

現実の磁性体のキュリー転移は ハイゼンベルグ模型の普遍クラ スなのだろうか？

中山 優 (YITP)

In collaboration with

Aleix Gimenez-Grau (IHES) and Slava Rychkov (IHES)

e-Print: [2309.02514](#) (published in PRB)

田崎さんからの宿題

- 田崎「熱力学」から25年(！)
- 「2次元の強磁性体については、臨界現象を支配する普遍的な構造が「共形場の理論」で表現できることがほぼ明らかになった。(強磁性の臨界点に場の量子論が宿る！)3次元の強磁性体の問題には1970年代以降「くりこみ群」という考えからのアプローチが試みられ、ある程度の結果は得られたが、真の解決は未だ夢想さえできない。」

- (キュリー転移の臨界指数は)一軸異方性の強い場合の

$$\alpha \simeq 0.11, \beta \simeq 0.325, \gamma \simeq 1.24$$

か、等方性の強い場合の

$$\alpha \simeq -0.14, \beta \simeq 0.38, \gamma \simeq 1.375$$

のどちらか一方を取るようである。

田崎さんからの宿題

- 田崎「熱力学」から**25年**(！)
- 3次元の強磁性体にも共形場理論が宿っている
→共形ブートストラップの解析
- (臨界指数は)一軸異方性の強い場合の (Chang et al 2024)
 ~~$\alpha \simeq 0.11, \beta \simeq 0.325, \gamma \simeq 1.24$~~

$$\alpha = 0.11008708(35), \beta = 0.32641871(75), \gamma = 1.23707551(26)$$

か、**等方性の強い場合**の (Chester et al in 2020)

~~$$\alpha \simeq 0.14, \beta \simeq 0.38, \gamma \simeq 1.375$$~~

$$\alpha = -0.135(2), \beta = 0.3695(10), \gamma = 1.396(1)$$

のどちらか一方の普遍的な値を取ることが(ハミルトニアンを仮定することなく)共形不変性だけからわかる。

等方性の強い場合とは？どれくらい？

- **くりこみ群の一つの応用**として「立方格子」の対称性でハイゼンベルグ模型のクラスの固定点の実現されるのか？という問題が長らく謎として残っていた。(c.f. Cardy のくりこみ群の教科書)
- 6ループの計算では $y_4 = 0.003(4)$ と**玉虫色**の予言。
- この値が**正**なら、立方格子上では、ハイゼンベルグ模型は分子場の効果で**不安定**になる！
- 2020年の**共形ブートストラップ**の計算では、(共形対称性がある限り) $y_4 > 0.00944$ と厳密にわかった。
(共形ブートストラップについては、またいつか別の機会にでも...)
- よって、立方格子上の強磁性体はハイゼンベルグ模型の臨界点で記述されない。
- ただし、この効果はとてとても小さい $\delta\nu = 0.0003(3)$
これより大きな問題がハイゼンベルグ模型には存在する

共形ブートストラップ今昔

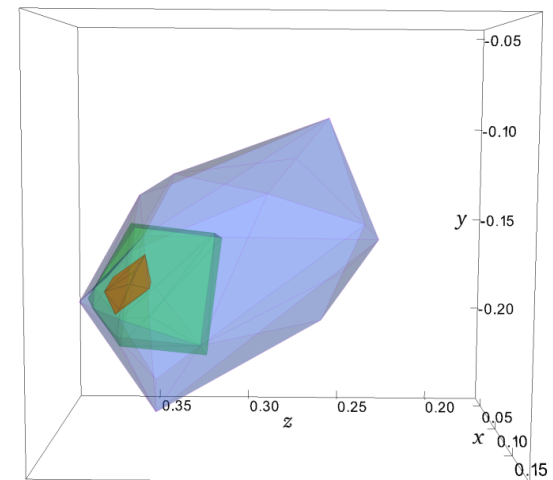
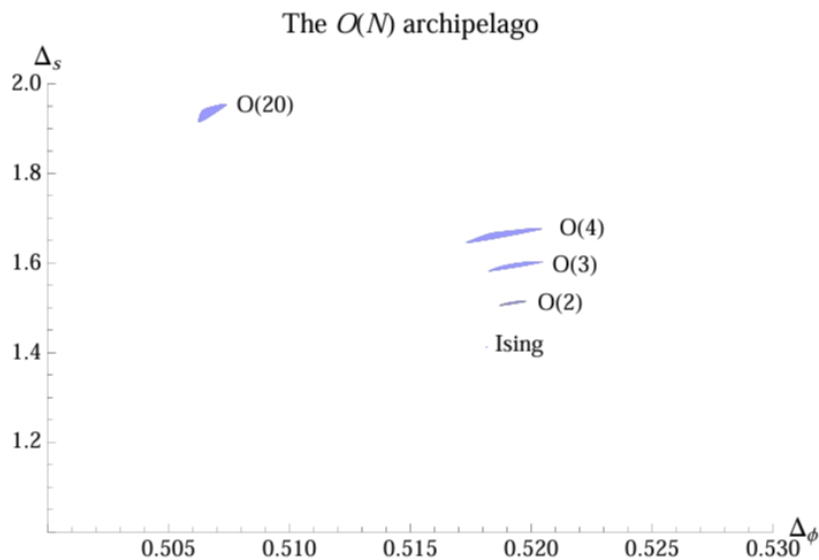
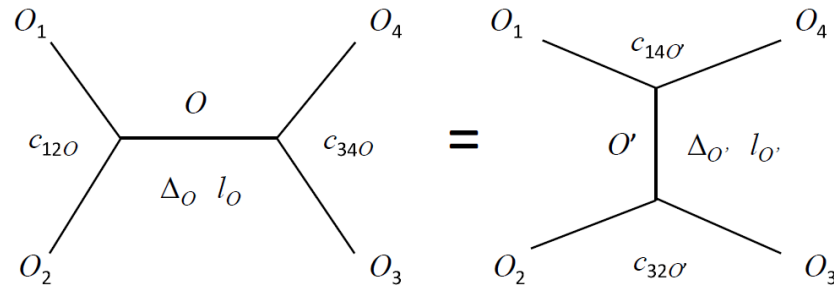


Figure 8: Three-dimensional islands of allowed points at different Δ_{t_4} at $\Lambda = 35$, demonstrating how the islands shrink as we approach the maximum Δ_{t_4} . The x, y , and z coordinates are related to the three scalar dimensions via (35). The values for Δ_{t_4} , from the largest region to smallest, are 2.989, 2.99025, and 2.9905, with smaller values including all allowed points at larger values.

臨界指数4つ以上はグラフにかけない...

ハイゼンベルグ模型の
どこがいけないのか？

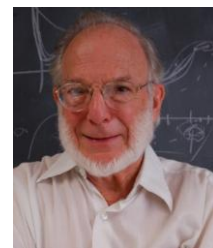
ハイゼンベルグ模型のランダウ理論

- オーダーパラメーター: 磁化ベクトル ϕ_i
- 有効(疑似)ハミルトニアン

$$H = \int d^3x \left(\partial_\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i + (T - T_c) \phi_i^2 + \lambda (\phi_i^2)^2 + B_i \phi_i \right)$$

- 温度を調節してキュリー転移を起こす
- 磁場 B がなければ、臨界温度で $O(3)$ 内部対称性をもった繰り込み群の固定点がある(はず)
- この繰り込み群の固定点は共形不変性を持つ
- 共形ブートストラップを使え！

Aharony-Fisher theory 1



- 1973年に **Aharony** と **Fisher** は
この考え方に致命的な欠陥があると主張

$$H = \int d^3x \left(\partial_\mu \phi_i \partial_\mu \phi_i + (T - T_c) \phi_i^2 + \lambda (\phi_i^2)^2 + B_i \phi_i \right)$$

- 実際の系では、磁場は外場ではなく、マクスウェル理論にしたがって伝播する。これによって、磁化ベクトルの間に**長距離相互作用**が働き

$$\int d^3q \phi_i(-q) \frac{q_i q_j}{q^2} \phi_j(q) = \int d^3x d^3y \phi(x) \frac{\delta_{ij} - 3\hat{n}_i \hat{n}_j}{(x-y)^3} \phi(y)$$

このベアな効果は小さいが、**繰り込み群的には relevant** であり、固定点の性格を大きく変更する

(実際、平均場でもそうだし、共形ブートストラップからもわかる)

- 新しい赤外固定点は長距離相互作用があって難しそうだが、Aharony と Fisher の革新的なアイデアは、

$$\partial_i \phi_i(x) = q_i \phi_i(q) = 0$$

の局所的な constraint が掛かった局所場理論と思えるというもの

Aharony-Fisher theory 2

- Aharony-Fisher 理論の肝は磁化ベクトルが「発散なし」

$$\partial_i \phi_i(x) = q_i \phi_i(q) = 0$$

- この拘束条件は固定点の性質を定量的(つまり、臨界指数など)に変えるだけではなくて、定性的に変えてしまう。

- まあ、定量的にちょっと違うだけなら共形ブートストラップをやり直せばいいでしょう...

- しかし、Rychkov と私が驚いたのは、この固定点は、
「スケール不変性を持つが共形不変性を持たない！」
- 共形場理論で記述できないので共形ブートストラップが使えない！
- 共形場理論が宿っていないなんて...

Aharony-Fisher theory 3

- Aharony-Fisher 理論の肝は磁化ベクトルが「発散なし」

$$\partial_i \phi_i(x) = q_i \phi_i(q) = 0$$

- 共形不変でないことを見るのはそんなに難しくなくて、この「発散なし」の方程式を共形変換すると**不変でない**ことがわかる...

$$\delta \phi_i = -(b^k x^2 - 2x^k (b^j x_j)) \partial_k \phi_i + 2(b^j x_j) \Delta_\phi \phi_i - b^j (2x_i \delta_j^k - 2x^k \delta_{ji}) \phi_k$$

- 不変であるには $\Delta_\phi = d - 1$

でないといけないが、(摂動論・実験などあらゆる証拠からは) そうはなっていない...

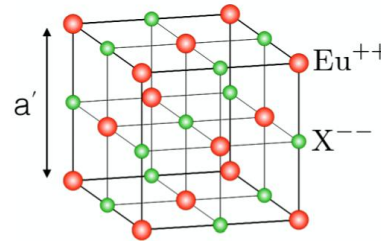
- 2点関数

$$\langle \phi_i(x) \phi_j(0) \rangle = \frac{A}{|x|^{2\Delta_\phi}} \left(\delta_{ij} - \alpha \frac{x_i x_j}{x^2} \right), \quad \alpha = \frac{2\Delta_\phi}{2\Delta_\phi - (d-1)},$$

ハイゼンベルグ理論は共形不変で $\alpha = 0$

実験的証拠？

- 昔(30年以上前 Költzer et al) EuOやEuS で中性子散乱が調べられて相関関数が(フーリエ成分で)縦方向が小さくなっていることが発見されている



- これは直接的に共形不変でないことの**実験的証拠**
- 豆知識: ユーロピウム化合物は強磁性かつ半導体でスピントロニクスで使えるかも？という話であった
- **臨界指数**も測られたが、ハイゼンベルグ強磁性体のそれとあまり違わなかったそうである
- 鉄やニッケルでは(まだ?)見つかっていない

ここまでを振り返ると

- Aharony-Fisher が主張するように、長距離相互作用で、ハイゼンベルグ固定点是不安定になって、**スケール不変だが共形不変でない固定点**が強磁性体の臨界現象を司っていると思われる
- 共形不変でないので、伝家の宝刀「共形ブートストラップ」は使えない...
- しかし、ここには、「まあ仕方ないね」で済まされない場の理論の一般論に関する疑問が隠れている。
- 共形ブートストラップ教団の人たちは、なぜ、臨界点は共形不変だと思っているのか？そして、なぜ、そのお告げが AF 理論では破られてしまったのか？

共形不変性？それってスケール
不変性と何が違うんですか？

共形変換

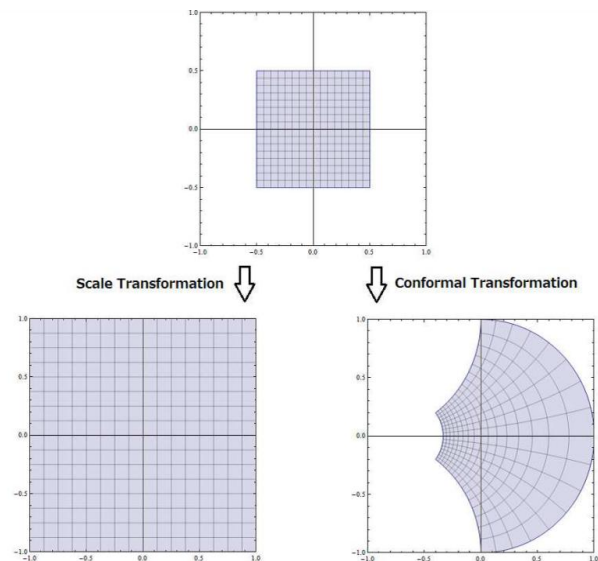
- 共形不変性は単にスケール不変だけではなく、(等角写像に対応するような)共形変換での不変性を要求する
- 幾何学的にはスケール変換不変は共形変換不変を意味しないが、臨界現象の多く(平衡系ならほぼ全て?)はなぜか共形変換不変である(と思われる)

$$\mathcal{P}_\mu = -\partial_\mu$$

$$\mathcal{J}_{\mu\nu} = x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu$$

$$\mathcal{D} = x^\mu \partial_\mu$$

$$\mathcal{K}_\mu = (2x_\mu x^\rho \partial_\rho - x^2 \partial_\mu)$$



共形変換 in 場の理論

- なぜ共形変換が現れるのかを理解するために臨界点で(局所)場の理論による記述ができるでしょう。

- **ストレス(応力)テンソル** $T_{ij} = T_{ji}$, $\partial^i T_{ij} = 0$
- スケール不変ならトレースの積分がゼロ

$$\int d^d x \sigma T^i_i = 0 \quad T^i_i = \partial^i V_i$$

- 共形不変なら、トレースそのものがゼロ

$$T^i_i = 0 \quad k^i = -T^i_j (2v_k x^k x^j - v^j x^2)$$

$$\partial^i k_i = 0$$

- もちろん、一般論だけでは共形不変のほうが強い条件を要求している
- しかし、くりこみ群を習った人は、ここでスケール不変であるけれど、共形不変でない条件に**重大な違和感**を感じる...

スケール不変だけれど共形不変でないことへの違和感

- もし、スケール不変であるけれど、共形不変でない固定点があるとする

$$T^i_i = \partial^i V_i$$

- が成り立つ。しかし、**ストレス(応力)テンソルの次元は厳密に d である**。故に、ベクトル演算子 V の次元は厳密に $d-1$ である。
- もし、ガウス固定点にいなければ、ほとんどすべての演算子は異常次元を持つというのは**くりこみ理論の常識**
- 教科書に書いてある**唯一の例外**が、ストレステンソルのように**保存するカレント**である。しかし、 V は保存しない！！
- そんな V があるとする、場の理論の「直感に」大幅に反する。そんな例は1つも見たことがない...(潜在バイアス?)。
- 実際、そんなことは、普通は起こっていない(イジング模型。ハイゼンベルグ模型。N=4 SYM。なんでも)。
- Aharony-Fisher 固定点が本当に、共形不変でない稀有な例ならば、一体全体なにが起こっているのか??

Aharony-Fisher theory での V

- ストレス(応力)テンソルを定義するためには拘束条件を取り入れた場の解析力学をする必要があり、**ラグランジュの未定定数場** U を使う。(物理的には U は磁場のポテンシャル)

$$H = \int d^3x \left(\partial_j \phi_i \partial_j \phi_i + \lambda (\phi_i^2)^2 + U \partial_i \phi_i \right)$$

- ストレス(応力)テンソルのトレースは

$$T_i^i = \partial^i V_i + \beta_\lambda (\phi_i^2)^2$$

$$V_i = \Delta_U U \phi_i$$

- 摂動計算のくりこみ群の計算(大変?)をしてみると、驚くべきことに、 U も ϕ_i もくりこまれるが、**複合演算子 V の異常次元はゼロ**であることがわかる!
- V は保存しないのに、なぜこんなことが起こるのか?

V がくりこまれない理由: シフト対称性

- ハミルトニアンは U の定数シフトで不変

$$H = \int d^3x \left(\partial_j \phi_i \partial_j \phi_i + \lambda (\phi_i^2)^2 + U \phi_i \phi_i \right)$$

$$U \rightarrow U + \text{const}$$

- ネーターの定理によって保存するカレントがあるが、それは磁化ベクトルそのもの

$$\partial^i \phi_i = 0$$

- これに伴う Ward-Takahashi 恒等式は

$$\langle \partial^i \phi_i(x) U \phi_j(y) \phi_k(z) \rangle = \delta^d(x - y) \langle \phi_j(y) \phi_k(z) \rangle$$

- この方程式の次元を左辺と右辺で比べると

- $$V_i = \Delta_U U \phi_i$$

$$1 + 2\Delta_\phi + \Delta_V = d + 2\Delta_\phi$$

これからわかったレッスン

- やはり、場の理論で保存しないカレントの異常次元がゼロであるためには、何らかの(隠れた)理由が必要
- ここで出てきた「シフト対称性」は自分自身のくりこみを防いでいるのではなくて、「シフトされる」演算子のくりこみを防ぐというとてもとても珍しい機構を提供している
- スケール不変だけれど共形不変でない(非ガウスのな)場の理論(平衡臨界現象)は稀有で、2024年までは、シフト対称性を(陽に陰に)持っているものしかなかった
- Random field Ising model に出てくる **Parisi-Sourlas supertranslation symmetry** を使っても、保存しないカレントのくりこみを防いで、スケール不変だけれど、共形不変でない理論を作ることができることがわかった(中山 PRL 2025)
- 基本的に、(僕のような)レアモンハンターを除けば、**(平衡)臨界現象は共形不変であると思って間違いない**
- でも Aharony-Fisher 理論のようにたまには自然界で見つかるかも

そして？

- 共形ブートストラップが使えないとすると、どうやって Aharony-Fisher 固定点の臨界指数を決定するか？
- ループ計算 (epsilon 展開) : 3ループまでしかやられてないので、まだ開拓の余地あり
- Functional Renormalization Group (という大胆な「近似？」計算) : ERG2020 に呼ばれたのでちょっとやってみた
- Tensor RG とか？
- モンテカルロ計算 : これもやるべき。YITPの同僚とやった (大きな?) 第一歩の計算が [2503.15874](#) (Itou-Matsumoto-Nakayama-Onagi)
 - 臨界指数の値は違いそう？
- 本当にブートストラップはできないのか？

まとめ

現実の磁性体のキュリー転移はハイゼンベルグ模型の
普遍クラスなのであろうか？

- おそらく違う
- そもそも立方格子^上ではハイゼンベルグ模型は分子場の効果で不安定
- 磁場が交換されることによる長距離相互作用でもより強く不安定
- 新しい固定点^は、スケール不変だけれども共形不変でない
- 実験あり
- いつか鉄やニッケルでも見つかるはず(どれくらい頑張ればよいかのくりこみ群による見積もり・予言あり)