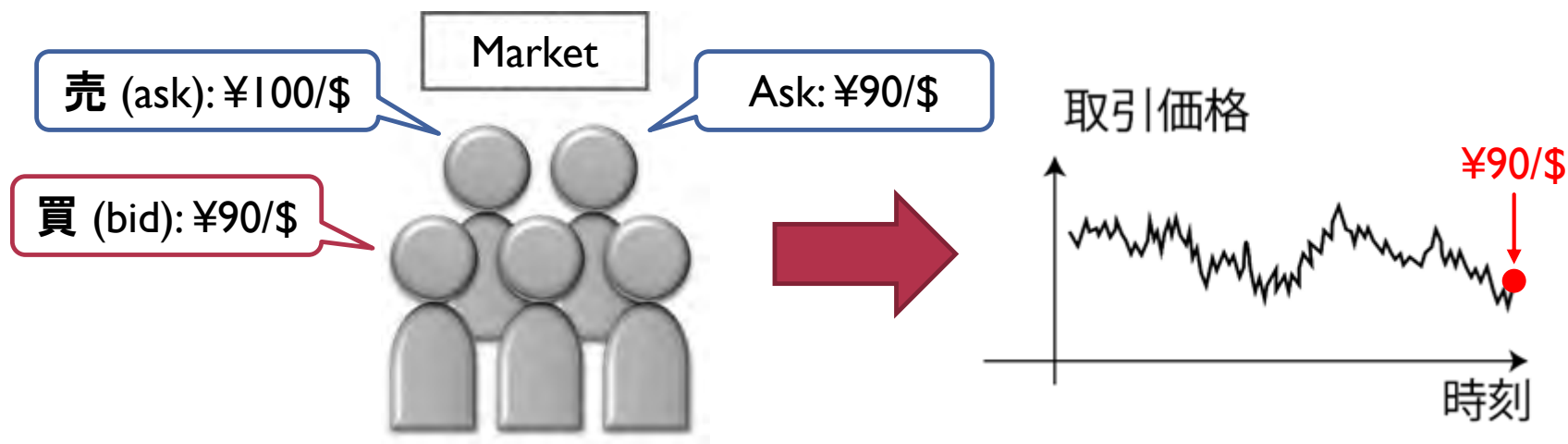
高安 美佐子
東工大

金融市場とブラウン運動



- ◆ 例 : 株価, 外国為替 (FX)
- ◆ 理想的市場 : 価格変動 = ランダムウォーク
現実の市場 : ランダムウォークからの乖離
- ◆ 進展理由 : 詳細な市場データに基づくデータ解析
- ◆ 焦点 : 市場の「階層構造」を体系的に理解

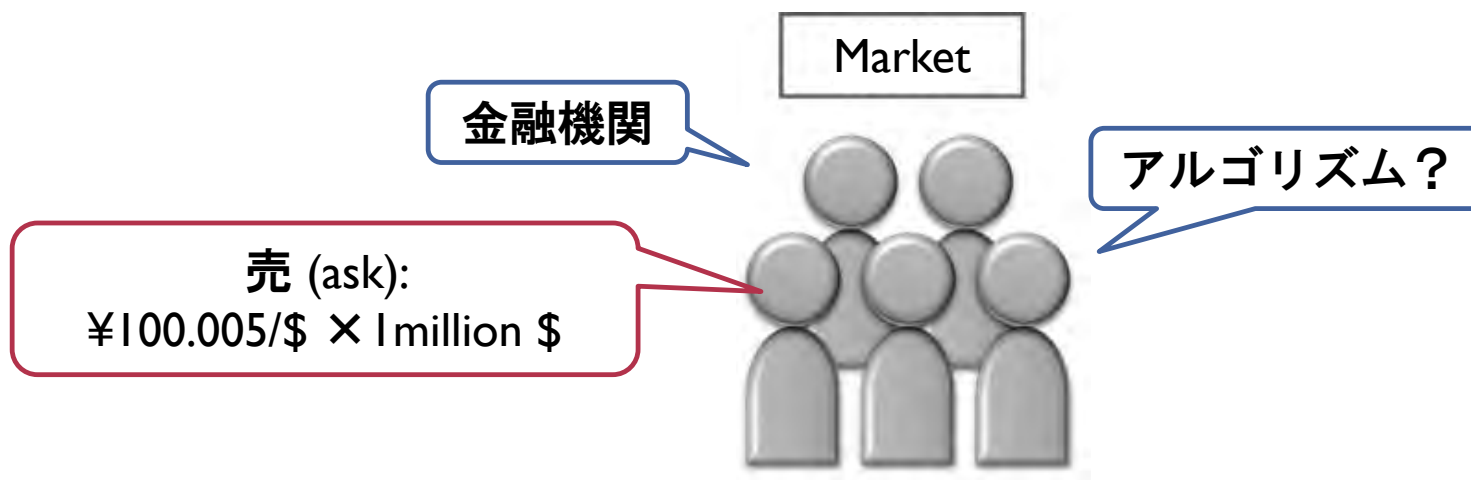
おさらい①：FX市場のルール



■ ダブル・オークション

1. 希望売値・買値を予め提示する
2. 売値と買値がマッチしたら取引成立
3. 直近の取引価格が更新される

おさらい②：FX市場のルール

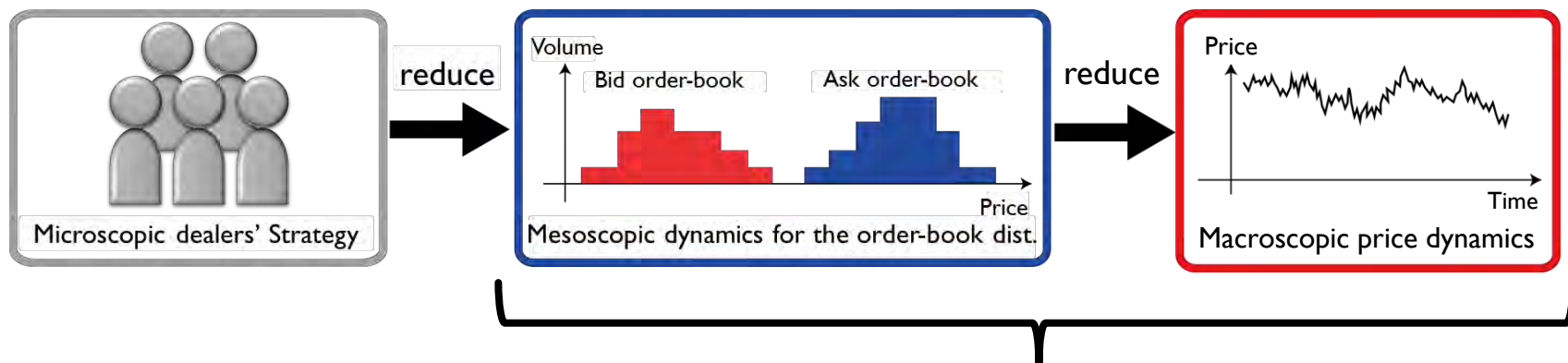


- 今回の市場：Electronic Broking Services (EBS)
円ドルのインターバンク市場（金融機関間のみ）ではシェア最大
- 最低取引単位：1 million \$ $\div$ 1億円
- 円の最低単位：5/1000円 = 5 [tpip]
- アルゴリズム取引が活発

時間スケール：
平均約定時間間隔 $\div$ 6秒
平均注文時間間隔 $\div$ 0.3秒

市場の階層構造（定義）：

microscopic — *mesoscopic* — *macroscopic*



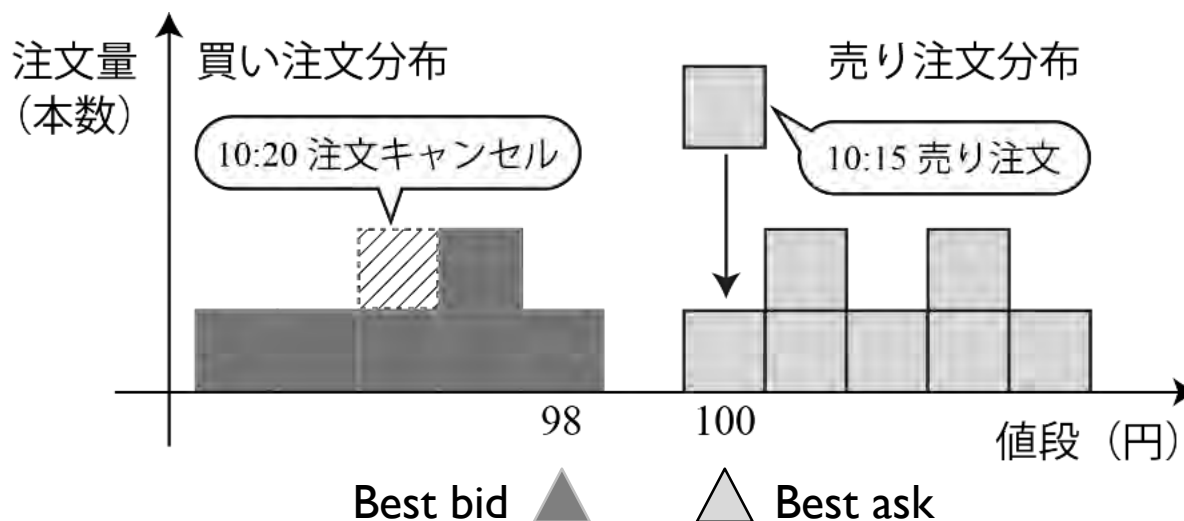
主にここが重点に研究されてきた

- 市場の階層構造

1. ミクロ：個々のトレーダーの動力学
2. メゾ：オーダーブックの動力学
3. マクロ：価格の動力学

- 先行研究：主にメゾ・マクロのデータ解析・理論
→今回はミクロについてデータ解析・理論

おさらい③：オーダーブック（板情報）



◆ オーダーブック = 現在の売・買の予約状況（分布）

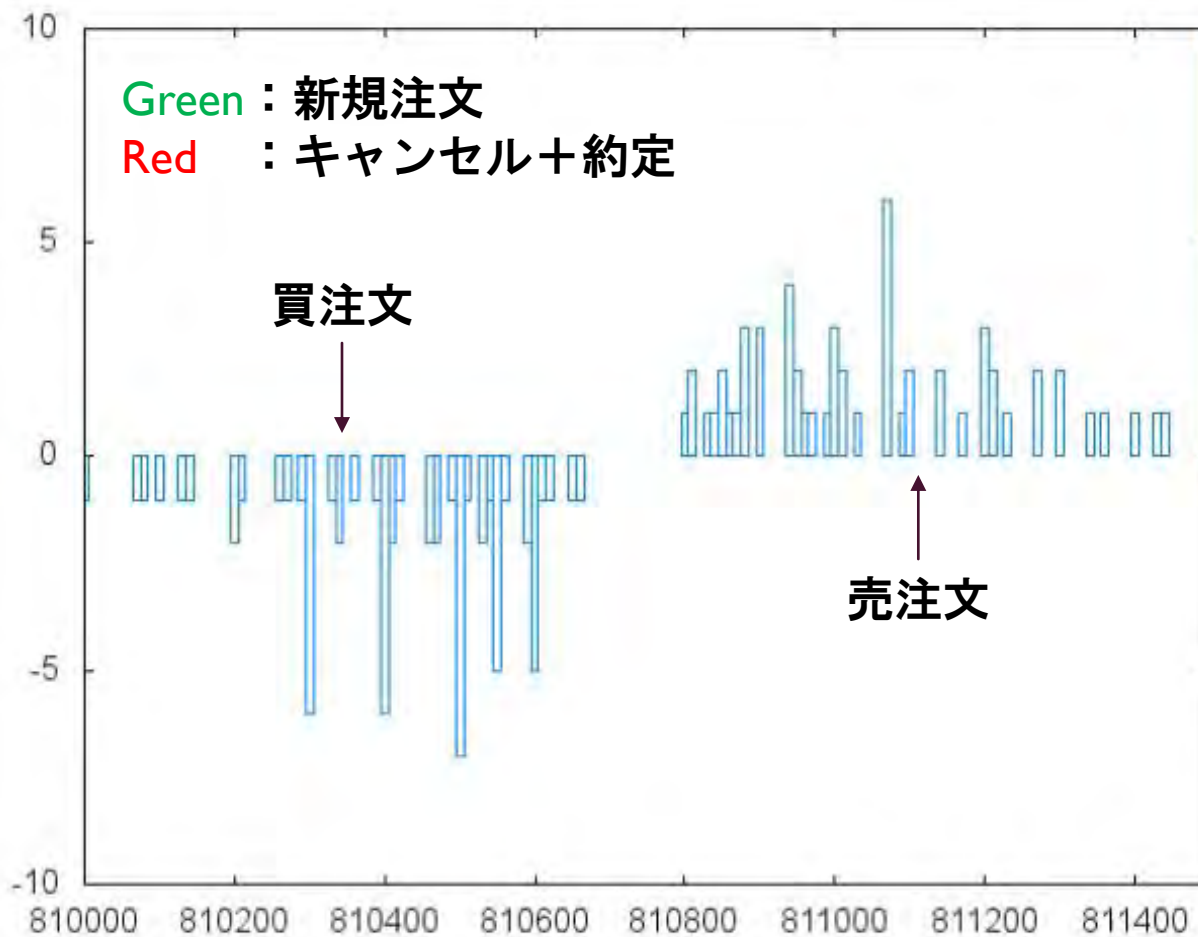
1. 新規注文の時間
2. キャンセル・取引時刻

注文の種類
bid (buy) or ask (sell)

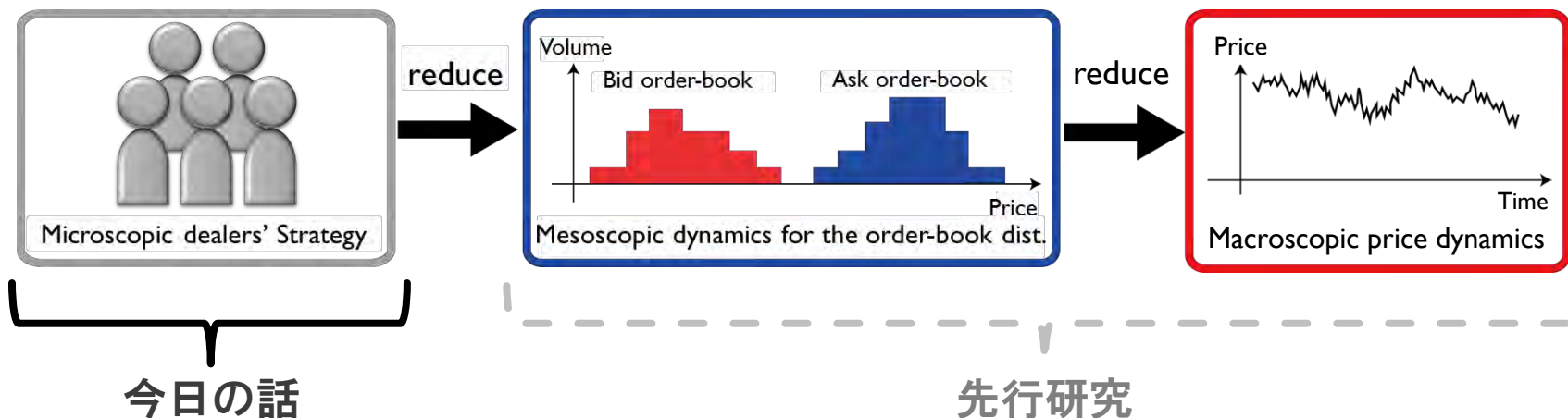


オーダーブックの性質の研究
(e.g., J.-P. Bouchaud q-fin 2002, Y. Yura PRL2014)

オーダーブック（リアルタイム動画）



動機：ミクロ階層から体系的に理解したい



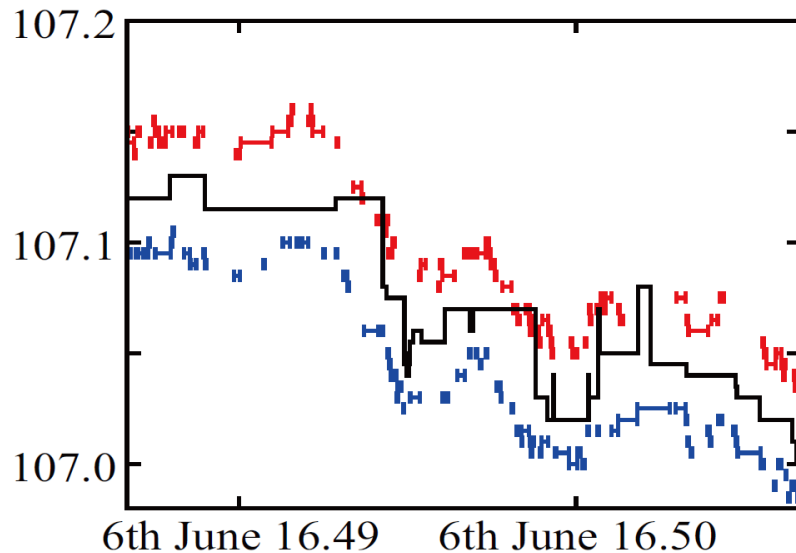
◆ ミクロデータを解析して，データと合うミクロモデル構築・解析

1. データ解析：トレーダの行動を一人一人観測して戦略分析
2. 理論：対応するミクロモデル＋その理論解析

Idea for Solution

1. 匿名ID付のトレーダデータの統計解析
2. 多体確率過程モデル＋分子運動論の計算テクの応用

Solution 1: 匿名ID付のトレーダデータ



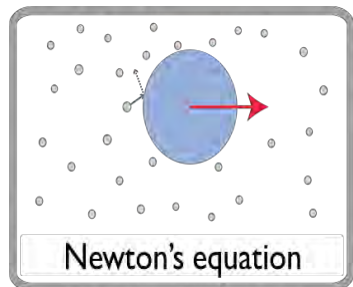
single trader
の売値・買値の軌道

1. 注文, キャンセル, 約定情報
2. 匿名化済トレーダーID + 匿名化済銀行コード

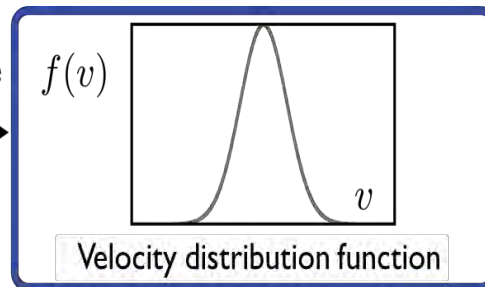


1. 個々のトレーダーの行動戦略を直接解析する
2. ミクロな確率モデルをデータに基づいて作る

Solution 2: トレーダに対する“運動論”



reduce



◆ 分子運動論での基本的手法

1. Liouville equation (Newton equation)
2. BBGKY Hierarchy
3. Boltzmann equation

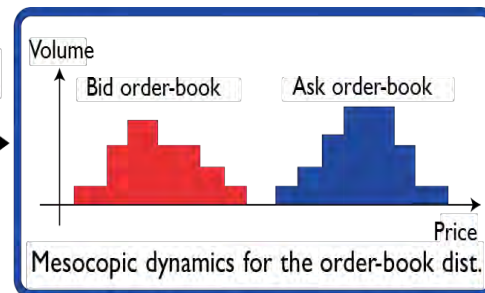
数理的アナロジー



reduce



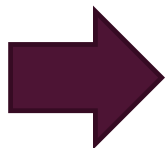
?



◆ データに基づくミクロモデル

◆ 金融市場で“運動論”

1. “Liouville” equation
2. “BBGKY” Hierarchy
3. “Boltzmann” equation



FXトレーダに対して同テクニックを使う

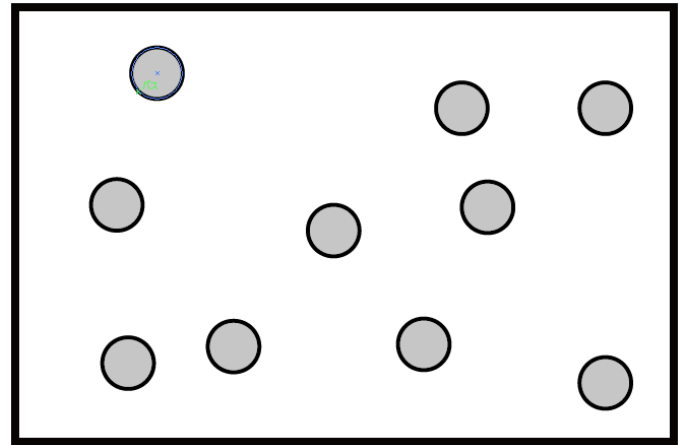
Review of the kinetic theory

0th Step: Newton's Equation

$$\Gamma \equiv (\vec{x}_1, \vec{p}_1, \dots, \vec{x}_N, \vec{p}_N)$$

= 位相空間上の点

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\vec{p}_i}{m} \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \end{array} \right.$$

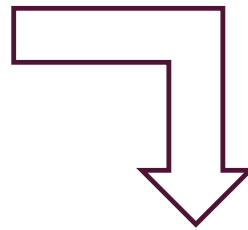


◆ N体系の“完全”な記述

◆ $N \sim 10^{23} \rightarrow$ 粒子数が多すぎて解けない！

1st step: Liouville equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\vec{x}_i}{dt} = \frac{\vec{p}_i}{m} \\ \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \end{array} \right.$$



$$P_N(\vec{x}_1, \vec{p}_1; \dots; \vec{x}_N, \vec{p}_N) \\ = N\text{-body dist.}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} \right] P_N = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{ P_N(\dots, \vec{p}'_i, \vec{p}'_j, \dots) - P_N \} |\Delta \vec{v}_{ij} \cdot \vec{e}_{ij}| \delta(|\Delta \vec{x}_{ij}| - a) \Theta[-\Delta \vec{v}_{ij} \cdot \vec{e}_{ij}].$$

- N体分布に対するマスター方程式
- 数学的にはニュートン方程式と等価
- 厳密で閉じているが、**解けない**...

2nd step: Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon hierarchy

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_i} \right] P_N = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \{ P_N(\dots, \vec{p}'_i, \vec{p}'_j, \dots) - P_N \} |\Delta \vec{v}_{ij} \cdot \vec{e}_{ij}| \delta(|\Delta \vec{x}_{ij}| - a) \Theta[-\Delta \vec{v}_{ij} \cdot \vec{e}_{ij}].$$

Reduction

$$P_1 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_N \prod_{i=2}^N d\vec{x}_i d\vec{p}_i, \quad P_2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} P_N \prod_{i=3}^N d\vec{x}_i d\vec{p}_i$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \right) P_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1) \\ &= (N-1)a^2 \int d\vec{e} d\vec{p} \{ P_2(\vec{x}_1, \vec{p}'_1; \vec{x}_2, \vec{p}'_2) - P_2(\vec{x}_1, \vec{p}_1; \vec{x}_2, \vec{p}_2) \} |\Delta \vec{v}_{12} \cdot \vec{e}| \Theta[-\Delta \vec{v}_{12} \cdot \vec{e}] \end{aligned}$$

- N体分布を1体・2体分布に縮約する：

$$P_N \Rightarrow P_1, P_2$$

- 厳密だが、閉じていない... ただの恒等式

3rd Step: Boltzmann Equation

Assumption of the molecular chaos

$$P_2(\vec{x}_1, \vec{p}_1; \vec{x}_2, \vec{p}_2) \simeq P_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1) P_1(\vec{x}_2, \vec{p}_2)$$



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{x}_1} \right) P_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1) \\ \simeq N a^2 \int d\vec{e} d\vec{p} \{ P_1(\vec{x}_1, \vec{p}'_1) P(\vec{x}_2, \vec{p}'_2) - P_1(\vec{x}_1, \vec{p}_1) P_1(\vec{x}_2, \vec{p}_2) \} |\Delta \vec{v}_{12} \cdot \vec{e}| \Theta[-\Delta \vec{v}_{12} \cdot \vec{e}]$$

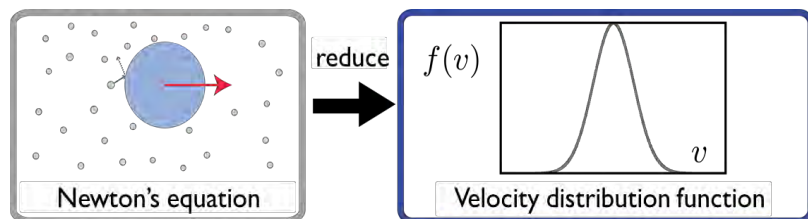
◆ ハミルトン動力学から稀薄極限で厳密にでる
(稀薄 = Boltzmann-Grad 極限)

◆ Maxwell-Boltzmann 分布が導出される：

$$f(\vec{v}) = \left(\frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} e^{-m\vec{v}^2/2T}$$

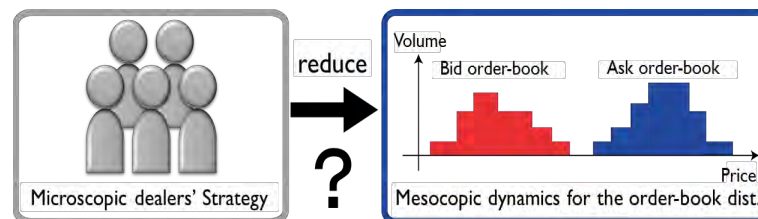
理論的なアイデア: from the *molecular* to the *trader* kinetic theory

分子運動論



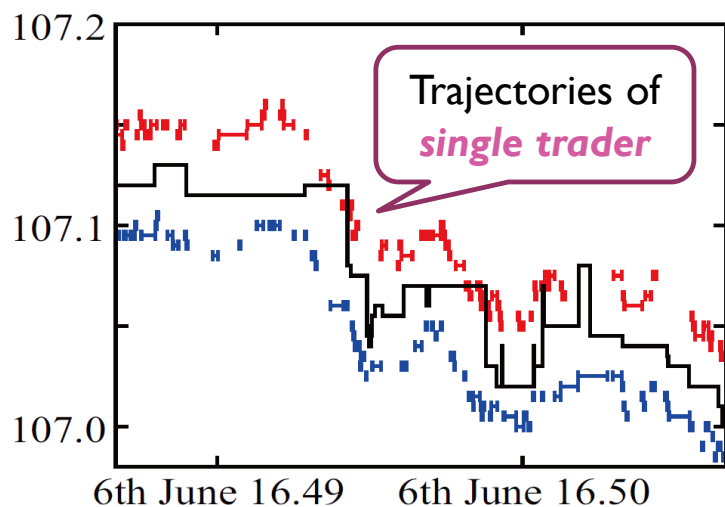
1. Newton's equation
2. Liouville equation
3. BBGKY hierarchy
4. Boltzmann equation

トレーダーの“運動論?”



1. Stochastic equation
2. “Liouville” equation
3. “BBGKY” hierarchy
4. Mean-field equation

講演のゴール：FX市場のミクロ構造の直接分析 (データ解析＋理論解析)

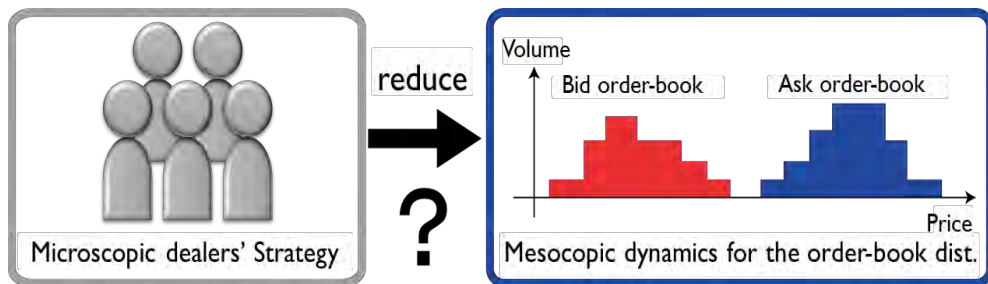


■ データ解析：

1. 個々のトレーダの動力学
2. トレンドフォロー

■ 理論解析：

1. データ分析に基づいて作る
2. 運動論の数理を真似た理論
3. ミクロから体系的に理解



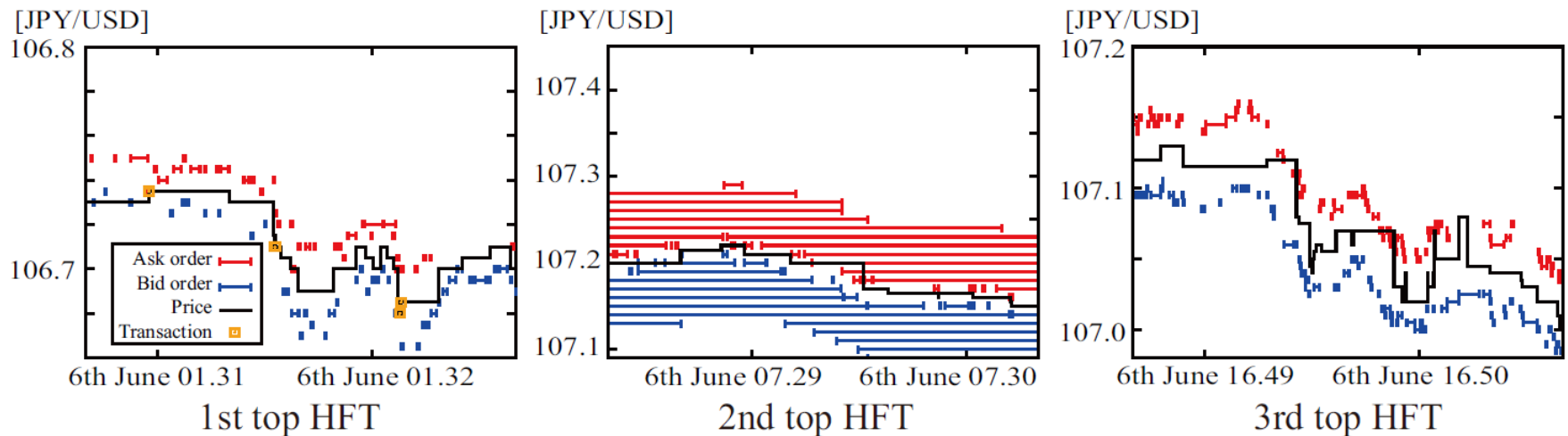


データ解析

個々のトレーダの動力学



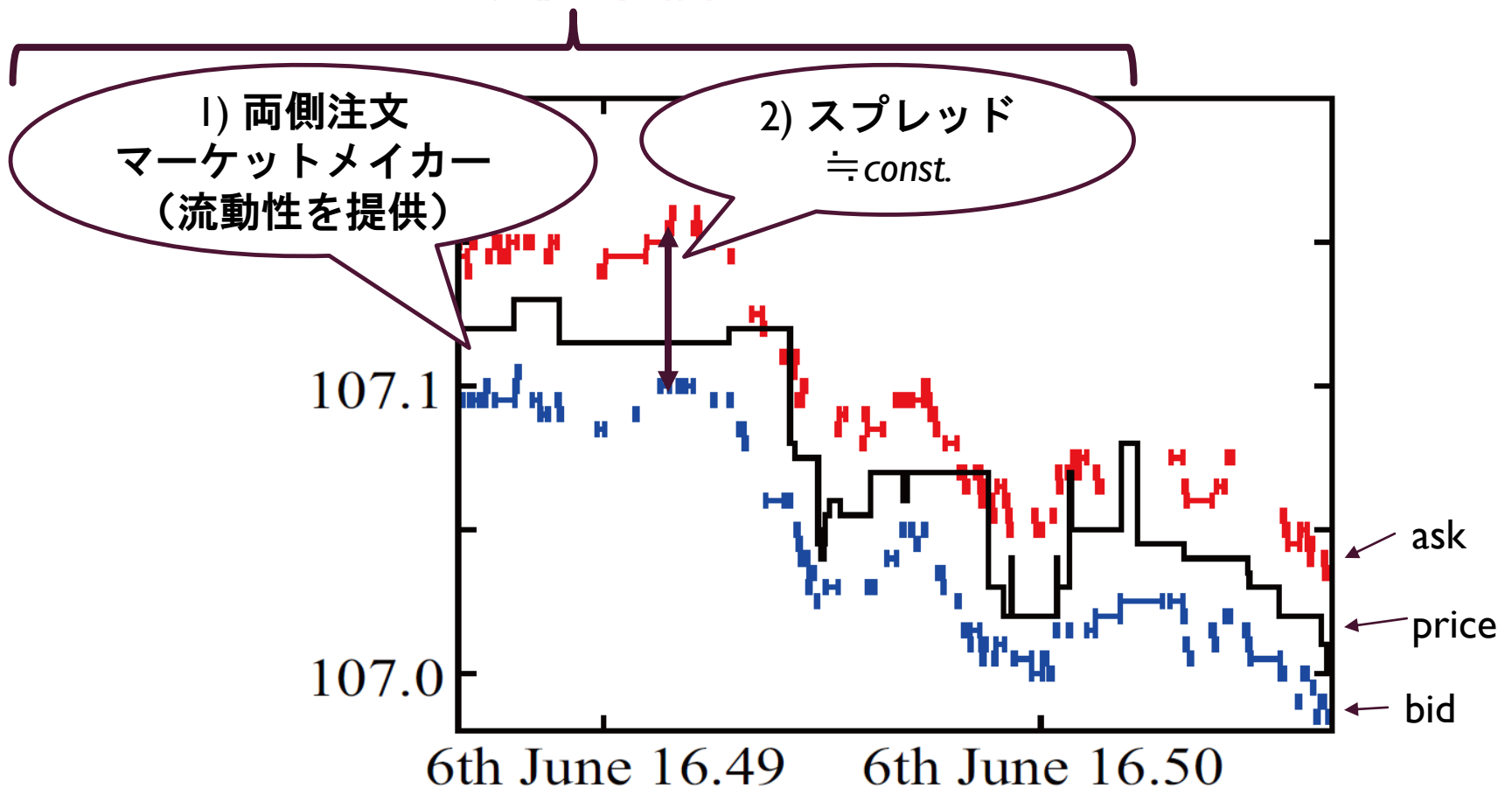
High Frequency Traders (HFT) の典型的な軌道



- High Frequency Trader (HFT)：高頻度に売注文・買注文を繰り返す
アルゴリズムに従うトレーダー
- 最低時間分解能はミリ秒（平均注文時間間隔は数秒～1分程度）
- 今回の定義：週平均で1分1回以上注文するトレーダー
（134人中1015人）

HFTの典型的な軌道

売・買値は強結合



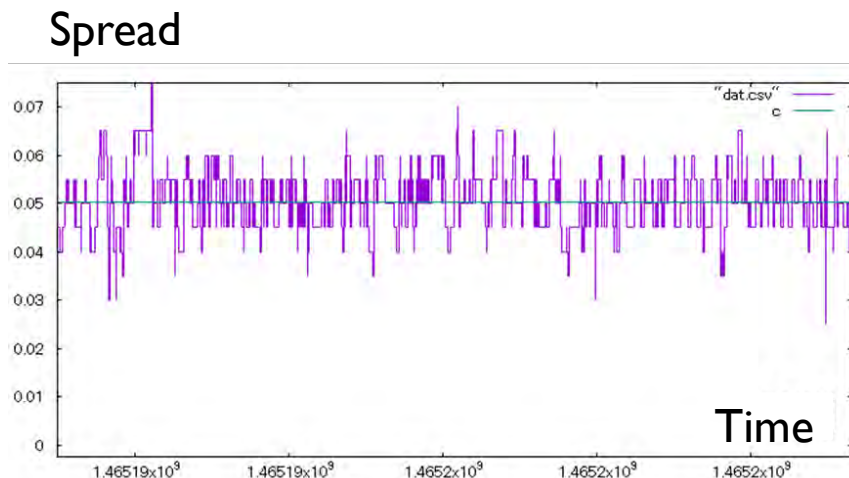
スプレッドの振る舞い・全体での分布

スプレッドの時系列

- 定数周りでゆらぐ（近似）

$$L_i \simeq \text{const.}$$

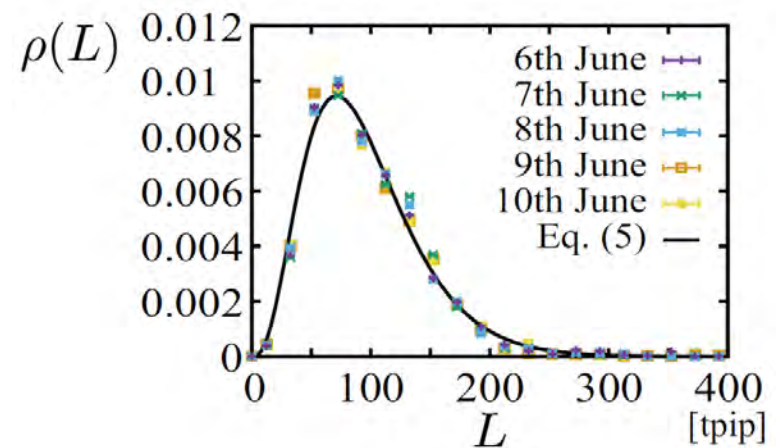
L_i : i 番目のトレーダのSpread



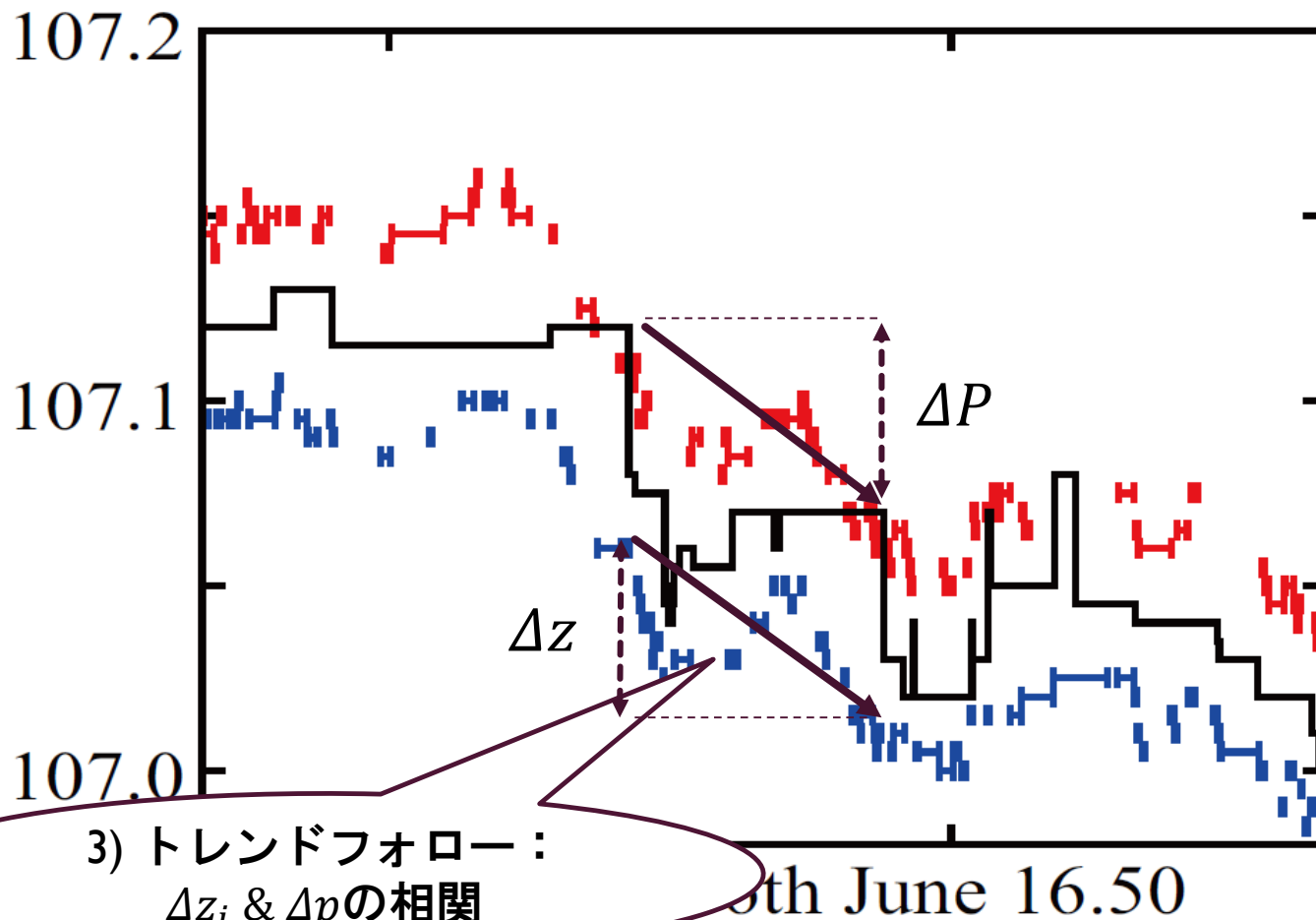
全体のSpread 分布 $\rho(L)$

- γ -分布 ($L^* = 23.5$ [tpip])

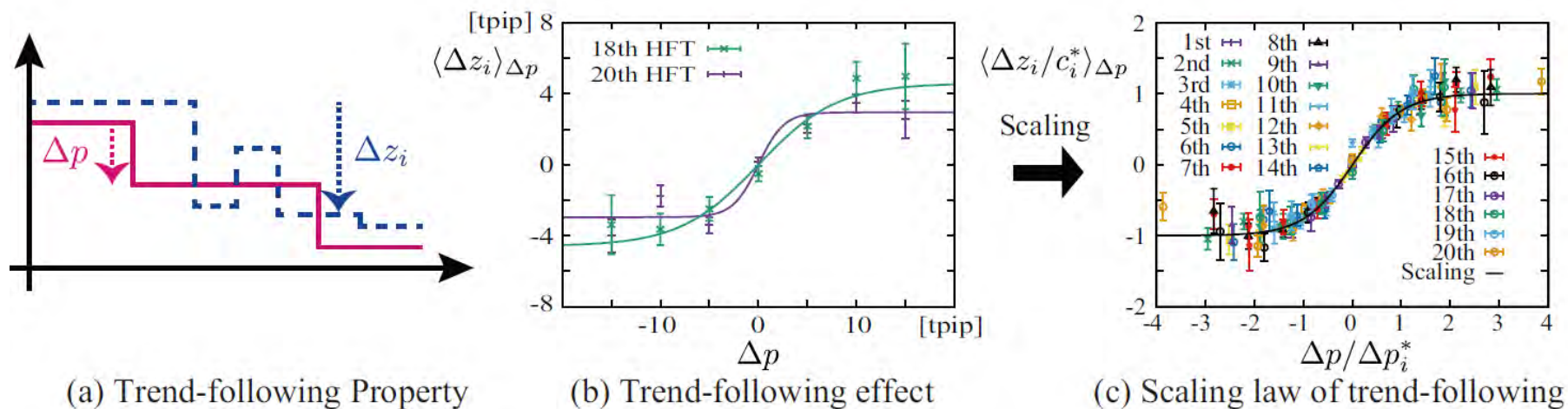
$$\rho(L) = \frac{L^3 e^{-L/L^*}}{6L^{*4}}$$



HFTの典型的な軌道



トレーダレベルのトレンドフォロー傾向



- Δz_i = i 番目のトレーダの価格（売・買値の中央値）
- Δp = 1 つ前の取引での取引価格の動き
- Top 20 HFTs 全員が同じ関数形の戦略を取る：

$$\left\langle \frac{\Delta z_i}{c_i^*} \right\rangle \simeq \tanh \left(\frac{\Delta p}{\Delta p_i^*} \right) \sim \text{sgn}(\Delta p) \quad (|\Delta p| \rightarrow \infty)$$

c_i^* & Δp_i^* : 特徴付け定数

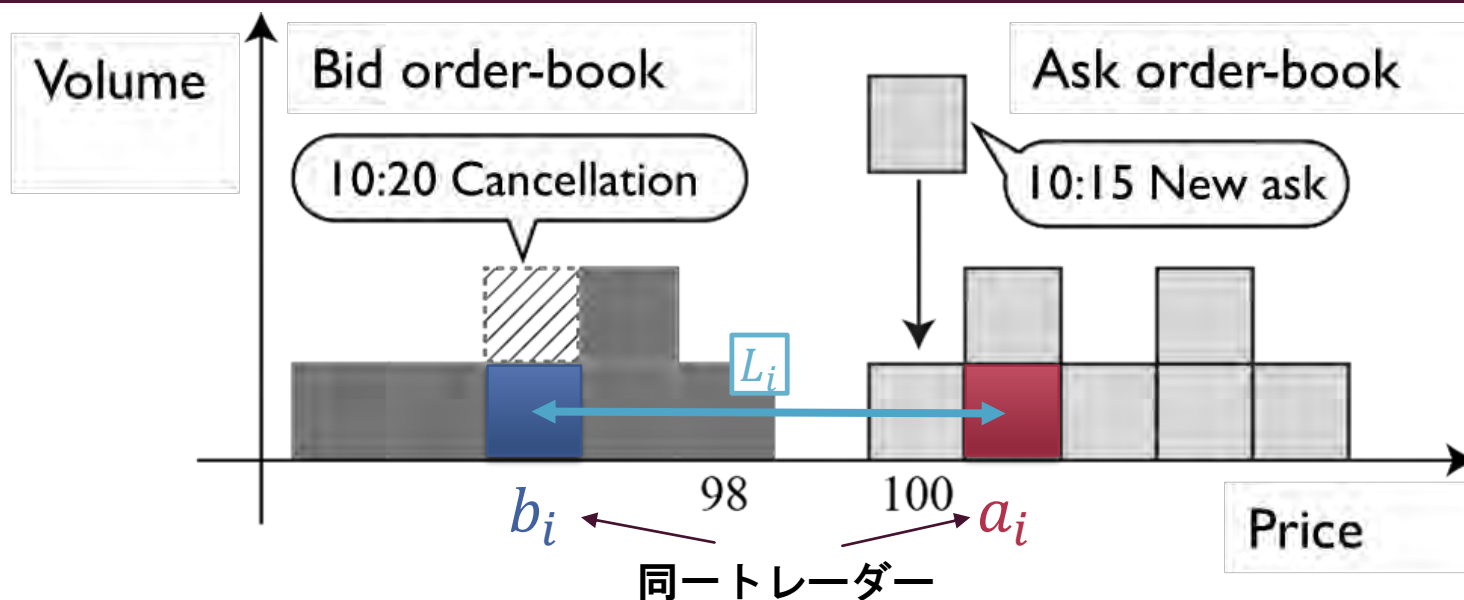


データ分析に基づくミクロモデル

トレーダに対する“運動論”的な何か



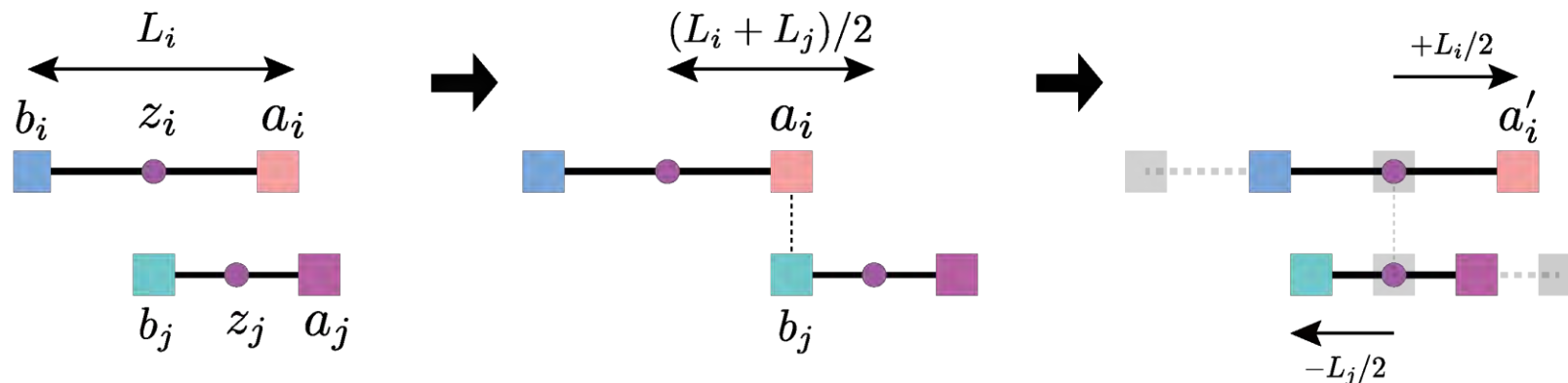
設定： トレンドフォロー+ランダムウォークモデル



- マーケットメイカー：売・買値を同時に連続的に提示
- i th trader: 買値 b_i
売値 a_i
スプレッド L_i
- スプレッド L_i は分布 $\rho(L)$ に従う

$$\text{Mid price: } z_i \equiv \frac{a_i + b_i}{2}$$

モデルの動力学



(a) Trend-following random walk

(b) Transaction

(c) Requotation

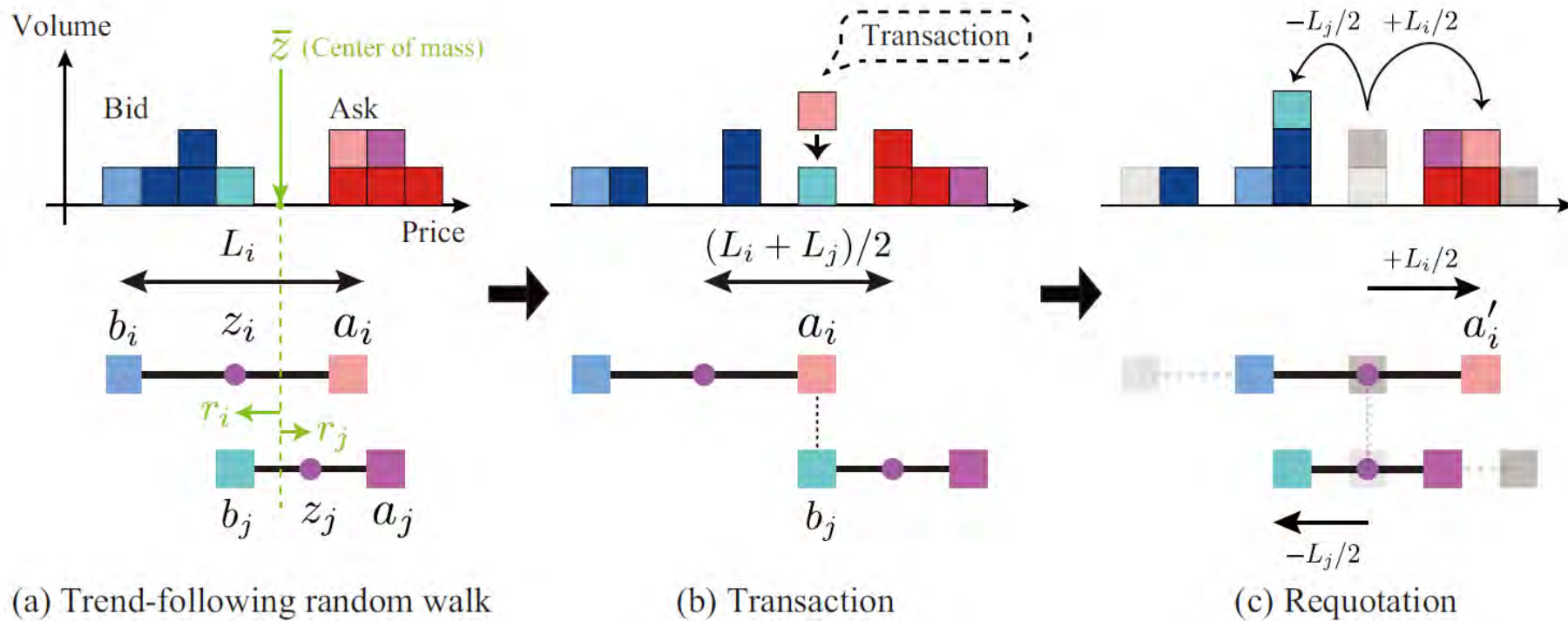
- *mid price* $z_i \equiv (a_i + b_i)/2$ (直前の価格差 Δp & 定数 $c, \Delta p^*$)

$$\frac{dz_i}{dt} = c \tanh(\Delta p / \Delta p^*) + \sigma \eta_i, \quad \eta_i = \text{白色ガウス雑音}$$

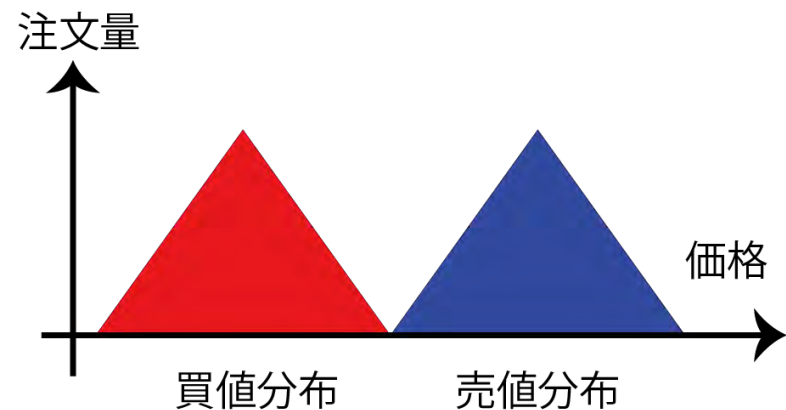
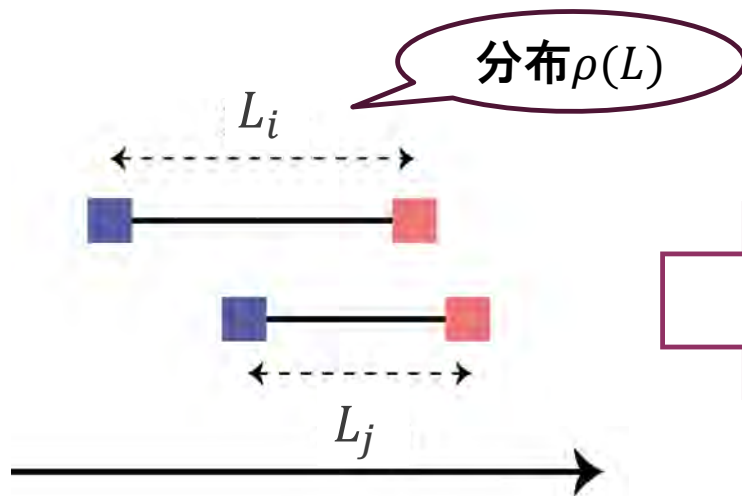
- 取引ルール $b_i = a_j \Leftrightarrow |z_i - z_j| = (L_i + L_j)/2$

- 価格の再設定
$$\begin{aligned} b'_i &= b_i - L_i/2 \\ a'_j &= a_j + L_j/2 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} z'_i &= p_i - L_i/2 \\ z'_j &= p_j + L_j/2 \end{aligned}$$

オーダーブックの動力学と対応関係



0. モデルの確率動力学



$$\frac{dz_i}{dt} = c \tanh(\Delta p / \Delta p^*) + \sigma \eta_i^R + \eta_i^E$$

取引ルール

$$|z_i - z_j| = \frac{L_i + L_j}{2}$$

再注文ジャンプ

$$\begin{aligned} z'_i &= z_i - L_i/2 \\ z'_j &= z_j + L_j/2 \end{aligned}$$

◆ N 人のトレーダー系

◆ スプレッド分布: $\rho(L)$

漸近解 ($N \rightarrow \infty$) を
BBGKY階層方程式を通じて出す

I. “Liouville” equation for the trader model

$P_N(r_1, \dots, r_N) = N$ 体分布

$$\bar{z} \equiv \sum_i^N \frac{\hat{z}}{N} = \text{重心}$$

$$\hat{r}_n \equiv \hat{z}_n - \bar{z} = \text{相対座標}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial P^{(N)}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \sum_{i=1}^N \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} P^{(N)}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \sum_{ij} \frac{\sigma^2}{2} \left\{ \delta(r_i - r_j) \partial_{ij} P^{(N)}(\mathbf{r} - \Delta \mathbf{r}, t) - \delta(r_i - r_j - L_i - L_j) \partial_{ij} P^{(N)}(\mathbf{r}, t) \right\} \end{aligned}$$

- N体分布のマスター方程式
- 分子運動論の Liouville equation と対応

2. スプレッドについての条件付き分布と その“BBGKY” 階層構造

$$\phi_L(r) = \text{1 体分布 (spread=L)}$$

$$\phi_{LL'}(r, r') = \text{2 体分布 (spread } L \text{ \& } L')$$



$$\frac{\partial \phi_L(r, t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_L(r, t) + N \sum_{s=\pm 1} \int_{L_{\min}}^{L_{\max}} dL' \rho(L') [J_{LL'}^s(r + sL) - J_{LL'}^s(r)]$$

$$J_{LL'}^s(r) = \frac{\sigma^2}{2} \partial_{rr'} \phi_{LL'}(r, r') \Big|_{r-r'=s(L+L')}$$

衝突積分に対応する
相互作用項

- 厳密だが、閉じていない...
- 近似を入れないと解けない

3. 一体分布に対する Boltzmann-like 方程式

$$\phi_{LL'}(r, r') \simeq \phi_L(r)\phi_{L'}(r')$$



$$\frac{\partial \phi_L(r, t)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \phi_L(r, t) + N \sum_{s=\pm 1} \int_L$$

$$J_{LL'}^{s*}(r) = \frac{\sigma^2}{2} [\phi_{L'}(r - s\{L + L'\}) (\partial \phi_L(r) / \partial r) - \phi_L(r) (\partial \phi_{L'}(r - s\{L + L'\}) / \partial r)]$$

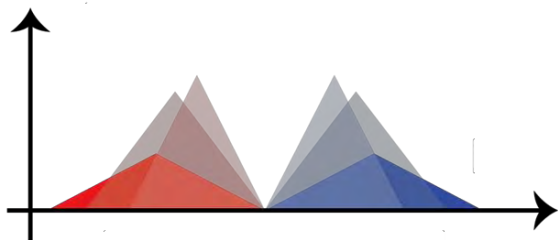
- “分子カオス”を仮定して平均化
- 1 体分布 $\phi_L(r)$ について閉じた方程式



$$\phi_L^*(r) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \phi_L(r) = \begin{cases} (L - |r|)/2L^2 & (|r| \leq L) \\ 0 & (|r| > L) \end{cases}$$

オーダーブックの平均形状

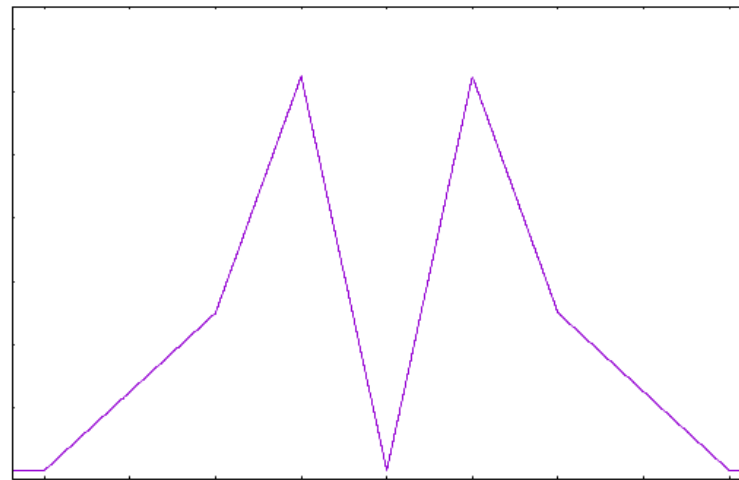
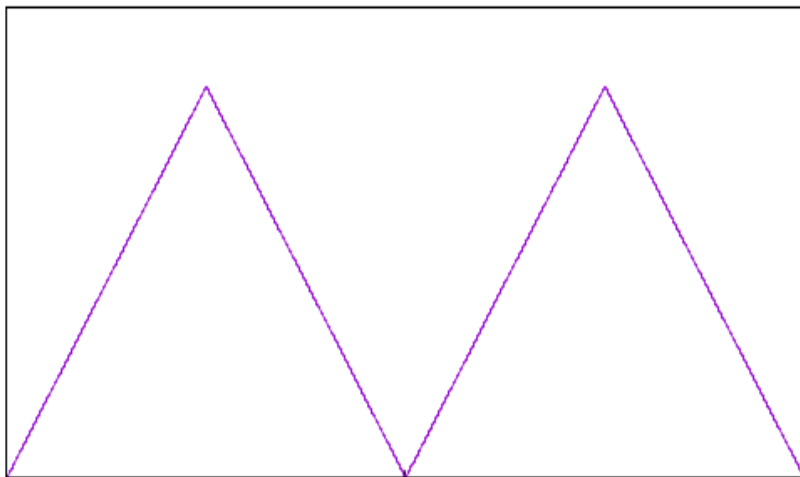
オーダーブックの平均的形状はテント関数の重ね合わせ



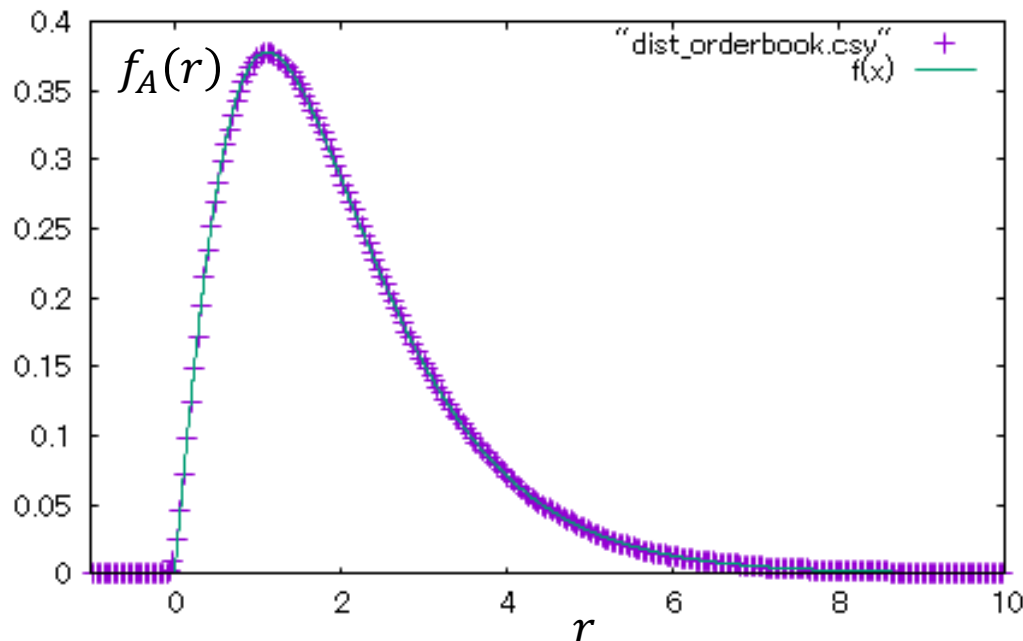
$$\rho(L) = \delta(L - L^*)$$

$$f_A(r) = f_B(-r) = \int_{-L_{\min}}^{L_{\max}} dL \rho(L) \phi_L^*(r - L)$$

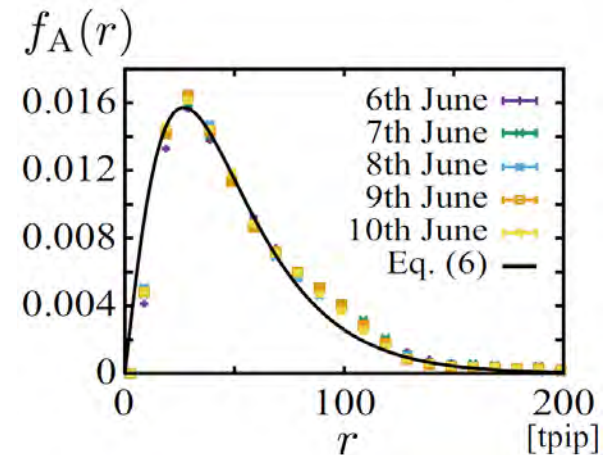
$$\rho(L) = \frac{\delta(L - L^*) + \delta(L - 2L^*)}{2}$$



メゾ階層：平均的なオーダーブックの形状



フィッティングなしで
オーダーブックの形状が合う

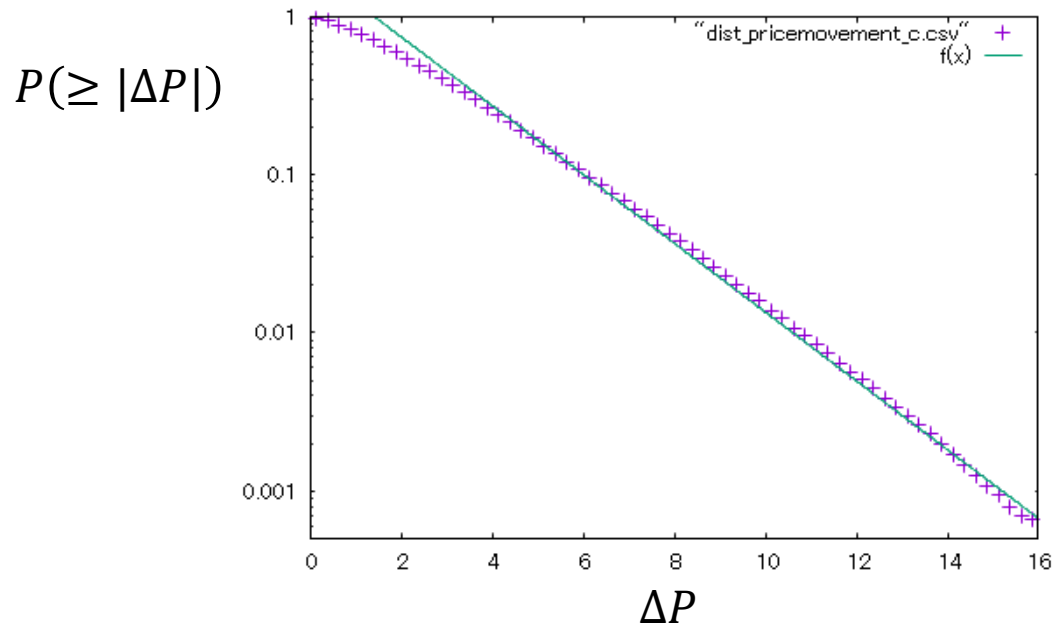


■ 理論解（平均場解）：

$$\rho(L) = \frac{L^3 e^{-L/L^*}}{6L^{*4}} \Rightarrow f_A(r) = \frac{4}{3L^*} e^{-\frac{3r}{2L^*}} \left[\left(2 + \frac{r}{L^*} \right) \sinh \frac{r}{2L^*} - \frac{r}{2L^*} e^{-\frac{r}{2L^*}} \right]$$

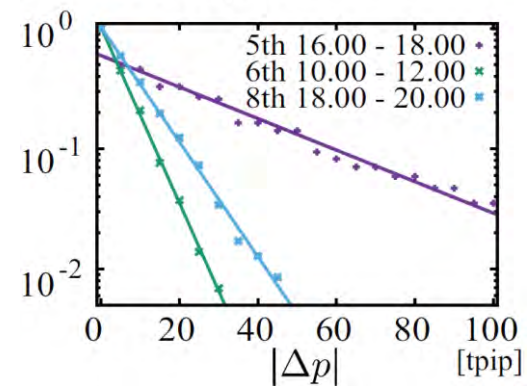
■ 数値計算 ($N = 1000$)

マクロ階層：価格変動は指数分布 $P(\geq \Delta P)$



実際の分布も指数分布

$$P^{2h}(\geq |\Delta p|; \kappa)$$

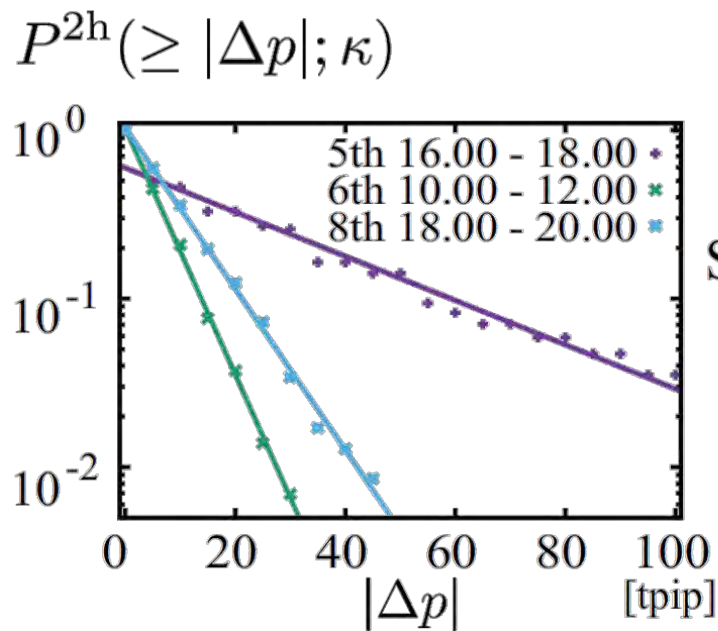


- 理論解（現象論込）：テールは指数分布 $P(\geq |\Delta p|)$

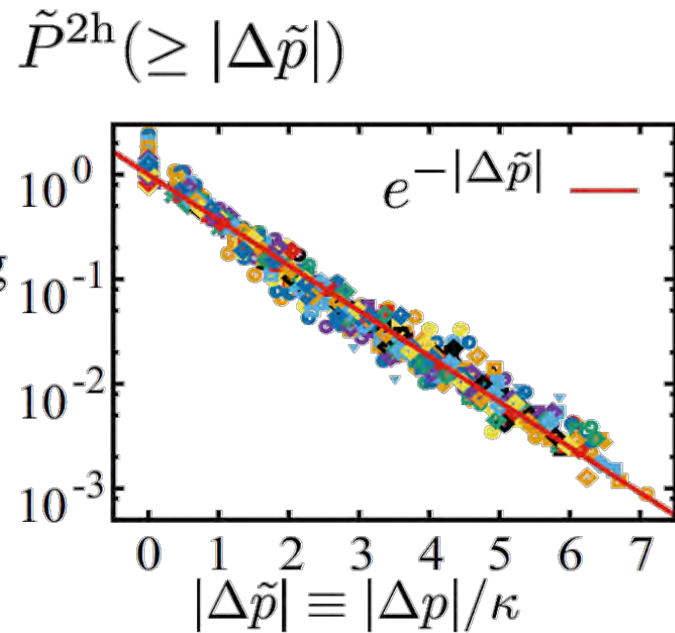
$$P(\geq |\Delta P|) \sim e^{-\frac{3|\Delta P|}{2\Delta z^*}}, \quad \Delta z^* \equiv c\langle\tau\rangle, \quad \langle\tau\rangle \equiv \frac{3}{N\sigma^2}$$

- 数値計算 ($N = 1000$)

考察 #1：価格差分布のスケーリング



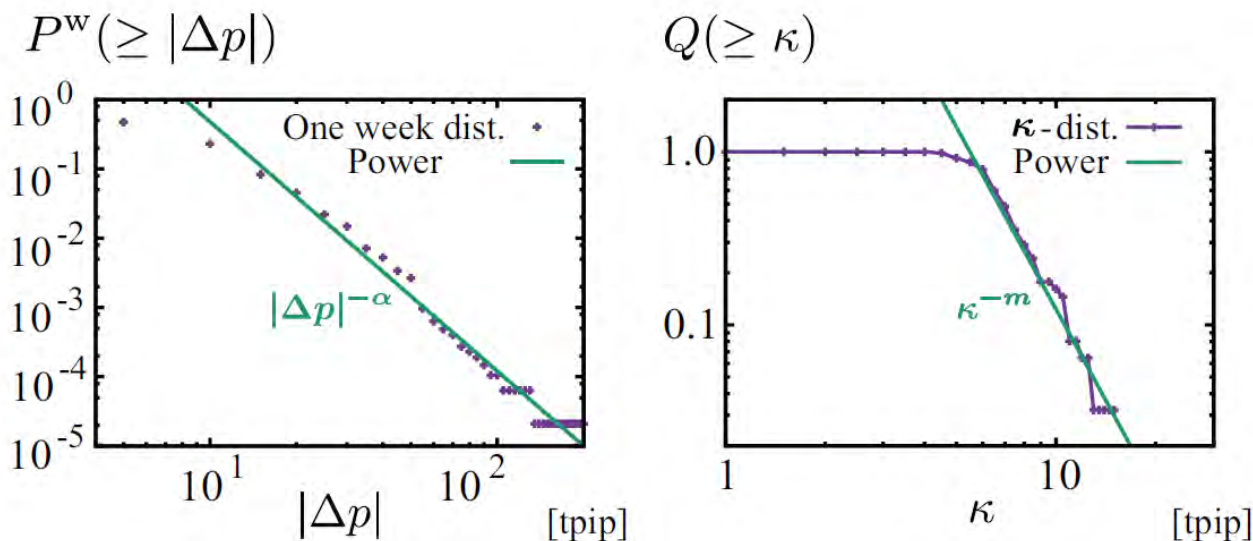
Scaling
➔



- 2時間毎に分布を作ると指数分布になっている
→ただし減衰長 κ は時々刻々変化する
- 減衰長 κ でスケーリングする ($\Delta \tilde{p} \equiv \Delta p/\kappa$) と同一曲線に乗る

$$P^{2h}(\geq |\Delta p|; \kappa) \sim e^{-|\Delta p|\kappa} \rightarrow \tilde{P}^{2h}(\geq |\Delta \tilde{p}|) \sim e^{-|\Delta \tilde{p}|}$$

考察 #2：べき分布との関連

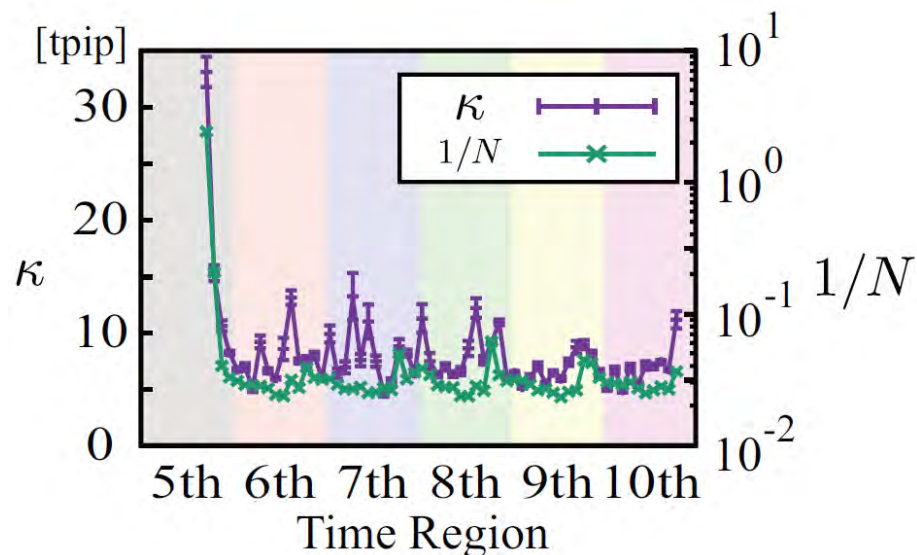


- 価格差分布は「べき分布」だとよく言われる ($\alpha = 3.6 \pm 0.13$)

$$P^w(\geq |\Delta p|) \sim |\Delta p|^{-\alpha}$$
- 1週間でみると確かにべき分布 = 短時間での指数分布の重ね合わせ
- 実際、減衰長 κ がべき分布している ($m = 3.5 \pm 0.13$)

$$Q(\geq \kappa) \sim \kappa^{-m} \rightarrow P^w(|\Delta p|) = \int d\kappa Q(\kappa) P^{2h}(\geq |\Delta p|; \kappa) \sim |\Delta p|^{-m}$$

考察 #3 : べき分布の起源の候補？ (トレーダ数？)

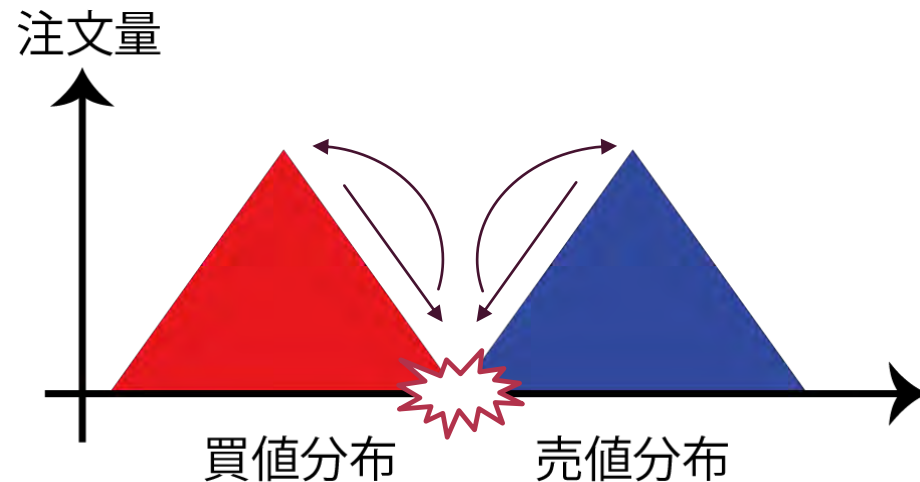


- 価格差の減衰長 κ はなぜべき分布するのか？
- 市場の時間帯別のアクティビティと関係するのでは？
(深夜は人がいないので、自明な非定常性がある)
→市場が開いた直後（ロンドンは日曜深夜）が一番長くなる

トレーダ数 N と減衰長 κ の関係 (Spearmanの順位相関 $\rho = 0.3$)

トレーダ数 N と平均価格差 $\langle |\Delta p| \rangle$ (Spearmanの順位相関 $\rho = 0.7$)

考察#4：1次元で平均場近似がうまくいく理由

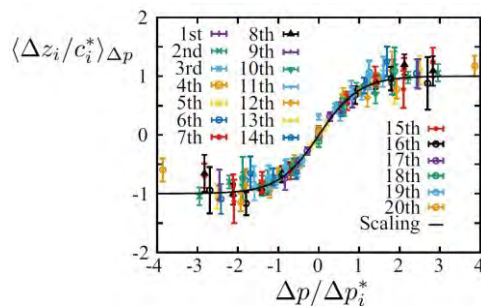


- ◆ 常識：平均場は1次元だと合わない
(同じ粒子と衝突を繰り返す)
- ◆ 今回：数値計算とよく合う (少なくとも主要解は)
同じトレーダの組は $N \rightarrow \infty$ で取引しないから？
(価格の軌道が不連続変化するので)

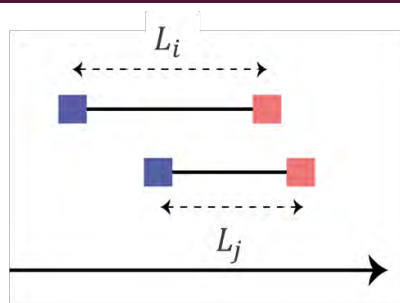
本研究の意義： ミクロからマクロまで体系的に理解する



$$\frac{dz_i}{dt} = c \tanh\left(\frac{\Delta p}{\Delta p^*}\right) + \sigma \eta_i^R + \eta_i^E$$



プレゼン全体のまとめ



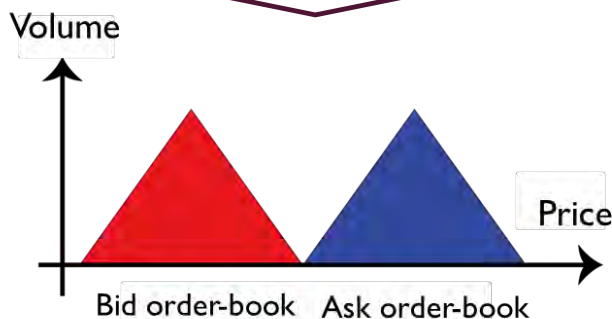
$$\frac{dz_i}{dt} = c \tanh(\Delta p / \Delta p^*) + \sigma \eta_i^R + \eta_i^E$$

取引ルール

$$|z_i - z_j| = \frac{L_i + L_j}{2} \Rightarrow \begin{cases} z'_i = z_i - L_i/2 \\ z'_j = z_j + L_j/2 \end{cases}$$

再注文ジャンプ

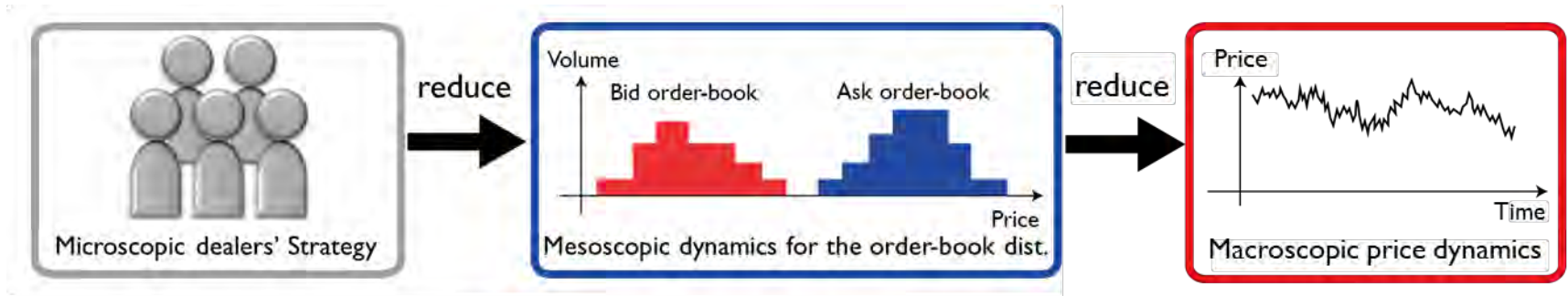
縮約



- トレーダの行動法則の直接分析：
 1. 両側注文
 2. スプレッドは定数周りを揺らぐ
 3. トレンドフォロー傾向
- トレンドフォロー＋ランダムウォーク
- 分子運動論の数理を真似た定式化
- ミクロからマクロまで体系的に理解
 1. メゾ : 平均的なオーダーブックの形状
 2. マクロ : 価格差の指数分布

To appear on arXiv in a few days...

Thank you for your attention!



$$\frac{dz_i}{dt} = c \tanh\left(\frac{\Delta p}{\Delta p^*}\right) + \sigma \eta_i^R + \eta_i^E$$

$$f_A(r) = \frac{4e^{-\frac{3r}{2L^*}}}{3L^*} \left[\left(2 + \frac{r}{L^*}\right) \sinh \frac{r}{2L^*} - \frac{r e^{-\frac{r}{2L^*}}}{2L^*} \right]$$

$$P(\Delta \tilde{p}) \sim e^{-\Delta \tilde{p}}$$

