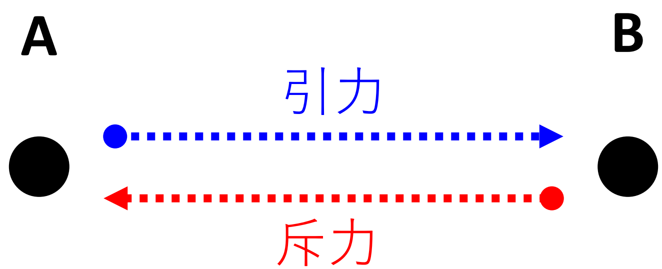
統計物理学懇談会（第10回）2023/03/27

非相反相転移と フラストレーション物理

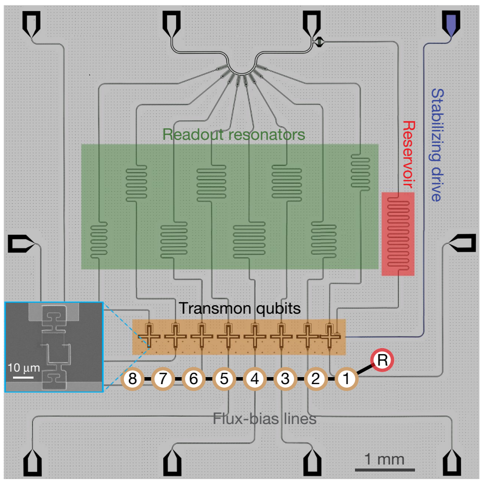
花井　亮

京都大学基礎物理学研究所
Asia Pacific Center for Theoretical Physics (APCTP)



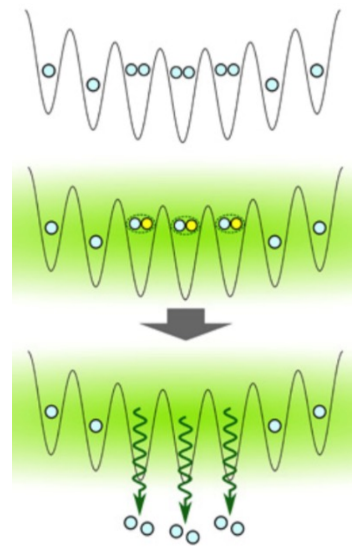
イントロダクション：
非平衡多体物理

<u>超伝導回路</u>



R. Ma, et al., Nature **566**, 51 (2019)

<u>冷却原子系</u>



T. Tomita, et al.,
Sci. Adv. **3**, e1701513 (2017).

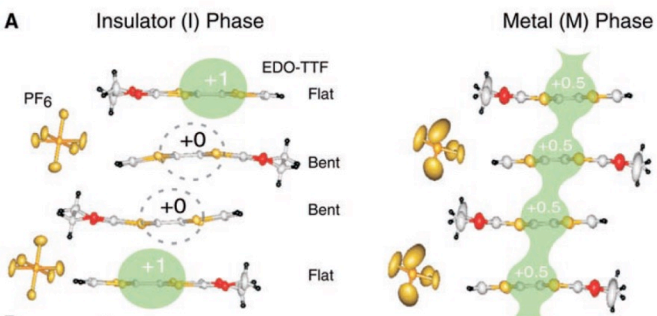
<u>アクティブマター</u>

For review, see e.g.,
M. C. Marchetti, et al.,
Rev. Mod. Phys. 85, 1143 (2013).

熱平衡系における「自由エネルギー最小化原理」に縛られない、全く新しいクラスの物性やデバイス開発の可能性.

非平衡多体系で**のみ**起こる協力現象

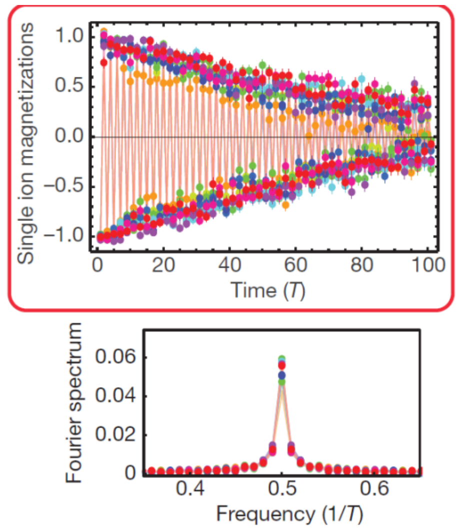
光誘起相転移



M. Chollet *et al.*, Science **307**, 86 (2006)

非平衡励起による相転移

フロッケ時間結晶



J. Zhang *et al.*, Nature **543**, 217 (2020)

熱平衡系では実現不可能

Watanabe and Oshikawa, PRL 2015

鳥の群れ

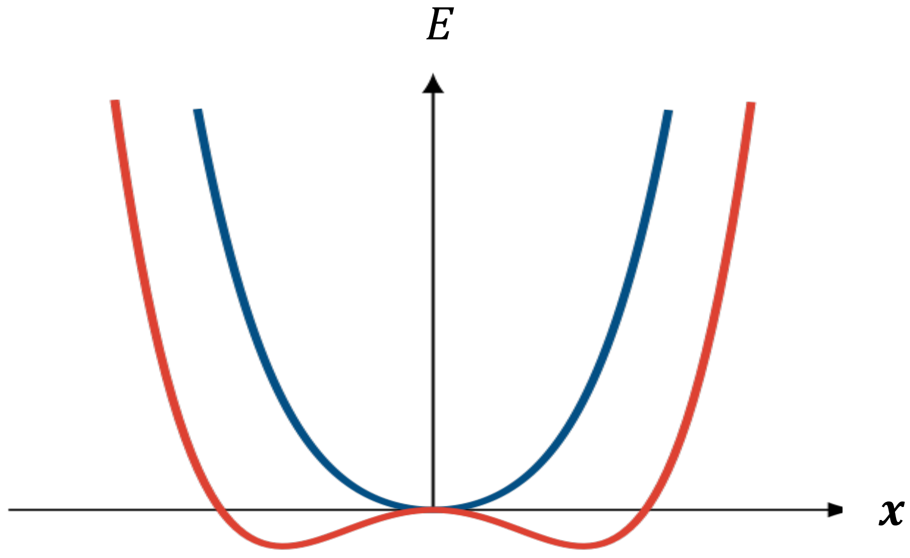
Vicsek et al., PRL1995,
Toner and Tu PRL1995, PRE1998
実験：Nishiguchi, et al., PRE2017

空間２次元系での長距離秩序

H. Tasaki PRL2020
L. P. Dadhichi, et al., PRE2020

しかし、まだまだ多くのことが未開拓.

多体系の熱平衡状態
(自由)エネルギー最小化原理



エネルギー $$E = -\sum_{i,j} J_{ij} \cos(x_j - x_i)$$

基底状態: エネルギーEを最小化する $x = \{x_i\}$

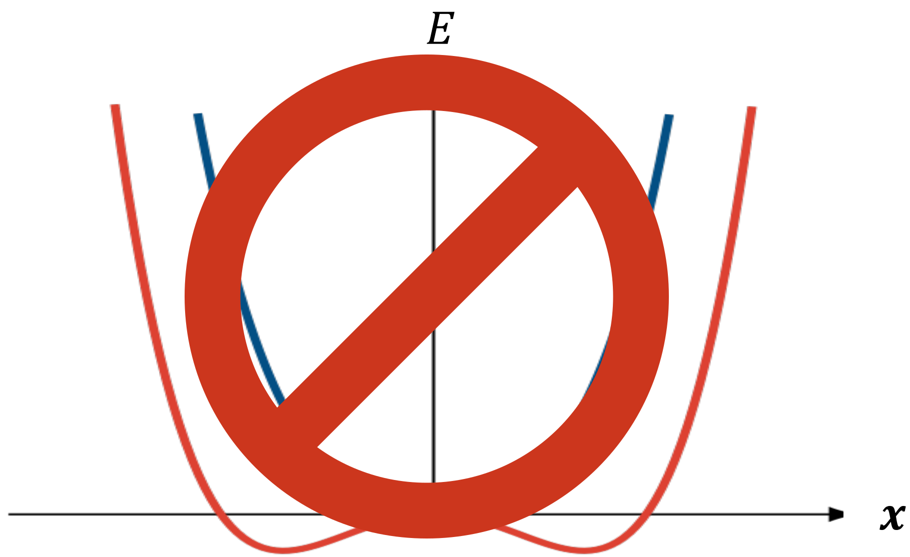
相反的な結合

$$J_{ij} = J_{ji}$$

多体系の~~熱平衡~~状態

非平衡

(自由)エネルギー最小化原理



エネルギー $E = -\sum_{ij} J_{ij} \cos(x_j - x_i)$

基底状態: エネルギーEを最小化する $x = \{x_i\}$

相反的な結合

$J_{ij} = J_{ji}$

非相反な結合

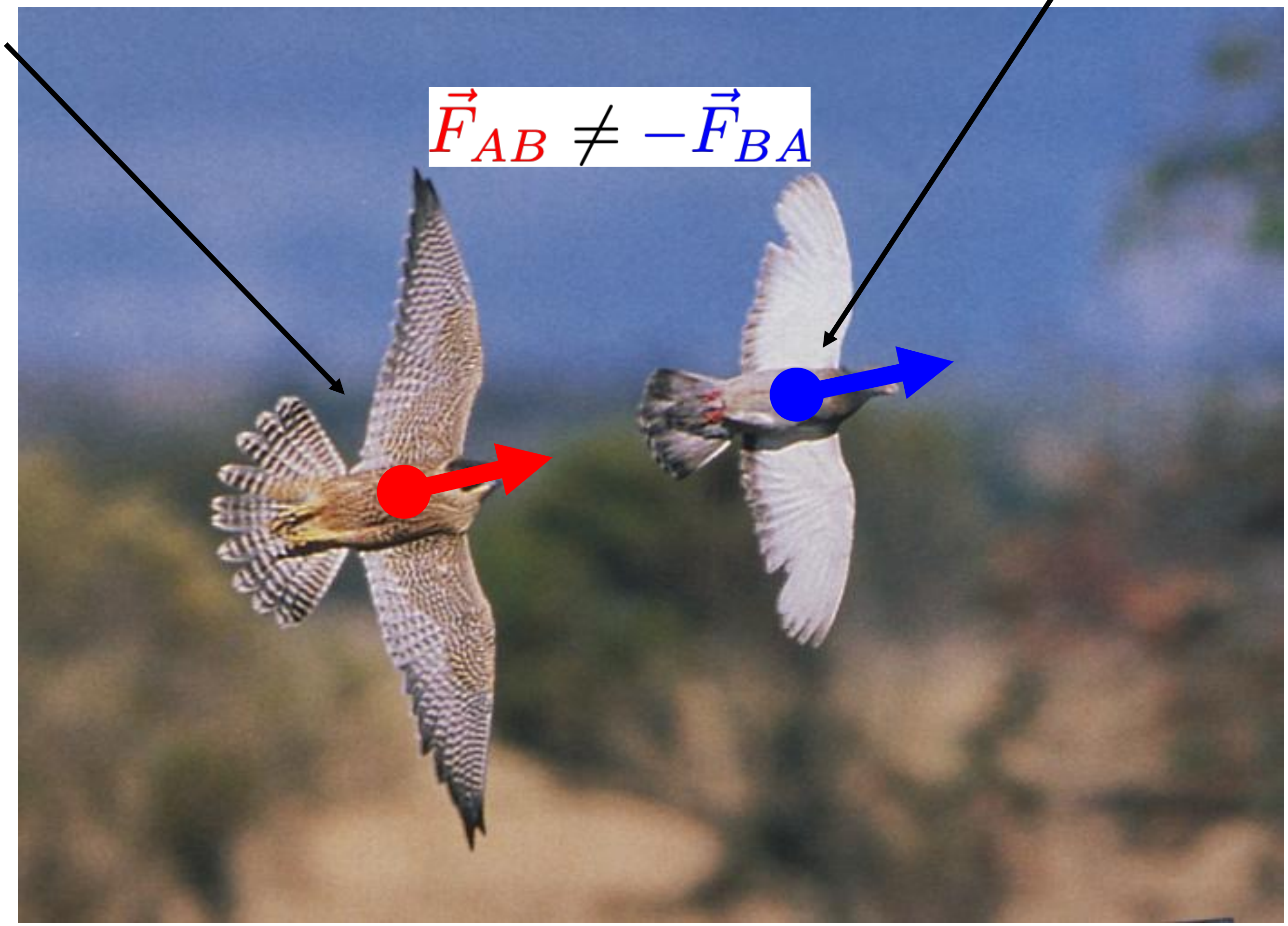
$J_{ij} \neq J_{ji}$

が許される!

非相反相互作用

鳩

鷹



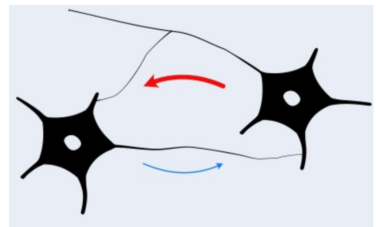
画像： http://animal.memozee.com/view.php?tid=3&did=3513

非相反相互作用する系

生態系

http://animal.memozee.com/view.php?tid=3&did=3513

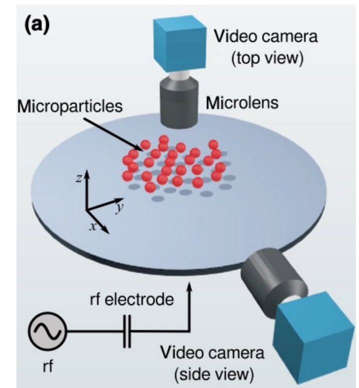
促進性と抑制性のニューロン



e.g., J. W. Krakauer, et al., Neuron 93, 480 (2017).

非平衡系

(複雑プラズマ系)



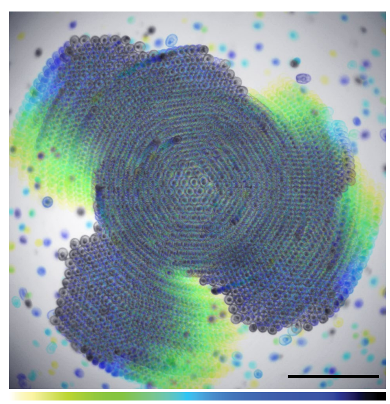
Ivlev, et al., PRX 5, 011035 (2015).

ソーシャル・ネットワーク

e.g., A. Pluchino, et al., Inter. J. Mod. Phys. C 16, 515 (2005).

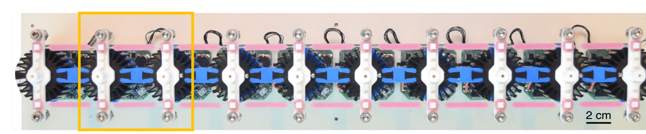
生物系

(ヒトデの胚)



T. H. Tan, et al., , Nature 2022

ロボティック・メタマテリアル



Brandenbourger, et al., Nat. Comm. 2019

Ghatak ,et al., PNAS 2020

Baconnier, et al., Nat. Phys. 2022

非相反相互作用する系

促進性と抑制性の

生態

http://animal.me
w.php?tid=3&did

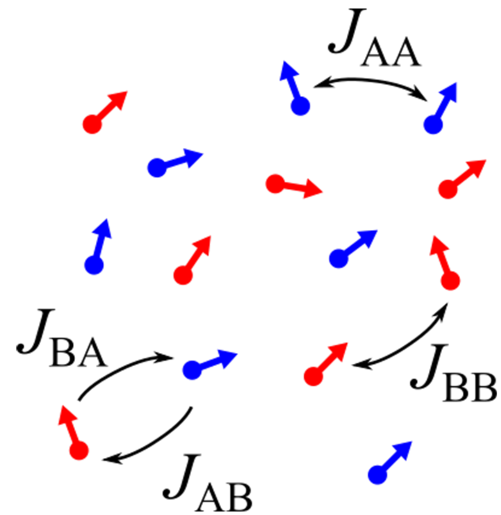
非平衡系

プラズマ系)

5, 011035 (2015).

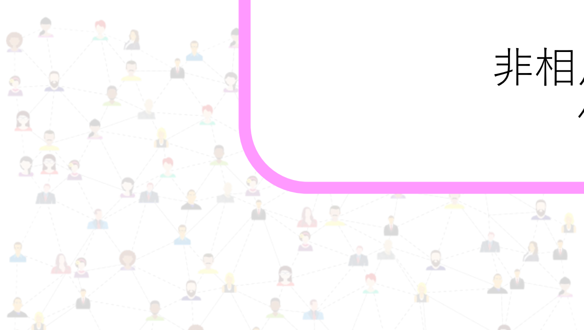
“非相反マター”

非相反相互作用する
多体系はどのような
集団的性質が示すか

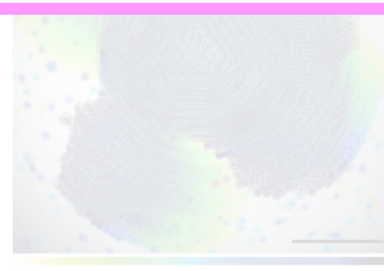


非相反相互作用する
個体の集団

ソーシャル



e.g., A. Pluchino, et al., Inter. J. Mod. Phys. C 16, 515 (2005).



T. H. Tan, et al., , Nature 2022

ック・
リアル

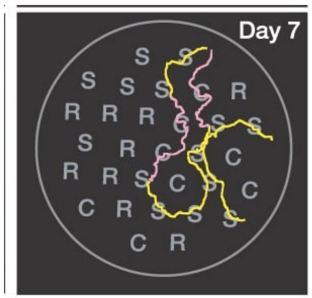
Brandenbourger, et al., Nat. Comm. 2019

Ghatak ,et al., PNAS 2020

Baconnier, et al., Nat. Phys. 2022

非相反多体系で誘起される現象

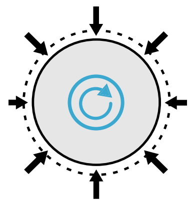
種の多様性の維持

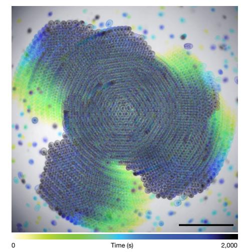


B. Kerr, et al., Nature 2002

S. Allesina and S. Tang, Nature 2012

奇弾性

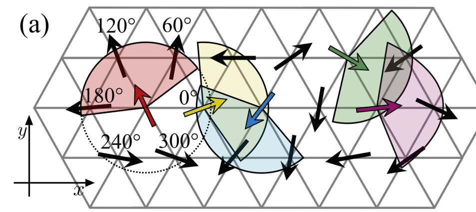




C. Scheibner, et al., , Nat. Phys. 2020

T. H. Tan, et al., , Nature 2022

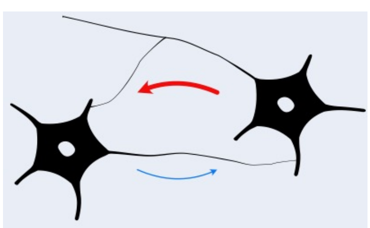
２次元系における長距離秩序



Loos, Klapp, and Martynec, arXiv:2206.10519

Dadhichi, et al., Phys. Rev. E 2020

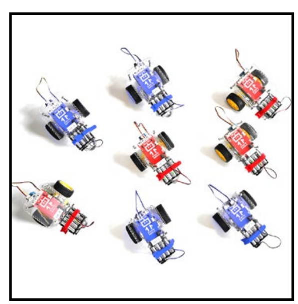
脳の制御

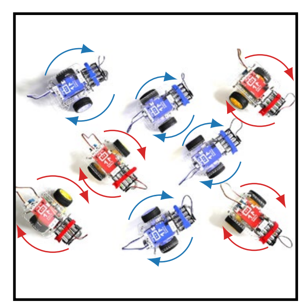


H. Wilson and J. Cowan,
Biophys. J. 1972

G. Parisi, J. Phys. A 1986

非相反相転移





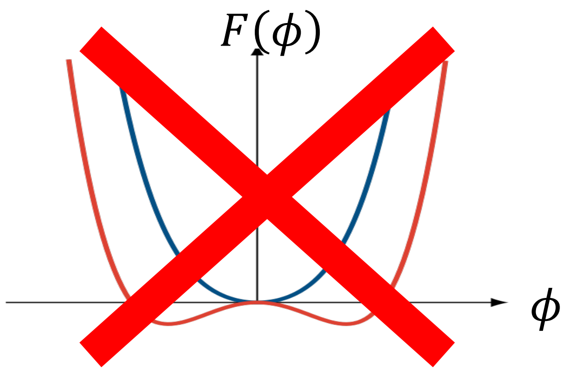
M. Fruchart*, RH*, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Nature 2021

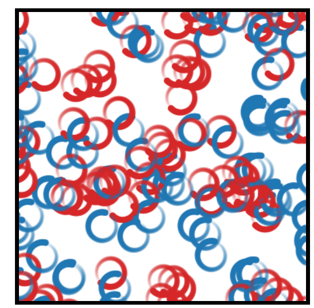
[I] 非相反相転移の物理

Fruchart*, Hanai*, Littlewood, Vitelli, Nature 592, 363 (2021)

Hanai, Littlewood, Phys. Rev. Res. 2, Phys. Rev. Res. 2, 033018 (2020).

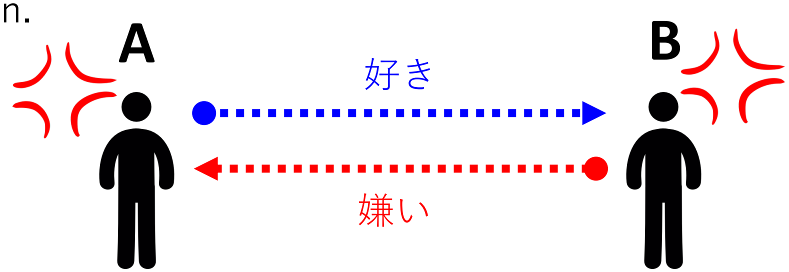
Weis, Fruchart, Hanai, Kawagoe, Littlewood, Vitelli, arXiv:2207.11667





[II] 非相反フラストレーションの物理

Hanai, arXiv: 2208.08577
Hanai, in preparation.

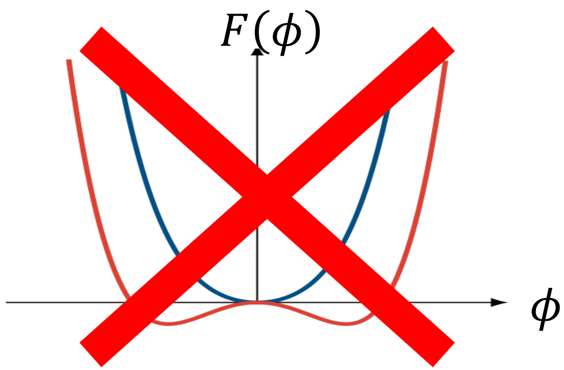


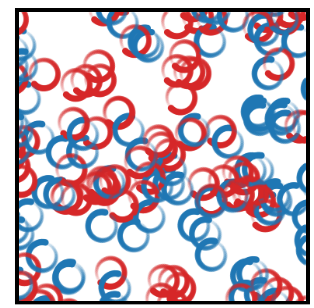
[I] 非相反相転移の物理

Fruchart*, Hanai*, Littlewood, Vitelli, Nature 592, 363 (2021)

Hanai, Littlewood, Phys. Rev. Res. 2, Phys. Rev. Res. 2, 033018 (2020).

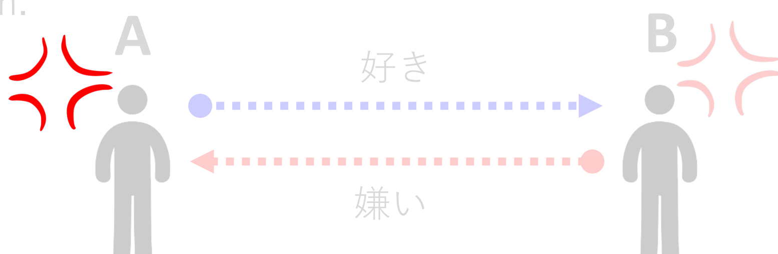
Weis, Fruchart, Hanai, Kawagoe, Littlewood, Vitelli, arXiv:2207.11667





[II] 非相反フラストレーションの物理

Hanai, arXiv: 2208.08577
Hanai, in preparation.



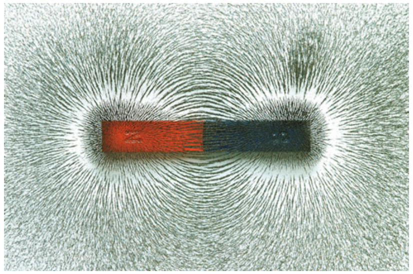
相転移現象

熱平衡系の相転移

気液相転移

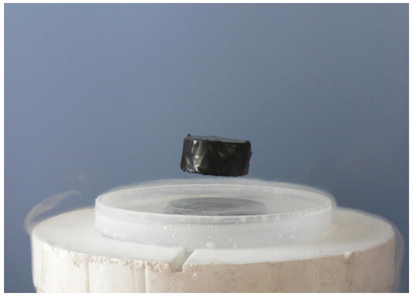
https://mineral-medix.com/water-boiling/

磁性



http://kids.gakken.co.jp/kagaku/nandemo/0808_1.html

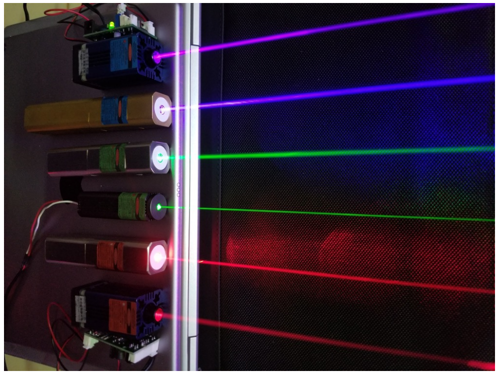
超伝導



(image from Wikipedia)

非平衡相転移

レーザー



(image from Wikipedia)

同調現象 (蛍)

from BBC
http://www.bbc.com/travel/story/20170112-a-surreal-synchronised-wave-of-light

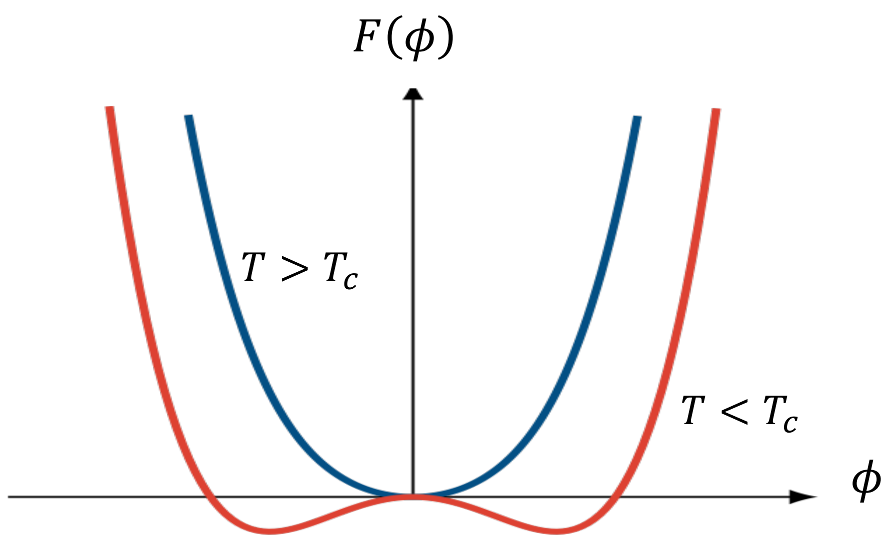
群れ

https://blogs.sw.siemens.com/solidedge/stuff-to-do-at-seu-birds-of-a-feather/

熱平衡系の相転移：
ランダウ理論(=エネルギー最小化原理)

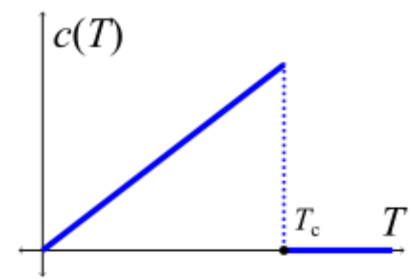
ランダウの自由エネルギー

$$F(\phi) = \alpha(T)|\phi|^2 + \beta|\phi|^4$$

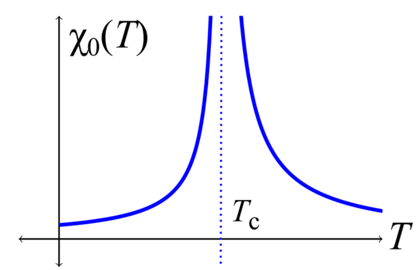


ϕ: Generic order parameter（e.g. $\phi = M$ for magnetism）

比熱



感受率



空間勾配と熱的ノイズ
を加える

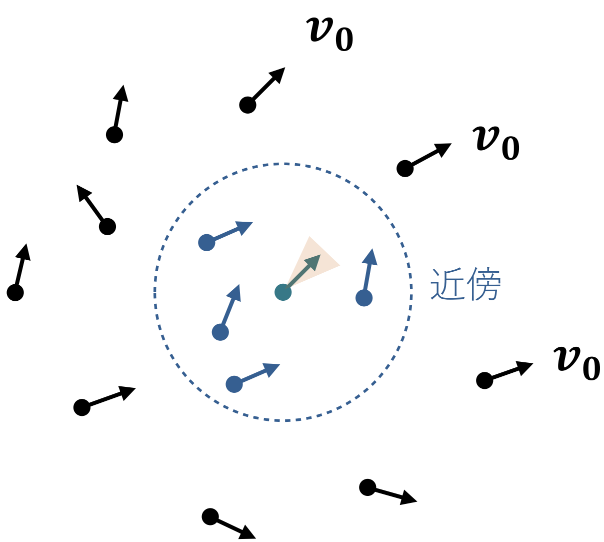
（ただし揺動散逸定理を満たす）

静的/動的臨界現象

Hohenberg and Halperin, Rev. Mod. Phys (1977)

非平衡相転移における「ランダウ理論」

- 群れ

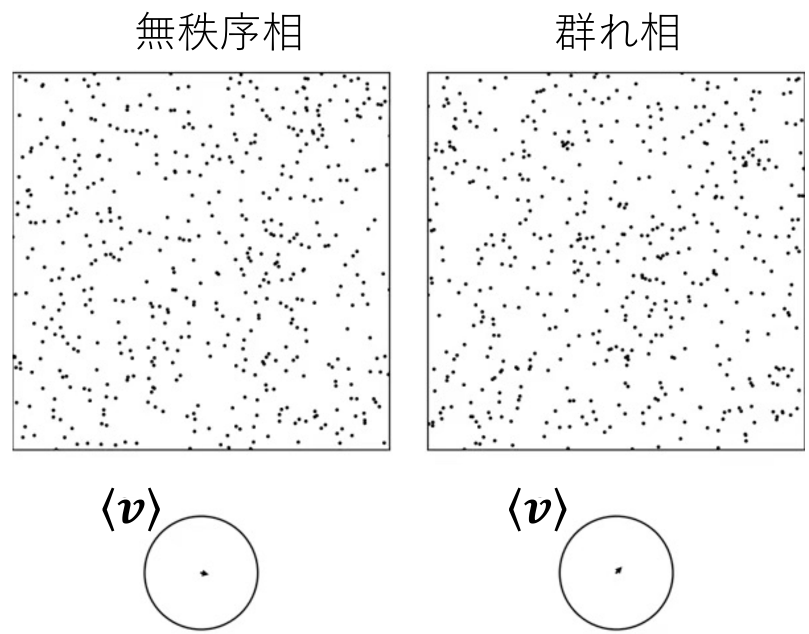


$$\theta_i(t+\Delta t) = \langle \theta_j \rangle_{j\in \bigcirc} + \eta(t)$$

近傍の鳥と
向きを揃える

ノイズ

Vicsek PRL 1995



自発的対称性の破れ

非平衡相転移における「ランダウ理論」

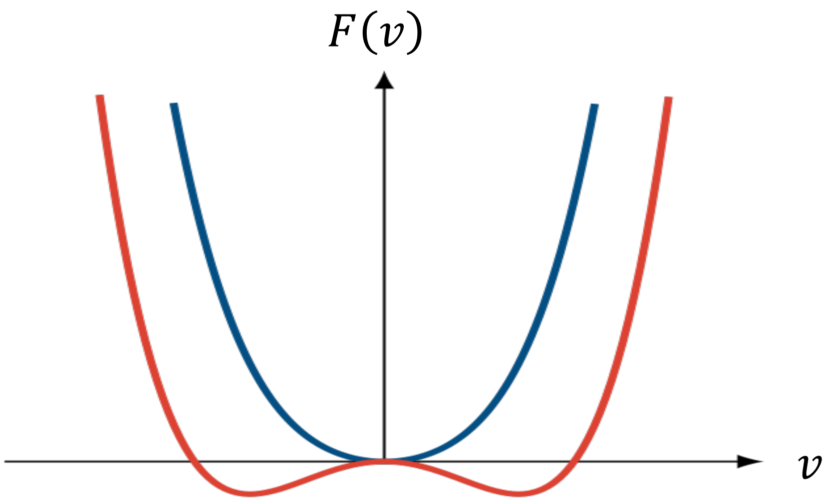
➤ 群れ

(熱平衡系では通常起こらない)
2次元系での長距離秩序をもたらす

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \underline{(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}} = \boxed{-\frac{\delta F(\boldsymbol{v})}{\delta \boldsymbol{v}}} + D\nabla^2 \boldsymbol{v} + \xi,$$

Toner and Tu PRL 1995

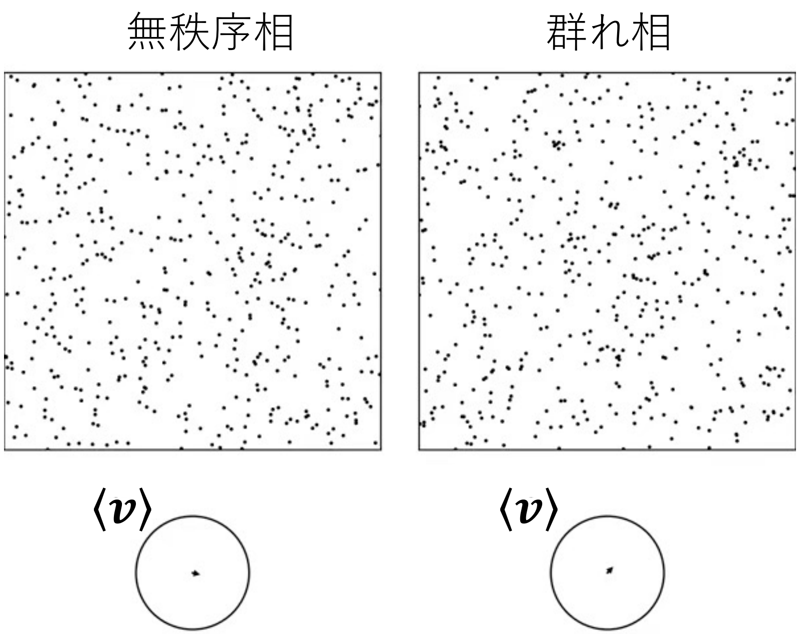
「ランダウ自由エネルギー」$F(\boldsymbol{v}) = \alpha|\boldsymbol{v}|^2 + \beta|\boldsymbol{v}|^4$



相 ： エネルギー最小化原理で決定

ランダウ理論は有効！

Vicsek PRL 1995



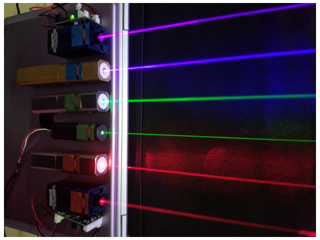
自発的対称性の破れ

非平衡相転移における「ランダウ理論」

- レーザー

$$\partial_t n_{\mathrm{coh}} = -(\gamma_{loss} - \gamma_{gain}) n_{\mathrm{coh}} - \Gamma {n_{\mathrm{coh}}}^2$$

$$= -\frac{\delta F(n_{coh})}{\delta n_{coh}}$$

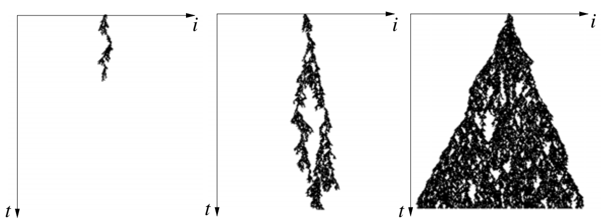


(Image from wikipedia)

- 異方的パーコレーション

$$\partial_t \rho = -\gamma\rho - \beta\rho^2 + D\nabla^2\rho + \sqrt{\rho}\eta,$$

$$= -\frac{\delta F}{\delta \rho}$$

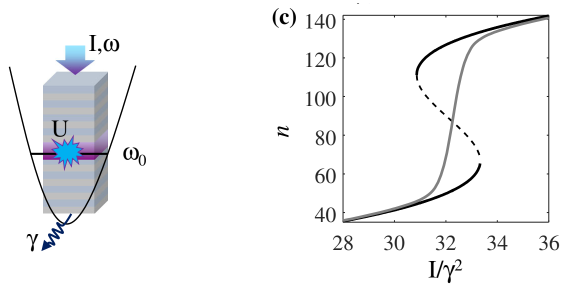


- 光学双安定

$$\partial_t c = \nabla^2 c + hc + rc^2 + vc^3 + uc^4 + \eta$$

$$= -\frac{\delta F}{\delta c}$$

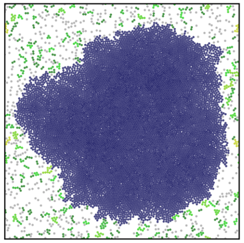
Maghrebi and Gorshkov PRB2016.



S.R.K Rodriguez, et al., PRL2017.

- 運動誘起相分離

$$\partial_t \rho = \nabla \cdot \boldsymbol{v}_e(\rho) \frac{\delta F(\rho)}{\delta \rho} + \eta + O(\nabla)$$



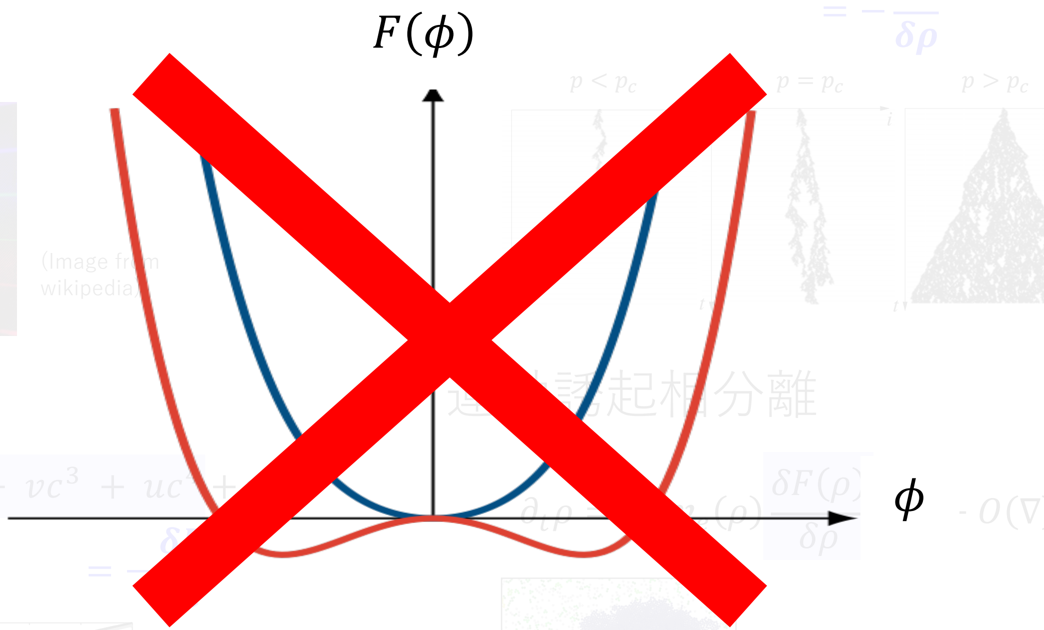
Fily and Marchetti PRL2012

Cates and Tailleur, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 2015

<u>本発表</u>

エネルギー最小化原理では記述できない相転移現象

「非相反相転移」



➢ 光学双安定

Maghrebi and Gorshkov PRB2016.

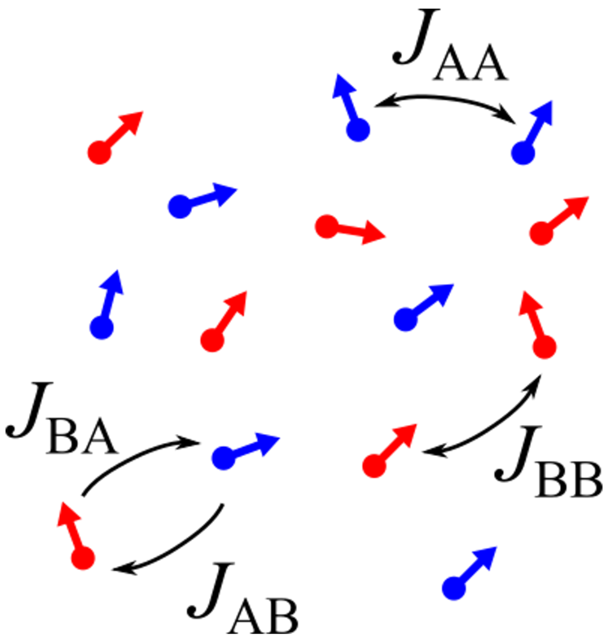
S.R.K Rodriguez, et al., PRL2017.

Fily and Marchetti PRL2012

Cates and Tailleur, Annu. Rev. Condens. Matter Phys. 2015

非相反群れモデル

2グループ非相反Vicsekモデル



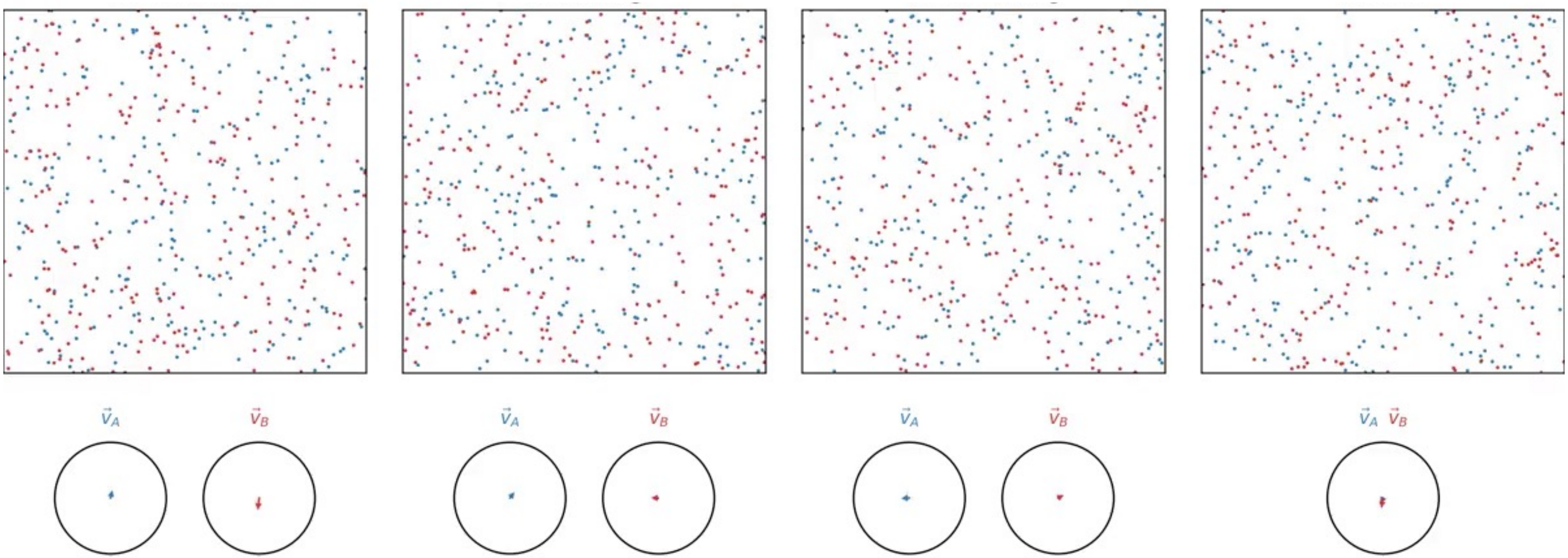
$$J_{AB} \neq J_{BA}$$

$$\partial_t \theta_i = \sum_j J_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i) + \eta(t)$$

$$\neq -\frac{\partial V}{\partial \theta_i}$$

非相反群れモデル

ノイズ大	相反的 ($J_{\mathrm{AB}} = J_{\mathrm{BA}} > 0$) ノイズ小	相反的 ($J_{\mathrm{AB}} = J_{\mathrm{BA}} < 0$) ノイズ小	非相反的 ($J_{\mathrm{AB}} J_{\mathrm{BA}} < 0$) ノイズ小



無秩序相	強磁性相	反強磁性相	**非相反性に誘起されたカイラル相**

自発的
Z_2 対称性の破れ

M. Fruchart*, RH*, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Nature **592**, 363 (2021).

ランダウ理論の非平衡系への拡張

c.f. ランダウ理論:

現象論的ランダウの自由エネルギーFを書き下し、最小となるパラメータを求める

非平衡系には適用できない

オーダーパラメータの運動方程式

$$\partial_t \boldsymbol{v}_a = -[\alpha_{ab}\boldsymbol{v}_b + \beta_{abcd}(\boldsymbol{v}_b \cdot \boldsymbol{v}_c)\boldsymbol{v}_d] \left(\neq -\frac{\delta F(\phi)}{\delta \boldsymbol{v}_a} !!! \right)$$

非対称な係数

$$\alpha_{ab} \neq \alpha_{ba}$$

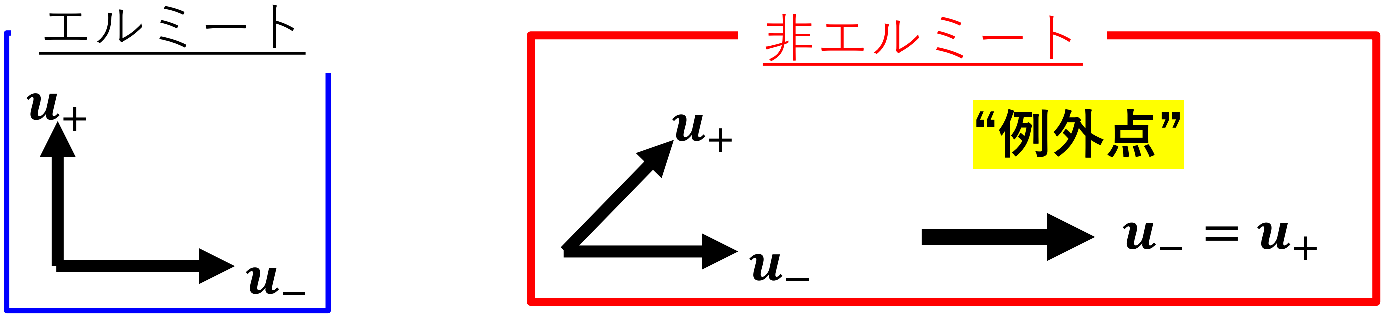
非平衡定常状態 （二成分系, $\beta_{abcd} = \beta\delta_{ab}\delta_{cd}$):

$$0 = \partial_t \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_A \\ \boldsymbol{v}_B \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_{AA} + \beta|\boldsymbol{v}_A|^2 & \alpha_{AB} \\ \alpha_{BA} & \alpha_{BB} + \beta|\boldsymbol{v}_B|^2 \end{pmatrix}}_{A \neq A^\dagger} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_A \\ \boldsymbol{v}_B \end{pmatrix}$$

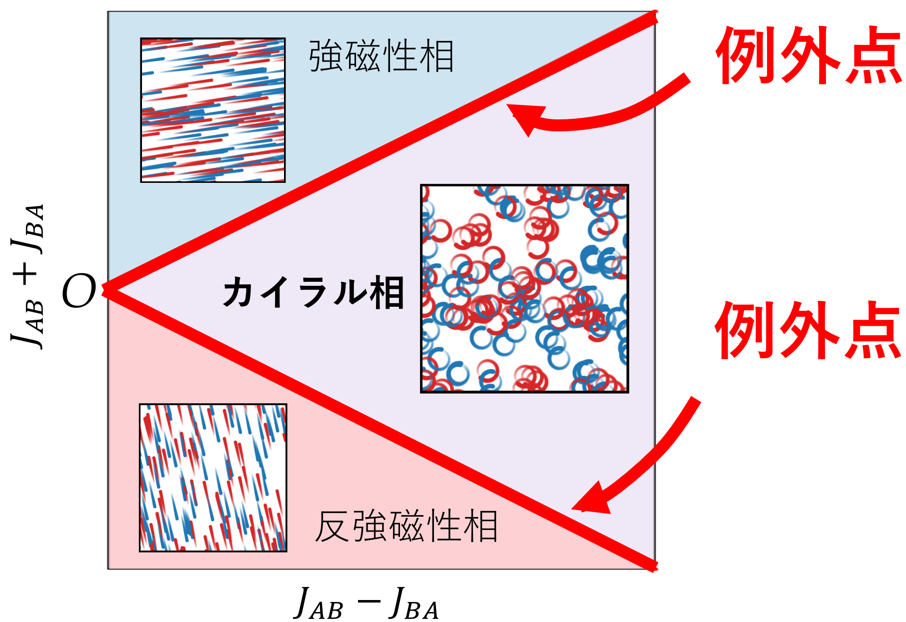
➡ 非線形、非エルミートなゼロ固有値問題

M. Fruchart*, RH*, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Nature **592**, 363 (2021).

非相反相転移



例外点において、非平衡相転移が起こる！



詳細釣り合い条件を破った、熱平衡系に対応物のない相転移現象.

M. Fruchart*, RH*, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Nature **592**, 363 (2021).

非相反相転移

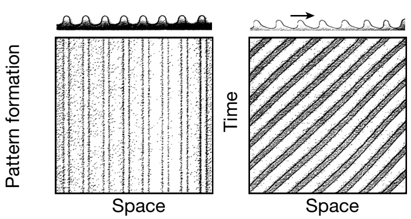
一般の非平衡秩序相で起こる!

(A) 非平衡性

(B) 自発的（連続）対称性の破れ

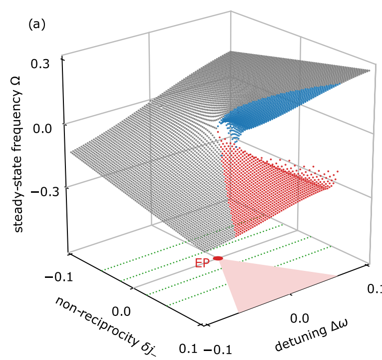
(C) 二成分（以上）で構成されている

パターン形成

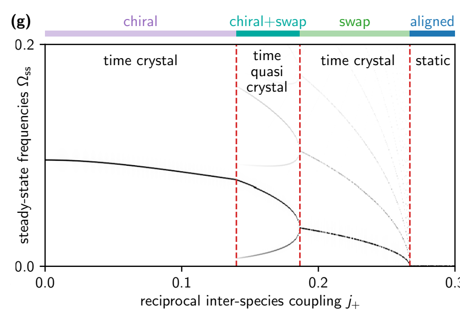


L Pan and J. R. de Bruyn, PRE1994

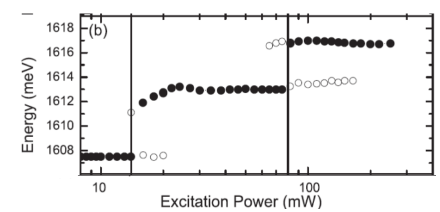
同期現象



群れ



開放量子多体系



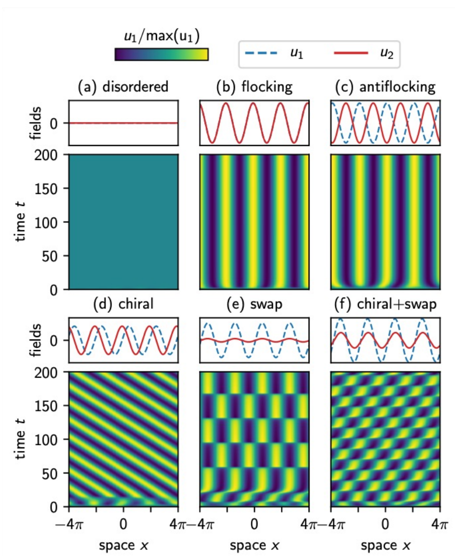
J. Tempel, et al PRB2012

RH, et al PRL2019

M. Fruchart*, RH*, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Nature **592**, 363 (2021).

パターン形成する系における進行波

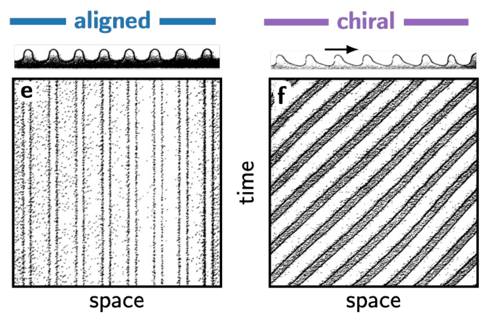
非相反Swift-Hohenbergモデル



$$\partial_t u_a = r_{ab} u_b - (1+\nabla^2)^2 u_a - g u_a^3$$

$$\partial_t A_a = \epsilon_{ab} A_b - g_{abcd}(\overline{A_b} A_c + \overline{A_c} A_b) A_d + D_{ab} \partial_x^2 A_b$$

粘性指状体



Pan and Bruyn PRE 1994

液晶凝固

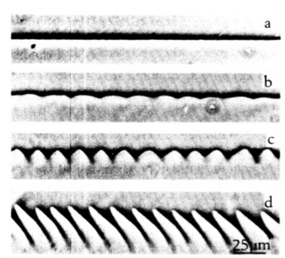
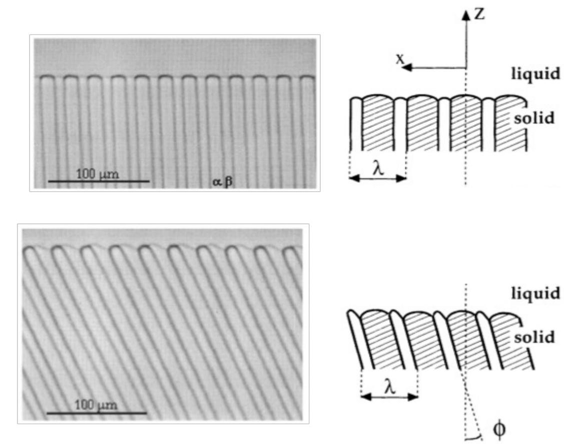


FIG. 2. The smectic layers oriented 45° with respect to the thermal gradient ($G = 76$ K/cm); $\Delta T \approx 0.4$ K. (a) Flat, stationary interface; (b),(c) $V = 0.8$ μm/s; (d) $V = 0.95$ μm/s.

Melo and Oswald PRL 1990

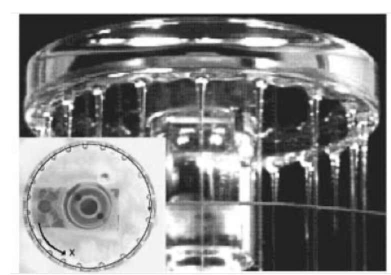
共晶成長



Faivre et al., PRA 1992

Ginibre et al., PRE 1997

わき水



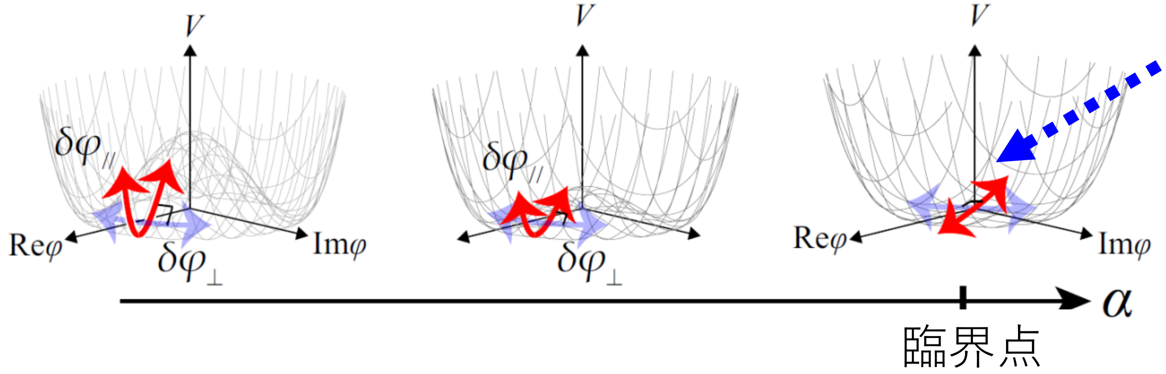
Counillon et al., EPL 1997

M. Fruchart*, RH*, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Nature **592**, 363 (2021).

例外点における特異な臨界現象

通常の臨界現象

自由エネルギーが平らになる
ことで臨界性が現れる



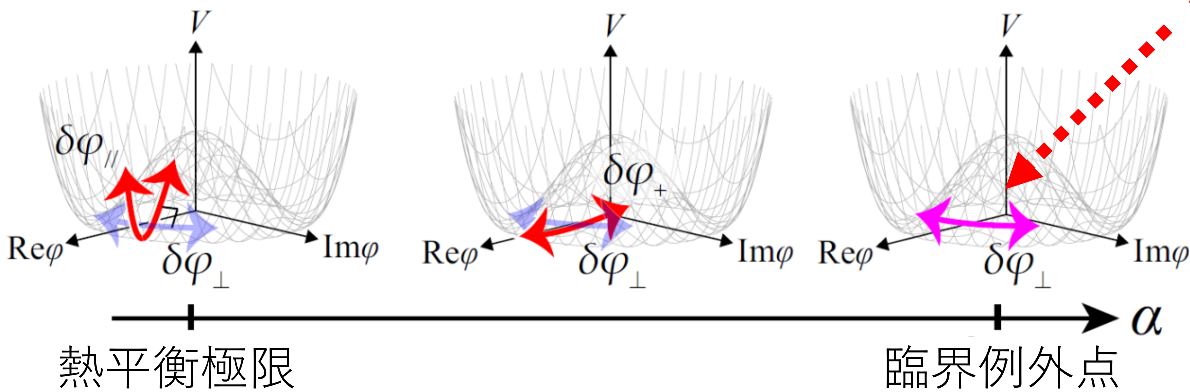
マーミンワグナーの定理

$$\langle(\delta\theta)^2\rangle \sim \int dk k^{d-1} \frac{1}{\boldsymbol{k^2}}$$

$$\to \infty \; (d \leq \mathbf{2})$$

非相反相転移における臨界現象

ゴールドストーンモードの合体



異常な揺らぎの増大

$$\langle(\delta\theta)^2\rangle \sim \int dk k^{d-1} \frac{1}{\boldsymbol{k^4}}$$

$$\to \infty \; (d \leq \mathbf{4})$$

新しい普遍性クラスの
動的臨界現象[U(1)-symmetric]

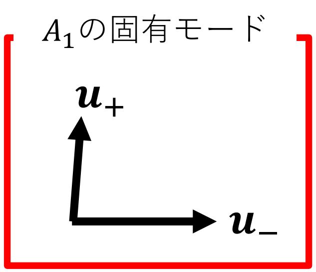
$$\chi = \frac{4-d}{2} - \frac{\epsilon}{10}, z = 1 \; (\epsilon = 8 - d)$$

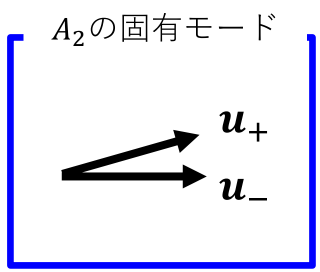
RH and P.B. Littlewood, PRResearch **2**, 033018 (2020).

固有モードの非直交性による異常な揺らぎの増大

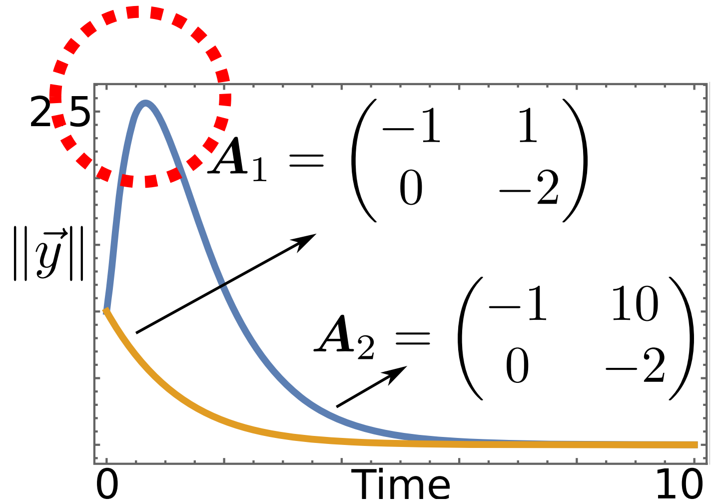
$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_A \\ y_B \end{pmatrix}$$

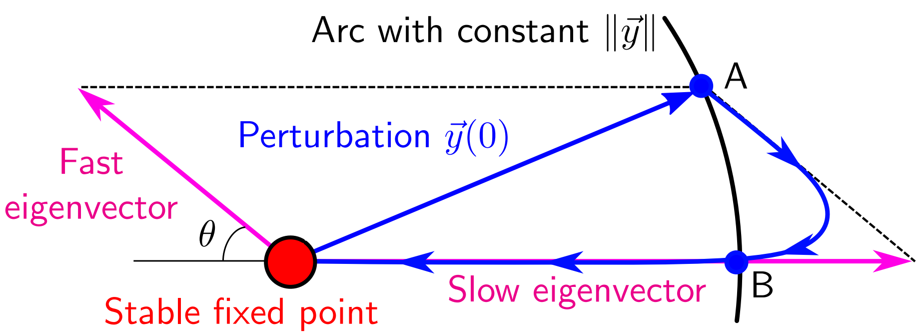
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{1} \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{10} \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$



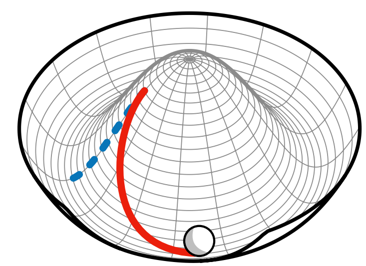


揺らぎの増大！





Our case



$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

Biancalani, Jafarpour, Goldenfeld, PRL 118, 018101 (2017)

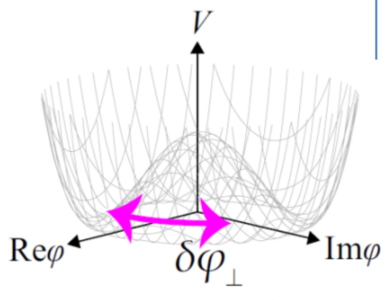
M. G. Neubert and H. Caswell, Ecology 78, 653 (1997)

最近の進展：非相反相転移の拡張

(A) 非平衡性

(B) 自発的（連続）
対称性の破れ

(C) 二成分（以上）
で構成されている



南部ゴールドストーンモード
＝ギャップレスモード

最近の進展：非相反相転移の拡張

(A) 非平衡性

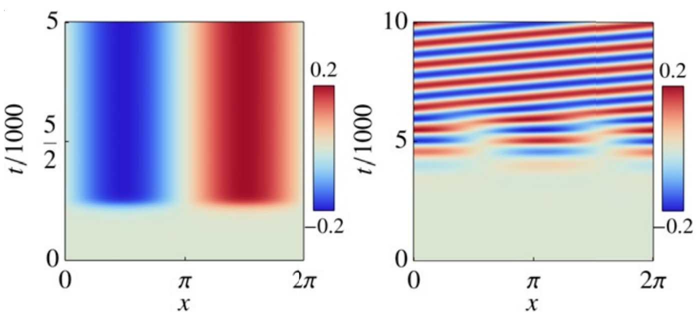
(B) 自発的（連続）対称性の破れ

(C) 二成分（以上）で構成されている

南部ゴールドストーンモード
＝ギャップレスモード　こちらが本質的

- 保存量のある非相反系
  （モデルB, Cahn-Hilliard系）

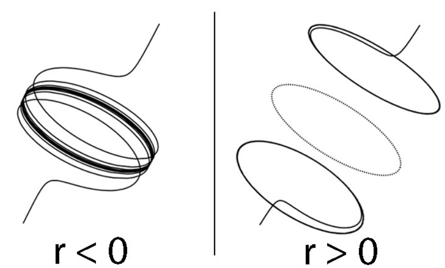
静的なパターン　進行波



You, Baskaran, Marchetti, PNAS2020

Saha, et al.,, PRX2020

- 保存量も自発的対称性の破れも伴わない非相反系
  （リミットサイクル等のアトラクターが「合体」する系）



共変リアプノフベクトルの合体による相転移(分岐)

C. Weis, M. Fruchart, **RH**, et al., arXiv:2207.11667

非相反Dickeモデル：Chiacchio, et al., arXiv:2302.06386

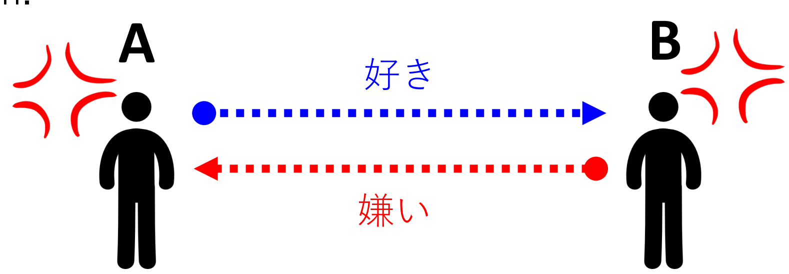
目次

[I] 非相反相転移の物理

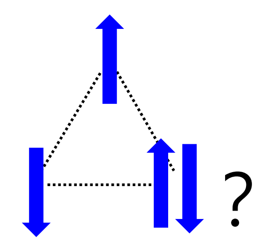
Fruchart*, Hanai*, Littlewood, Vitelli, Nature 592, 363 (2021)

[II] 非相反フラストレーションの物理

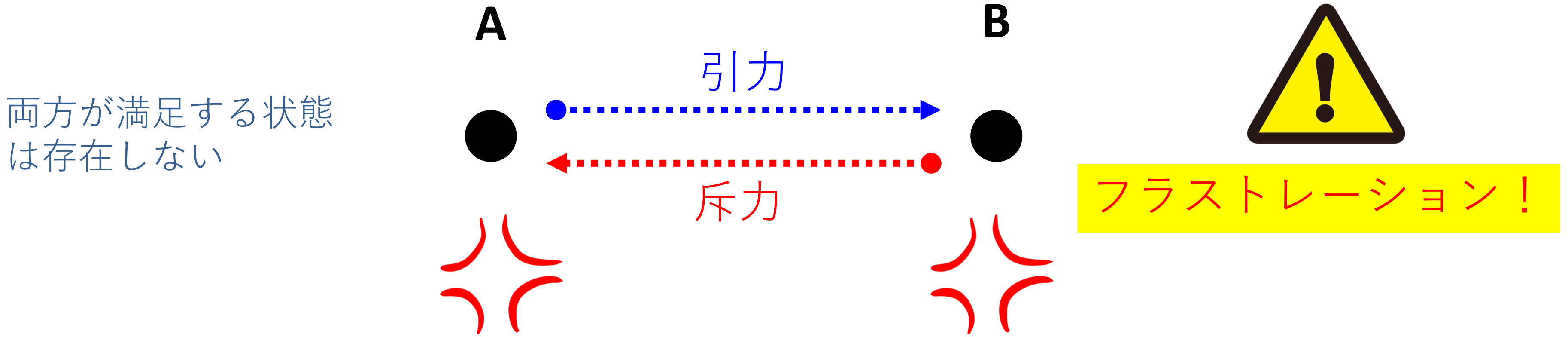
Hanai, arXiv: 2208.08577
Hanai, in preparation.



幾何学的
フラストレート系



非相反相互作用に誘起される
フラストレーション

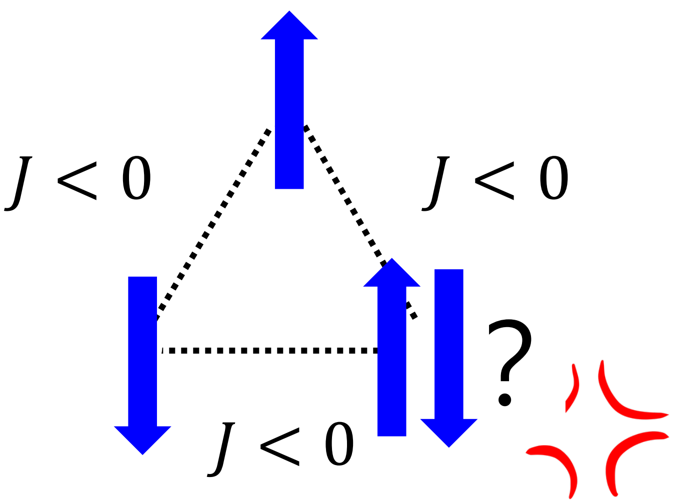


幾何学的フラストレーション

幾何学的フラストレーションのある系

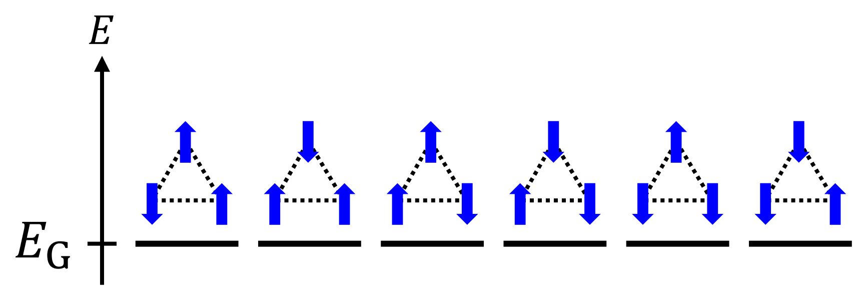
系の構成要素の全ての「要求」(=全ての相互作用エネルギーを最小化したい)
を同時に満たすことのできない系

（例）反強磁性相互作用する
　三角格子状のスピン系



全てのスピンが満足する状態は存在しない

基底状態の偶然縮退

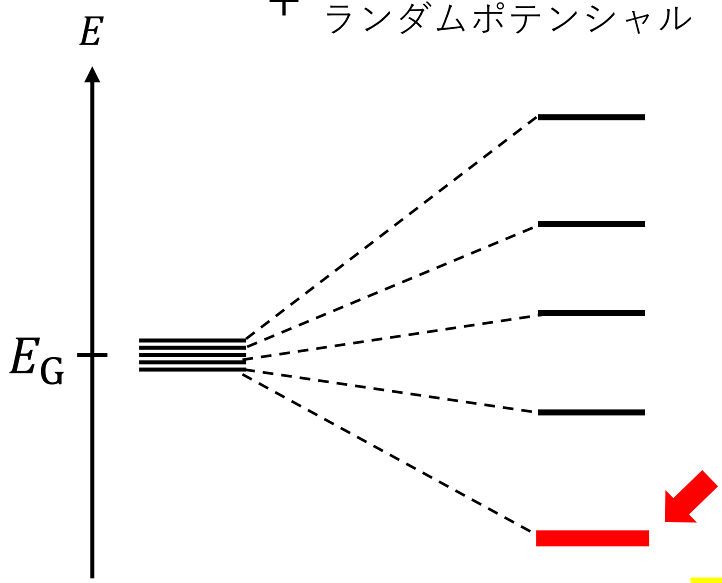


無秩序による秩序

Villain, et al., J. Physique (1980)

偶然縮退：対称性やトポロジー等に<u>保護されていない</u>

＋ 熱的ノイズ、量子揺らぎ、ランダムポテンシャル



<u>選択された</u>基底状態

（多くの場合、秩序相）

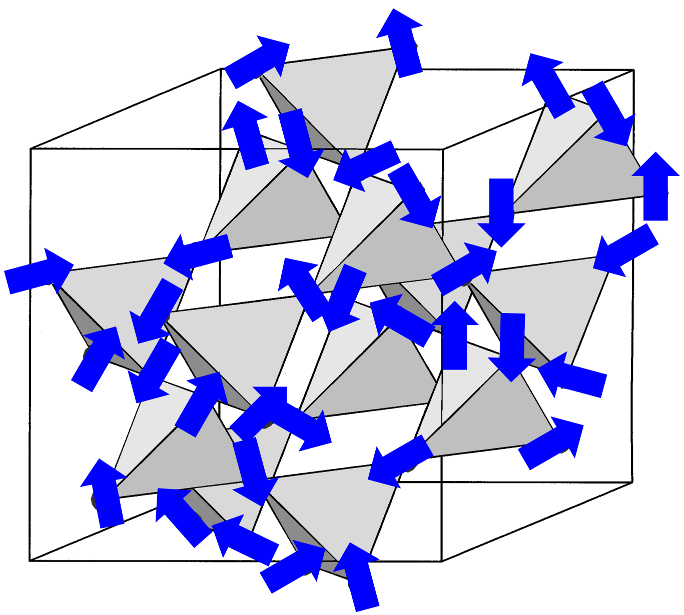
「無秩序による秩序」

無秩序による秩序

（例）パイロクロア格子上の反強磁性的XYスピン系

Moessner and Chalker, PRL1998, PRB1998

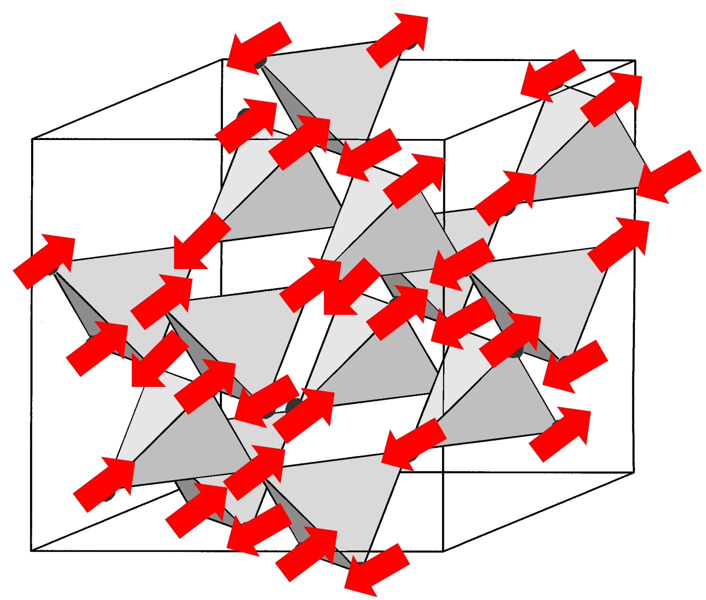
基底状態



無秩序状態

温度を
上げる

有限温度

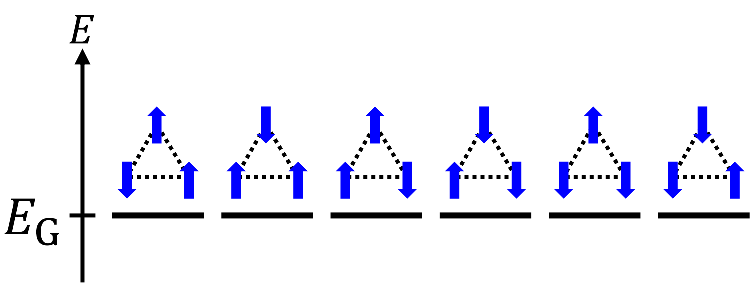


長距離秩序状態

幾何学的 vs 非相反
フラストレーション

幾何学的
フラストレーション

基底状態の偶然縮退



非相反
フラストレーション

?

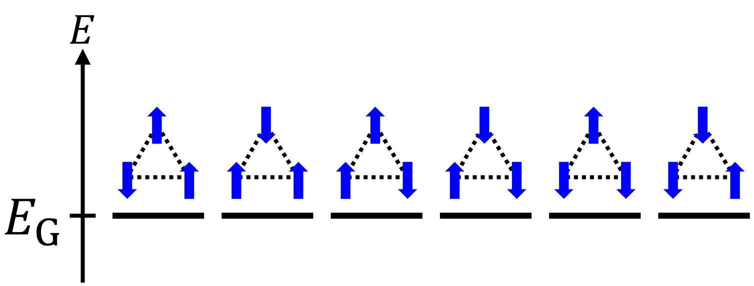
そもそもエネルギーを
定義できない…

静止した状態に収束
するとは限らない…

幾何学的 vs 非相反 フラストレーション

幾何学的フラストレーション

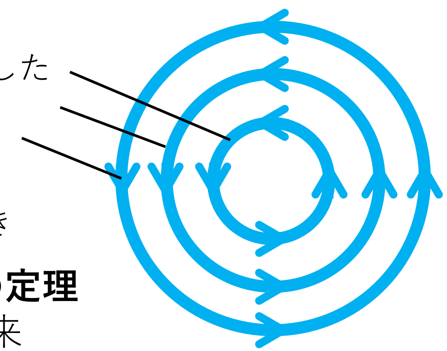
基底状態の偶然縮退



非相反フラストレーション

（力学系の意味での）軌道の「偶然縮退」

「偶然縮退」した軌道



$J_{ij} = -J_{ji}$のとき

リウビル型の定理
成立に由来

- 無秩序による秩序や、スピンガラス(に類似の状態)の<u>動的対応物</u>が出現

RH, arXiv:2208.08577; in preparation.

XYスピン系の散逸ダイナミクス

$$\dot{\theta}_i = \sum_j J_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$$

ただし、一般には非相反 $J_{ij} \neq J_{ji}$

- 相反的な場合($J_{ij} = J_{ji}$)：エネルギー最小値問題に帰着

$$\dot{\theta}_i = -\frac{\partial V(\theta)}{\partial \theta_i} \quad \text{ただし} \quad V(\theta) = -\sum_{i,j} J_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i)$$

幾何学的フラストレーションのある場合は基底状態が偶然縮退

軌道の「偶然縮退」

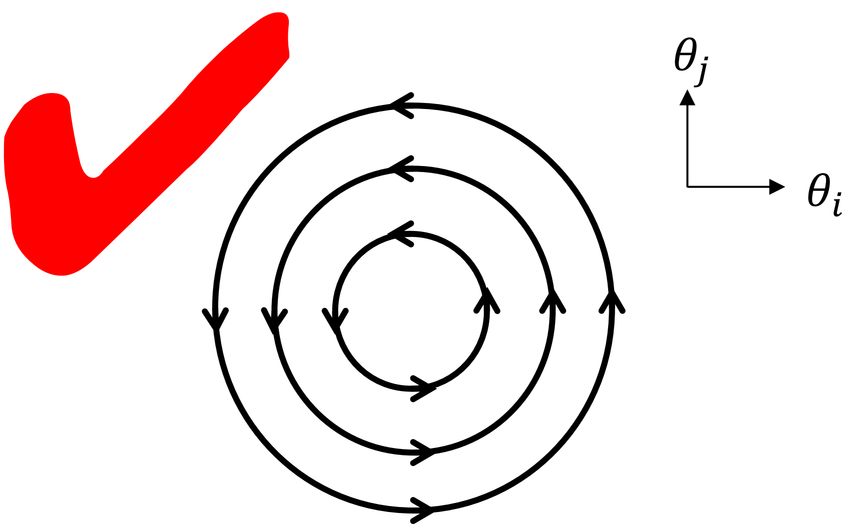
➢ 完全反相反的な場合($J_{ij} = -J_{ji}$)

リウビル型の定理

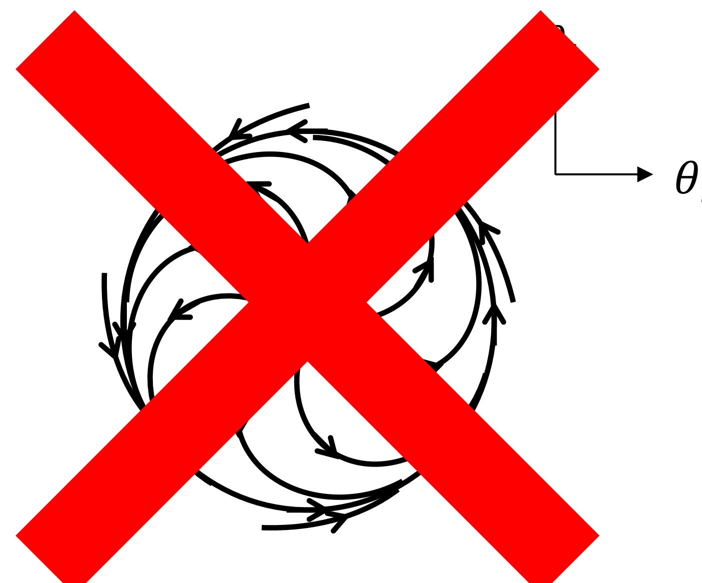
$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i = 0$$

RH, arXiv:2208.08577

➢ 位相体積の保存 = **散逸のない**運動



マージナル



(例) リミットサイクル

軌道の「偶然縮退」

（２つのXYスピン系の場合）

$$J_{\mathrm{AB}} = -J_{\mathrm{BA}}$$

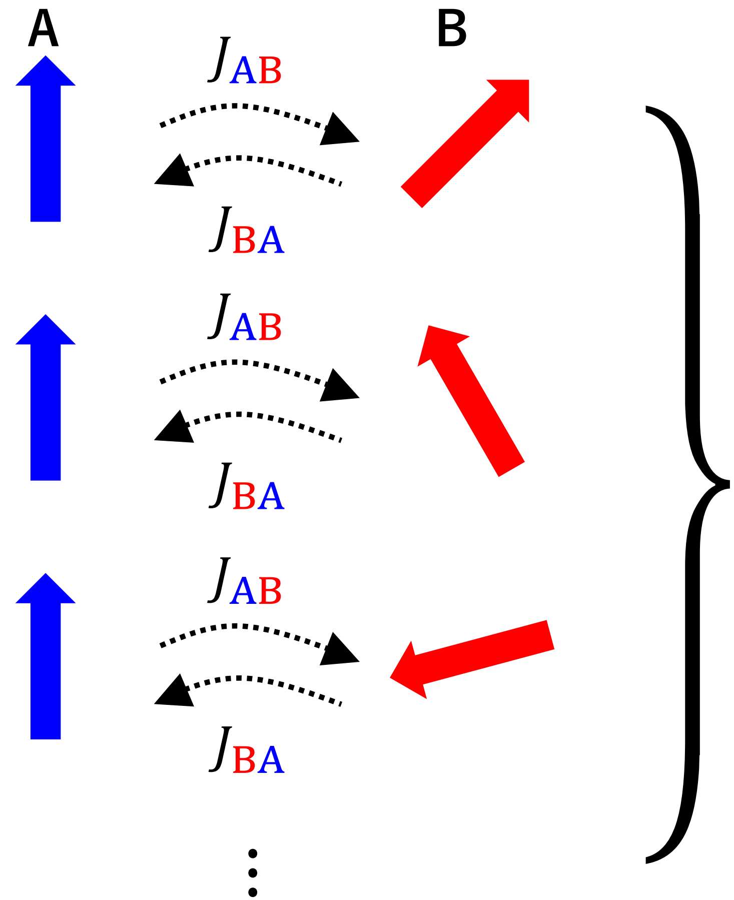
$$\dot{\theta}_{\mathrm{A}} = J_{\mathrm{AB}} \sin(\theta_{\mathrm{B}} - \theta_{\mathrm{A}})$$
$$\dot{\theta}_{\mathrm{B}} = J_{\mathrm{BA}} \sin(\theta_{\mathrm{A}} - \theta_{\mathrm{B}})$$

初期状態１:

初期状態２:

初期状態３:

⋮



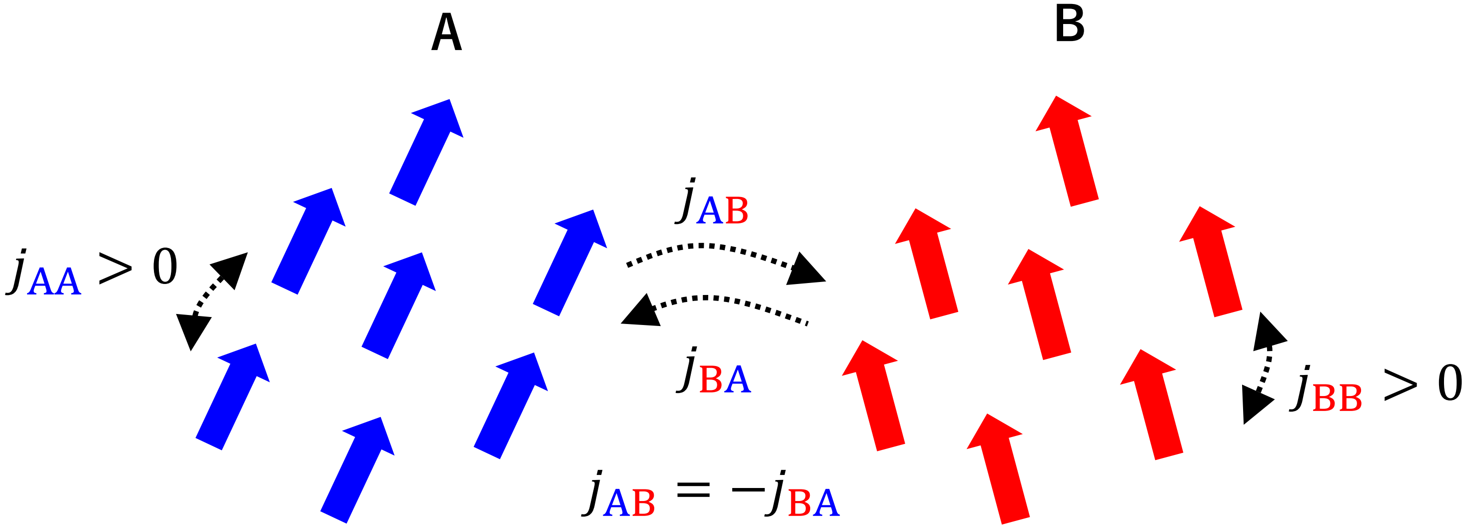
(非相反フラストレーションにより)

偶然縮退した軌道

RH, arXiv:2208.08577

非相反二成分系

$$\dot{\theta}_i^a = \sum_b \sum_{i=1}^{N_b} \frac{j_{ab}}{N_b} \sin\left(\theta_j^b - \theta_i^a\right)$$

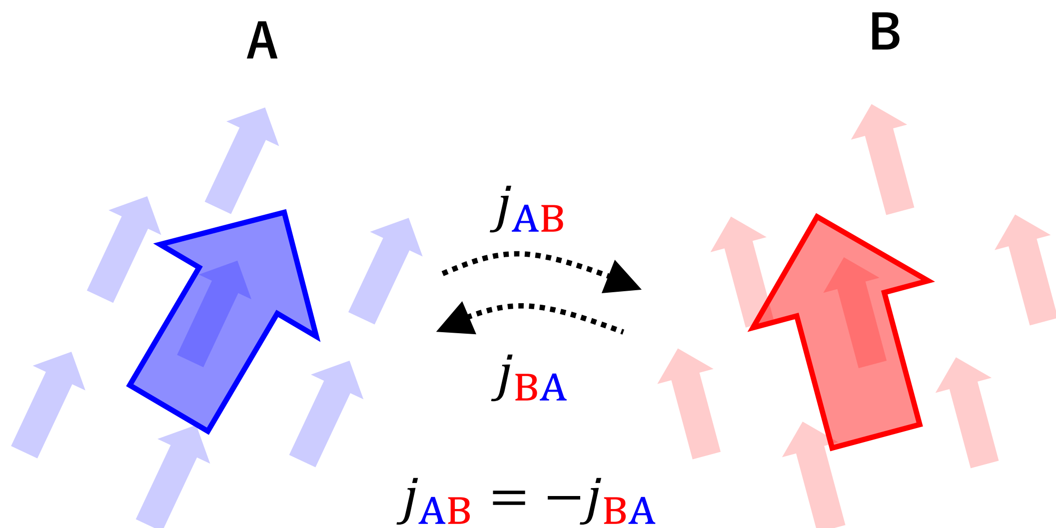


RH, arXiv:2208.08577

非相反二成分系

$$\dot{\theta}_i^a = \sum_b \sum_{i=1}^{N_b} \frac{j_{ab}}{N_b} \sin\left(\theta_j^b - \theta_i^a\right)$$

「偶然縮退」が
$\Delta\phi = \phi_{\mathrm{A}} - \phi_{\mathrm{B}}$
でパラメタライズ
される



マクロなスピン(ノイズなし)

$$\dot{\phi}_a = \sum_b j_{ab} \sin(\phi_b - \phi_a)$$

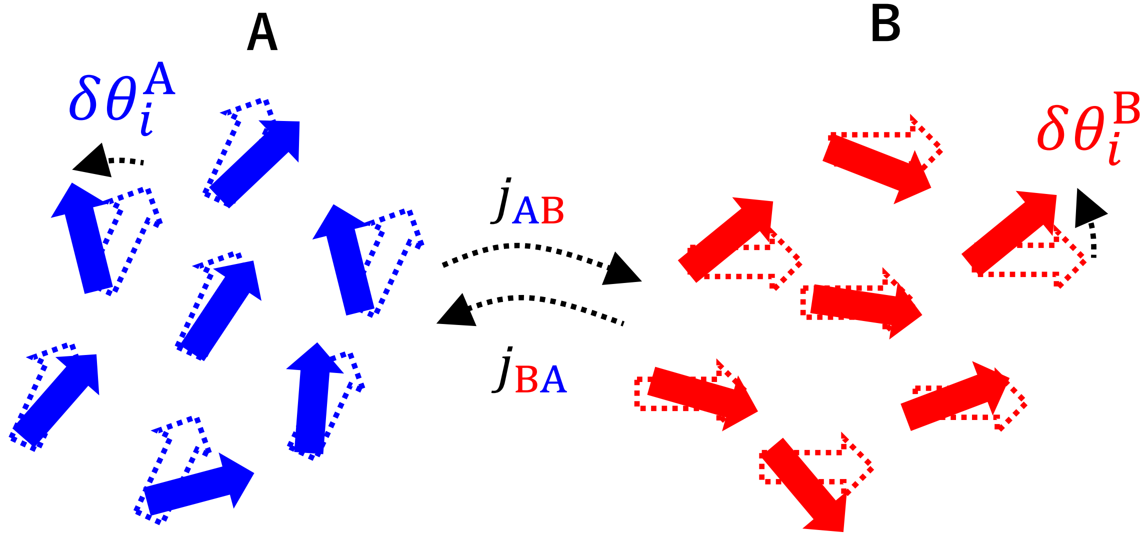
RH, arXiv:2208.08577

非相反二成分系

$$\dot{\theta}_i^a = \sum_b \sum_{i=1}^{N_b} \frac{j_{ab}}{N_b} \sin(\theta_j^b - \theta_i^a) + \eta_i^a$$

ノイズ

揺らぎ$\delta\theta_i^a$の確率分布が$\Delta\phi$に依存する



「偶然縮退」が
$\Delta\phi = \phi_{\mathrm{A}} - \phi_{\mathrm{B}}$
でパラメタライズされる

マクロなスピン(ノイズなし)

$$\dot{\phi}_a = \sum_b j_{ab} \sin(\phi_b - \phi_a)$$

マクロなスピン(ノイズあり)

$$\dot{\phi}_a \approx \sum_b j_{ab}^{\star}(\Delta\phi) \sin(\phi_b - \phi_a)$$

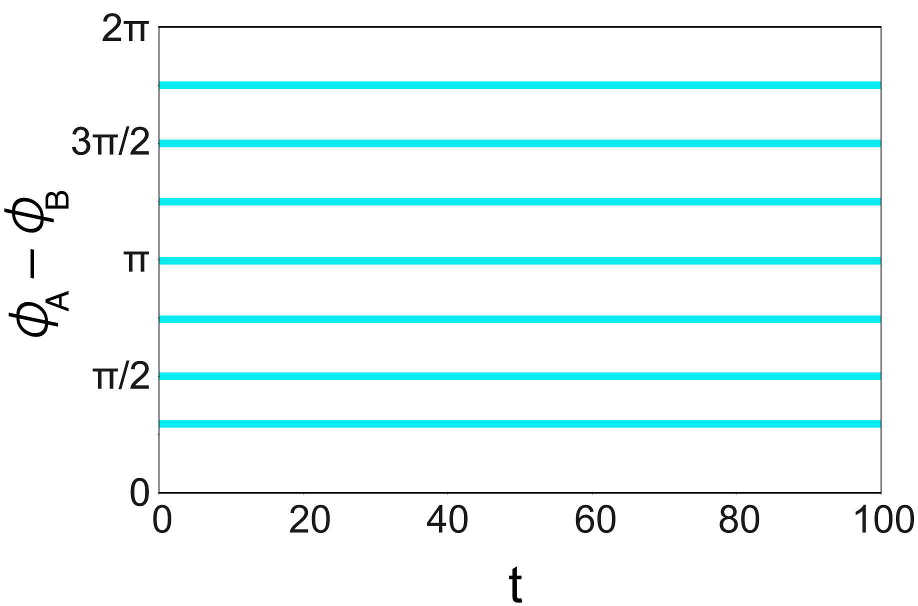
$\Delta\phi$に依存する繰り込まれた結合

RH, arXiv:2208.08577

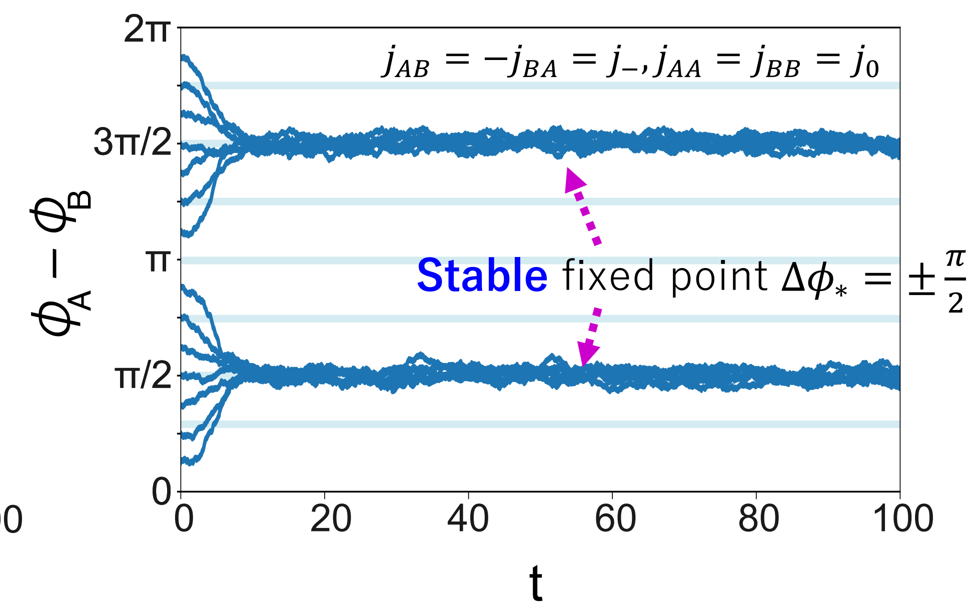
無秩序による秩序

$$j_{\mathrm{AB}} = -j_{\mathrm{BA}}$$

ノイズなし



ノイズあり



無秩序による秩序！

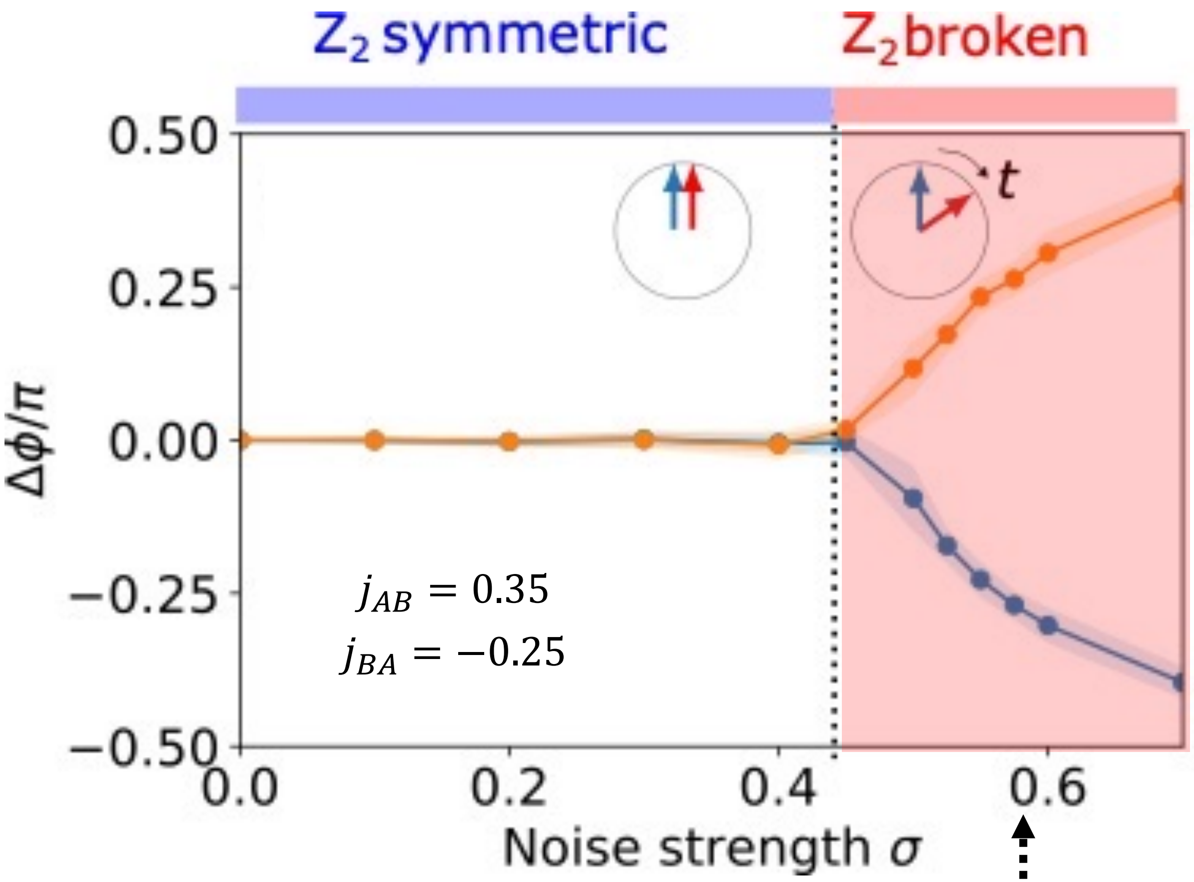
解析解とコンシステント

$$\Delta\dot{\phi} \approx \frac{j_0 j_-^2 \sigma^2}{2} \frac{\cos\Delta\phi}{(j_0^2 - j_-^2 \cos^2\Delta\phi)^2} \sin\Delta\phi$$

RH, arXiv:2208.08577

無秩序による秩序

$j_{AB} > -j_{BA}$



ノイズに誘起された対称性の破れ!

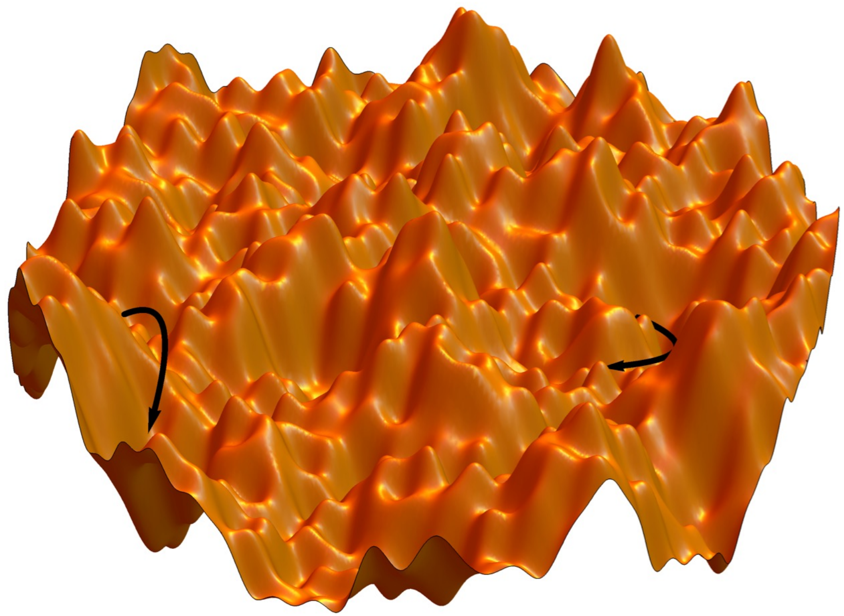
RH, arXiv:2208.08577

スピンガラス

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij} S_i S_j$$

$$p(J_{ij}) = [(2\pi)^{1/2}J]^{-1}\exp[-(J_{ij}-J_0)^2/2J^2],$$

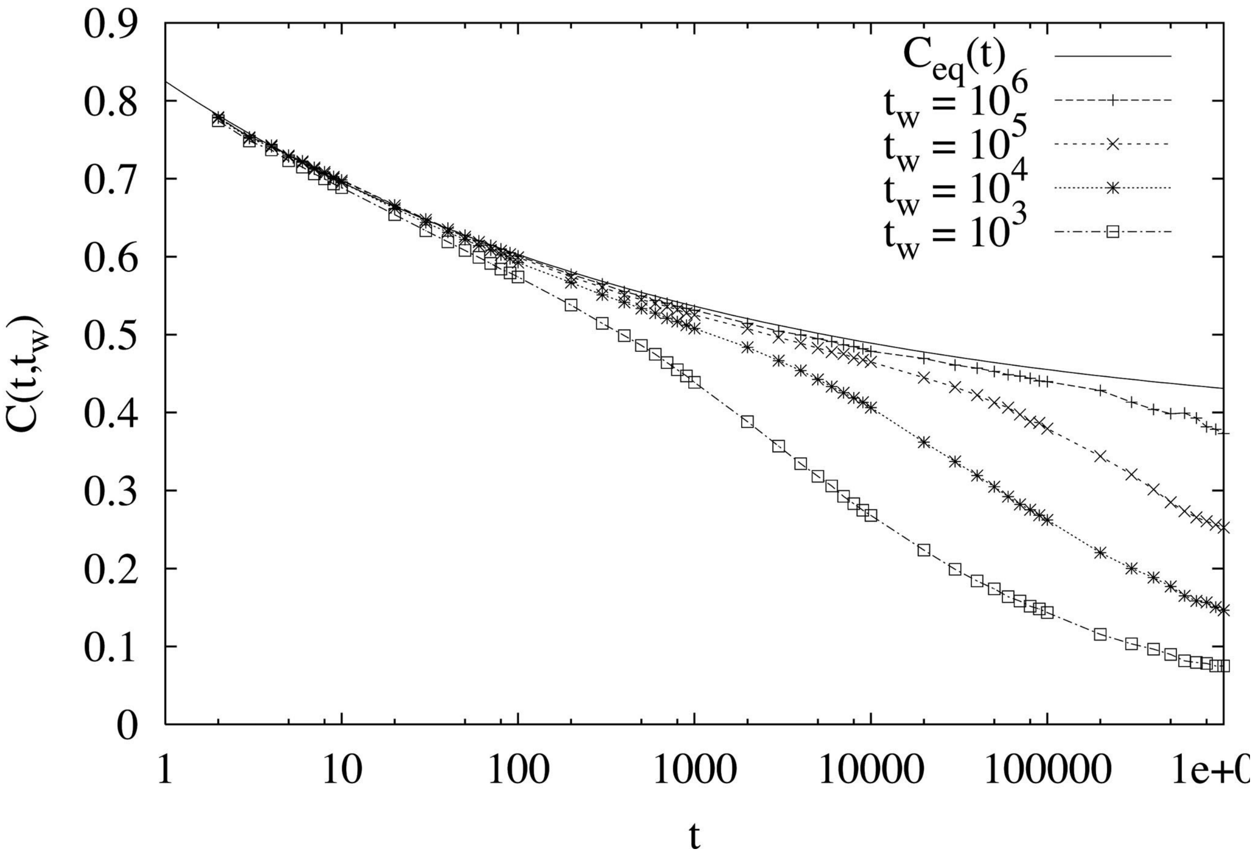
Sherrington and Kirkpatrick PRL1975



空間的な長距離秩序を伴わない、極めて遅い緩和

エイジング現象

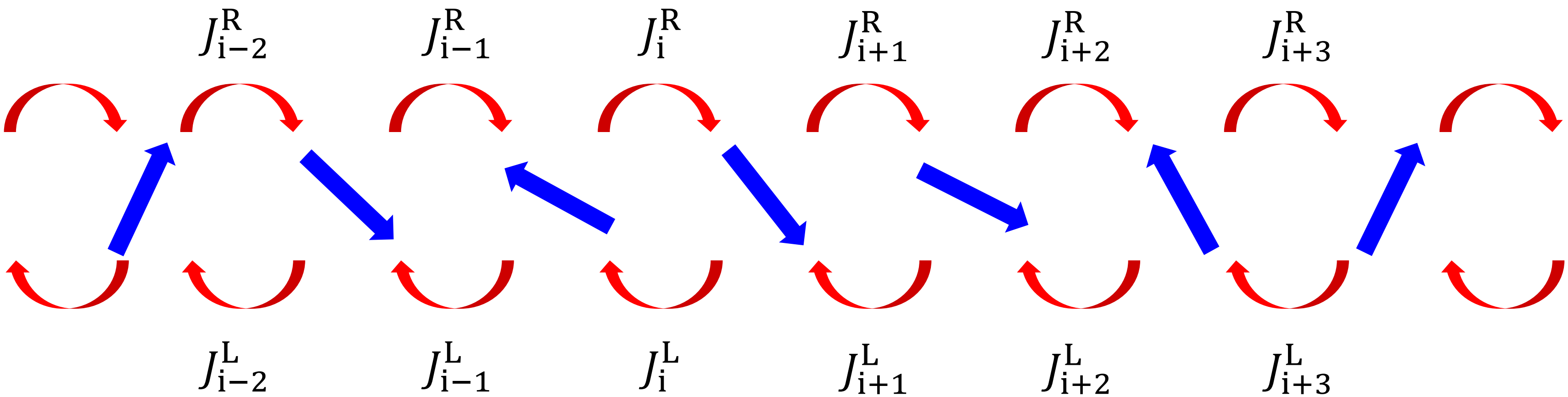
$$C(t, t_{\mathrm{w}}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\langle \sigma_i(t_{\mathrm{w}})\sigma_i(t_{\mathrm{w}}+t)\rangle = q(t_{\mathrm{w}}, t_{\mathrm{w}}+t)$$



Parisi PNAS 2006 (Review)

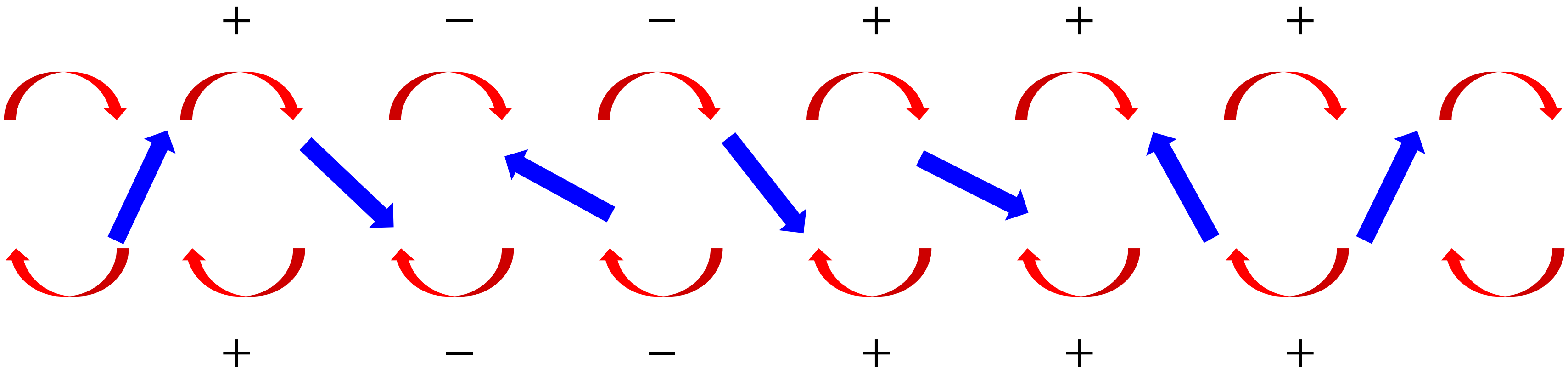
Q: 非相反フラストレーションがガラスダイナミクスをもたらすことはあるか？

一次元非相反ランダムスピン鎖



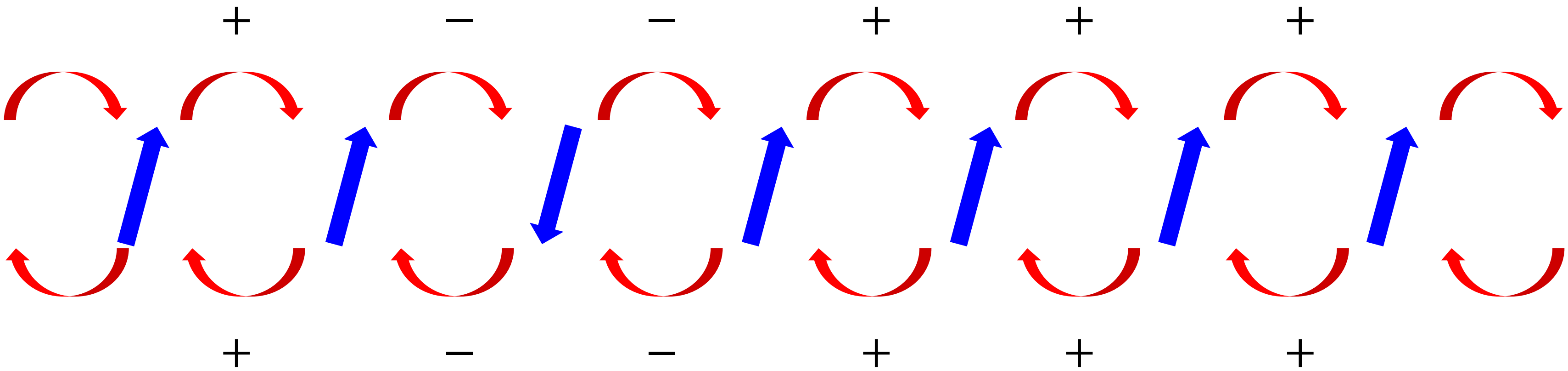
$$p(J_i^{\mathrm{L/R}}) \propto \begin{cases} e^{-(J_i^{\mathrm{L/R}})^2/(2\sigma_J^2)} & |J_i^{\mathrm{L/R}}| \geq J_c \\ 0 & |J_i^{\mathrm{L/R}}| < J_c \end{cases}$$

相反的な場合$J_{ij} = J_{ji}$



$$p(J_i^{\mathrm{L/R}}) \propto \begin{cases} e^{-(J_i^{\mathrm{L/R}})^2/(2\sigma_J^2)} & |J_i^{\mathrm{L/R}}| \geq J_c \\ 0 & |J_i^{\mathrm{L/R}}| < J_c \end{cases}$$

相反的な場合$J_{ij}=J_{ji}$



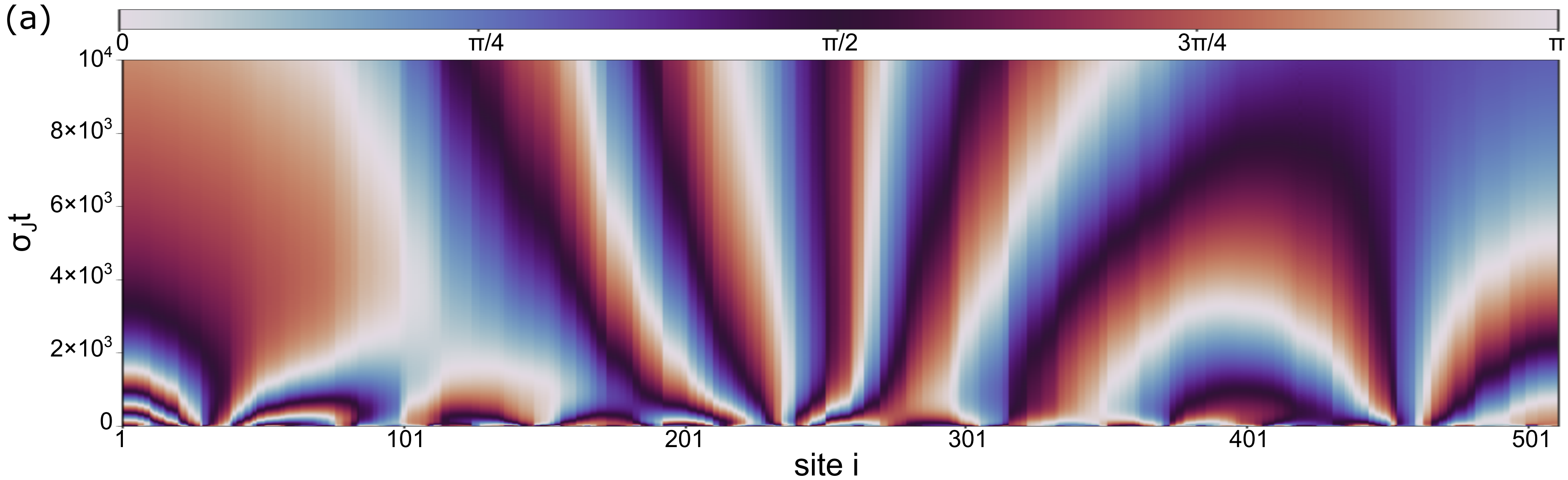
ネマティック秩序

$$p(J_i^{\mathrm{L/R}}) \propto \begin{cases} e^{-(J_i^{\mathrm{L/R}})^2/(2\sigma_J^2)} & |J_i^{\mathrm{L/R}}| \geq J_c \\ 0 & |J_i^{\mathrm{L/R}}| < J_c \end{cases}$$

相反的な場合= 幾何学的フラストレーションなし

相反的($J_{ij} = J_{ji}$)ランダムスピン鎖

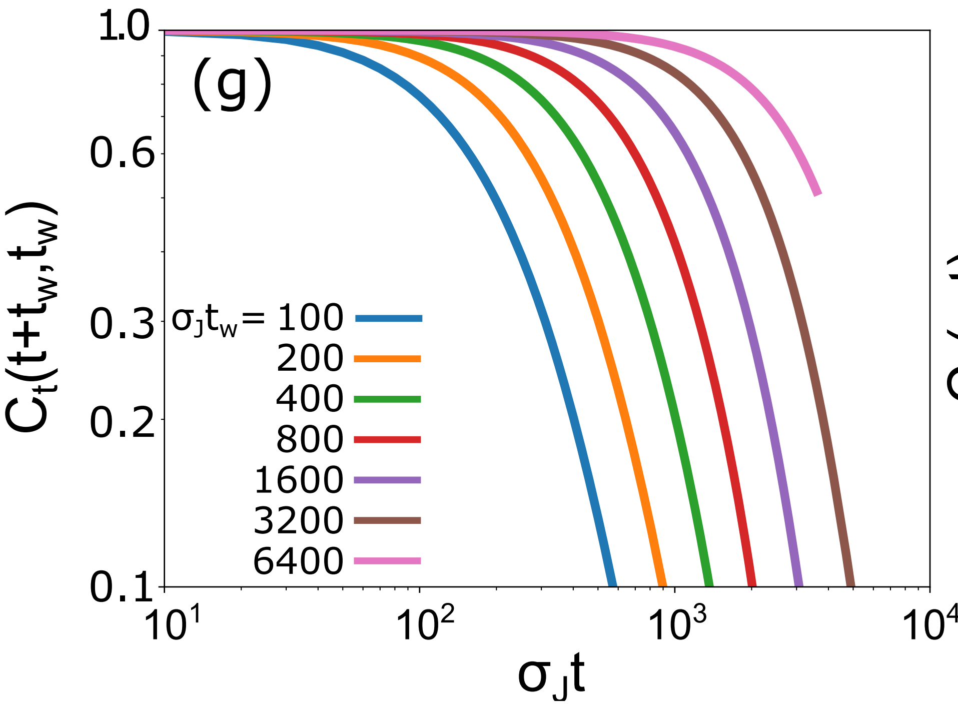
$\varphi_i = \theta_i \ (\mathrm{mod}\ \pi)$



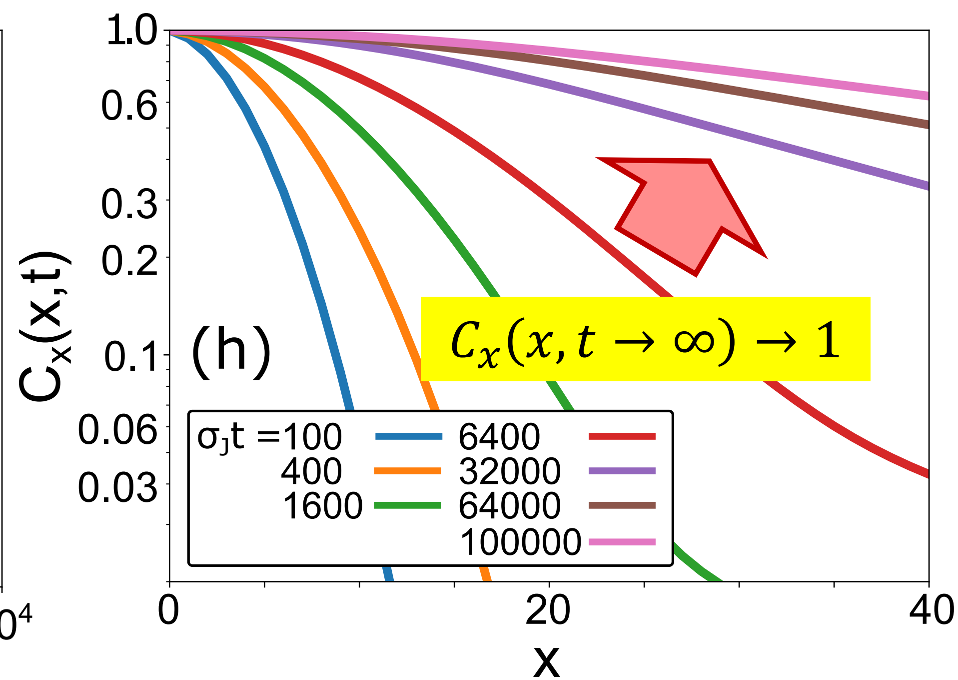
ドメイン壁の消滅によるネマティック秩序の発達

相反的($J_{ij} = J_{ji}$)ランダムスピン鎖

時間相関関数



空間相関関数



$$C_t(t_w + t, t_w) = \left|(1/N)\sum_{i=1}^{N} \overline{\delta\psi_{2,i}(t_w+t)\delta\psi^*_{2,i}(t_w)}\right|.$$

where $e^{2i\theta_i(t)} - \psi_2(t)$ and $\psi_2 = (1/N)\sum_{i=1}^{N} e^{2i\theta_i}$

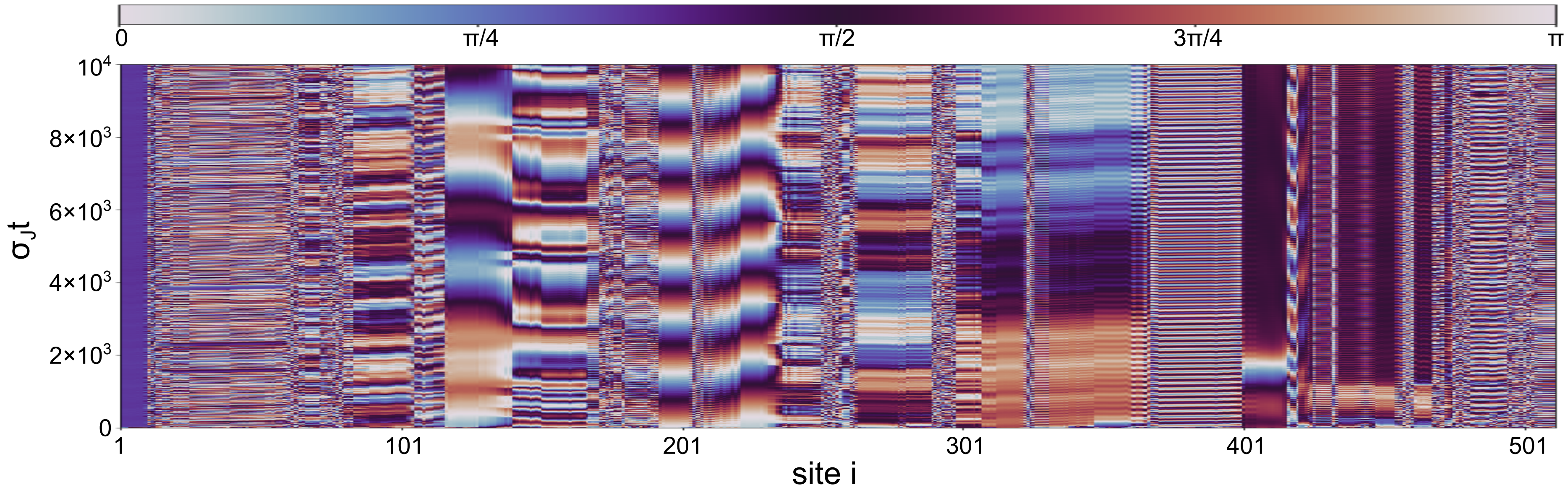
$$C_x(x,t) = \left|(1/(N-x))\sum_{j=1}^{N-x} \overline{\psi_{2,j+x}(t)\psi^*_{2,j}(t)}\right|$$

長距離ネマティック秩序がゆっくりと発展する

非相反ランダムスピン鎖

(J_{ij} and J_{ji} independent)

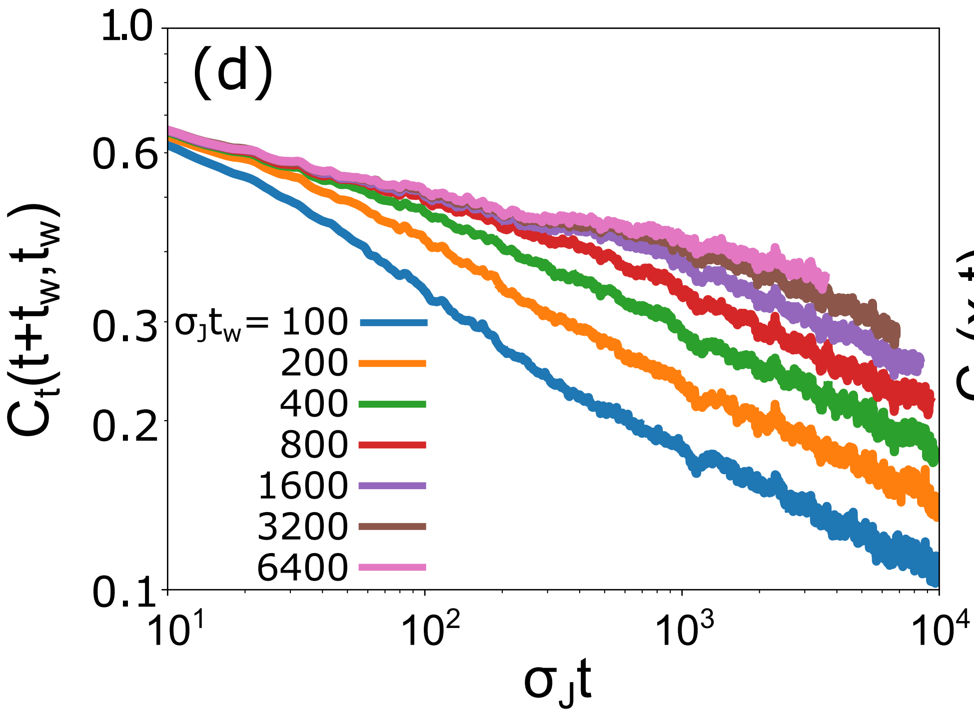
$\varphi_i = \theta_i \pmod{\pi}$



Periodic and chaotic domain dynamics

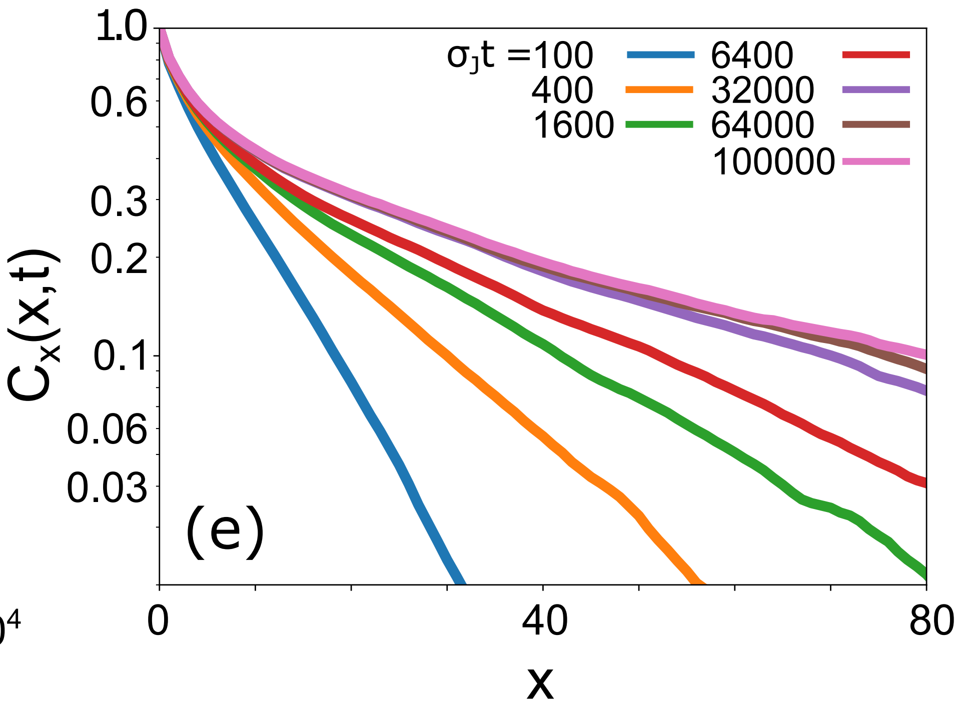
非相反ランダムスピン鎖

時間相関関数



エイジング現象を伴ったべき減衰

空間相関関数



短距離相関

スピンガラスに似た現象.

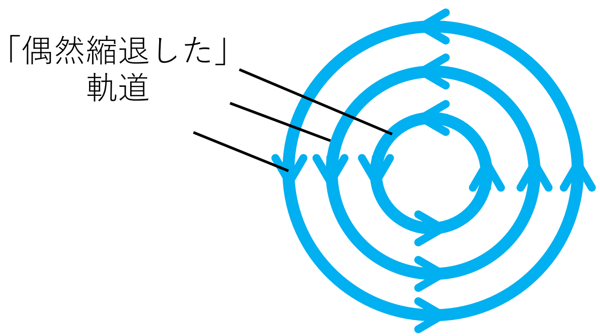
まとめ

- 幅広い科学分野において非相反相転移が現れる

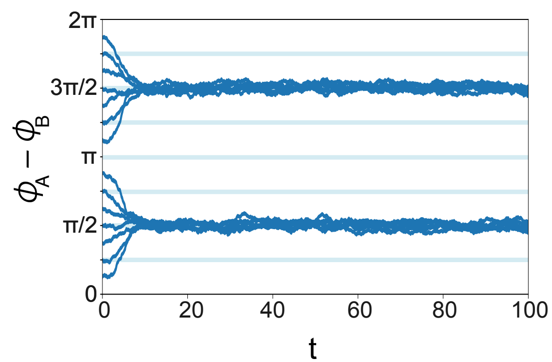
パターン形成、群れ、生態系、界面成長、生命科学、工学、量子開放系、量子光学、…

- フラストレーション物理と非相反系との直接的アナロジー

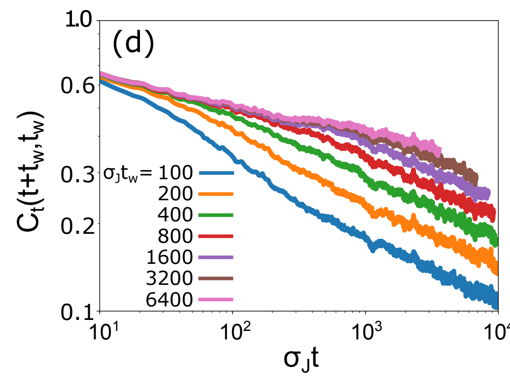
軌道の「偶然縮退」



無秩序による秩序



スピンガラスに類似の状態



M. Fruchart*, RH*, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, Nature 592, 363 (2021).

RH and P.B. Littlewood, PRResearch 2, 033018 (2020).

RH, A. Edelman, Y. Ohashi, and P. B. Littlewood, PRL 122, 185301(2019)

C. Weis, M. Fruchart, RH, K. Kawagoe, P. B. Littlewood, and V. Vitelli, arXiv:2207.11667

RH, arXiv: 2208.08577; in preparation.

解説記事：花井　亮、日本物理学会誌10月号

リウビル型の定理の証明

XYスピン系を考える $\dot{\theta}_i = \sum_j J_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$

$J_{ij} = -J_{ji}$のとき、リウビル型の定理 $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i = 0$ が成り立つ。

(証明)

連続方程式： $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\sum_i \frac{\partial(\rho \dot{\theta}_i)}{\partial \theta_i} = -\sum_i \left[\frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i + \rho \frac{\partial \dot{\theta}_i}{\partial \theta_i} \right]$

$$\sum_i \frac{\partial \dot{\theta}_i}{\partial \theta_i} = -\sum_{ij} [J_{ij} \cos(\theta_j - \theta_i)] = 0$$

$J_{ij} = -J_{ji}$

よって、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial \theta_i} \dot{\theta}_i = 0.$ が成立する。 ■

この結果、Lyapunov exponentの和はゼロ. $\sum_i \lambda_i = 0$

例えばカオスが起こっていない場合、全てのiについて $\lambda_i = 0$

リウビル型の定理の証明

より一般の運動方程式　$\dot{x}_i = \sum_j \phi_{ij}(x_i, x_j)$　の場合も

$$\frac{\partial \phi_{ij}(x_i, x_j)}{\partial x_i} = -\frac{\partial \phi_{ji}(x_j, x_i)}{\partial x_j}$$　のとき、同様の関係式

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \dot{x}_i = 0$$　が成立する。